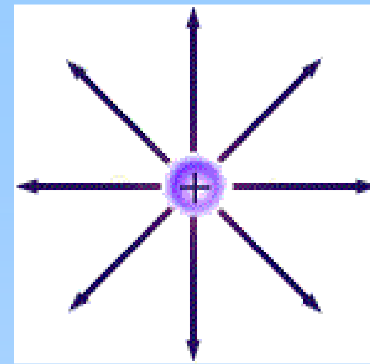
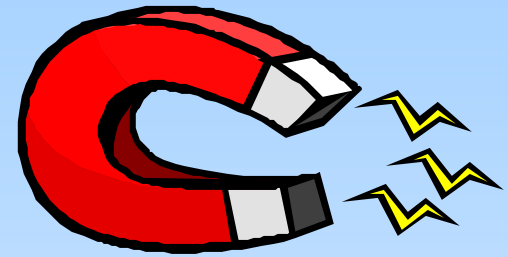
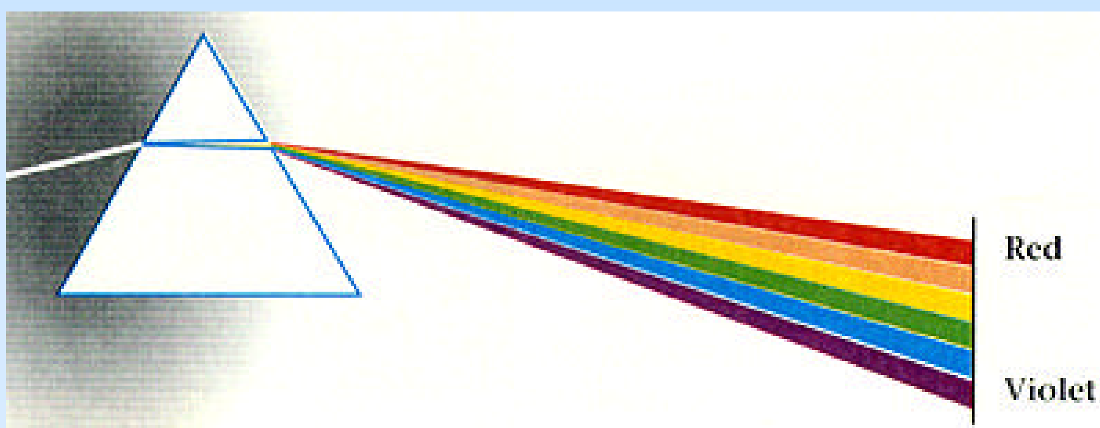
Elektrostatica



Magnetostatica



Elektromagnetisme Þ Licht



Elektrodynamica-huishoudelijk

4 college-dagdelen + 4 practicum-dagdelen

<u>Beoordeling:</u>

SCHRIFTELIJK TENTAMEN > 5.00 (70%)

verplicht:

- **digitale opgaves (bijtelling 10%)**
- **2 huiswerkopgaves (bijtelling 20%)**
- **practicum (30%)**

<u>PRAKTIKUM:</u>

- **<u>Hysterese lus (kort labjournaal)</u>**
- **<u>Polarisatie (kort labjournaal of poster)</u>**
- **<u>Michelson (kort labjournaal of poster)</u>**
- **<u>Poster presentatie met borrel VRIJDAGMIDDAG 1 JULI</u>**

Inhoud

Elektrostatica

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \ \& \ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = r / e_0$$

Magnetostatica

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I \ \& \ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Elektromagnetisme Þ Licht

→ – **Elektromagnetische inductie & wet van Faraday**

II. Zelfinductie & energie

III. Maxwell vergelijkingen & elektromagnetische golven

Griffiths Chapter 7:

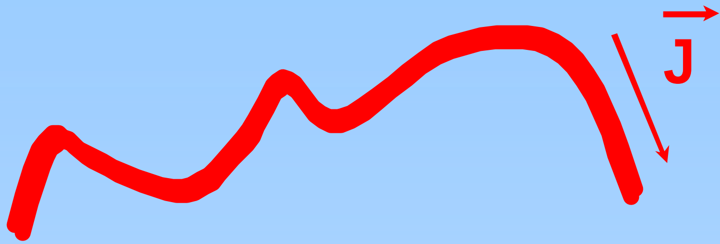
O Electromotive Force: §7.1
O Electromagnetic Induction: §7.2 t/m §7.2.2

Wet van Ohm

Wet van Ohm

Voorbeelden

Waarom stroomt lading?



$\vec{J} \propto \vec{f}$ met $\vec{f}$ kracht/lading

$\Rightarrow \vec{J} \equiv \sigma\vec{f}$ σ heet de “geleiding”

d.w.z. geleiders: $\sigma \to \infty$

isolatoren: $\sigma \to 0$

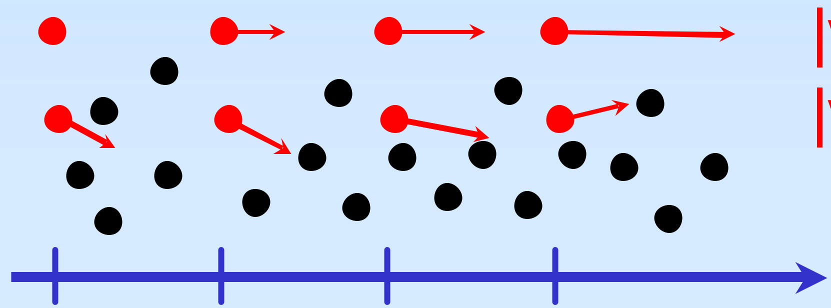
Materiaal		[s]=(Wm)$^{-1}$
geleider	koper	$6*10^{+7}$
	goud	$4*10^{+7}$
half-geleider	silicium	30
	germanium	2
isolator	rubber	10^{-14}
	glas	10^{-12}
	water	$4*10^{-6}$

kracht / lading $\vec{f}$

* batterij
* van de Graaff
* dynamo
* etc.

waarom $\vec{J}$ slechts μ $\vec{f}$?

(empirisch verband)



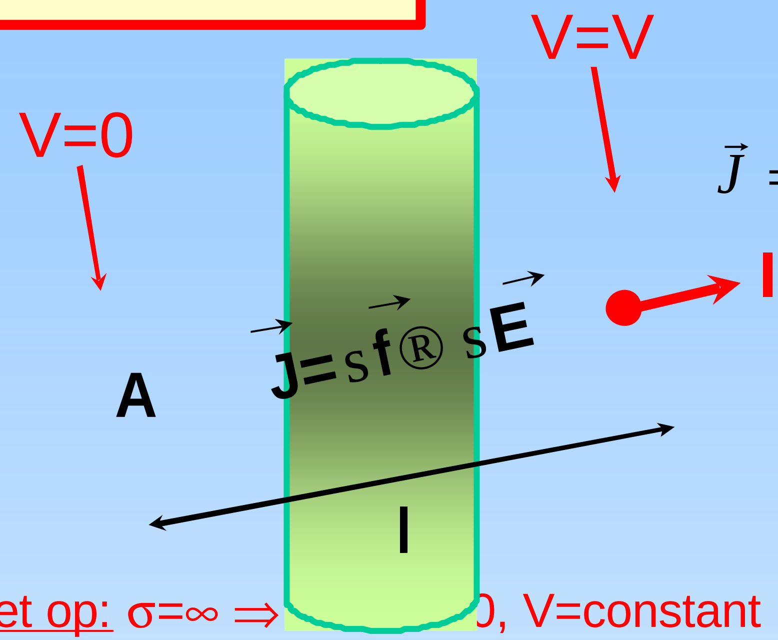
$|\vec{v}| \propto$ tijd

$|\vec{v}| \approx$ constant

tijd (t)

V=IR
Wet van Ohm

V.b. draadstuk

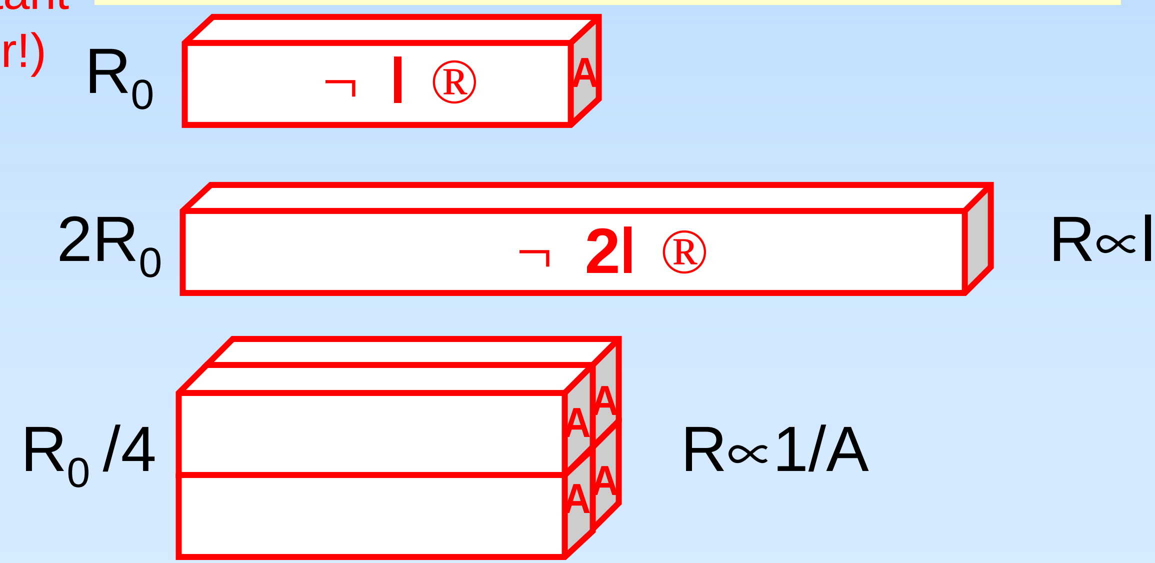


$$\vec{J} = \sigma\,\vec{E} \quad \begin{cases} |\vec{E}| = \dfrac{V}{l} \\ |\vec{J}| = \dfrac{I}{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{J}| = \dfrac{I}{A} = \sigma\,|\vec{E}| = \sigma\,\dfrac{V}{l} \Leftrightarrow \\ V = I\,\dfrac{l}{\sigma A} \equiv IR \;\; \text{dus} \;\; R \equiv \dfrac{l}{\sigma A} \end{cases}$$

$R = \dfrac{l}{\sigma\,A} = \dfrac{\rho\,l}{A}$ **is weerstand, [R]=Ω**

$\rho = \dfrac{1}{\sigma}$ **is soortelijke weerstand**

Let op: $\sigma=\infty \Rightarrow$ 0, V=constant
(ideale geleider; nu echte geleider!)

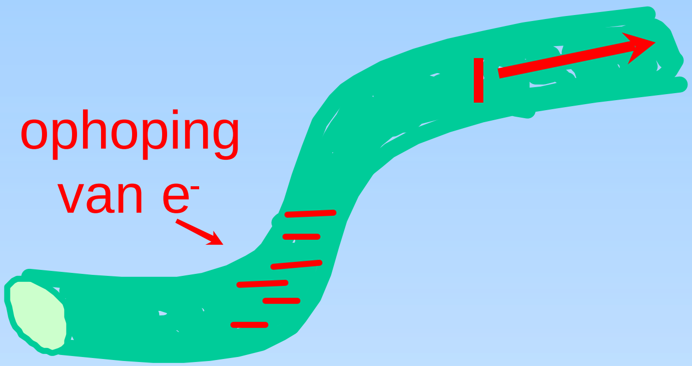


V.b. koperdraad:
1 meter lang
∅ 1 mm ⇒ Opp=0.75 mm^2
$\sigma=6*10^{+7}\,(\Omega m)^{-1}$

$\Rightarrow R=1/(6*10^{+7}*0.75*10^{-6})$
$\approx 0.02\ \Omega$

Vraag

Waarom is de stroom "direct" aan?



