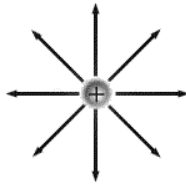


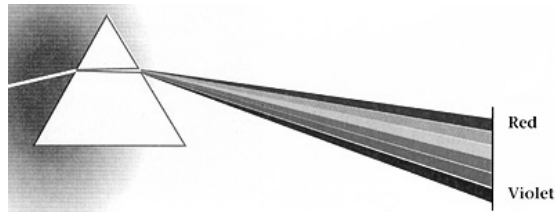
Elektrostatica



Magnetostatica



→ Elektromagnetisme \supset Licht



1

Elektromagnetisme-huishoudelijk

4 college-dagdelen + 4 practicum-dagdelen

Beoordeling:

**GEEN SCHRIFTELIJK TENTAMEN,
WEL verplicht:**

- Question-marks
- 2 huiswerkopgaves
- practicum

PRAKTIKUM:

1. Hysteresis lus (kort labjournaal)
2. Polarisatie (kort labjournaal of poster)
3. Michelson (kort labjournaal of poster)
4. Poster presentatie met borrel VRIJDAGMIDDAG 1 JULI

2

Inhoud

Elektrostatica

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mathbf{r} / \epsilon_0$$

Magnetostatica

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Elektromagnetisme \bar{D} Licht

- I. Elektromagnetische inductie & wet van Faraday
- II. Zelfinductie & energie
- III. Maxwell vergelijkingen & elektromagnetische golven

Griffiths Chapter 7:

Ø Electromotive Force: §7.1

Ø Electromagnetic Induction: §7.2 t/m §7.2.2

3

Wet van Ohm

Wet van Ohm

Voorbeelden

4

Waarom stroomt lading?



$\vec{J} \propto \vec{f}$ met \vec{f} kracht/lading

$\Rightarrow \vec{J} \equiv \sigma \vec{f}$ σ heet de "geleiding"
 d.w.z. geleiders: $\sigma \rightarrow \infty$
 isolatoren: $\sigma \rightarrow 0$

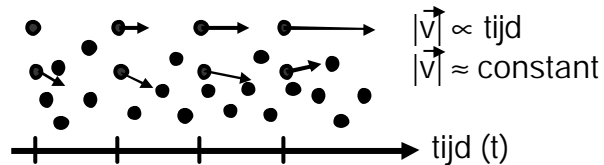
Materiaal		$[\sigma] = (\text{Wm})^{-1}$
geleider	koper	$6 \cdot 10^7$
	goud	$4 \cdot 10^7$
half-geleider	silicium	30
	germanium	2
isolator	rubber	10^{-14}
	glas	10^{-12}
	water	$4 \cdot 10^{-6}$

kracht / lading \vec{f}

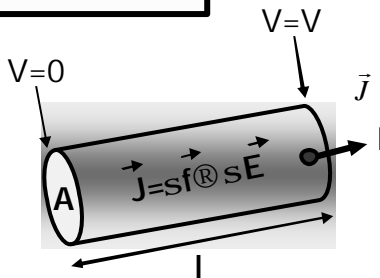
- * batterij
- * van de Graaff
- * dynamo
- * etc.

waarom \vec{J} slechts $\propto \vec{f}$?

(empirisch verband)



**$V=IR$
Wet van Ohm**



V.b. draadstuk

$$\begin{cases} |\vec{E}| = \frac{V}{l} \\ |\vec{J}| = \frac{I}{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{J}| = \frac{I}{A} = \sigma |\vec{E}| = \sigma \frac{V}{l} \Leftrightarrow \\ V = I \frac{l}{\sigma A} \equiv IR \text{ dus } R \equiv \frac{l}{\sigma A} \end{cases}$$

$R = \frac{l}{\sigma A} = \frac{r l}{A}$ is weerstand, $[R] = W$

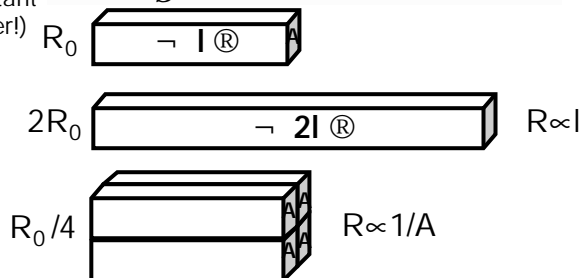
$r = \frac{1}{\sigma}$ is soortelijke weerstand

Let op: $\sigma = \infty \Rightarrow E=0, R=0, V=\text{constant}$
 (ideale geleider; nu echte geleider!)

V.b. koperdraad:

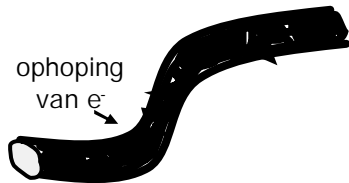
- 1 meter lang
- $\varnothing 1 \text{ mm} \Rightarrow \text{Opp} = 0.75 \text{ mm}^2$
- $\sigma = 6 \cdot 10^7 (\Omega \text{m})^{-1}$

$\Rightarrow R = 1 / (6 \cdot 10^7 \cdot 0.75 \cdot 10^{-6})$
 $\approx 0.02 \Omega$



Vraag

Waarom is de stroom "direct" aan?



lokale ophoping
⇒ vertraagt inkomende e^-
⇒ versnelt uitgaande e^-

dus: automatisch "compensatie"
mechanisme & instantaan

Stroom is een collectief effect. Alle electronen bewegen direct. Toch is de individuele snelheid (drift) van de electronen in de stroomrichting maar een slakkengangetje (opgave)



7

Elektromotorische kracht (EMK)

