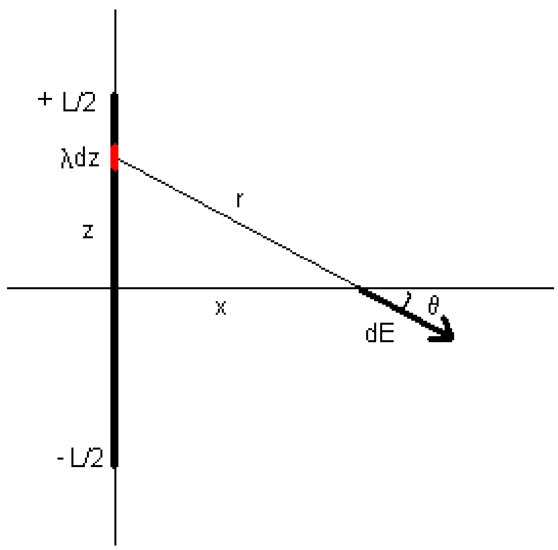
Een lijntje lading (I)

Een schets van de situatie is als volgt:



Een lijnstukje dz heeft lading λdz. Dit stukje lading geeft een bijdrage aan het electrisch veld in x:

$$dE(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dz}{r^2}$$

met $r^2 = x^2 + z^2$.

Als we goed kijken naar de symmetrie van het probleem, zien we dat de bijdragen aan de z-component van het electrisch veld in x zich opheffen. Een ander manier om hier tegen aan te kijken is als volgt: als we het systeem spiegelen in de x-as, krijgen we dezelfde situatie terug. Als het electrisch veld in x een z-component zou hebben, zou het systeem deze symmetrie niet meer hebben. Dus het electrisch veld heeft alleen maar een x-component: $dE_{x-component}(x) = cos(\theta) dE\hat{x}$. Als we naar het systeem kijken zien we dat

$$cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

Wat er uitgerekend moet worden is de totale bijdrage van het hele lijnstukje lading:

$$\vec{E}(x) = \int_{lijnstukje} dE_{x-component} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dz}{x^2+z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\hat{x}$$

Nu is het zaak de volgende integraal uit te rekenen:

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda\vec{x}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{dz}{(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Intypen in mathematica of goed opletten tijdens het hoorcollege geeft het antwoord

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda\vec{x}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{z}{x^2\sqrt{x^2+z^2}}\right]_{-L_2}^{L/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x}\frac{L}{\sqrt{x^2+(L/2)^2}}$$