3.2.5 Transformator

a) Het B-veld in het juk is gegeven door

$$B = \mu I_1 \frac{N_1}{l} + \mu I_2 \frac{N_2}{l}$$

b)

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= N_1 S B \\ \Phi_2 &= N_2 S B\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}V_1 &= -\frac{\delta \Phi_1}{\delta t} = -N_1 S \frac{\delta B}{\delta t} \\ V_2 &= -\frac{\delta \Phi_2}{\delta t} = -N_2 S \frac{\delta B}{\delta t} \\ \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= N_1 S \left(\mu I_1 \frac{N_1}{l} + \mu I_2 \frac{N_2}{l} \right) \\ \Phi_2 &= N_2 S \left(\mu I_1 \frac{N_1}{l} + \mu I_2 \frac{N_2}{l} \right) \\ L_1 &= \mu S \frac{N_1^2}{l} \\ L_2 &= \mu S \frac{N_2^2}{l} \\ M &= \mu S \frac{N_1 N_2}{l} \\ \Rightarrow L_1 L_2 &= M \text{ en } \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2\end{aligned}$$

e) Als we de vergelijkingen voor V_1 en V_2 uitschrijven en verlangen dat V_1 door een externe spanningsbron gestuurd wordt en dat er een weerstand aan de polen van spoel 2 zijn aangesloten, vinden we meteen de gevraagde vergelijkingen. Waarbij hier vermeld moet worden dat het teken in de opgave stelling eigenlijk fout is (maar dat dat ook in V_m geabsorbeert kan worden).

$$\begin{aligned}L_1 \frac{\delta I_1}{\delta t} + M \frac{\delta I_2}{\delta t} &= V_m \cos(\omega t) \quad \sim M \\ M \frac{\delta I_1}{\delta t} + L_2 \frac{\delta I_2}{\delta t} &= -R I_2 \quad \sim L_1\end{aligned}$$

f) Als we vergelijking 1 met M, vergelijking 2 met L_1 vermenigvuldigen en ze daarna van elkaar aftrekken vinden we dat de linkerzijden precies tegen elkaar wegvallen en er een hele eenvoudige relatie voor I_2 overblijft.

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{MV_m}{L_1 R}\cos(\omega t) \\ \frac{\delta I_2}{\delta t} &= \frac{MV_m \omega}{L_1 R}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Door invullen in een van de twee vergelijkingen vinden we ook I_1.

$$\begin{aligned} \frac{\delta I_2}{\delta t} &= \frac{MV_m \omega}{L_1 R}\sin(\omega t) + \frac{V_m}{L_1}\cos(\omega t) \\ I_1 &= \frac{L_2 V_m}{L_1 R}\cos(\omega t) + \frac{V_m}{L_1 \omega}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

g)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_m\cos(\omega t)}{R\frac{MV_m}{L_1 R}\cos(\omega t)} = \frac{L_1}{M} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}} = \frac{N_1}{N_2}$$

h)

$$\begin{aligned} P_{in} &= \frac{V_m^2}{R}\frac{L_2}{L_1}\cos^2(\omega t) + \frac{V_m^2}{L_1\omega}\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\ P_{out} &= \frac{V_m^2}{R}\left(\frac{M}{L_1}\right)^2\cos^2(\omega t) = \frac{V_m^2}{R}\frac{L_2}{L_1}\cos^2(\omega t) \end{aligned}$$

De integraal over een periode van de term met de gemengde sinus cosinus term levert nul, daarmee zien we meteen dat ingaand en uitgaand vermogen gelijk aan elkaar moeten zijn.

i) Voor dit speciale geval vereenvoudigen de vergelijkingen zicht tot:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_m}{R}\frac{L_2}{L_1}\cos(\omega t) + \frac{V_m}{L_1\omega}\sin(\omega t) \\ &= \frac{V_m}{R}\left(\frac{1}{4}\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) \\ I_2 &= -4\frac{V_m}{R}\cos(\omega t) \end{aligned}$$