Definitie EMK

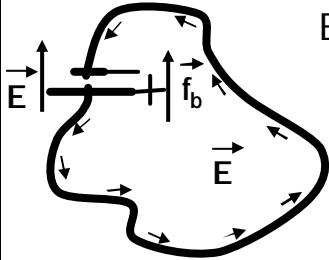
Inductie

Voorbeelden

8

Definitie EMK

$$\vec{J} = \sigma \vec{f} \quad \text{met} \quad \vec{f} = \vec{f}_b + \vec{E}$$



$$\begin{aligned} \text{EMK} &\equiv \oint_{\text{kring}} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{kring}} (\vec{f}_b + \vec{E}) \cdot d\vec{l} \\ &= \oint_{\text{kring}} \vec{f}_b \cdot d\vec{l} + \oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{kring}} \vec{f}_b \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

~~statisch $\vec{E} = 0$~~

v.b.: voor een kring met:

- batterij met V_0
- constante stroomdichtheid $|\vec{J}| = I/A$

Voor alle duidelijkheid (hoop ik):

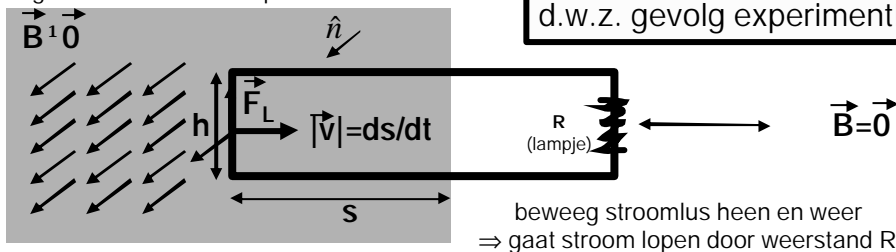
- dit is dus een statische opstelling
- ⇒ kringintegraal van E is nul
 - klein E-veld in de draad
 - groot (tegengesteld) E-veld in de "batterij"
- **chemie** in batterij pompt elektronen tegen het veld in van de + pool naar de - pool ⇒ f_b

$$\begin{aligned} \text{EMK} &\equiv \oint_{\text{kring}} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{kring}} \vec{f}_b \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{\text{binnen batterij}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{buiten batterij}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \equiv V_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EMK} &= \oint_{\text{kring}} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = I \oint_{\text{kring}} \frac{dl}{\sigma A} \equiv IR \\ &\Rightarrow R \equiv \oint_{\text{kring}} \frac{dl}{\sigma A} \rightarrow \frac{l}{\sigma A} \quad \text{zie hiervoor} \end{aligned}$$

Inductie

In geel: Lorentz kracht op e-



beweeg stroomlus heen en weer
⇒ gaat stroom lopen door weerstand R

EMK berekening: kracht/lading: $\vec{f} = \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow vB$

$$\Rightarrow \text{EMK} \equiv \oint_{\text{kring}} \vec{f} \cdot d\vec{l} \rightarrow \oint_{\text{kring}} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = vBh$$

Wat blijkt?

magnetische flux: $\Phi_B \equiv \int_{\text{oppkring}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = Bhs$

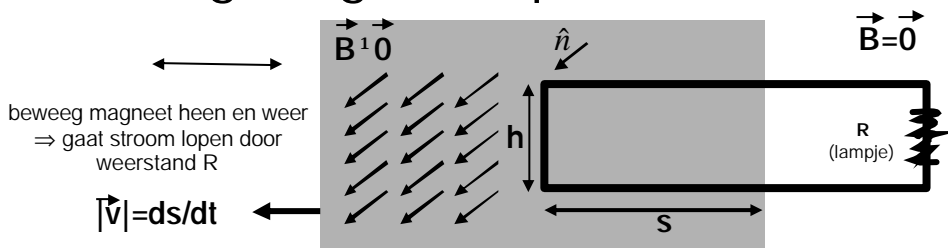
$$\text{EMK} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = V_{\text{Ind}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(Bhs)}{dt} = Bh \frac{ds}{dt} \equiv -Bhv = -V_{\text{ind}}$$

Wet van Faraday

Wet van Faraday
De "+" en de "-" tekens!
Voorbeelden

Beweeg magneet i.p.v. stroomlus!



Stroom identiek aan vorige voorbeeld:

- (a) gebruik relativiteit principe
- (b) doe gewoon de proef!

Wat is de EMK voor deze stroom?

- niet magnetisch want $\vec{v}_{\text{lading}} = 0$
- dus elektrisch (*niet statisch!*)

Wat volgt er uit $V_{ind} = -\frac{dJ}{dt}$

$$V_{ind} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{V} \times \vec{E} \cdot d\vec{o}$$

Stokes

$$\frac{dJ}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{o} = \oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{o}$$

ü
i
i
i
y
i
i
i
b

Wet van Faraday

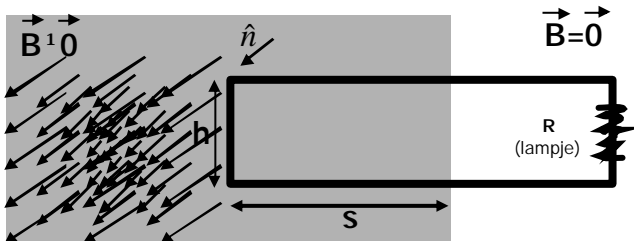
$$\oint \left(\vec{V} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{o}$$

$$\vec{V} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

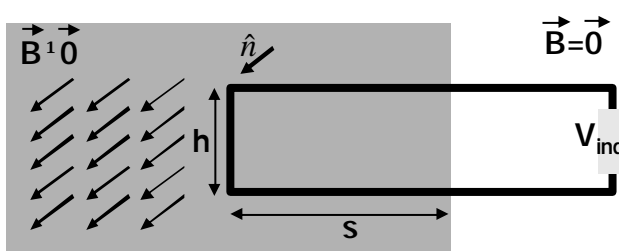
I.p.v. bewegend B-veld neemt B linear af!

