COÖRDINATENSTELSELS

inleiding

Beschouw achtereenvolgens functies $f(r)$
(a) in $\mathbb{R}^2$: van de afstand r tot het middelpunt van een cirkel met straal R om de oorsprong;
(b) in $\mathbb{R}^3$: van de afstand r tot de as van een cilinder met straal R en lengte L om de z-as;
(c) in $\mathbb{R}^3$: van de afstand r tot het middelpunt van een bol met straal R om de oorsprong.

Als we $f(r)$ willen integreren over het oppervlak van de cirkel, het volume van de cilinder of het volume van de bol, schrijven we

$$\int_{cirkel} f(r)\ \mathrm{d}o \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^R f(r)\ r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^R f(r)\ 2\pi r\mathrm{d}r \tag{a}$$

$$\int_{cilinder} f(r)\ \mathrm{d}v \equiv \int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r)\ r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^R f(r)\ 2\pi rL\mathrm{d}r \tag{b}$$

$$\int_{bol} f(r)\ \mathrm{d}v \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R f(r)\ r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^R f(r)\ 4\pi r^2\mathrm{d}r \tag{c}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van
(a) poolcoördinaten $(r,\ \varphi)$ in $\mathbb{R}^2$; met lokale orthogonale eenheidsvectoren $\hat{r}$ en $\hat{\varphi}$;
(b) cilindercoördinaten $(r,\ \varphi,\ \zeta)$ in $\mathbb{R}^3$ met lokale orthogonale eenheidsvectoren $\hat{r} = \hat{\varphi}\times\hat{\zeta}$ enz;
(c) bolcoördinaten $(r,\ \theta,\ \varphi)$ in $\mathbb{R}^3$ met lokale orthogonale eenheidsvectoren $\hat{r} = \hat{\theta}\times\hat{\varphi}$ enz.

(a) poolcoördinaten $(r,\ \varphi)$

transformatie naar cartesische coördinaten en omgekeerd:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = \arg(x+\mathrm{i}y)$$

cartesische componenten van de lokale eenheidsvectoren:

$$\hat{r} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$
$$\hat{\varphi} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi) = (\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

(b) cilindercoördinaten $(r,\ \varphi,\ \zeta)$

transformatie naar cartesische coördinaten en omgekeerd:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = \zeta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = \arg(x+\mathrm{i}y) \qquad \zeta = z$$

cartesische componenten van de lokale eenheidsvectoren:

$$\hat{r} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0)$$
$$\hat{\varphi} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) = (\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0)$$
$$\hat{\zeta} = (0,\ 0,\ 1)$$