Bollen in soorten en maten

a) Ook de ladingsverdeling van buiten de bol zal meedragen aan het electrisch veld binnen de niet-geleidende bol (vanwege het superpositiebeginsel). Als deze onbekend is zal je niet in staat zijn het electrisch veld uit te rekenen.

b) Voor een puntlading Q (in de oorsprong, voor het gemak) is het veld hopelijk nu wel bekend:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

c) Het veld is in iedergeval radieel, naar buiten gericht. De oppervlakte-integraal $\int_O \vec{E} \cdot \vec{n} dO$ zal dan worden: $\vec{E} \cdot \vec{n} \int_O dO = E \cdot O$. Een oppervlakte-integraal over een bol *binnen* de geleidende bolschil omsluit lading 0, en dat geeft direct aan dat $E = 0$ (aangezien $O \neq 0$). Echter, *buiten* de bol omsluit de oppervlakte-integraal de ladingsschil met totale lading Q. Het veld is buiten de bol gelijk aan het veld van een puntlading Q in het middelpunt van de bolschil.

d) Voor een homogene, niet geladen bol is er wel een veld binnen de bol. Als je een oppervlakte-integraal binnen de bol neemt met straal $r < R$ omsluit je lading $Q_{omsloten}(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$. Omdat ook hier weer geld dat het electrisch veld radieel is, zal die weer loodrecht op de oppervlakte van de integraal staan en zal $\int_O \vec{E} \cdot \vec{n} dO = E \cdot O$ gelden. De oppervlakte van een bol met straal r is natuurlijk $O = 4\pi r^2$. Met de stelling van Gauss kunnen we dus het veld *binnen* de bol uitrekenen:

$$\begin{aligned} \frac{Q_{omsloten}}{\epsilon_0} &= \int_O \vec{E} \cdot \vec{n} dO \rightarrow \\ \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3} &= E \cdot 4\pi r^2 \rightarrow \\ \vec{E}_{r<R}(r) &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{r} \end{aligned}$$

Voor het veld buiten de homogeen geladen, niet geleidende bol is het veld gelijk aan het veld van een puntlading Q in het middelpunt van de bol.

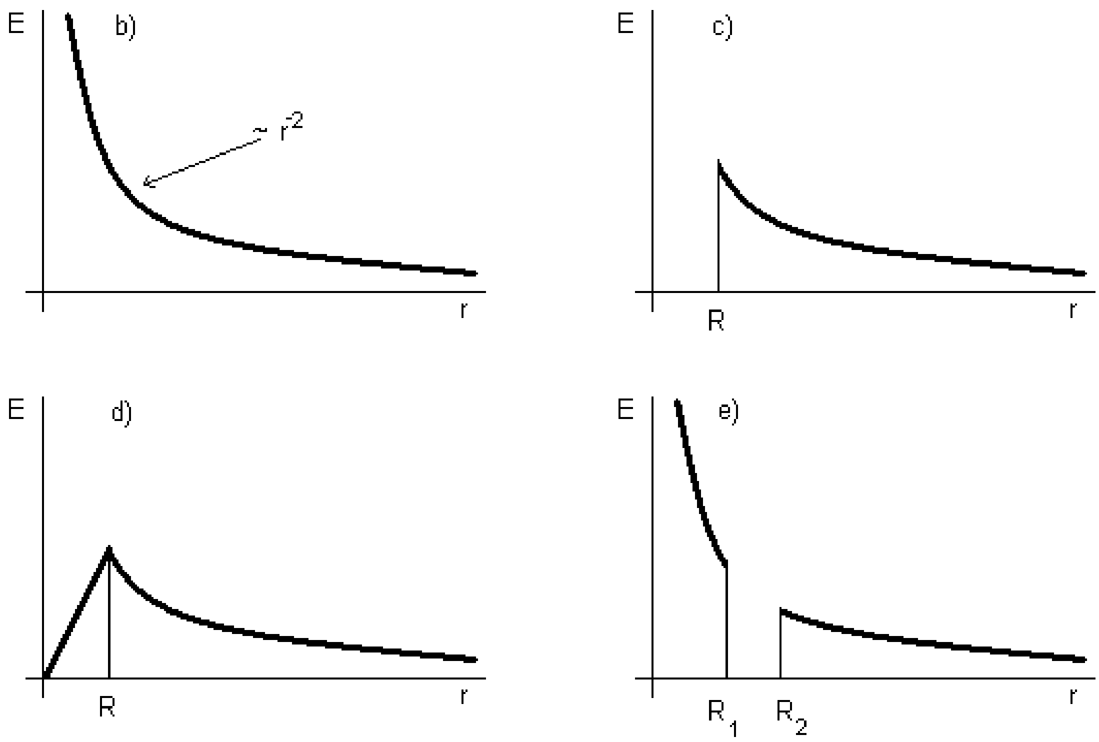
e) In het geval van de dikke neutrale geleidende bolschil verdelen we de situatie in drie delen. Voor het veld *binnen* de bolschil $r < R_1$ is het veld dusdanig als die van een puntlading Q in de oorsprong. Omdat er geen ladingen buiten het integratie-domein van $r < R_1$ zit mag dit gezegd worden.

Binnen de dikke bolschil $R_1 < r < R_2$ is het veld nul. Dat is altijd het geval in een geleider. Dit staat uitgelegd in sectie 2.5 van Griffiths.

Buiten de bolschil $r > R_2$ zal het electrisch veld zich weer gedragen als die van een puntlading Q in de oorsprong. Omdat over elke oppervlakte-integraal met $r > R_2$

weer het argument geldt dat de omsloten lading gelijk is aan Q. Het maakt dus niet uit of er stukken geleider tussen het integratie-vlak en de lading staat.

In het onderstaande figuur staan de schetsjes van het electrische veld van de configuraties van b), c), d) en e).



f) De geleidende bol 'reageert' op de puntlading in de oorsprong. Een geleider heeft de eigenschap om de lading van buiten de geleider af te schermen zodat de lading binnen de geleider nul is. De positief geladen puntlading trekt in de geleider de electronen aan die een negatieve oppervlakte lading veroorzaken die precies Q opleveren:

$$\sigma_{R_1} = \frac{-Q}{\frac{4}{3}\pi R_1^2}$$

De resterende positieve lading zal aan de buitenzijde van de bolschil zitten. Een geleider is electrisch neutraal en dus zal er een positieve lading Q zich uitsmeren op de buitenzijde van de bolschil. Dit veroorzaakt een oppervlakte lading van:

$$\sigma_{R_2} = \frac{+Q}{\frac{4}{3}\pi R_2^2}$$

g) We kunnen ook de wet van Gauss gebruiken om een ladingsverdeling te bedenken zo, dat het electrisch veld kwadratisch toeneemt met r. Als we de uitdrukking van de lading gebruiken (als in opgave *Ladingsverdeling en totale lading*) in de wet van Gauss krijgen we:

$$\frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{\int_0^r \rho(r')r'^2 dr' sin(\theta) d\theta d\phi}{\epsilon_0} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

Hier hebben we al gebruikt dat het electrisch veld radieel is en loodrecht op het integratie-oppervlak (uiteraard een bol) zal staan. Als we eisen dat het electrisch veld kwadratisch zal gaan met r weten we dat de rechter term van de uitdrukking met de vierde macht zal gaan. Als we de constanten eventjes negeren hebben we

$$\int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \propto r^4$$

De integrand zal dus met de derde macht in r gaan. Hieruit concluderen we dat $\rho(r) \propto r$.