Laat B linear afvallen in de tijd
 \Rightarrow gaat stroom lopen door
 weerstand R

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = V_{Ind}$$



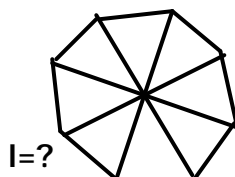
In dit alles kan de stroomkring
 ook gewoon open staan!
 In dat geval komt er gewoon een
 inductie (Hall) spanning op de
 uiteinden!



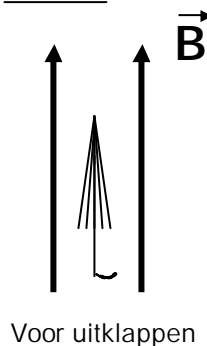
13

T. De uiteinden van de baleinen zijn met een
 metaaldraad met $R=0,1$ Ohm (totale weerstand)
 verbonden. Tijdens het uitklappen groeit de radiële
 straal van de plu linear in 0,3 seconde. De straal van
 de paraplu is 1 m.
Hoe groot is stroomsterkte in draad direct na uitklappen?

- A ≈ 20 A
- B ≈ 7 A
- C $\approx 0,2$ A
- D ≈ 0 A



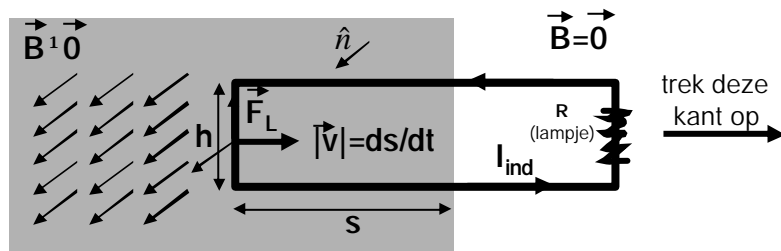
Na uitklappen
 van onderaf bekeken
 (stroomdraad rondom in rood)



Voor uitklappen

14

De "+" en de "-" tekens!



Handig trucje ("wet van Lenz"):

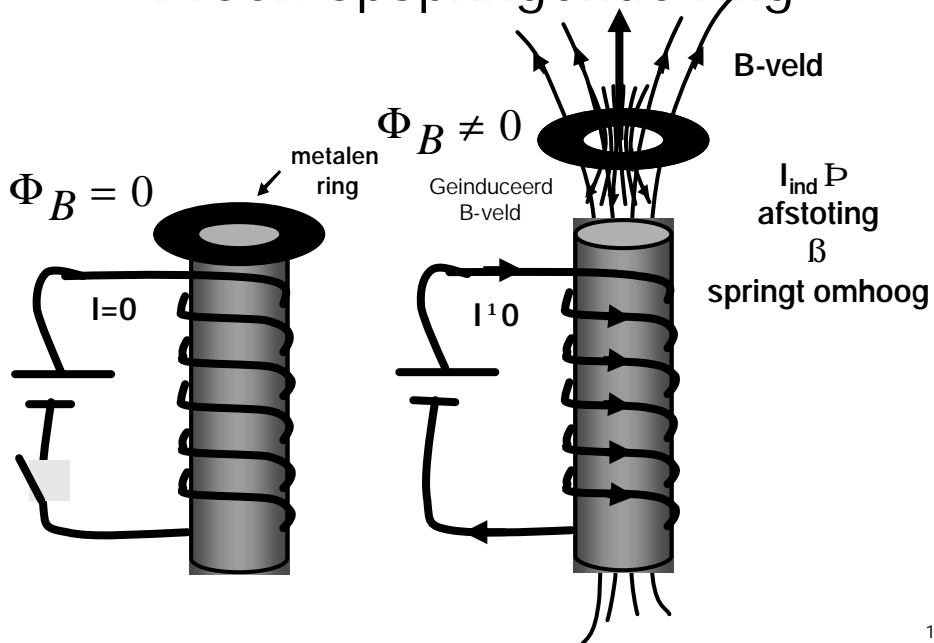
richting v/d inductie stroom zodanig dat de flux verandering gecompenseerd wordt

Bovenstaande situatie:

trek stroomlus naar rechts $\Rightarrow \Phi_B$ wordt kleiner
 \Rightarrow inductiestroom I_{ind} (zie figuur)
 B-veld t.g.v. I_{ind} parallel externe B-veld

15

Proef: opspringende ring



16

Zwevende ring

ZWEVENDE EN SPRINGENDE RING 1

Een aluminium ring wordt op een spoel met kern gelegd.

Met een instelbare spanning over de spoel kan de ring tot zweven gebracht worden.

Wat doet de ring met de zaagsnede?
Verklaar dit.

17

Opspringende ring

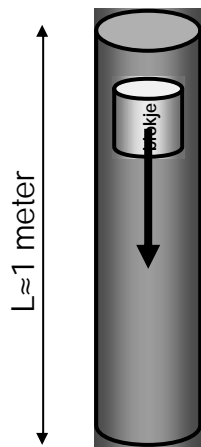
ZWEVENDE EN SPRINGENDE RING 2

De ring wordt tot de temperatuur van vloeibare stikstof afgekoeld.

Waarom springt de ring nu hoger?

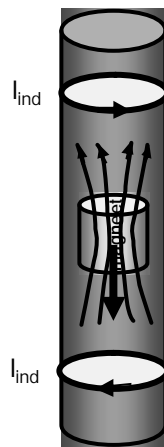
18

Proef: vallende magneetjes



Blokje materiaal valt naar beneden

$$t_0 = \sqrt{2L/g} \approx 0.45\text{s}$$



Φ_B neemt af
 $\Rightarrow I_{\text{ind}}$
trekt magneet aan

Φ_B neemt toe
 $\Rightarrow I_{\text{ind}}$
duwt magneet terug

Magneetje valt langzamer naar beneden

$$t \gg t_0 \approx 0.45\text{s}$$

19

Vallende "magneetjes"

VALPROEF

Twee voorwerpen worden boven een aluminiumbuis en een perspexbuis losgelaten.