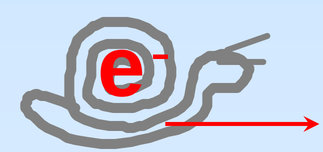
lokale ophoping

$\Rightarrow$ vertraagt inkomende e^-

$\Rightarrow$ versnelt uitgaande e^-

dus: automatisch "compensatie"
mechanisme & instantaan

Stroom is een collectief effect. Alle electronen bewegen direct. Toch is de individuele snelheid (drift) van de electronen in de stroomrichting maar een slakkengangetje (opgave)



Elektromotorische kracht (EMK)

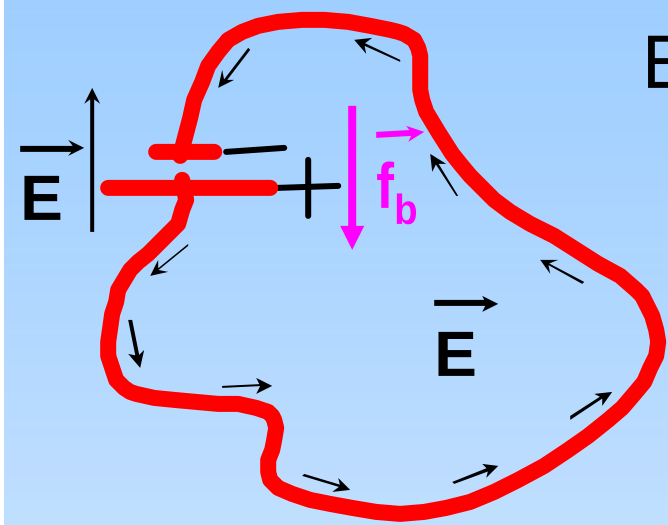
Definitie EMK

Inductie

Voorbeelden

Definitie EMK

$$\vec{J} = s\vec{f} \quad \text{met} \quad \vec{f} = \vec{f}_b + \vec{E}$$



$$\text{EMK} \equiv \oint_{kring} \vec{f}\cdot d\vec{l} = \oint_{kring} \left(\vec{f}_b + \vec{E}\right)\cdot d\vec{l}$$

$$= \oint_{kring} \vec{f}_b\cdot d\vec{l} + \cancel{\oint_{kring} \vec{E}\cdot d\vec{l}} = \oint_{kring} \vec{f}_b\cdot d\vec{l}$$

statisch Þ 0

v.b.: voor een kring met:

- batterij met V_0
- constante stroomdichtheid $|\vec{J}|=I/A$

$$\text{EMK} \equiv \oint_{kring} \vec{f}\cdot d\vec{l} = \oint_{kring} \vec{f}_b\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_{binnen\ batterij!} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{buiten\ batterij!} \vec{E}\cdot d\vec{l} \equiv V_0$$

$$\text{EMK} = \oint_{kring} \frac{\vec{J}}{s}\cdot d\vec{l} = I \oint_{kring} \frac{dl}{sA} \equiv IR$$

$$\Rightarrow R \equiv \oint_{kring} \frac{dl}{sA} \rightarrow \frac{l}{sA}$$

zie hiervoor

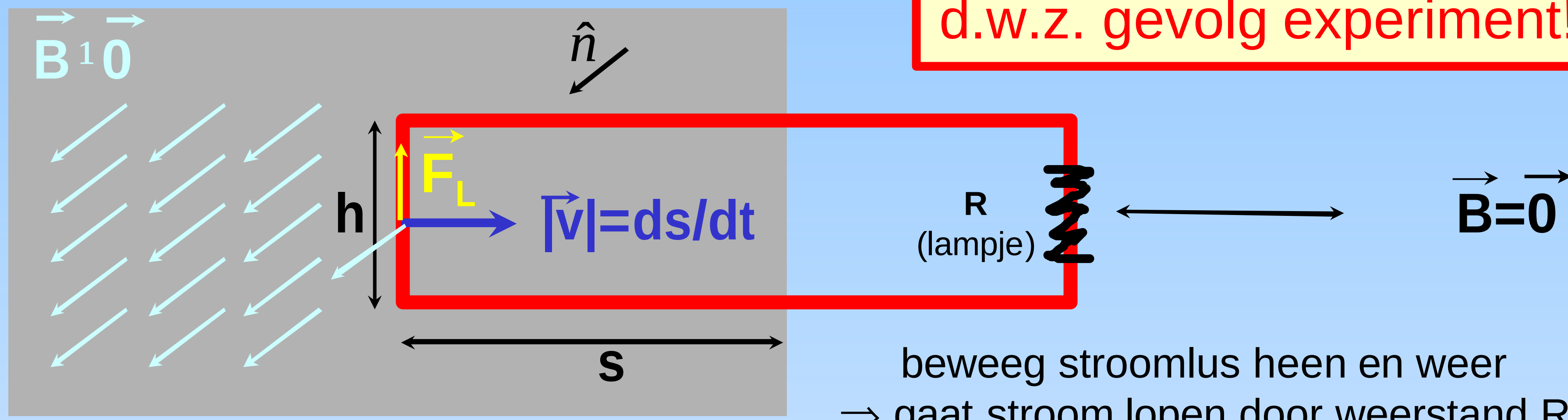
Voor alle duidelijkheid (hoop ik):

- dit is dus een statische opstelling
  - ⇒ kringintegraal van E is nul
    - klein E-veld in de draad
    - groot (tegengesteld) E-veld in de "batterij"
- **chemie** in batterij pompt elektronen tegen het veld in van de + pool naar de – pool ⇒ f_b

Inductie

Empirisch
d.w.z. gevolg experiment!

In geel: Lorentz kracht op e⁻



beweeg stroomlus heen en weer
$\Rightarrow$ gaat stroom lopen door weerstand R

EMK berekening: kracht/lading: $\vec{f} = \vec{v} \times \vec{B} \to vB$

$$\Rightarrow EMK \equiv \oint_{kring} \vec{f} \cdot d\vec{l} \to \oint_{kring} \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = vBh$$

Wat blijkt? magnetische flux $\Phi_B \equiv \int_{opp.kring} \vec{B} \cdot d\vec{o} = Bhs$

$$\boxed{EMK = -\frac{d\Phi_B}{dt} = V_{Ind}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d\left(Bhs\right)}{dt} = Bh\frac{ds}{dt} \equiv -Bhv = -V_{ind}$$

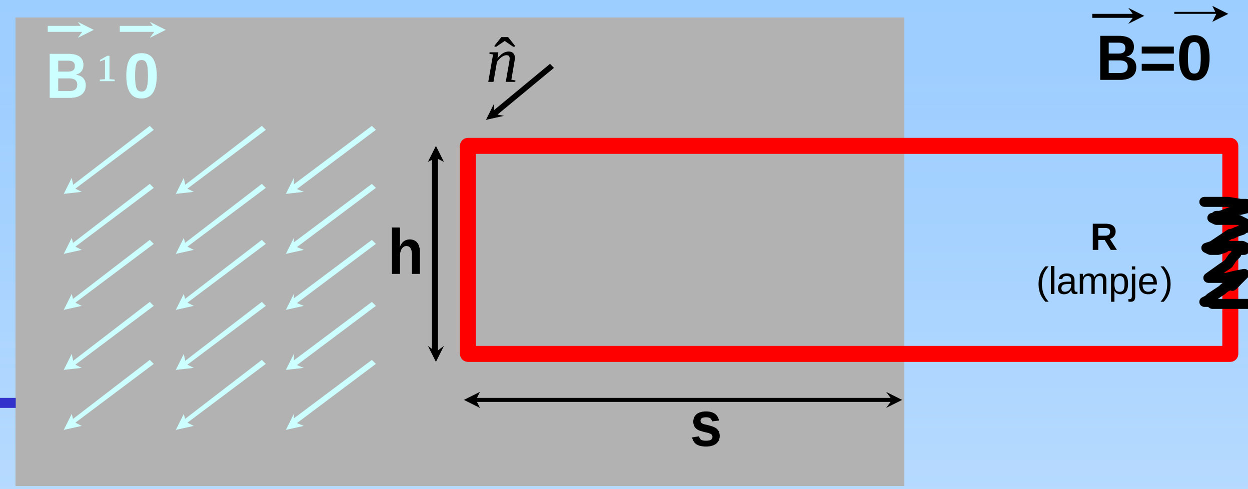
Wet van Faraday

Wet van Faraday

De “+” en de “–” tekens!

Voorbeelden

Beweeg magneet i.p.v. stroomlus!



beweeg magneet heen en weer
⇒ gaat stroom lopen door
weerstand R

$|\vec{v}|$=ds/dt

Stroom identiek aan vorige voorbeeld:
(a) gebruik relativiteit principe
(b) doe gewoon de proef!

Wat is de EMK voor deze stroom?
- niet magnetisch want $\vec{v}_{lading}$=0
- dus elektrisch *(niet statisch!)*

Wat volgt er uit $V_{ind} = -\dfrac{dj}{dt}$

$$V_{ind} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} \rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\hat{o}$$

Stokes

$$\frac{dj}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\hat{o} = \oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\hat{o}$$

Þ

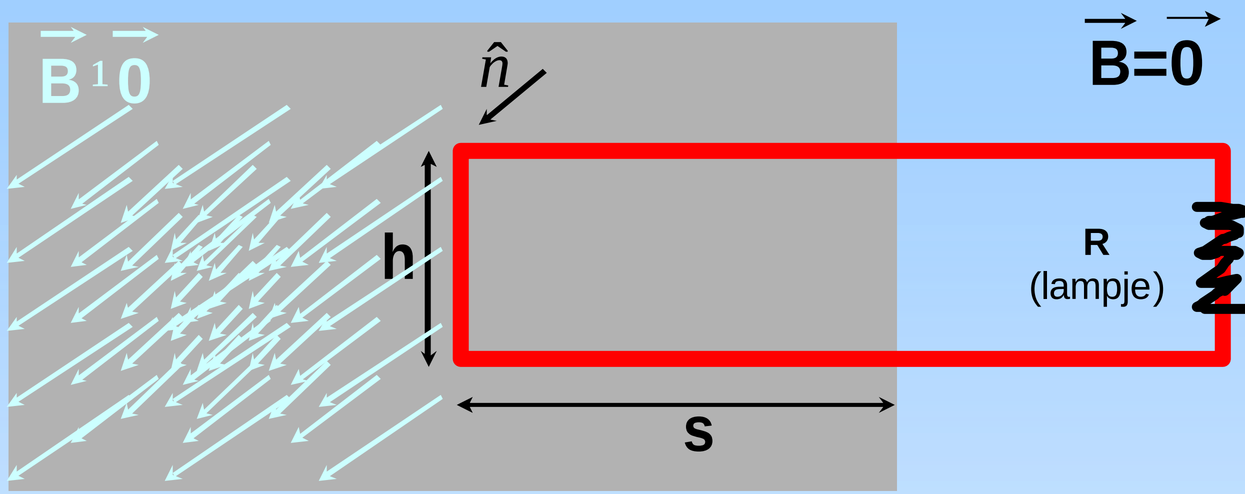
Wet van Faraday

$$\oint \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\hat{o} = 0$$

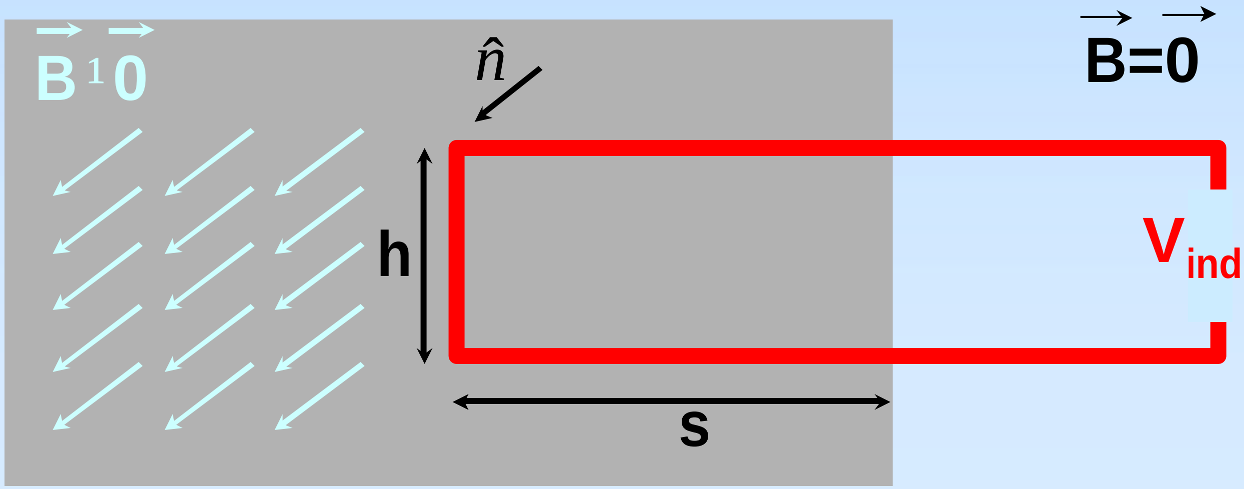
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

I.p.v. bewegend B-veld neemt B lineair af!

Laat B lineair afvallen in de tijd
$\Rightarrow$ gaat stroom lopen door weerstand R



$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = V_{Ind}$$



In dit alles kan de stroomkring ook gewoon open staan!
In dat geval komt er gewoon een induktie (Hall) spanning op de uiteinden!

Je klapt een paraplu uit in een magnetisch veld van 0,2 T. De uiteinden van de baleinen zijn met een metaaldraad met R=0,1 Ohm (totale weerstand) verbonden. Tijdens het uitklappen groeit de radiële straal van de plu lineair in 0,3 seconde. De straal van de paraplu is 1 m.

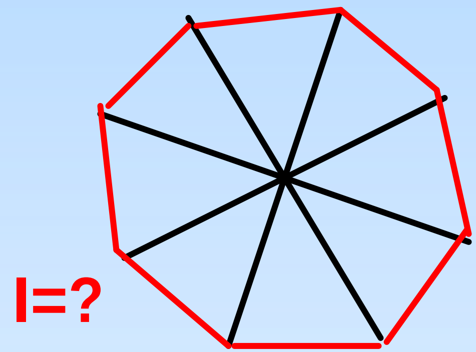
Hoe groot is stroomsterkte in draad <u>direct</u> na uitklappen?

