Ring- en schijfladingen

Deze opdracht lijkt sterk op *Een lijntje lading (I)*!

a) De bijdrage aan het electrisch veld ten gevolge van een stukje ring is:

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^2}\hat{d}$$

Waar $d = r^2 + z^2$ de afstand is van punt P tot het stukje ring. We kunnen de grootte van dQ beschrijven door de oppervlakte lading σ te vermenigvuldigen met de oppervlakte van het ringsegmentje:

$$dQ = \sigma r d\phi dr$$

De uitdrukking van $d\vec{E}$ zal dus zijn:

$$d\vec{E} = \frac{\sigma r d\phi dr}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2 + z^2}\hat{d}$$

b) In het systeem van ladings-ringen zit ϕ-symmetrie: we kunnen het systeem roteren om de z-as zonder dat de ladingsconfiguratie veranderd. Het veld op de z-as kan geen ϕ-afhankelijkheid hebben omdat het electrisch veld dan deze symmetrie niet meer zal hebben. Je kan er ook met andere ogen tegenaan kijken: voor elke stukje lading op positie ϕ die een beetje electrisch veld veroorzaakt, is er altijd een gelijk stukje lading op $\phi + \pi$ die een veld genereert die de ϕ-component van het electrisch veld tegenwerkt (maar niet in de z-richting).

c) De integraal op het hele veld van de schijf is de som van alle bijdragen aan het veld ten gevolgde van de stukjes lading over de hele schijf $\int_{schijf} dQ$:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \int_{schijf} dEcos(\theta) = \int_{schijf} \frac{\sigma r d\phi dr}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\hat{z} \\ &= \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dr \frac{r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}\end{aligned}$$

d) Deze integraal invoeren in mathematica geeft als antwoord:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z) &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R dr \frac{r}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z} \\ &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R \hat{z} \\ &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{z}\end{aligned}$$

e) Als we naar kleine z kijken, $Z << R$, zien we dat de tweede term in de vergelijking verdwijnt:

$$\vec{E}(z) = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

Dit is het electrisch veld van een geladen plaat. Dat was ook te verwachten, omdat dicht bij de schijf bij benadering een plaat is. Voor hele grote z, $z >> R$ is het niet meteen duidelijk hoe de uitdrukking voor het electrisch veld eruit zal zien. Het is duidelijker als we de uitdrukking eerst omschrijven:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(z) &= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{z} \\
&= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R^2+z^2-z\sqrt{R^2+z^2}}{R^2+z^2}\hat{z} \\
&= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{R^2}{R^2+z^2}\frac{z^2-z\sqrt{R^2+z^2}}{R^2+z^2}\right)\hat{z}
\end{aligned}$$

Voor $z >> R$ gedraagt de eerste term zich als $\frac{R^2}{z^2}$ en de tweede term zal naar nul gaan omdat voor hele grote z, (want $z\sqrt{R^2+z^2} \to z$). Als we de totale lading van de schijf Q gelijk stellen aan $2\pi R^2\sigma$:

$$\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^2}$$

Voor hele grote afstanden van de schijf is het electrisch veld gelijk aan dat van een puntlading.