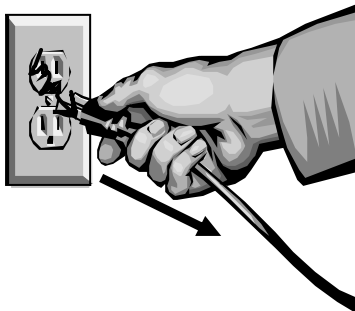
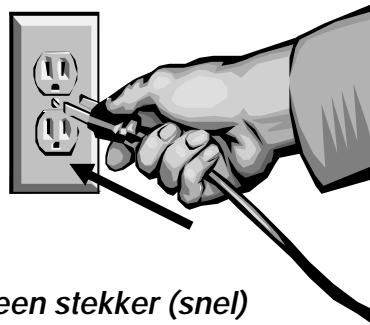
Ze vallen door de buizen naar beneden. Let op het moment waarop ze uit de buizen komen.

20

"Lenz" in de huiskamer?

Als je een stekker in een Stopcontact steekt is er zelden een vonk. Waarom?

Begint met $\Phi_B=0$; dus stroom loopt langzaam op om $\partial\Phi_B/\partial t$ klein te houden!



Als je een stekker (snel) uit een stopcontact trekt zie je vaak een vonk. Waarom?

Begint met $\Phi_B \neq 0$; dus stroom wil blijven lopen om $\partial\Phi_B/\partial t$ klein te houden. Stroom kan alleen lopen via een vonk tussen de stekker en de contactdoos!

21

I Wat heb ik geleerd?

Wet van Ohm



$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow V = IR$$

EMK: batterij V_0
spoel $-Ldl/dt$

$$EMK \equiv \oint_{\text{stroomkring}} \vec{f} d\vec{l} = V$$

Wet van Faraday

$$V_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

22

Vragen

Hoe snel "driften" de elektronen in een stroomdraad?

$I = 1A$

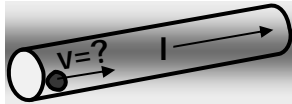
$\varnothing 1 \text{ mm} \Rightarrow \text{Opp} \approx 0.75 \text{ mm}^2$

$N_A = 6 \cdot 10^{23} / \text{Mol}$

63.5 g/Mol

$Z_{\text{Cu}} = 29; 2e^- / \text{Cu}$

$\rho_{\text{Cu}} \approx 9 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow \#e^- / \text{m}^3 \approx 1.7 \cdot 10^{29}$

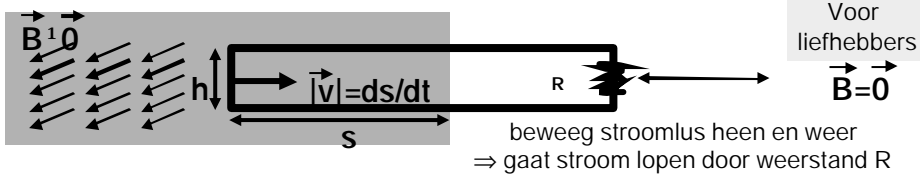


$$I = 1A = \frac{1C}{1s} \equiv |\vec{v}| * \text{Opp} * C / e^- * e^- / m^3$$

$$\rightarrow |\vec{v}| = \frac{1C/s}{\text{Opp} * C / e^- * e^- / m^3} \left(|\vec{v}| = \frac{I}{\text{Opp} * e^- * n_e} \right)$$

$$\approx \frac{1}{0.75 * 10^{-6} * 1.6 * 10^{-19} * 1.7 * 10^{29}}$$

$$\approx 5.1 * 10^{-5} \text{ m/s} = 51 \text{ mm/s} \approx 15 \text{ cm/uur}$$



ten koste van wat loopt de stroom?

1. Niet ten koste van het externe B-veld!

Arbeid verricht door dit B-veld per ladingsdrager:

$$\Delta W = \int_{\text{verplaatsing}} \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{verplaatsing}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{want } \vec{v} // d\vec{l} \text{ dus } \vec{v} \times \vec{B} \perp d\vec{l}$$

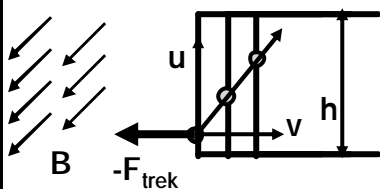
Hiermee loopt er dus geen stroom door de weerstand!

2. Wel ten koste van persoon die aan stroomlus trekt!

Arbeid verricht door dit individu per ladingsdrager:

u: snelheid waarmee elektronen in draadlus bewegen

v: snelheid waarmee draadlus beweegt



$$\Delta W = \int_{\text{verplaatsing}} \vec{F}_{\text{trek}} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{verplaatsing}} (\vec{u} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= uB \frac{h}{u/v} = vBh$$

Inhoud

Elektrostatica

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mathbf{r} / \epsilon_0$$

Magnetostatica

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Elektromagnetisme & Licht

I. Elektromagnetische inductie & wet van Faraday

→ II. Zelfinductie & energie

III. Maxwell vergelijkingen & elektromagnetische golven

Griffiths Chapter 7:

Ø Electromagnetic Induction: §7.2.3 t/m §7.2.4

25

Zelfinductie

Definitie

Voorbeelden

Toroïde

Solenoid

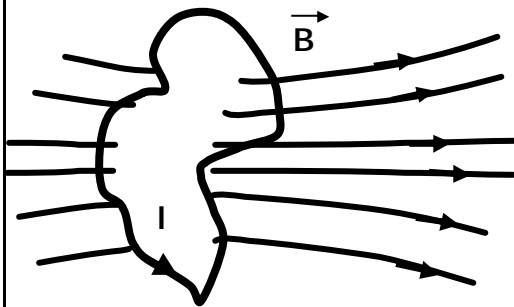
Coaxiale kabel

26

Zelfinductie "L"

Eenheid van inductie:

Henry: [H] = [Vs]/[A]



stroomlus :

$$|\vec{B}| \propto I \Rightarrow \Phi_B \equiv \int_{opp.stroomlus} \vec{B} \cdot d\vec{o} \propto I$$

$$\Rightarrow \Phi_B \equiv LI$$

L heet "zelfinductie"

Analoog aan de capaciteit C van een condensator hangt ook de inductie L slechts af van de geometrie

Capaciteit: $C \equiv \frac{Q}{V} \Leftrightarrow V = \frac{1}{C} Q$

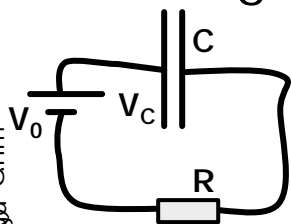
$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} \equiv \frac{1}{C} I$$

Inductie: $L \equiv \frac{\Phi_B}{I} \Leftrightarrow \Phi_B = LI$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = L \frac{dI}{dt} = -EMK_{stroomlus}$$

Gedrag C en L in schakelingen

Uitwerking 01 Ohm



oplossing voor: $\frac{df}{dt} = af + b$; hoe vind ik $f(t)$?

los eerst op: $\frac{df}{dt} = af \Rightarrow f(t) = Ae^{at}$

neem dan als "ansatz": $f(t) = A(t)e^{at}$

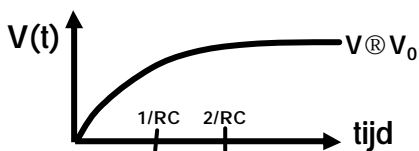
$$\Rightarrow e^{at} \frac{dA}{dt} = b \Rightarrow A(t) = \frac{b}{a} e^{-at} + A_0 \Rightarrow f(t) = A_0 e^{at} - \frac{b}{a} e^{-at}$$

$$Q_C(0) = V_C(0) = 0$$

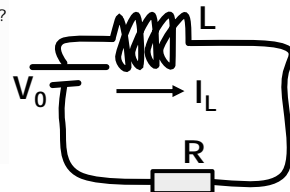
$$V_C(t)$$

$$:V_R = IR$$

$$V_0 - V_C = IR = RC \frac{dV_C}{dt} \Rightarrow V_C(t) = V_0 (1 - e^{-t/RC})$$



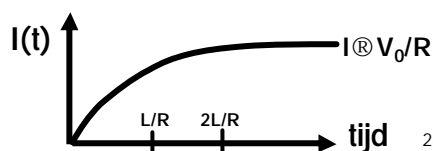
Uitwerking 02 Ohm



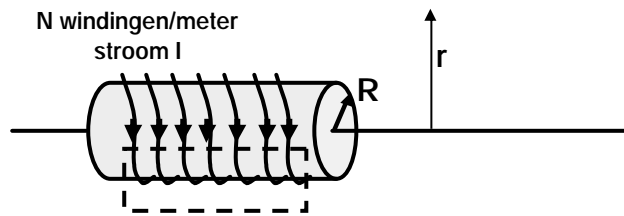
$$I_L(t=0) = 0$$

$$I_L(t) = I(t)$$

$$V_R = IR$$



Zelfinductie solenoïde



B-veld: Ampère : $r < R$: $lB = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 NI$

Flux per winding: $\Phi_B^1 = \int_{schijf} \vec{B} \cdot d\vec{o} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \mu_0 NI r dr dj = \mu_0 NI \pi R^2$

Flux Φ_B (lengte l): $\Phi_B = N \Phi_B^1 * l = \mu_0 N^2 I \pi R^2 * l$

Zelfinductie L (lengte l): $L \equiv \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 N^2 \pi R^2 * l$

29

Zelfinductie coaxiale kabel



B-veld: Ampère : $a < r < b$: $2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Flux Φ_B (lengte l): $\Phi_B = l * \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = l * \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(b/a)$

Zelfinductie L (lengte l): $L \equiv \frac{\Phi_B}{I} = l * \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$

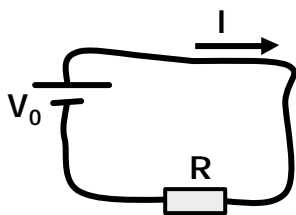
30

Energie

Dissipatie in een weerstand R
 Energie in een capaciteit C
 Energie in een zelfinductor L
 Energie van een elektrische veld configuratie
 Energie van een magnetische veld configuratie

31

Dissipatie in weerstand R



Opmerking:

de gedissipeerde energie is
 "weg" d.w.z. verdwijnt als warmte

De EMK (V_0) pompt iedere seconde I Coulombs rond.
 Dat kost werk=energie (batterij raakt leeg!)
 Die energie wordt gedissipeerd in de weerstand R

Wat is numeriek de energie dissipatie?

$$P \equiv \text{vermogen} = \frac{\text{energie}}{\text{seconde}} \quad \text{Joule's dissipatie wet}$$

$$= V_0 \cdot \frac{\# \text{ rondgepompte Coulombs}}{\text{seconde}} = V_0 \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$$

$$[P] = [VI]$$

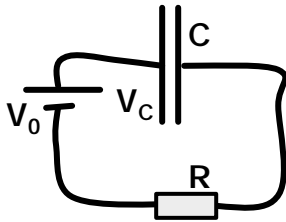
$$= \text{Volt} \cdot \text{Ampère}$$

$$\equiv \text{Watt}$$

32

Energie in een: capaciteit C

zelfinductor L



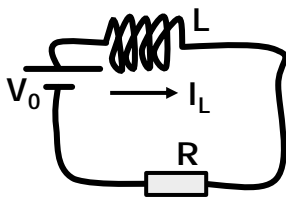
De capaciteit wordt opgeladen:

- warmte ontwikkeling in R "weg"
- opgeladen capaciteit is opgeslagen "energie"

Hoeveel energie is dat?