A $\approx$ 20 A

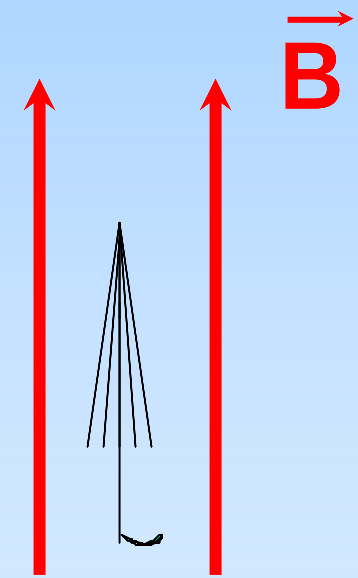
B $\approx$ 7 A

C $\approx$ 0.2 A

D $\approx$ 0 A

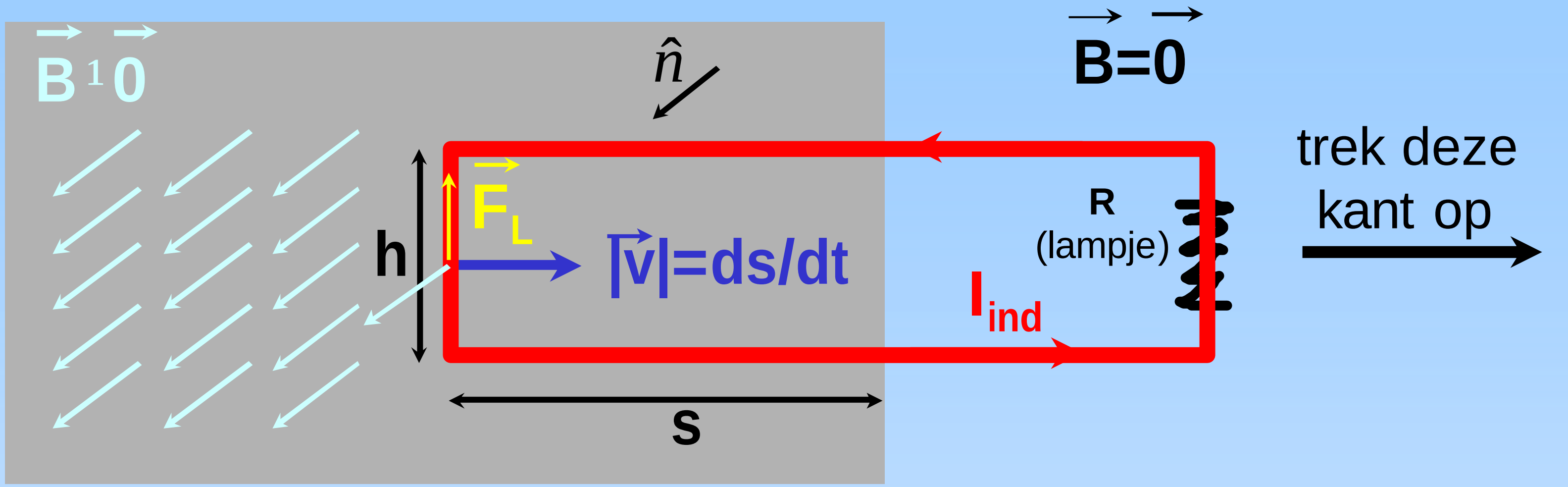


Na uitklappen
van onderaf bekeken
(stroomdraad rondom in rood)



Voor uitklappen

De "+" en de "-" tekens!



Handig trucje ("wet van Lenz"):

richting v/d inductie stroom zodanig dat de flux verandering gecompenseerd wordt

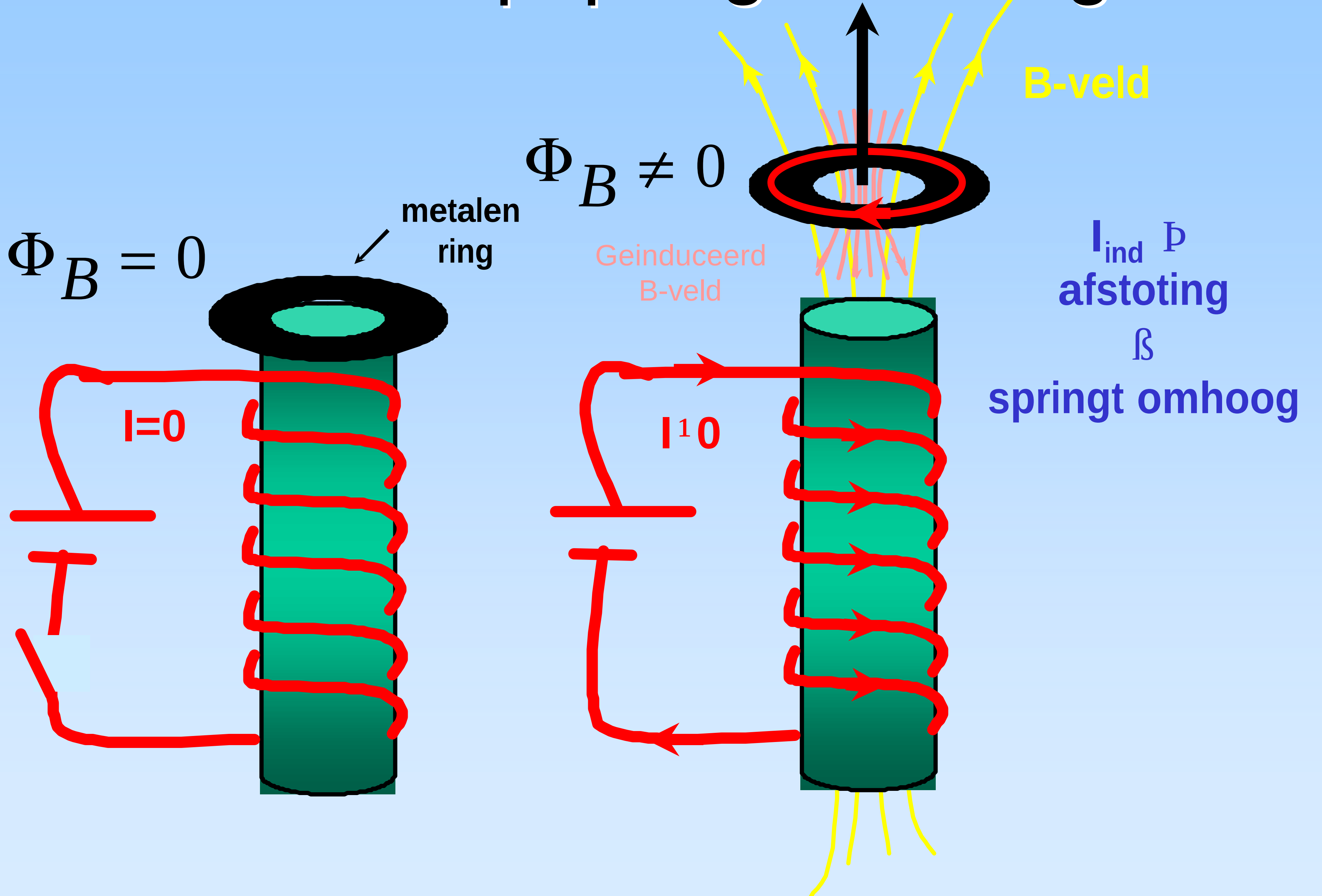
<u>Bovenstaande situatie:</u>

trek stroomlus naar rechts $\Rightarrow \Phi_B$ wordt kleiner

$\Rightarrow$ inductiestroom I_{ind} (zie figuur)

B-veld t.g.v. I_{ind} parallel externe B-veld

Proef: opspringende ring



Zwevende ring

ZWEVENDE EN SPRINGENDE RING 1

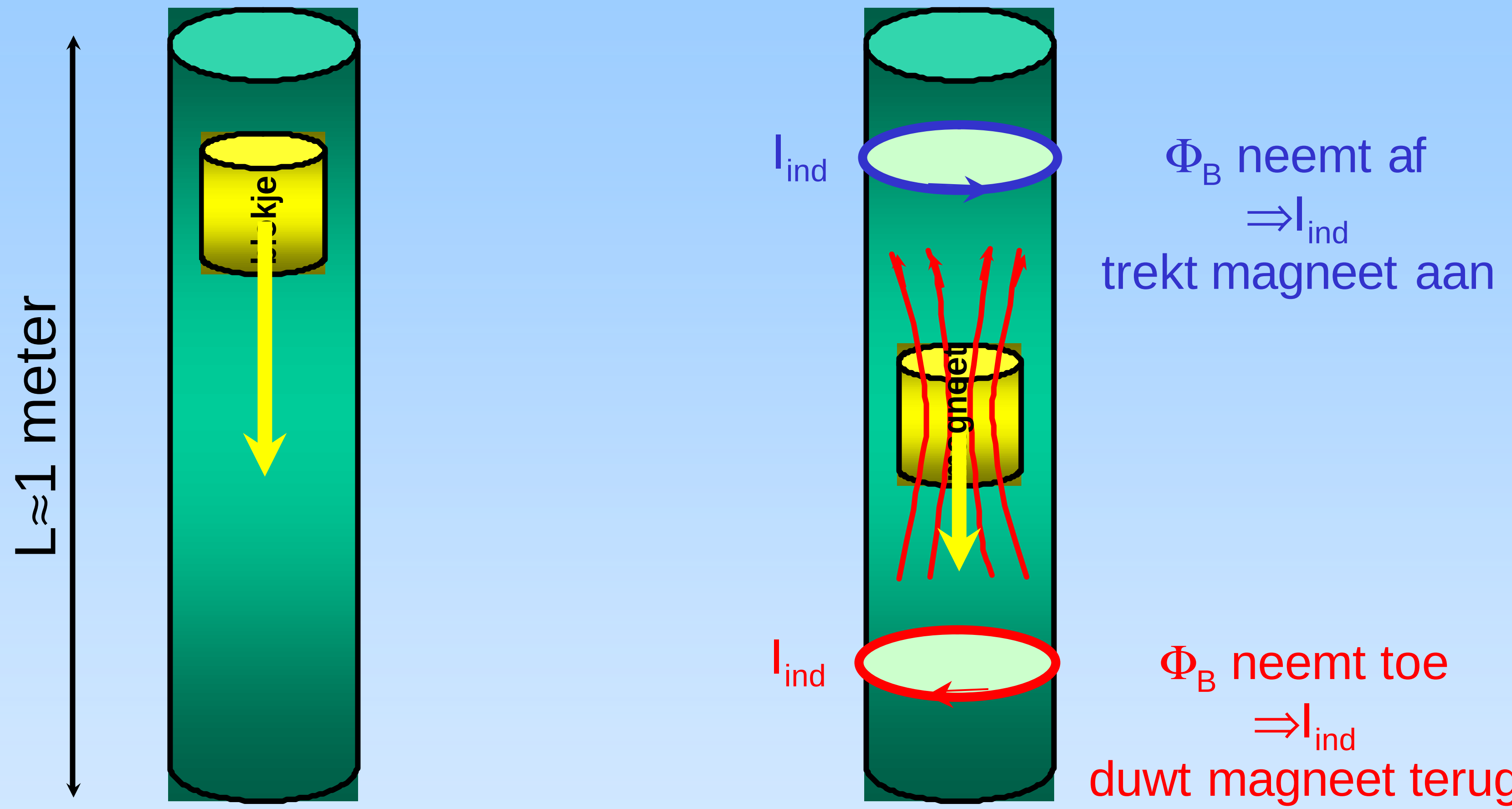
Een aluminium ring wordt op een spoel met kern gelegd.
Met een instelbare spanning over de spoel kan de ring tot zweven gebracht worden.
Wat doet de ring met de zaagsnede? Verklaar dit.

Opspringende ring

ZWEVENDE EN SPRINGENDE RING 2

De ring wordt tot de temperatuur van vloeibare stikstof afgekoeld.
Waarom springt de ring nu hoger?

