Voorlopig
nummers
verwijzen
naar Alonso Finn
sorry hiervoor

I ELEKTRISCHE KRACHT EN ELEKTRISCH VELD

empirische wet

Wet van Coulomb: een rustende lading Q in de oorsprong oefent op een rustende lading q in het punt $\vec{r}$ een kracht uit gegeven door

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad \left(\equiv \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right) \tag{21.4}$$

definities

Het *elektrische veld* in een punt $\vec{r}$ is de kracht per eenheid van lading in dat punt:

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \tag{21.7}$$

De *elektrische flux* door een (3-dimensionaal) oppervlak o is

$$\Phi_E \equiv \int_o \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{o} \tag{25.6}$$

waarbij $\mathrm{d}\vec{o}$ richting en grootte van een oppervlakte-elementje van o aangeeft.

afgeleide wet

Wet van Gauss voor het elektrostatische veld: De elektrische flux door een gesloten oppervlak is

$$\boxed{\oint_o \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{o} = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \tag{25.8}$$

waarbij Q de totale lading binnen het oppervlak voorstelt.

voorbeelden

Het elektrische veld in een punt $\vec{r}$ ten gevolge van een puntlading Q in de oorsprong is

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{21.10}$$

Het elektrische veld in een punt P ten gevolge van een aantal puntladingen q_i, zo gelegen dat $\vec{r}_P - \vec{r}_{q_i} = \vec{r}_i$, is

$$\vec{E}_P = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}_i$$

Het elektrische veld in een punt P ten gevolge van een ladingsverdeling met ladingselementen $dq = \lambda \mathrm{d}l$ of $dq = \sigma \mathrm{d}o$ of $dq = \rho \mathrm{d}v$, zo gelegen dat $\vec{r}_P - \vec{r}_{dq} = \vec{r}$, is

$$\vec{E}_P = \int_{lijn} \frac{\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\lambda dl \quad \text{(lijnlading)}$$
$$\vec{E}_P = \int_{opp} \frac{\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sigma do \quad \text{(oppervlaklading)}$$
$$\vec{E}_P = \int_{vol} \frac{\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\rho dv \quad \text{(volumelading)}$$

Het elektrische veld langs de as, respectievelijk in het middelloodvlak van een dipool $\vec{p}$ in de oorsprong is

$$\vec{E}_{as} = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad (21.25)$$
$$\vec{E}_\perp = \frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Het elektrische veld op afstand r van een lijn langs de z-as met uniforme ladingsdichtheid λ is

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r} \qquad \text{(p552)}$$

Het elektrische veld ten gevolge van een vlak met uniforme ladingsdichtheid σ heeft de grootte

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \text{(p666)}$$

Het elektrische veld ten gevolge van een bol om de oorsprong met straal R, uniforme ladingsdichtheid ρ en totale lading Q is

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad (\text{als } r \geq R) \qquad (25.10)$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r} \quad (\text{als } r \leq R) \qquad (25.11)$$

wiskunde

De *gradiënt* van een scalaire functie $T(x,y,z)$ is het vectorveld

$$\vec{\nabla} T \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Voor een verandering dT geldt

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz = \vec{\nabla} T \bullet d\vec{l}$$

voorbeelden:

$$\vec{\nabla} r = \hat{r}$$
$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

II VELDVERGELIJKINGEN NADER BEKEKEN

definities

De *potentiaal* in een punt P is bepaald door de lijnintegraal langs een willekeurig pad

$$V_P \equiv \int_P^\infty \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

mits als referentie $V_\infty = 0$ kan worden gekozen.

afgeleide wetten

Het potentiaalverschil tussen twee punten A en B is de lijnintegraal langs een willekeurig pad

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (25.2)$$

(de uitkomst is onafhankelijk van de keuze van het referentiepunt).
Voor een *kringintegraal van het elektrische veld* geldt

$$\boxed{\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0} \qquad (25.4)$$