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = V_C(t) \cdot I(t) = \frac{Q_C}{C} \cdot \frac{dQ_C}{dt}$$

$$\Rightarrow U_C = \int_0^\infty \frac{dW}{dt} dt = \int_0^\infty \frac{Q_C}{C} \frac{dQ_C}{dt} dt = \int_0^Q \frac{Q_C}{C} dQ_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$



De stroom gaat door de spoel lopen:

- warmte ontwikkeling in R "weg"
- stroom in inductor is opgeslagen "energie"

Hoeveel energie is dat?

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = I_L(t) \cdot V_{ind}(t) = I_L \cdot L \frac{dI_L}{dt}$$

$$\Rightarrow U_L = \int_0^\infty \frac{dW}{dt} dt = \int_0^\infty I_L L \frac{dI_L}{dt} dt = \int_0^I I_L L dI_L = \frac{1}{2} LI^2$$

33

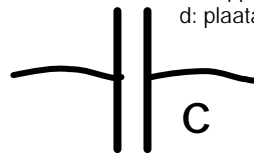
Energie in: E-veld

$$U_{Elektrisch} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv$$

Energzijds: $U_C = \frac{1}{2} CV^2$

Anderzijds: $U_C = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv$

zelfde?



A: oppervlak
d: plaatafstand

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{V}{d} \\ C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V^2}{d^2} dA = \frac{1}{2} CV^2$$

$E \neq 0$ in het
volume = dA

34

Energie in: B-veld

$$U_{\text{Magnetisch}} = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dv$$

Energzijds: $U_L = \frac{1}{2} LI^2$

Probeer: $U_L = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dv$

zelfde?



Toroïde:
$$\begin{cases} L = \frac{\mu_0 n^2 h}{2p} \ln(b/a) \Rightarrow U_L = \frac{\mu_0 n^2 h I^2}{4p} \ln(b/a) \\ B = \frac{\mu_0 n I}{2pr} \Rightarrow U_L = \frac{1}{2\mu_0} \int \left(\frac{\mu_0 n I}{2pr}\right)^2 dv = \frac{h}{2\mu_0} \int_a^b \int_0^{2p} \left(\frac{\mu_0 n I}{2pr}\right)^2 r dr dj = \frac{\mu_0 n^2 h I^2}{4p} \ln(b/a) \end{cases}$$

Solenoid/meter:
$$\begin{cases} L = \mu_0 N^2 p R^2 \Rightarrow U_L = \frac{\mu_0 N^2 p R^2 I^2}{2} \\ B = \mu_0 N I \Rightarrow U_L = \frac{1}{2\mu_0} \int (\mu_0 N I)^2 dv = \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 N I)^2 p R^2 = \frac{\mu_0 N^2 p R^2 I^2}{2} \end{cases}$$

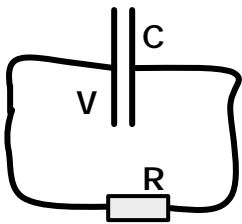
Coaxkabel/meter:
$$\begin{cases} L = \frac{\mu_0 \ln(b/a)}{2p} \Rightarrow U_L = \frac{\mu_0 \ln(b/a) I^2}{4p} \\ B = \frac{\mu_0 I}{2pr} \Rightarrow U_L = \frac{1}{2\mu_0} \int \left(\frac{\mu_0 I}{2pr}\right)^2 dv = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b \int_0^{2p} \left(\frac{\mu_0 I}{2pr}\right)^2 r dr dj = \frac{\mu_0 \ln(b/a) I^2}{4p} \end{cases}$$

Dus:

- hetzelfde!
- handige manier om L te bepalen: $L \equiv 2U_L / I^2$

35

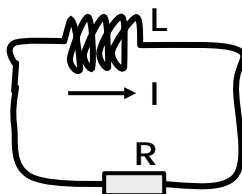
Opgaven voor jullie



Na opladen condensator haal je batterij weg. De lading op condensator neemt exponentieel af. Bereken gedissipeerde energie in weerstand R. Moet $0.5 CV^2$ geven! Op $t=0$ geldt: $V_C = V_0$.

Antwoord: $V(t) = V_0 e^{-t/RC} \Rightarrow$ stroom door R: $I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$

$\Rightarrow \frac{dW}{dt} \equiv P \equiv VI \Rightarrow \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} \Rightarrow W = \int_0^\infty \frac{dW}{dt} dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} CV_0^2$



Zodra stroom constant is haal je batterij weg. De stroom in spoel neemt exponentieel af. Bereken gedissipeerde energie in weerstand R. Moet $0.5 LI^2$ geven! Op $t=0$ geldt: $I_L = I_0 = V_0/R$.

Antwoord: $I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-tR/L} \Rightarrow$ spanning over R: $V(t) = V_0 e^{-tR/L}$

$\Rightarrow \frac{dW}{dt} \equiv P \equiv VI \Rightarrow \frac{V_0^2}{R} e^{-2tR/L} \Rightarrow W = \int_0^\infty \frac{dW}{dt} dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-2tR/L} dt = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 \equiv \frac{1}{2} LI_0^2$

36

II Wat heb ik geleerd?

Zelfinductie

$$\Phi_B \equiv LI$$

toroïde: $L = \frac{\mu_0 n^2 h \ln(b/a)}{2p} \rightarrow \mu_0 N^2 A 2p a$

solenoid: $L = \mu_0 N^2 p R^2 l$

coaxkabel: $L = \frac{\mu_0}{2p} \ln(b/a) l$

Energie C & L
Energie E & B velden

$$U_L \equiv \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{volume}} B^2 dv \quad \& \quad U_C \equiv \frac{1}{2} CV^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{volume}} E^2 dv$$

37

Inhoud

Elektromagnetisme & Licht

I. Elektromagnetische inductie & wet van Faraday

II. Zelfinductie & energie

→ III. Maxwell vergelijkingen & elektromagnetische golven

Griffiths Chapter 7:

Ø Maxwell Equations: §7.3.1 t/m §7.3.3

Ø Maxwell Equations: §7.3.4 t/m §7.3.6 Doorlezen en 'passief' begrijpen

Griffiths Chapter 9:

Ø Electromagnetic Waves in Vacuum: §9.2.1 t/m §9.2.2

38

Maxwell vergelijkingen

Maxwell's term via "experimenten"
 Maxwell's term via behoud van lading
 Maxwell vergelijkingen

39

Waar staan wij nu?