Proef: vallende magneetjes



Blokje materiaal valt
naar beneden

$$t_0 = \sqrt{2/g} \approx 0.45\text{s}$$

Magneetje valt
langzamer naar beneden

$$t \gg t_0 \approx 0.45\text{s}$$

Vallende “magneetjes”

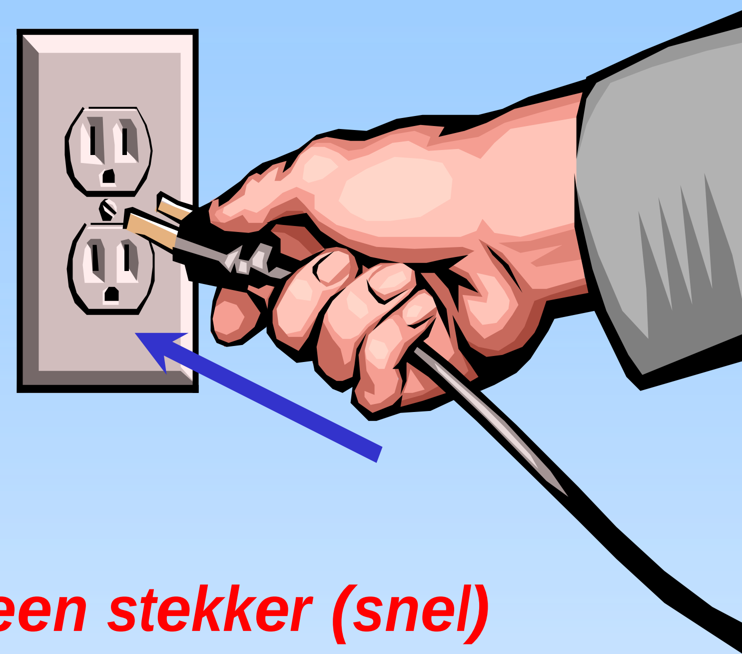
VALPROEF

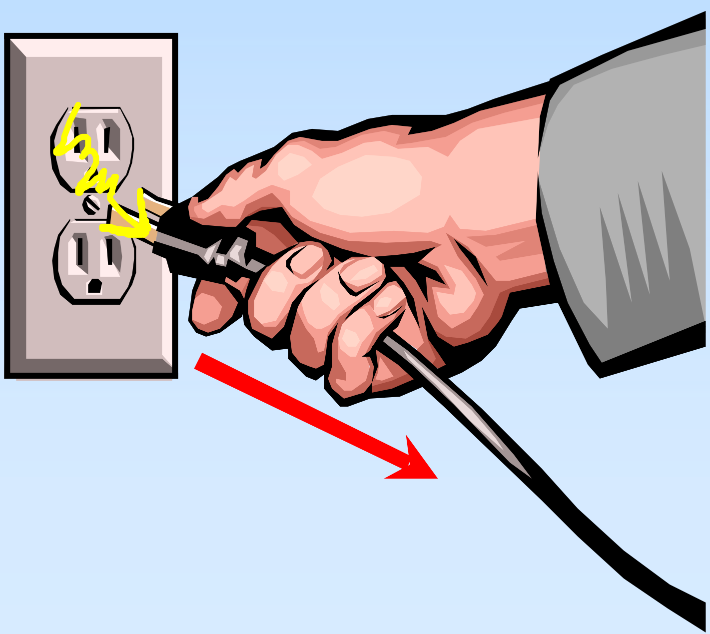
Twee voorwerpen worden boven een aluminiumbuis en een perspexbuis losgelaten.
Ze vallen door de buizen naar beneden.
Let op het moment waarop ze uit de buizen komen.

“Lenz” in de huiskamer?

Als je een stekker in een Stopcontact steekt is er zelden een vonk. Waarom?

Begint met $\Phi_B=0$; dus stroom loopt langzaam op om $\partial\Phi_B/\partial t$ klein te houden!

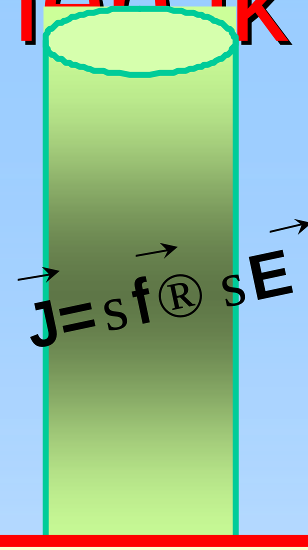




Als je een stekker (snel) uit een stopcontact trekt zie je vaak een vonk. Waarom?

Begint met $\Phi_B\neq0$; dus stroom wil blijven lopen om $\partial\Phi_B/\partial t$ klein te houden Stroom kan alleen lopen via een vonk tussen de stekker en de contactdoos!

I Wat heb ik geleerd?



Wet van Ohm

$$\vec{J} = s\vec{f} \Rightarrow V = IR$$

EMK: batterij V_0
spoel –LdI/dt

$$EMK \equiv \oint_{stroomkring} \vec{f}\, d\vec{l} = V$$

Wet van Faraday

$$V_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Vragen

Hoe snel “driften” de elektronen in een stroomdraad?

I=1A

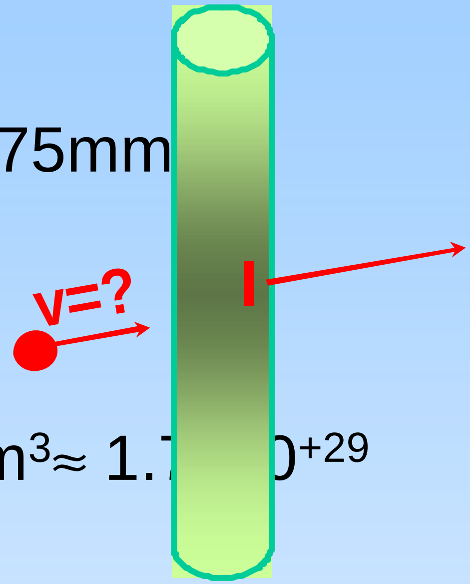
$\varnothing$ 1 mm $\Rightarrow$ Opp$\approx$0.75mm

$N_A=6*10^{+23}$/Mol

63.5g/Mol

Z_{Cu}=29; 2e$^-$/Cu

$\rho_{Cu}\approx 9g/cm^3 \Rightarrow \#e^-/m^3 \approx 1.7*10^{+29}$

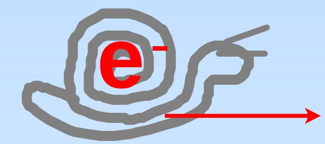


$$I = 1A = \frac{1C}{1s} \equiv |\vec{v}| * Opp * C/e^- * e^-/m^3$$

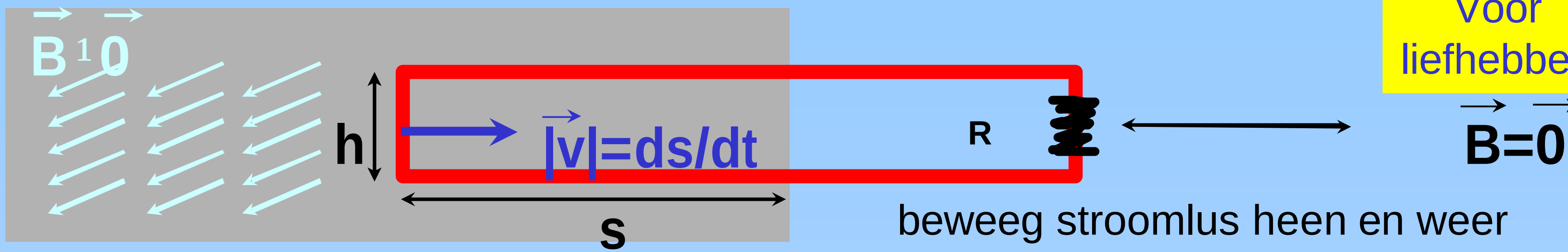
$$\Rightarrow |\vec{v}| = \frac{1C/s}{Opp*C/e^- * e^-/m^3} \qquad \left(|\vec{v}| = \frac{I}{Opp*e*n_e} \right)$$

$$\approx \frac{1}{0.75*10^{-6}*1.6*10^{-19}*1.7*10^{+29}}$$

$$\approx 5.1*10^{-5} m/s = 51mm/s \approx 15cm/uur$$



Voor liefhebbers



beweeg stroomlus heen en weer

$\Rightarrow$ gaat stroom lopen door weerstand R

ten koste van wat loopt de stroom?

- *Niet* ten koste van het externe B-veld!

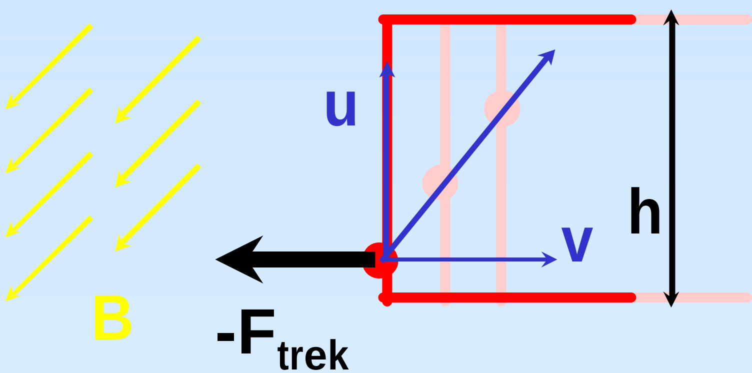
Arbeid verricht door dit B-veld per ladingsdrager:

$$\Delta W = \int_{\text{verplaatsing}} \vec{f}\cdot d\vec{l} = \int_{\text{verplaatsing}} \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{want} \quad \vec{v} \parallel d\vec{l} \quad \text{dus} \quad \vec{v}\times\vec{B} \perp d\vec{l}$$

Hiermee loopt er dus geen stroom door de weerstand!

2. *Wel* ten koste van persoon die aan stroomlus trekt!
   Arbeid verricht door dit individu per ladingsdrager:

u: snelheid waarmee elektronen in draadlus bewegen
v: snelheid waarmee draadlus beweegt



$$\Delta W = \int_{\text{verplaatsing}} \vec{F}_{trek}\cdot d\vec{l} = \int_{\text{verplaatsing}} \left(\vec{u}\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{l}$$

$$= uB\frac{h}{u/v} = vBh$$

Inhoud

Elektrostatica

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \ \& \ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = r / e_0$$

Magnetostatica

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I \ \& \ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Elektromagnetisme Þ Licht

- **Elektromagnetische inductie & wet van Faraday**

II. Zelfinductie & energie

III. Maxwell vergelijkingen & elektromagnetische golven

Griffiths Chapter 7:

OElectromagnetic Induction: §7.2.3 t/m §7.2.4

Zelfinductie

Definitie

Voorbeelden

Toroïde

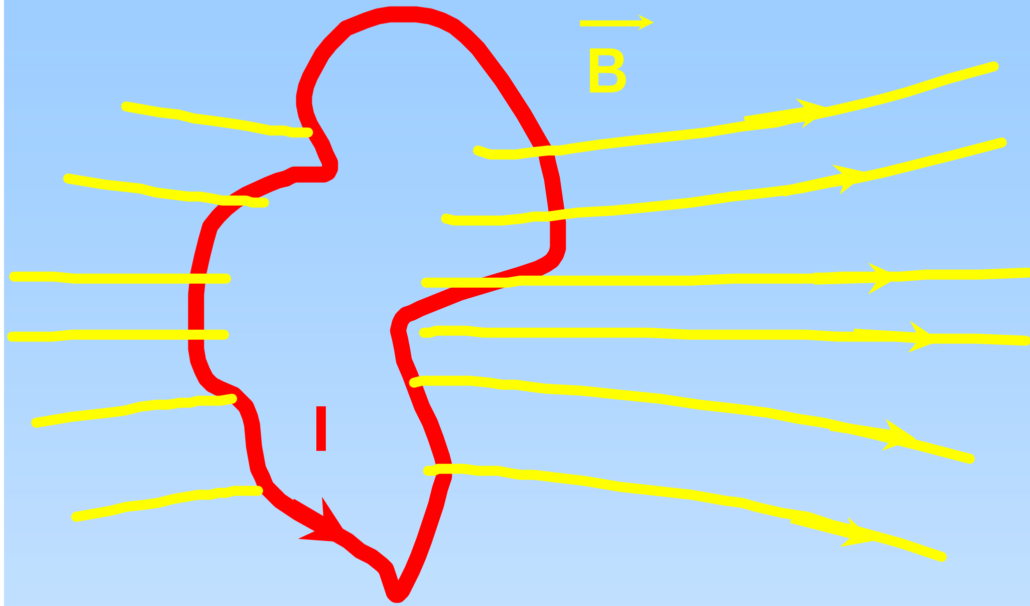
Solenoïde

Coaxiale kabel

Zelfinductie "L"

Eenheid van inductie:

Henry: [H] = [Vs]/[A]



stroomlus:

$$\left|\vec{B}\right| \propto I \;\Rightarrow\; \Phi_B \equiv \int_{opp.stroomlus} \vec{B}\cdot d\vec{o} \propto I$$

$$\Rightarrow \Phi_B \equiv L\,I$$

L heet "zelfinductie"

Analoog aan de capaciteit C van een condensator hangt ook de inductie L slechts af van de geometrie

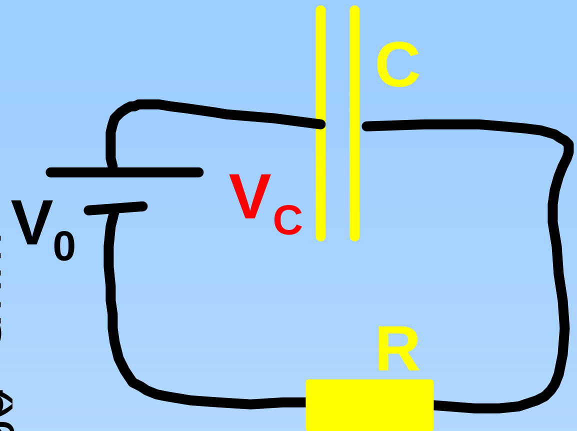
Capaciteit: $C \equiv \dfrac{Q}{V} \Leftrightarrow V = \dfrac{1}{C}Q$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} \equiv \frac{1}{C}I$$

Inductie: $L \equiv \dfrac{\Phi_B}{I} \Leftrightarrow \Phi_B = L\,I$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{dI}{dt} = -\text{EMK}_{\text{stroomlus}}$$