Het verband tussen elektrisch veld en potentiaal is

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Differentiële vorm van de wet van Gauss voor het elektrostatische veld: de divergentie van het elektrische veld is

$$\boxed{\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

De energie van een gegeven verdeling van puntladingen q_i is

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \qquad (21.22)$$

De energie van een ladingsverdeling met ladingselementen $dq = \rho dv$ is

$$U = \frac{1}{2} \int_{ruimte} \rho V dv = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{ruimte} E^2 dv \qquad (25.39)$$

voorbeelden

Het potentiaalveld van een puntlading in de oorsprong is

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (21.20)$$

Het potentiaalveld van een dipool $\vec{p}$ in de oorsprong, wijzend in de richting $\theta = 0$, is

$$V(r,\theta) = \frac{\vec{p} \bullet \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (21.24)$$

Het potentiaalveld (met referentie $V(1) = 0$!) op afstand r van een lijn met uniforme ladingsdichtheid λ is

$$V(r) = \frac{-\lambda \ln r}{2\pi\varepsilon_0} \qquad (p560)$$

Binnen, respectievelijk buiten een bol om de oorsprong met straal R en uniforme ladingsdichtheid ρ is

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \vec{\nabla} \bullet \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{als } r \leq R)$$
$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \vec{\nabla} \bullet \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\right) = 0 \quad (\text{als } r > R)$$

De energie van twee puntladingen q_1 en q_2 op afstand r is

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad (21.21)$$

De energie van een boloppervlak met straal R, uniforme ladingsdichtheid σ en totale lading Q is

$$U = \frac{2\pi\sigma^2 R^3}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (p687)$$

De energie van een bol om de oorsprong met straal R, uniforme ladingsdichtheid ρ en totale lading Q is

$$U = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad (p689)$$

wiskunde

De *divergentie* van een vectorveld $\vec{A}(x,y,z)$ is de scalaire functie

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Stelling van Gauss: de integraal van de divergentie van $\vec{A}$ over een volume v is gelijk aan de flux van $\vec{A}$ door het gesloten oppervlak o om v:

$$\int_v (\vec{\nabla} \bullet \vec{A})\mathrm{d}v = \oint_o \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{o}$$

III ELEKTRISCHE VELDEN IN MATERIE: POLARISATIE

definities

Een (*ideale*) *geleider* is een lichaam dat een (ongelimiteerde) hoeveelheid lading bevat die (volkomen) vrij door dat lichaam kan bewegen.
Een *condensator* is een systeem van twee geleiders (+ en –) met ladingen $+Q > 0$ en $-Q < 0$.
De *capaciteit* van een condensator is de positieve grootheid

$$C \equiv \frac{Q}{V} \tag{25.29}$$

waarin $V \equiv V_+ - V_-$ het positieve potentiaalverschil tussen de geleiders voorstelt.

Een *isolator* (*diëlektricum*) is een lichaam dat uitsluitend gebonden lading bevat.
De *polarisatie* $\vec{P}$ in een diëlektricum is het dipoolmoment per volume-eenheid.
De *elektrische verschuiving* $\vec{D}$ is overal gedefinieerd door

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{25.16}$$

Voor *lineaire* isolatoren worden de *elektrische susceptibiliteit* χ_e, de *diëlektrische constante* K_e en de *permittiviteit* ε gedefinieerd door de relaties

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \tag{25.18}$$

$$K_e = 1 + \chi_e \tag{25.21}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{25.19}$$

afgeleide wetten

De energie van een condensator met capaciteit C, ladingen $\pm Q$ en potentiaalverschil V is

$$U = \tfrac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV \tag{25.37}$$

Een dipool $\vec{p}$ ondervindt in een homogeen elektrisch veld $\vec{E}$ geen kracht, maar wel een krachtmoment

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{p563}$$

De gebonden ladingsdichtheden op, respectievelijk in een diëlektricum zijn gelijk aan

$$\begin{aligned} \sigma_{pol} &= \vec{P} \bullet \hat{n} \\ \rho_{pol} &= -\vec{\nabla} \bullet \vec{P} \ (= 0 \text{ als } \vec{P} \text{ homogeen is}) \end{aligned} \tag{p677}$$

Het veld $\vec{D}$ voldoet algemeen aan

$$\oint_o \vec{D} \bullet d\vec{o} = Q_{vrij} \quad \text{ofwel} \quad \vec{\nabla} \bullet \vec{D} = \rho_{vrij} \tag{25.17}$$