"Gauss" : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{Q_{\text{omsloten}}}{\epsilon_0}$

"geen monopolen" : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0$

"Faraday" : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

"Ampère" : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ $\oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsloten}}$

Het lijkt mij evident dat er een term $\nabla \times \vec{E}$ ontbreekt!
 Hoe vind je die? Door:

- (1) (gedachten) experimenten te doen (2 voorbeelden)
- (2) ladingsbehoud te eisen

40

Maxwell's term: opladende condensator

Terwijl condensator oplaadt: $\oint_{kring} \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I_{omsloten}$

C:
Oppervlak: A
Separatie: d

V_0

Rechterlid? $\left\{ \begin{array}{l} (A): \rightarrow \mu_0 I \\ (B): \rightarrow 0 \end{array} \right.$

Dus er mist iets! Gebruik feit dat:

$|\vec{E}| = \frac{s}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = \frac{1}{A\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} \equiv \frac{I}{A\epsilon_0}$

$\oint_{kring} \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I_{omsloten} \rightarrow m_0 I_{omsloten} + m_0 \epsilon_0 \int_{oppervlak} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{o}$

Rechterlid? $\left\{ \begin{array}{l} (A): \rightarrow \mu_0 I \\ (B): \rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \int_{oppervlak} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{o} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{IA}{A\epsilon_0} = \mu_0 I \end{array} \right.$

Magie? Ja, een beetje maar ok zolang resultaat klopt met experiment!

41

Maxwell's term: "spuitende puntlading"

Q

$Q_{weggestroomd}$

$Q_{oorsprong}$

t

Lading wordt radieel naar buiten gespoot (b.v. een radioactieve bron in oorsprong)

$\vec{J} = \frac{Q}{t} \frac{e^{-t/t\hat{r}}}{4\pi r^2}$

Symmetrie:
geen component B \Rightarrow $\oint_{kring} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$
tangenteel boloppervlak *kring op bol oppervlak*

maar: $m_0 I_{omsloten} \neq 0$

Samen met: $\vec{E} = e^{-t/t} \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$\oint_{kring} \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I_{omsloten}$
 $\rightarrow m_0 I_{omsloten} + m_0 \epsilon_0 \int_{oppervlak} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{o}$

$m_0 \int_{oppervlak} \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{o} = m_0 \int_{oppervlak} \left(\frac{Q e^{-t/t} \hat{r}}{t 4\pi r^2} - \epsilon_0 \frac{Q e^{-t/t} \hat{r}}{t 4\pi \epsilon_0 r^2} \right) \cdot d\vec{o} = 0$

Klopt weer!

42

Behoud van lading (Continuïteit vergelijking)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \text{geen behoud van lading!}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

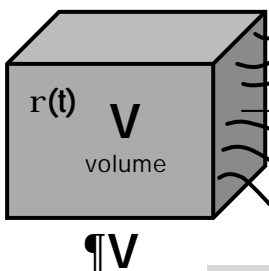
Lading is een absoluut behouden grootte d.w.z.

$$\sum_i Q_i = \text{constant}$$

ladingsstroom door oppervlak
ladingsverandering binnen volume

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{o}$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dv$$



$$\text{Dus: } 0 = \frac{d}{dt} \int_V \rho dv + \oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{d}{dt} \int_V \rho dv + \int_V \nabla \cdot \vec{J} dv$$

$$\Leftrightarrow 0 = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_V \nabla \cdot \vec{J} dv \Rightarrow 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}$$

omsluitend oppervlak

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = 0 = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

Maxwell vergelijkingen

<u>"Gauss":</u>	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{Q_{\text{omsloten}}}{\epsilon_0}$
<u>"geen monopolen":</u>	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0 \equiv -\frac{d\Phi_B}{dt}$
<u>"Faraday":</u>	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} \equiv \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$
<u>"Ampère":</u>	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsloten}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o}$

Dit is het dus!

- Dit=elektrostatica
- magnetostatica
- elektrodynamica
- licht (elektromagnetische golven)

Ook nog eens:
relativistisch invariant!

.....

Elektromagnetische golven

Golfvergelijkingen voor \vec{E} & \vec{B}
Eigenschappen

45

Golfvergelijkingen voor \vec{E} & \vec{B}

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\partial_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) - \partial_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right) + \hat{j} \dots + \hat{k} \dots$$

$$= \hat{i} \left(\partial_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) E_x \right) + \hat{j} \dots + \hat{k} \dots = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

Gebruik Maxwell vergelijkingen in vacuüm d.w.z. $\mathbf{r} = 0$ en $\vec{J} = \vec{0}$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{E} & \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0} \rightarrow 0 \\ -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \left(\frac{\mathbf{r}}{\epsilon_0} \right) - \nabla^2 \vec{E} \rightarrow -\nabla^2 \vec{E} & \text{"vlakke golven"} \\ -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{\partial(\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\mathbf{0} = -\mathbf{0} & \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \mathbf{m}_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mathbf{m}_0 \vec{J} + \mathbf{m}_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{m}_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Idem voor B-veld: } \nabla^2 \vec{B} = \mathbf{m}_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Wat impliceren deze vergelijkingen?

Trillingen & golven:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial z^2} \quad \text{representeert golfbeweging met snelheid } v = v$$

Typische oplossing: $\mathbf{y}(z, t) = A \cos(kz - \omega t)$ waarbij geldt: $\omega^2 \equiv k^2 v^2$

Dus:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{B} = c^2 \nabla^2 \vec{B} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{E} = c^2 \nabla^2 \vec{E} \end{cases} \quad \text{representeert golfbeweging, snelheid } v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \equiv c$$

Hoe zien de oplossingen eruit?