Gedrag C en L in schakelingen

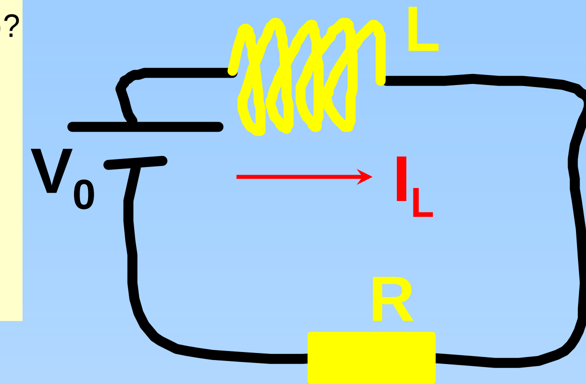


oplossing voor: $\frac{df}{dt} = af + b$; hoe vind ik f(t)?

los eerst op: $\frac{df}{dt} = af \Rightarrow f(t) = Ae^{at}$

neem dan als "ansatz": $f(t) = A(t)e^{at}$

$$\Rightarrow e^{at}\frac{dA}{dt} = b \Rightarrow A(t) = -\frac{b}{a}e^{-at} + A_0 \Rightarrow f(t) = A_0 e^{at} - \frac{b}{a}$$



$$Q_C(0) = V_C(0) = 0$$

$$V_C(t)$$

$$:V_R = IR$$

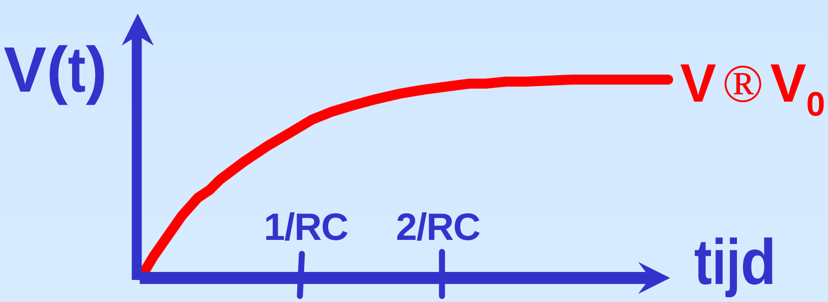
$$I_L(t=0) = 0$$

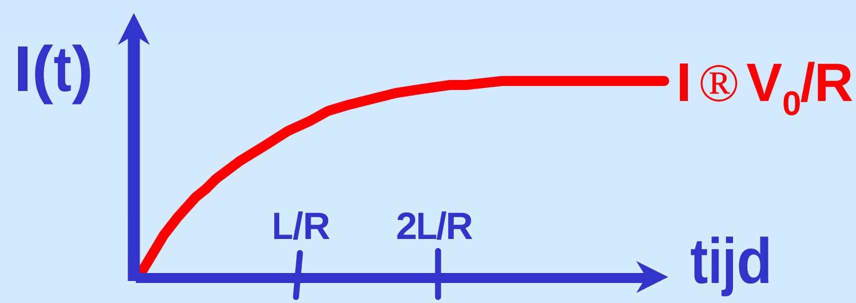
$$I_L(t) = I(t)$$

$$V_R = IR$$

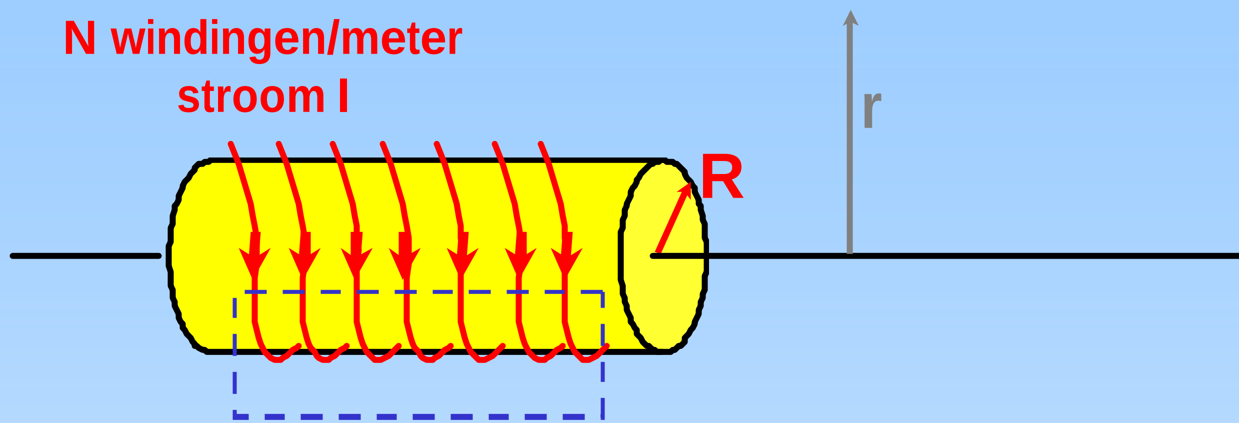
$$V_0 - V_C = IR = RC\frac{dV_C}{dt} \Rightarrow V_C(t) = V_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$V_0 - L\frac{dI_L}{dt} = IR \Rightarrow I_L(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right)$$





Zelfinductie solenoïde



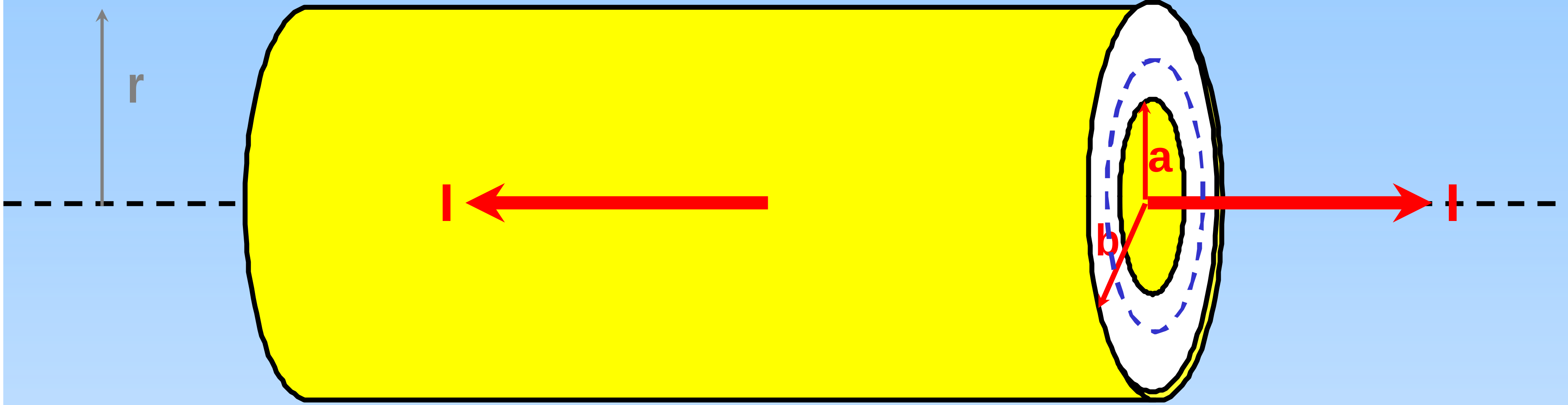
B-veld: Ampère : $r < R: \quad lB = m_0 NlI \Rightarrow B = m_0 NI$

Flux per winding: $\Phi_B^1 = \int\limits_{schijf} \vec{B}\cdot d\vec{o} = \int_0^{2p}\int_0^{R} m_0 NIrdrdj = m_0 NIp\ R^2$

Flux $\mathrm{F}_{\mathbf{B}}$ **(lengte l):** $\Phi_B = N\,\Phi_B^1 * l = m_0 N^2 Ip\ R^2 * l$

Zelfinductie L (lengte l): $L \equiv \dfrac{\Phi_B}{I} = m_0 N^2 pR^2 * l$

Zelfinductie coaxiale kabel



B-veld: Ampère : $a < r < b : \quad 2prB = m_0 I \Rightarrow B = \dfrac{m_0 I}{2pr}$

Flux F_B **(lengte l):** $\Phi_B = l * \int_a^b \dfrac{m_0 I}{2pr} dr = l * \dfrac{m_0 I}{2p} \ln(b/a)$

Zelfinductie L (lengte l): $L \equiv \dfrac{\Phi_B}{I} = l * \dfrac{m_0}{2p} \ln(b/a)$

Energie

Dissipatie in een weerstand R

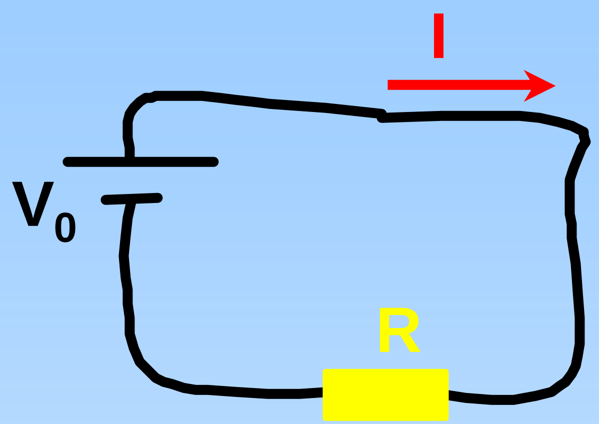
Energie in een capaciteit C

Energie in een zelfinductor L

Energie van een elektrische veld configuratie

Energie van een magnetische veld configuratie

Dissipatie in weerstand R



Opmerking:
de gedissipeerde energie is
"weg" d.w.z. verdwijnt als warmte

De EMK (V_0) pompt iedere seconde I Coulombs rond.
Dat kost werk=energie (batterij raakt leeg!)
Die energie wordt gedissipeerd in de weerstand R

Wat is numeriek de energie dissipatie?

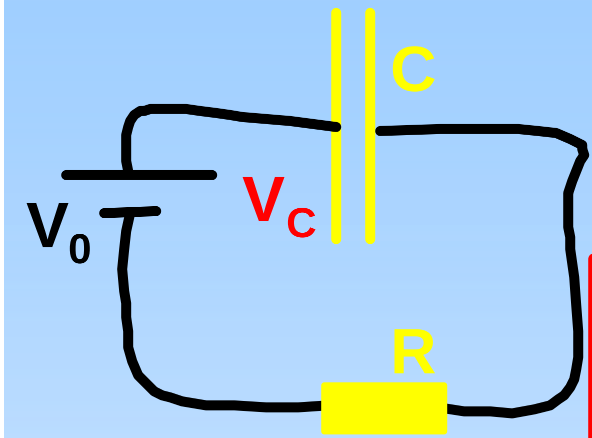
$$P \equiv \text{vermogen} = \frac{\text{energie}}{\text{seconde}}$$

Joule's dissipatie wet

$$= V_0 \cdot \frac{\#\ \text{rondgepompte Coulombs}}{\text{seconde}} = V_0 \cdot I = I^2 \bullet R = \frac{V^2}{R}$$

[P]=[VI]
=Volt . Ampère
≡Watt

Energie in een: capaciteit C
zelfinductor L



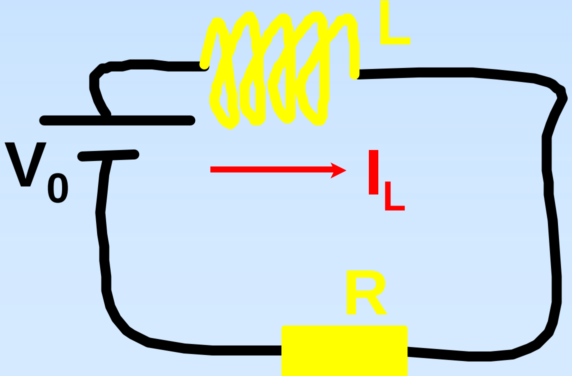
De capaciteit wordt opgeladen:

- warmte ontwikkeling in R “weg”
- opgeladen capaciteit is opgeslagen “energie”

Hoeveel energie is dat?