In een lineaire isolator geldt

$$\varepsilon = K_e \varepsilon_0 = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \qquad (25.20)$$

voorbeelden

Beschouw in het vlak $z = 0$ een oneindige vlakke geleidende plaat met potentiaal $V = 0$, en in het punt $(0, 0, d)$ een lading Q. Voor $z \geq 0$ is dan de potentiaal gegeven door die van een dipool $\pm Q$ in de punten $(0, 0, \pm d)$:

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right) \quad (\text{als } z \geq 0)$$

De geïnduceerde lading op de plaat is dan $-Q$, en de ladingsdichtheid er op is

$$\sigma(x,y) = \frac{-Qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(de denkbeeldige lading $-Q$ in $(0, 0, -d)$ heet de *spiegelbeeldlading*).

Het elektrische veld van een puntlading in de oorsprong, omgeven door een geleidende bolschil met stralen a en b, is

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \quad (\text{als } r < a \text{ of } r > b)$$
$$\vec{E} = \vec{0} \quad (\text{als } a < r < b)$$

Elektrische veldsterkte, potentiaalverschil en capaciteit van een vlakke plaatcondensator, met ladingsdichtheden $\pm\sigma$, plaatafstand d en plaatoppervlakte A, en gevuld met een diëlektricum met permittiviteit ε, zijn respectievelijk

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad (\text{p666})$$
$$V = \frac{\sigma d}{\varepsilon} \qquad (25.9)$$
$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \qquad (25.30)$$

De capaciteit van een stuk ter lengte l van een oneindig lange cilindercondensator (coaxkabel) met stralen a en b, en gevuld met een diëlektricum met permittiviteit ε, is

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\frac{b}{a}} l$$

Een edelgas is ongeveer een lineaire isolator, met *atomaire polariseerbaarheid* α gedefinieerd door

$$\vec{p}_{atoom} = \alpha\vec{E}$$

Tussen χ_e, α en aantal atomen per volume-eenheid N bestaat het verband

$$\chi_e = N\frac{\alpha}{\varepsilon_0}$$

IV LORENTZKRACHT EN MAGNETISCH VELD

empirische wetten

De Lorentzkracht: de (grootte van de) magnetische kracht op een lading q met snelheid $\vec{v}$ in een magnetisch veld $\vec{B}$ wordt gegeven door

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{22.3}$$

$$F = |q|vB\sin(v, B) \tag{22.1}$$

Wet van Biot en Savart: het magnetische veld in een punt P ten gevolge van een lijnvormige stroom met elementen $I\vec{dl}$, zo gelegen dat $\vec{r}_P - \vec{r}_{dl} = \vec{r}$, is

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{lijn} \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2} \tag{24.26}$$

afgeleide wetten

De totale kracht op een lading q met snelheid $\vec{v}$ bij aanwezigheid van een elektrisch veld $\vec{E}$ én een magnetisch veld $\vec{B}$ voldoet aan de krachtwet van Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{22.4}$$

De permittiviteit ε_0, de permeabiliteit μ_0 en de lichtsnelheid c voldoen aan de betrekking

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2 \tag{22.15}$$

voorbeelden

De magnetische kracht op een lijnvormige stroom met elementen $I\vec{dl}$ in een een magnetisch veld $\vec{B}$ is

$$\vec{F} = \int_{lijn} \lambda \mathrm{d}l \; \vec{v} \times \vec{B} = I \int_{lijn} \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \tag{24.19}$$

Voor een rechte stroom I met lengte L in een homogeen veld $\vec{B}$ is de grootte van de magnetische kracht

$$F = ILB\sin(I, B) \tag{24.17}$$

Op een stroomlus met stroom I en oppervlakte A werkt in een homogeen $\vec{B}$-veld een krachtmoment $\vec{\tau}$ met grootte τ:

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{24.22}$$

$$\tau = IAB\sin\theta = mB\sin\theta \tag{24.21}$$

Hierin stelt θ de hoek tussen $\vec{B}$ en de normaal $\vec{A}$ op de stroomlus voor; $\vec{m} \equiv I\vec{A}$ is het *magnetisch dipoolmoment* van de stroomlus.