Om het "simpel" te houden neem ik aan:

- (1) \vec{E} & \vec{B} hangen slechts af van t en z
- (2) medium is vacuüm
- (3) ruimte is oneindig

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \end{cases} \quad 47$$

Eigenschappen

Probeer $\omega^2 \equiv k^2 c^2 \Leftrightarrow \omega = kc$:

$$\frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}^0 = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x^0 & E_y^0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_y^0 & E_x^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x^0 \\ B_y^0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{B}^0$$

$$\begin{cases} \vec{B}(z, t) = \vec{B}^0 \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}(z, t) = \vec{E}^0 \cos(kz - \omega t) \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(z, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^0 \cos(kz - \omega t) = -E_z^0 k \sin(kz - \omega t) \Rightarrow E_z^0 = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(z, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^0 \cos(kz - \omega t) = -B_z^0 k \sin(kz - \omega t) \Rightarrow B_z^0 = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}^0 \cos(kz - \omega t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}^0 \cos(kz - \omega t)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} +kB_y^0 \\ -kB_x^0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(kz - \omega t) = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} \omega E_x^0 \\ \omega E_y^0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(kz - \omega t) \Leftrightarrow \begin{cases} +cB_y^0 = E_x^0 \\ -cB_x^0 = E_y^0 \end{cases} \Rightarrow \vec{B}^0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}^0$$

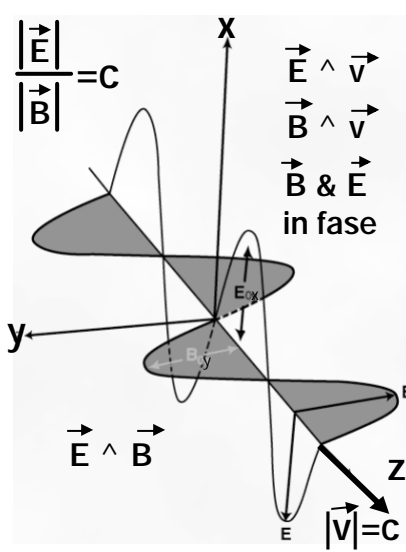
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}^0 \cos(kz - \omega t) = -\frac{\partial \vec{B}^0 \cos(kz - \omega t)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} +kE_y^0 \\ -kE_x^0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(kz - \omega t) = \begin{pmatrix} -\omega B_x^0 \\ -\omega B_y^0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(kz - \omega t) \Leftrightarrow \begin{cases} -E_y^0 = cB_x^0 \\ +E_x^0 = cB_y^0 \end{cases} \Rightarrow \vec{B}^0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}^0$$

Zelfde!
(niet verwonderlijk)

Eigenschappen als plaatjes

In het vacuüm bestaan oplossingen van de Maxwell vergelijkingen ("elektromagnetische, EM, golven") die zich met de lichtsnelheid voortplanten!



Energie
dichtheid $\frac{u_E}{u_B} = \frac{\frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}^0|^2}{\frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}^0|^2} = c^2 \epsilon_0 \mu_0 \equiv 1$

EM golf in de tijd

<http://webphysics.davidson.edu/Applets/EMWave/EMWave.html>

Breking van licht

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/propagation/propagation.html>

Toepassingen:

- "gewoon" licht
- radio & TV golven
- mobiele telefonie
- Röntgen
- etc.

oscillerend E-veld
⊥ elektrische stroom

III Wat heb ik geleerd?

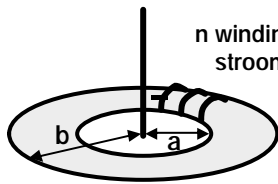
"Gauss" :	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{Q_{\text{omsloten}}}{\epsilon_0}$
"geen monopolen" :	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0$
"Faraday" :	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} \equiv -\frac{d\Phi_B}{dt}$
"Ampère" :	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsloten}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} \equiv \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

$\vec{k} \equiv (0 \ 0 \ k) = k\hat{k}$

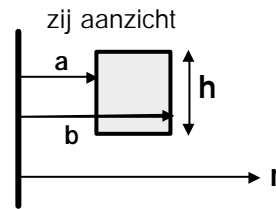
EM golf vgl.: $\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \end{cases}$ oplossing: $\begin{cases} \vec{B}(z,t) = \vec{B}^0 \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}(z,t) = \vec{E}^0 \cos(kz - \omega t) \end{cases}$ met: $\begin{cases} \omega = kc, \begin{cases} \vec{B}^0 \perp \vec{k} \\ \vec{E}^0 \perp \vec{k} \end{cases} \\ \vec{B}^0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}^0 \end{cases}$

Zelfinductie toroïde

OPGAVE



n windingen
stroom I



zij aanzicht

B-veld: Ampère : $a < r < b$: $2\pi r B = \mu_0 n I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}$

Flux per winding: $\Phi_B^1 = \int_{\text{rechthoek}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = h \int_a^b \frac{\mu_0 n I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 n I h}{2\pi} \ln(b/a)$

Indien $b \approx a$ d.w.z. $b = a + d$

Totale flux F_B : $\Phi_B = n \Phi_B^1 = \frac{\mu_0 n^2 I h}{2\pi} \ln(b/a)$ $L = \frac{\mu_0 n^2 h}{2\pi} \ln(1+d/a) \approx \frac{\mu_0 n^2 h d}{2\pi a}$

Zelfinductie L: $L \equiv \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 n^2 h}{2\pi} \ln(b/a)$

$2\pi a$: omtrek

hd : oppervlakte A

$N \equiv \frac{n}{2\pi a}$; windingen/m

$\Rightarrow L = \mu_0 N^2 A \cdot 2\pi a$