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = V_C(t)\cdot I(t) = \frac{Q_C}{C}\cdot\frac{dQ_C}{dt}$$

$$\Rightarrow U_C = \int_0^\infty \frac{dW}{dt}dt = \int_0^\infty \frac{Q_C}{C}\frac{dQ_C}{dt}dt = \int_0^Q \frac{Q_C}{C}dQ_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$



De stroom gaat door de spoel lopen:

- warmte ontwikkeling in R “weg”
- stroom in inductor is opgeslagen “energie”

Hoeveel energie is dat?

$$P \equiv \frac{dW}{dt} = I_L(t)\cdot V_{Ind}(t) = I_L\cdot L\frac{dI_L}{dt}$$

$$\Rightarrow U_L = \int_0^\infty \frac{dW}{dt}dt = \int_0^\infty I_L L\frac{dI_L}{dt}dt = \int_0^I I_L L\, dI_L = \frac{1}{2}LI^2$$

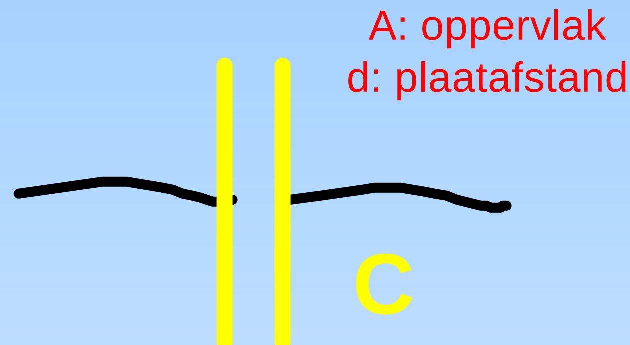
Energie in: E-veld

$$U_{Elektrisch} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{volume} E^2 dv$$

Enerzijds: $U_C = \frac{1}{2} C V^2$

Anderzijds: $U_C = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{volume} E^2 \mathrm{d}v$

zelfde?



$$\begin{cases} E = \frac{V}{d} \\ C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \end{cases} \Rightarrow \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{volume} E^2 \mathrm{d}v = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{V^2}{d^2} d\,A = \frac{1}{2} C V^2$$

E≠0 in het volume=dA

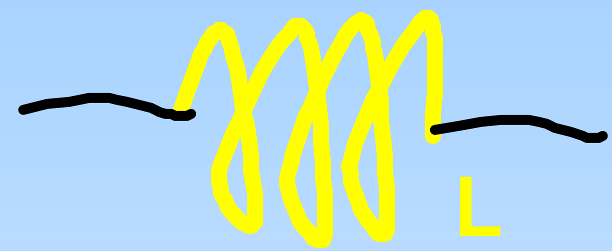
Energie in: B-veld

$$U_{Magnetisch} = \frac{1}{2m_0} \int_{volume} B^2 dv$$

Enerzijds: $U_L = \frac{1}{2} L I^2$

Probeer: $U_L = \frac{1}{2m_0} \int_{volume} B^2 dv$

zelfde?

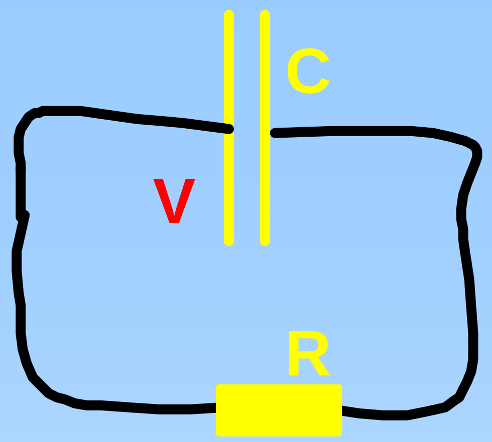


Solenoide/meter:
$$\begin{cases} L = m_0 N^2 p R^2 \Rightarrow U_L = \dfrac{m_0 N^2 p R^2 I^2}{2} \\ B = m_0 N I \Rightarrow U_L = \dfrac{1}{2m_0} \displaystyle\int_{solenoide} (m_0 N I)^2 dv = \dfrac{1}{2m_0} (m_0 N I)^2 p R^2 = \dfrac{m_0 N^2 p R^2 I^2}{2} \end{cases}$$

Coaxkabel/meter:
$$\begin{cases} L = \dfrac{m_0}{2p} \ln(b/a) \Rightarrow U_L = \dfrac{m_0 \ln(b/a) I^2}{4p} \\ B = \dfrac{m_0 I}{2pr} \Rightarrow U_L = \dfrac{1}{2m_0} \displaystyle\int_{coaxkabel} \left(\dfrac{m_0 I}{2pr}\right)^2 dv = \dfrac{1}{2m_0} \int_0^{2p} \int_a^b \left(\dfrac{m_0 I}{2pr}\right)^2 r\,dr\,dj = \dfrac{m_0 \ln(b/a) I^2}{4p} \end{cases}$$

Dus:
- hetzelfde!
- handige manier om L te bepalen: $L \equiv 2U_L / I^2$

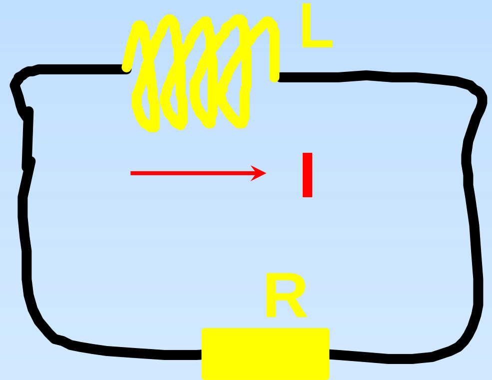
Opgaven voor jullie



Na opladen condensator haal je batterij weg.
De lading op condensator neemt exponentieel af.
Bereken gedissipeerde energie in weerstand R.
Moet 0.5 CV^2 geven! Op t=0 geldt: $V_C = V_0$.

$$\text{Antwoord}: V(t) = V_0 e^{-t/RC} \Rightarrow \text{stroom door R}: I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} \equiv P \equiv VI \rightarrow \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} \Rightarrow W = \int_0^\infty \frac{dW}{dt} dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C V_0^2$$



Zodra stroom constant is haal je batterij weg.
De stroom in spoel neemt exponentieel af.
Bereken gedissipeerde energie in weerstand R.
Moet 0.5 LI^2 geven! Op t=0 geldt: $I_L = I_0 = V_0/R$.

$$\text{Antwoord}: I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-tR/L} \Rightarrow \text{spanning over R}: V(t) = V_0 e^{-tR/L}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dt} \equiv P \equiv VI \rightarrow \frac{V_0^2}{R} e^{-2tR/L} \Rightarrow W = \int_0^\infty \frac{dW}{dt} dt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R} e^{-2tR/L} dt = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 \equiv \frac{1}{2} L I_0^2$$

II Wat heb ik geleerd?

Zelfinductie

$$\Phi_B \equiv LI$$

toroide: $L = \dfrac{m_0 n^2 h \ln(b/a)}{2p} \rightarrow m_0 N^2 A 2p\, a$

solenoide: $L = m_0 N^2 p\, R^2 l$

coaxkabel: $L = \dfrac{m_0}{2p} \ln(b/a) l$

Energie C & L
Energie E & B velden

$$U_L \equiv \frac{1}{2} L\, I^2 = \frac{1}{2m_0} \int_{volume} B^2 dv \;\; \& \;\; U_C \equiv \frac{1}{2} C\, V^2 = \frac{e_0}{2} \int_{volume} E^2 dv$$

Inhoud

Elektromagnetisme Þ Licht

- **Elektromagnetische inductie & wet van Faraday**

II. Zelfinductie & energie

III. Maxwell vergelijkingen & elektromagnetische golven

Griffiths Chapter 7:

OMaxwell Equations: §7.3.1 t/m §7.3.3
OMaxwell Equations: §7.3.4 t/m §7.3.6 Doorlezen en ‘passief’ begrijpen

Griffiths Chapter 9:

OElectromagnetic Waves in Vacuum: §9.2.1 t/m §9.2.2

Maxwell vergelijkingen

Maxwell’s term via “experimenten”

Maxwell’s term via behoud van lading

Maxwell vergelijkingen

Waar staan wij nu?

"Gauss" :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{r}{e_0} \qquad \oint_{oppervlak} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q_{omsloten}}{e_0}$$

"geen monopolen" :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \oint_{oppervlak} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

"Faraday" :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint_{kring} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

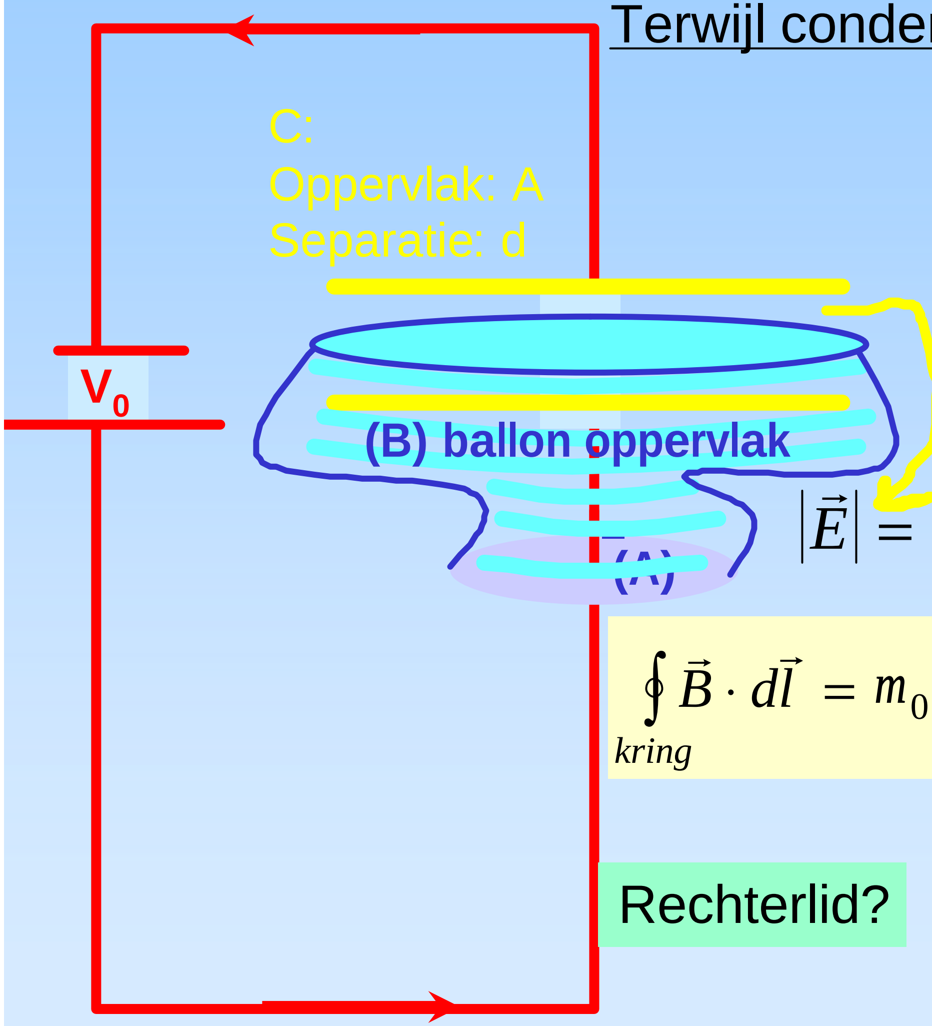
"Ampère" :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = m_0 \vec{J} \qquad \oint_{kring} \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I_{omsloten}$$

Het lijkt mij evident dat er een term ¶E/¶t ontbreekt!
Hoe vind je die? Door:

- **(gedachten) experimenten te doen** (2 voorbeelden)
- **ladingsbehoud te eisen**

Maxwell’s term: opladende condensator



Terwijl condensator oplaadt: $\oint_{kring} \vec{B}\cdot d\vec{l} = m_0 I_{omsloten}$

Rechterlid? $\begin{cases} \text{(A):} \rightarrow \mu_0 I \\ \text{(B):} \rightarrow 0 \end{cases}$

Dus er mist iets! Gebruik feit dat:

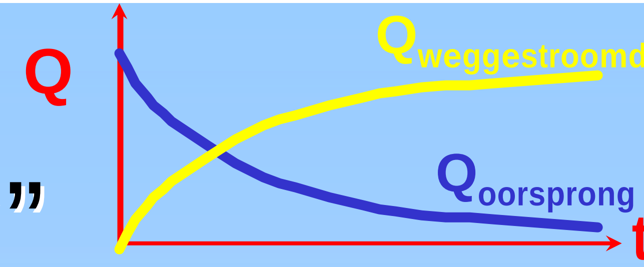
$$|\vec{E}| = \frac{s}{e_0} = \frac{Q}{Ae_0} \Rightarrow \left|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right| = \frac{1}{Ae_0}\frac{dQ}{dt} \equiv \frac{I}{Ae_0}$$

$$\oint_{kring} \vec{B}\cdot d\vec{l} = m_0 I_{omsloten} \rightarrow m_0 I_{omsloten} + m_0 e_0 \int_{oppervlak} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{o}$$

Rechterlid? $\begin{cases} \text{(A):} \rightarrow \mu_0 I \\ \text{(B):} \rightarrow \mu_0 e_0 \int_{oppervlak} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{o} = \mu_0 e_0 \frac{IA}{Ae_0} = \mu_0 I \end{cases}$

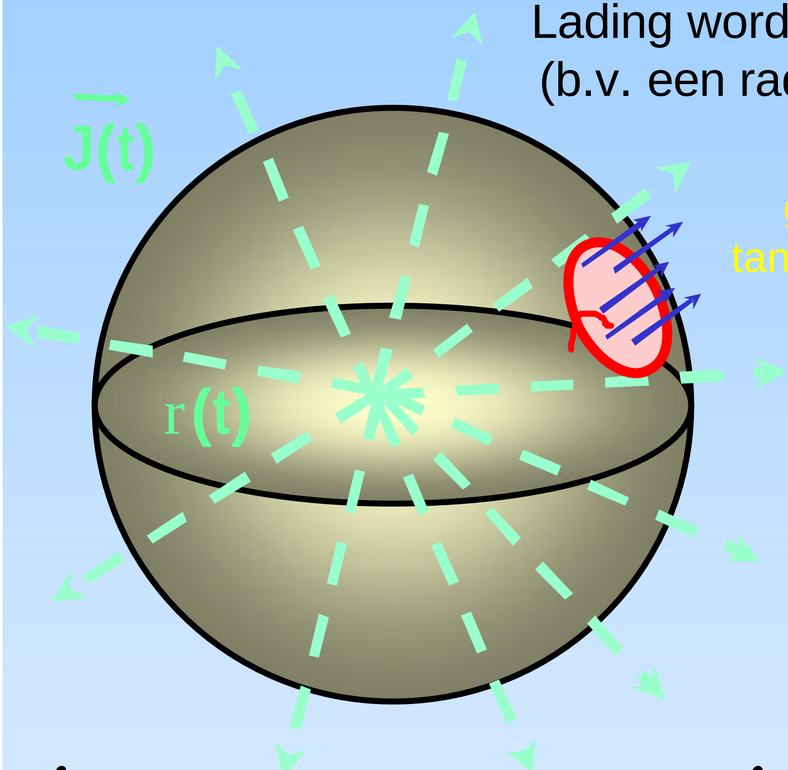
Magie? Ja, een beetje maar ok zolang resultaat klopt met experiment!

