Energie

De ladingsverdeling beschreven in opgave *A.2.2.c* is gegeven door $\rho(\vec{r}) = \rho_0(1 - \frac{r}{R})$. Het bijbehorende electrisch veld is gegeven in opgave *A.4.2.e*: $\vec{E}_{inner}(\vec{r}) = (\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 R}r^2)\hat{r}$ voor binnen de bol, $\vec{E}_{outer}(\vec{r}) = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2}\hat{r}$ buiten de bol. De energie opgeslagen in deze ladingsverdeling kan uitgerekend worden op twee manieren, beide worden hier uitgewerkt.

a) De opgeslagen energie is uit te rekenen met behulp van het electrisch veld. De formule die hier geldt is:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_{overal} E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2}4\pi\left(\int_0^R E_{inner}^2 r^2 dr + \int_R^\infty E_{outer}^2 r^2 dr\right) \\ &= U_{inner} + U_{outer} \end{aligned}$$

Als we deze twee integralen nu even apart uitrekenen:

$$\begin{aligned} U_{inner} &= \frac{\epsilon_0}{2}4\pi\int_0^R\left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 R}r^2\right)^2 r^2 dr \\ &= 2\epsilon_0\pi\int_0^R\left(\frac{\rho_0^2 r^4}{9\epsilon_0^2} - \frac{2\rho_0^2 r^5}{12\epsilon_0^2 R} + \frac{\rho_0^2 r^6}{16\epsilon_0^2 R^2}\right)dr \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2}{\epsilon_0}\left[\frac{r^5}{45} - \frac{r^6}{36R} + \frac{r^7}{112R^2}\right]_0^R \\ &= \frac{2\pi\rho_0^2 R^5}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{45} - \frac{1}{36} + \frac{1}{112}\right] = \frac{17\pi R^5\rho_0^2}{2520\epsilon_0} \\ U_{outer} &= \frac{\epsilon_0}{2}4\pi\int_R^\infty\left(\frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 dr \\ &= 2\epsilon_0\pi\int_R^\infty\frac{\rho_0^2 R^6}{144\epsilon_0^2 r^2}dr \\ &= \frac{\rho_0^2}{72\epsilon_0}\left[-\frac{R^6}{r}\right]_R^\infty = \frac{\rho_0^2 R^5}{72\epsilon_0} \end{aligned}$$

Dit geeft een totale energie van

$$U = \frac{13\pi R^5\rho_0^2}{630\epsilon_0}$$

b) Een andere manier om de energie van de ladingsverdeling uit te rekenen is met behulp van de potentiaal. De volgende formule geldt namelijk ook:

$$U = \frac{1}{2}\int_{bol} V(\vec{r})\rho(\vec{r})dv$$

In tegenstelling tot de integraal over (het kwadraat van) het electrisch veld gaat deze niet over de volledige ruimte ($0 < r < \infty$) maar alleen over het volume van de ladingsverdeling ($0 < r < R$). We moeten echter eerst de electrische potentiaal van deze ladingsconfiguratie bepalen. De potentiaal berekent men met

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(\vec{r'}) \cdot \vec{dl} = -\int_{\infty}^{r} E_r(\vec{r'}) dr'$$

Waarbij de laatste term geldt als het electrisch veld radieel gericht is. Let op! Hier komt geen factor $4\pi r^2$ op de proppen, het betreft hier namelijk geen *volume*integraal maar een ordinaire lijnintegraal.

Ook voor het uitrekenen van deze potentiaal moet je de integraal in twee stukken verdelen:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\int_{\infty}^{R} E_{outer}(\vec{r'}) dr' - \int_{R}^{r} E_{inner}(\vec{r'}) dr' \\ &= V_{outer}(R) - \int_{R}^{r} E_{inner}(\vec{r'}) dr' \end{aligned}$$

En laten we met $V_{outer}(\vec{r})$ beginnen. Bij het berekenen van potentialen is het vaak het makkelijks om van 'buiten af naar binnen' te werken.

$$\begin{aligned} V_{outer}(\vec{r}) &= -\int_{\infty}^{r} \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r'^2} dr' \\ &= -\frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0} - \left[\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r} = \frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 r} \\ V_{outer}(R) &= \frac{\rho_0 R^2}{12\epsilon_0} \end{aligned}$$

De potentiaal binnen de bol bereken je als volgt:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{\rho_0 R^2}{12\epsilon_0} - \int_{R}^{r} \left(\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 R} r^2\right) dr \\ &= \frac{\rho_0 R^2}{12\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_{R}^{r} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right) dr \\ &= \frac{\rho_0 R^2}{12\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left[\frac{r^2}{6} - \frac{r^3}{12R}\right]_{R}^{r} \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R^2}{12} - \frac{r^2}{6} + \frac{R^2}{6} + \frac{r^3}{12R} - \frac{R^2}{12}\right) \\ &= \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \left(R^2 - r^2 + \frac{r^3}{2R}\right) \end{aligned}$$

Mooi! Nu de eigenlijke (volume)integraal om de energie van de ladingsverdeling uit te rekenen (en nu dus wel een extra factor $4\pi r^2$):

$$U = \frac{1}{2} \int_{bol} V(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dv$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}4\pi \int_0^R \frac{\rho_0}{6\epsilon_0}\left(R^2 - r^2 + \frac{r^3}{2R}\right)\rho_0\left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr \\
&= \frac{\pi\rho_0^2}{3\epsilon_0}\int_0^R \left(R^2 - r^2 + \frac{r^3}{2R}\right)\left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) dr \\
&= \frac{\pi\rho_0^2}{3\epsilon_0}\left[-\frac{r^5}{5} - \frac{r^7}{14R^2} + \frac{3r^6}{12R} - \frac{r^4 R}{4} + \frac{r^3R^2}{3}\right]_0^R \\
&= \frac{\pi\rho_0^2 R^5}{3\epsilon_0}\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{14} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{13\pi R^5\rho_0^2}{630\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

Uit beide methoden komt het zelfde antwoord.