3.2.4 Spoel in spoel

a) De magnetische flux wordt bepaald door de integraal $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Daar het magnetisch veld homogeen is mag deze door het integraalteken getrokken worden. Vanwege de rotatie van het draadraam zal de hoek tussen de normaal van de windingen en het magneetveld *tijdsafhankelijk* worden. Dit zien we terug in het inproduct:

$$\Phi_B = B_0 S \hat{z} \cdot \hat{n}(t) = B_0 S \cos(\omega t)$$

Dit is de flux per winding. voor het totale draadraam geldt de uitdrukking:

$$\Phi_d = B_0 S N_d \cos(\omega t)$$

b) De EMK kan met behulp van de magnetische flux worden bepaald: $EMK = -\frac{d\Phi}{dt}$. In dit geval is de EMK dus

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -(-B_0 S N_d \omega \sin(\omega t)) = B_0 N \omega L^2 \sin(\omega t)$$

c) De magnetische flux door het draadraam, Φ_d, wordt geleverd door het invangen van het magneetveld van de spoel B_s en zelfinductie:

$$\Phi_d = \Phi_d^{(s)} + \Phi_d^{(d)}$$

Voor de zelfinductie stellen we $\Phi_d^{(d)} = L_d I(t)$. De flux geleverd door de spoel bekijken we eerst het veld gegenereerd door de spoel: $B_s(t) = \mu_0 N_s I(t)$. De onder onderdeel a) gemaakte berekening geldt ook in dit geval (maar in plaats van een homogeen veld B_0 nemen we nu B_s). Dus de magnetische flux in het draadraam ten gevolge van de spoel is:

$$\Phi_d^{(s)} = B_s(t) S N_d \cos(\omega t) = \mu_0 N_s N_d S I(t) \cos(\omega t)$$

Hiermee wordt de totale flux door het draadkamer:

$$\Phi_d = \mu_0 N_s N_d S I(t) \cos(\omega t) + L_d I(t)$$

ad c) Voor de flux in de spoel ten gevolge van het draadraam gebruiken we het principe dat $\Phi_s^{(d)} = \Phi_d^{(s)}$. De situatie is volledig symmetrisch. Ook geldt dat $\Phi_s^{(d)} = M I_d(t) = M I(t)$. De stroom door het draadraam is gelijk aan die door de spoel omdat ze in serie zijn geschakeld. De uitdrukking voor $\Phi_d^{(s)}$ hadden we in het vorige onderdeel al berekend. Hiermee kunnen we zien dat:

$$M(t) = \frac{\Phi_d^{(s)}}{I(t)} = \mu_0 N_s N_d S \cos(\omega t) = k \cos(\omega t)$$

d) Omdat de som van de EMK's nul moet opleveren, moet gelden dat

$$\begin{aligned}
\sum EMK &= -\frac{d\Phi_s}{dt} - \frac{d\Phi_d}{dt} = 0 \\
&= \frac{d}{dt}(\Phi_s^{(s)} + \Phi_s^{(d)}) + \frac{d}{dt}(\Phi_d^{(s)} + \Phi_d^{(d)}) \\
&= \frac{d}{dt}(L_s I(t) + M(t)I(t)) + \frac{d}{dt}(M(t)I(t) + L_d I(t)) \\
&= (L_s + L_d)\frac{d}{dt}I(t) + 2\frac{d}{dt}(M(t)I(t)) = 0
\end{aligned}$$

Hiermee kunnen we stellen dat voor de constantes geldt:

$$\begin{aligned}
k_1 &= L_s + L_d \\
k_2 &= 2
\end{aligned}$$

e) We kunnen de differentiaalvergelijking onder onderdeel d) nog iets omschrijven:

$$\begin{aligned}
k_1\frac{d}{dt}I(t) + k_2\frac{d}{dt}(M(t)I(t)) &= k_1\frac{d}{dt}I(t) + k_2 I(t)\frac{d}{dt}M(t) + k_2 M(t)\frac{d}{dt}I(t) \Rightarrow \\
(k_1 + K_2 M(t))\frac{d}{dt}I(t) &= -k_2 I(t)\frac{d}{dt}M(t)
\end{aligned}$$

Als we de uitdrukking voor $M(t)$ gevonden bij onderdeel ad c) hier invullen komen we tot

$$\frac{d}{dt}I(t) = \frac{k_2 k\omega\sin(\omega t)}{k_1 + k_2 k\cos(\omega t)}I(t)$$

Laten we $I(t) = a/(b + \cos(\omega t))$ hier invullen, zodat we kunnen zien dat dit een oplossing van de differentiaalvergelijking is.

$$\begin{aligned}
\frac{a\omega\sin(\omega t)}{(b + \cos(\omega t))^2} &= \frac{ak_2 k\omega\sin(\omega t)}{(k_1 + k_2 k\cos(\omega t))(b + \cos(\omega t))} \Rightarrow \\
\frac{1}{b + \cos(\omega t)} &= \frac{k_2 k}{k_1 + k_2 k\cos(\omega t)} = \frac{1}{\frac{k_1}{k_2 k} + \cos(\omega t)}
\end{aligned}$$

Als we de beginvoorwaarde $I(0) = I_0$ nemen kunnen we de waarde van a bepalen:

$$I(0) = I_0 = \frac{a}{b+1} \Rightarrow a = I_0(b+1)$$

met

$$b = \frac{k_1}{k_2 k} = \frac{L_s + L_d}{2\mu_0 N_s N_d S}$$

Een voorbeeld van hoe $I(t)$ er dan uit gaat zien:

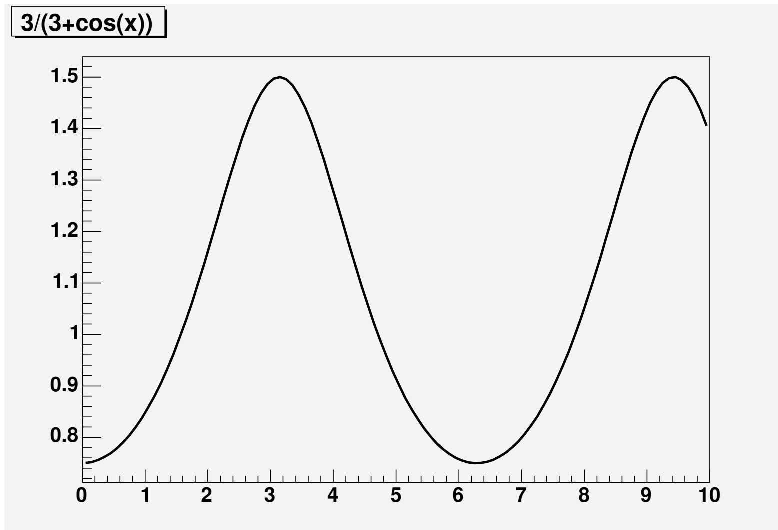

Figure 1: *De fuctie* $a/(b+cos(\omega t)$ *met voor* $a=3$, $b=3$ *en* $\omega=1$.

Dit systeem houdt zichzelf in stand. De energie die nodig is om de stroom te laten lopen, wordt geleverd door de kracht die het draadraam laat roteren.