Maxwell's term: "spuitende puntlading"



Lading wordt radieel naar buiten gespoten
(b.v. een radioactieve bron in oorsprong)

$$\vec{J} = \frac{Q}{\tau}\,\frac{e^{-t/\tau}\,\hat{r}}{4\pi r^2}$$



Symmetrie:
geen component B
tangentieel boloppervlak $\Rightarrow$ $\displaystyle\oint_{\text{kring op bol oppervlak}} \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$

maar: $\mu_0 I_{omsloten} \neq 0$

$$\text{Samen met: } \vec{E} = e^{-t/\tau}\frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\oint_{kring} B\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{omsloten}$$

$$\rightarrow \mu_0 I_{omsloten} + \mu_0\varepsilon_0 \int_{oppervlak} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{\sigma}$$

$$\oint_{kring} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{omsloten} + \mu_0\varepsilon_0 \int_{oppervlak} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{\sigma} =$$

$$\mu_0 \int_{oppervlak} \left(\vec{J} + \frac{\varepsilon_0\partial\vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{\sigma} = \mu_0 \int_{oppervlak} \left(\frac{Q}{\tau}\frac{e^{-t/\tau}\hat{r}}{4\pi r^2} - \varepsilon_0 \frac{Q}{\tau}\frac{e^{-t/\tau}\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) d\vec{\sigma} = 0$$

Klopt weer!

Behoud van lading (Continuïteit vergelijking)

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = m_0\vec{J}$$

geen behoud van lading!

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = m_0\vec{J} + m_0 e_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Lading is een absoluut behouden grootheid d.w.z.

$\sum_i Q_i$=constant $\left\{\begin{array}{l}\text{ladingsstroom door oppervlak} \\ = \\ \text{ladingsverandering binnen volume}\end{array}\right.$

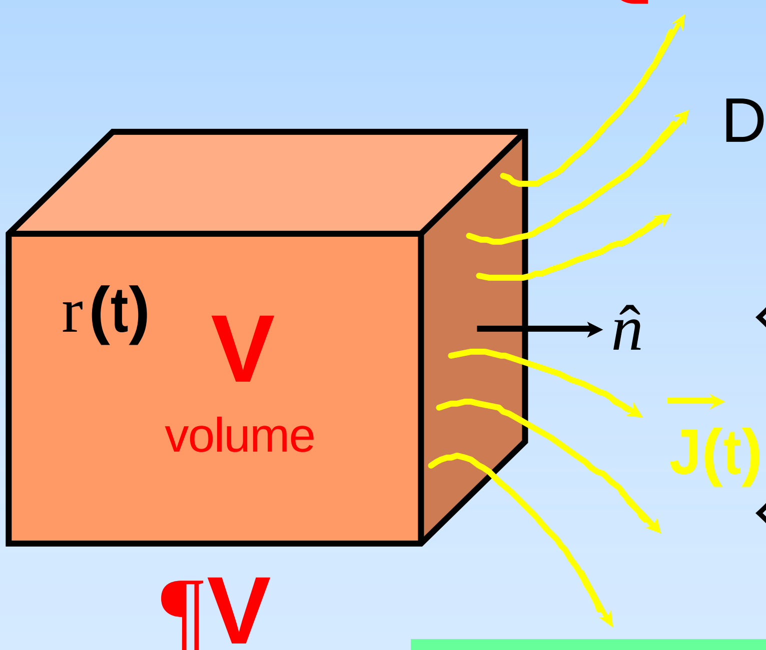
ladingsstroom door oppervlak: $\oint_{\partial V}\vec{J}\cdot d\vec{o}$

ladingsverandering binnen volume: $\frac{d}{dt}\int_V r\,dv$

$$\text{Dus: } 0 \equiv \frac{d}{dt}\int_V r\,dv + \oint_{\partial V}\vec{J}\cdot d\vec{o}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = \frac{d}{dt}\int_V r\,dv + \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dv$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = \int_V \frac{\partial r}{\partial t}dv + \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}\,dv \Longrightarrow 0 = \frac{\partial r}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$



¶V

omsluitend oppervlak

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0 = m_0\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + m_0 e_0\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = m_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial r}{\partial t}\right)$$

Maxwell vergelijkingen

"Gauss" : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{r}{e_0}$ $\qquad \oint_{oppervlak} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{Q_{omsloten}}{e_0}$

"geen monopolen" : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\qquad \oint_{oppervlak} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0$ $\qquad \equiv -\frac{d\Phi_B}{dt}$

"Faraday" : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad \oint_{kring} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{oppervlak} \vec{B} \cdot d\vec{o}$ $\qquad \equiv m_0 e_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

"Ampère" : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = m_0 \vec{J} + m_0 e_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\qquad \oint_{kring} \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I_{omsloten} + m_0 e_0 \frac{d}{dt} \int_{oppervlak} \vec{E} \cdot d\vec{o}$

Dit is het dus!

Dit=elektrostatica

magnetostatica

elektrodynamica

licht (elektromagnetische golven)

…………

Ook nog eens:
relativistisch invariant!

Elektromagnetische golven

Golfvergelijkingen voor $\vec{E}$ & $\vec{B}$

Eigenschappen

Golfvergelijkingen voor $\vec{E}$ & $\vec{B}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix} = \hat{i}\left(\partial_y\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)-\partial_z\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\right)+\hat{j}\ldots+\hat{k}\ldots$$

$$=\hat{i}\left(\partial_x\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)-\left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)E_x\right)+\hat{j}\ldots+\hat{k}\ldots = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}$$

Gebruik Maxwell vergelijkingen in vacuüm d.w.z. $r = 0$ en $\vec{J} = \vec{0}$

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{r}{e_0} \longrightarrow 0$$

$$-\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E} = \vec{\nabla}\cancel{\left(\frac{r}{e_0}\right)}^{\text{® } 0}-\nabla^2\vec{E} \rightarrow -\nabla^2\vec{E}$$

$$-\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)}{\partial t} = \cancel{-m_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}}^{\text{® } 0}-m_0e_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \rightarrow -m_0e_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow$$

"vlakke golven"

$$\nabla^2\vec{E} = m_0e_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = m_0\vec{J}+m_0e_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \rightarrow m_0e_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Idem voor B – veld: $\nabla^2\vec{B} = m_0e_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$

Wat impliceren deze vergelijkingen?

Trillingen & golven:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial^2 t} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$ representeert golfbeweging met snelheid $v = v$

Typische oplossing: $y\,(z,t) = A\cos(kz - wt)$ waarbij geldt: $w^2 \equiv k^2 v^2$

Dus: $$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{m_0 e_0} \nabla^2 \vec{B} = c^2 \nabla^2 \vec{B} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{m_0 e_0} \nabla^2 \vec{E} = c^2 \nabla^2 \vec{E} \end{cases}$$ representeert golfbeweging, snelheid $v = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 e_0}} \equiv c$

Hoe zien de oplossingen eruit?

Om het "simpel" te houden neem ik aan:

(1) $\vec{E}$ & $\vec{B}$ hangen slechts af van t en z

(2) medium is vacuüm

(3) ruimte is oneindig

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \end{cases}$$

Eigenschappen

$$\frac{1}{c}\hat{k}\times\vec{E}^0=\frac{1}{c}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & 1\\ E_x^0 & E_y^0 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{c}\begin{pmatrix}-E_y^0\\ +E_x^0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_x^0\\ B_y^0\\ 0\end{pmatrix}=\vec{B}^0$$

Probeer $?^2\equiv k^2c^2 \Leftrightarrow ?=kc$:

$$\begin{cases}\vec{B}(z,t)=\vec{B}^0\cos(kz-wt)\\ \vec{E}(z,t)=\vec{E}^0\cos(kz-wt)\end{cases}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \quad \Rightarrow 0=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(z,t)=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}^0\cos(kz-wt)=-E_z^0 k\sin(kz-wt)\Rightarrow E_z^0=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad \Rightarrow 0=\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(z,t)=\vec{\nabla}\cdot\vec{B}^0\cos(kz-wt)=-B_z^0 k\sin(kz-wt)\Rightarrow B_z^0=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B}^0\cos(kz-wt)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}^0\cos(kz-wt)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}+kB_y^0\\ -kB_x^0\\ 0\end{pmatrix}\sin(kz-wt)=\frac{1}{c^2}\begin{pmatrix}wE_x^0\\ wE_y^0\\ 0\end{pmatrix}\sin(kz-wt)\Leftrightarrow\begin{cases}+cB_y^0=E_x^0\\ -cB_x^0=E_y^0\end{cases}\Rightarrow \vec{B}^0=\frac{1}{c}\hat{k}\times\vec{E}^0$$

Zelfde!

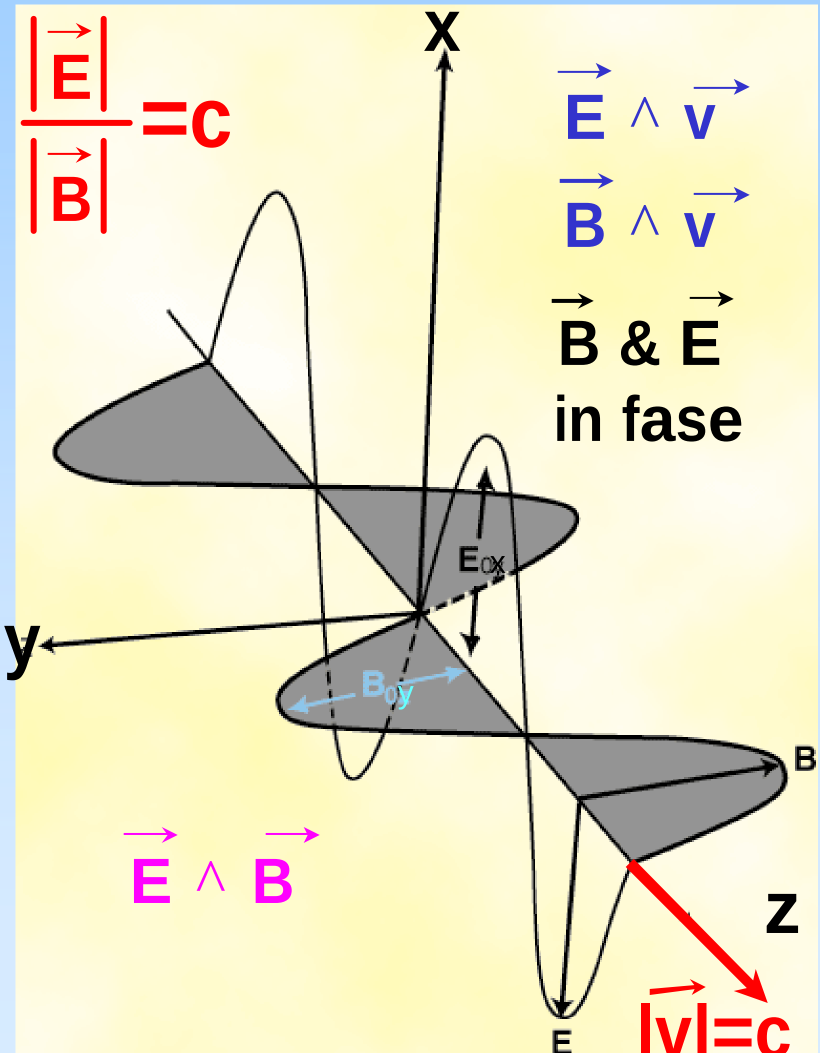
(niet verwonderlijk)

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}^0\cos(kz-wt)=-\frac{\partial\vec{B}^0\cos(kz-wt)}{\partial t}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}+kE_y^0\\ -kE_x^0\\ 0\end{pmatrix}\sin(kz-wt)=\begin{pmatrix}-wB_x^0\\ -wB_y^0\\ 0\end{pmatrix}\sin(kz-wt)\Leftrightarrow\begin{cases}-E_y^0=cB_x^0\\ +E_x^0=cB_y^0\end{cases}\Rightarrow \vec{B}^0=\frac{1}{c}\hat{k}\times\vec{E}^0$$

Eigenschappen als plaatjes

In het vacuüm bestaan oplossingen van de Maxwell vergelijkingen
("elektromagnetische, EM, golven") die zich met de lichtsnelheid voortplanten!



Energie dichtheid

$$\frac{u_E^2}{u_B^2} = \frac{\frac{e_0}{2}\left|\vec{E}^0\right|^2}{\frac{1}{2m_0}\left|\vec{B}^0\right|^2} = c^2 e_0 m_0 \equiv 1$$

[EM golf in de tijd](http://webphysics.davidson.edu/Applets/EMWave/EMWave.html)
http://webphysics.davidson.edu/Applets/E
MWave/EMWave.html

[Breking van licht](http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/propagation/propagation.html)
http://www.phy.ntnu.edu.tw/java
/propagation/propagation.html

Toepassingen:
- "gewoon" licht
- radio & TV golven
- mobiele telefonie
- Röntgen
- etc.

oscillerend E-veld
Þ elektrische stroom

III Wat heb ik geleerd?

"Gauss" : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{r}{e_0}$ $\quad \oint_{oppervlak} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{Q_{omsloten}}{e_0}$

"geen monopolen" : $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\quad \oint_{oppervlak} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0$

$\equiv -\frac{d\Phi_B}{dt}$

$\equiv m_0 e_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

"Faraday" : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \oint_{kring} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{oppervlak} \vec{B} \cdot d\vec{o}$

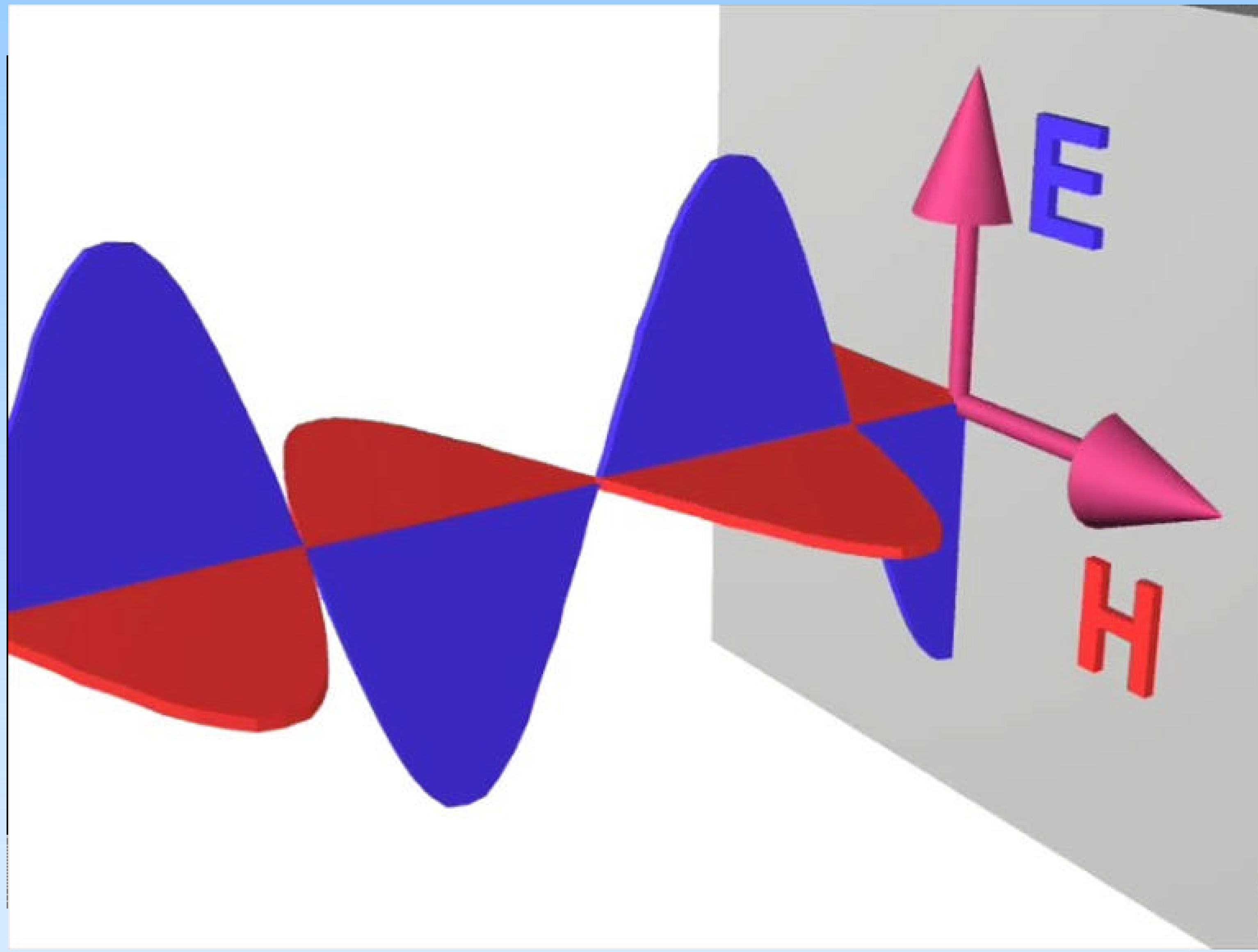
"Ampère" : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = m_0 \vec{J} + m_0 e_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\quad \oint_{kring} \vec{B} \cdot d\vec{l} = m_0 I_{omsloten} + m_0 e_0 \frac{d}{dt} \int_{oppervlak} \vec{E} \cdot d\vec{o}$

$\vec{k} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \end{pmatrix} = k\hat{k}$

EM golf vgl.: $\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \end{cases}$ oplossing: $\begin{cases} \vec{B}(z,t) = \vec{B}^0 \cos(kz - wt) \\ \vec{E}(z,t) = \vec{E}^0 \cos(kz - wt) \end{cases}$ met: $\begin{cases} w = kc, \begin{cases} \vec{B}^0 \perp \vec{k} \\ \vec{E}^0 \perp \vec{k} \end{cases} \\ \vec{B}^0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}^0 \end{cases}$

Polarisatie

Polarisatie van licht

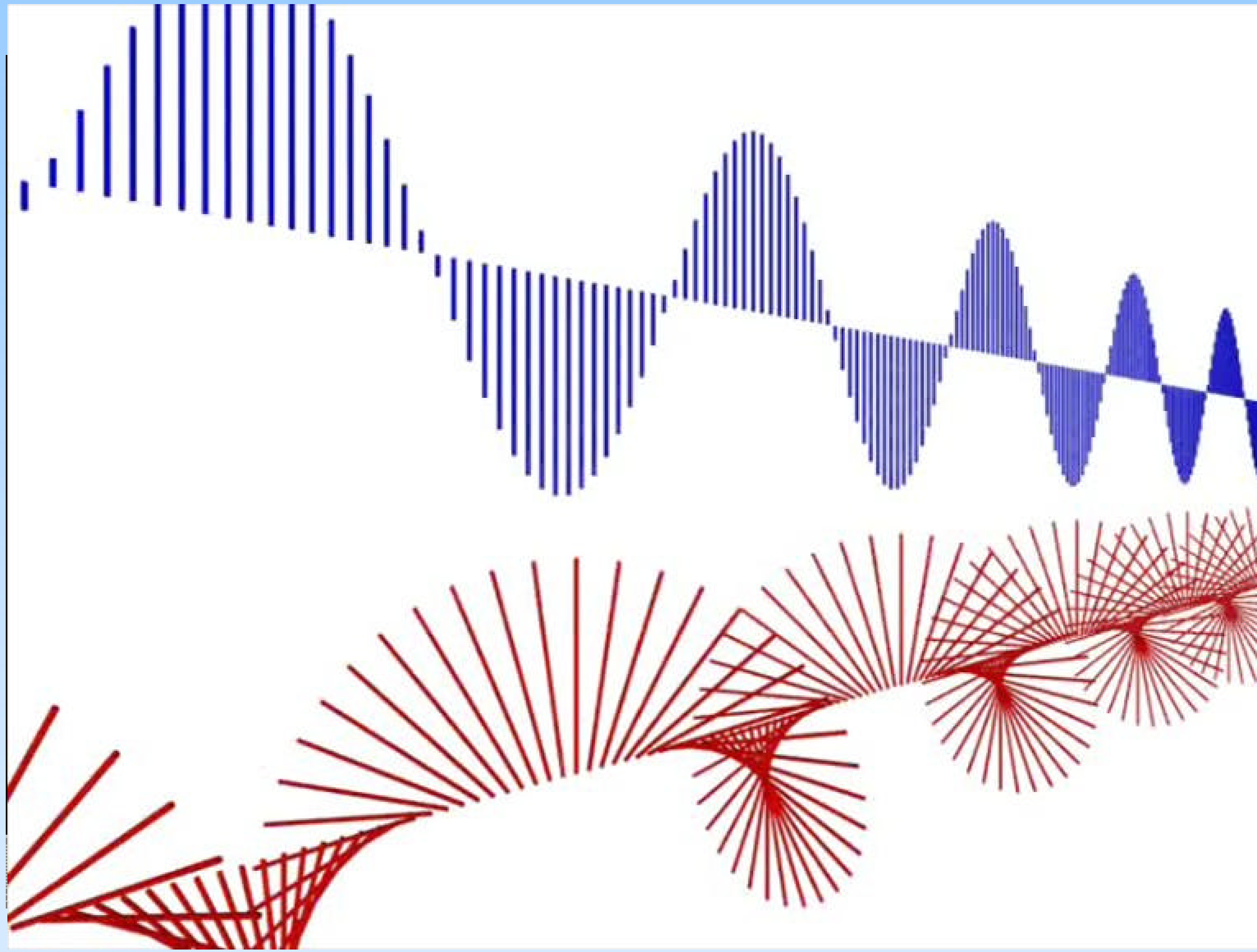


Verticale polarisatie.

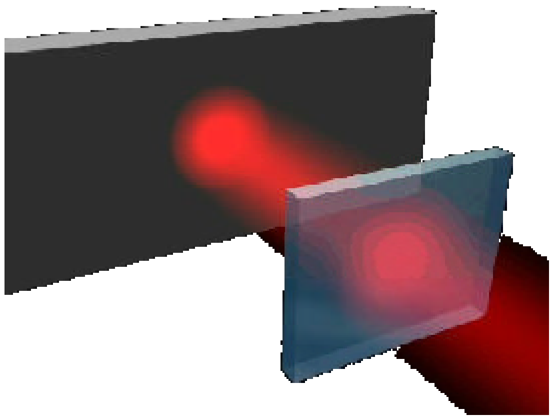
Polarisatie van licht

Horizontale
Polarisatie

Circulaire
polarisatie

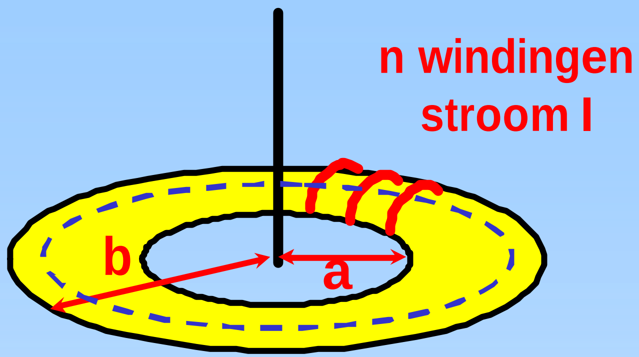


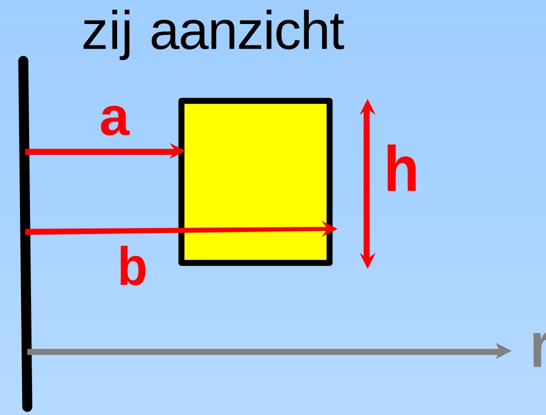
Polarisator



Zelfinductie toroide

OPGAVE





B-veld: Ampère : $a < r < b: \quad 2prB = m_0 nI \Rightarrow B = \dfrac{m_0 nI}{2pr}$

Flux per winding: $\Phi_B^1 = \int_{rechthoek} \vec{B}\cdot d\vec{o} = h\int_a^b \dfrac{m_0 nI}{2pr}dr = \dfrac{m_0 nIh}{2p}\ln(b/a)$

Totale flux F_B**:** $\Phi_B = n\,\Phi_B^1 = \dfrac{m_0 n^2 Ih}{2p}\ln(b/a)$

Zelfinductie L: $L \equiv \dfrac{\Phi_B}{I} = \dfrac{m_0 n^2 h}{2p}\ln(b/a)$

Indien $b \approx a$ d.w.z. $b = a + d$

$L = \dfrac{m_0 n^2 h}{2p}\ln(1 + d/a) \approx \dfrac{m_0 n^2 hd}{2pa}$

$\left.\begin{array}{l} 2pa\text{: omtrek} \\ hd\text{: oppervlak } A \\ N \equiv \dfrac{n}{2pa}\text{: windingen/m} \end{array}\right\} \Rightarrow L = m_0 N^2 A * 2pa$