Het magnetische veld op afstand r van een stroom I langs de z-as is

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \tag{24.28}$$

Het magnetische veld langs de as van een cirkelvormige stroom I met straal R in het vlak $z = 0$ is

$$\vec{B}_{as} = \frac{\mu_0 I(\pi R^2)}{2\pi(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z} \tag{24.30}$$

Op grote afstand van een stroomlusje (magnetisch dipooltje $\vec{m}$) in de oorsprong is het veld langs de as:

$$\vec{B}_{as} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r^3} \tag{p652}$$

De aantrekkende kracht, door een oneindig lange rechte stroom I_1 uitgeoefend op een stuk ter lengte L van een evenwijdige stroom I_2 op afstand R_{12}, heeft de grootte

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{R_{12}}L \tag{24.33}$$

Een lading q in een homogeen magnetisch veld $\vec{B}$, met massa m en dwarse snelheidscomponent $v_\perp$, beschrijft een schroeflijn met hoekfrequentie $\vec{\omega}$ en straal R, die gegeven worden door

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B} \tag{22.7}$$

$$R = \frac{m v_\perp}{|q|B} \tag{22.5}$$

Stel (in situatie 1) dat een electron met beginsnelheid $\vec{v}_0$ over een klein traject a in een dwarsrichting wordt versneld door een elektrisch veld $\vec{E}$, en dan nog eens een grote afstand L in de oorspronkelijke richting doorloopt waarbij tevens een dwarse verplaatsing d ontstaat. Stel (in situatie 2) dat de werking van het veld $\vec{E}$ over het traject a gecompenseerd wordt door een magnetisch veld (met grootte $B = \frac{E}{v_0}$) loodrecht op zowel $\vec{v}_0$ als $\vec{E}$, zodat de dwarse verplaatsing d nu achterwege blijft. Dan geldt voor de verhouding van lading en massa van het electron:

$$\frac{e}{m} = \frac{v_0^2}{E}\frac{d}{aL} = \frac{E}{B^2}\frac{d}{aL} \tag{p580}$$

In een lange strip met dikte a en breedte d , waardoor een stroom I loopt in aanwezigheid van een veld $\vec{B} = B\hat{a}$, ontstaat een elektrisch Hall-veld loodrecht op zowel I als a:

$$\vec{E}_{Hall} = \pm\frac{1}{Nq}\frac{IB}{ad}\hat{d}$$

Hierin zijn N en q respectievelijk de dichtheid en de lading van de ladingsdragers in de strip.

V VELDVERGELIJKINGEN NADER BEKEKEN

definities

Voor de (oppervlak)stroomdichtheid $\vec{K}$ of de (volume)stroomdichtheid $\vec{J}$ behorend bij een stroom $\vec{I} = \lambda\vec{v}$ geldt

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_\perp} = \sigma\vec{v}$$

$$\vec{J} \equiv \frac{d\vec{I}}{do_\perp} = \rho\vec{v}$$

De *magnetische flux* door een (3-dimensionaal) oppervlak o is

$$\Phi_B \equiv \int_o \vec{B} \bullet d\vec{o} \qquad (26.6)$$

waarbij $d\vec{o}$ richting en grootte van een oppervlakte-elementje van o aangeeft.

afgeleide wetten

Wet van Ampère voor het magnetostatische veld: voor een kringintegraal van het magnetische veld geldt

$$\boxed{\oint_l \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 I} \qquad (26.2)$$

waarbij I de totale stroom voorstelt die door de kring wordt omvat.

Differentiële vorm van de wet van Ampère voor het magnetostatische veld: de rotatie van het magnetische veld is

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

Wet van Gauss voor het magnetische veld: voor de magnetische flux door een gesloten oppervlak geldt

$$\boxed{\oint_o \vec{B} \bullet d\vec{o} = 0} \qquad (26.7)$$

Differentiële vorm van de wet van Gauss voor het magnetische veld: voor de divergentie van het magnetische veld geldt

$$\boxed{\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0}$$

Differentiële vorm van de wet voor een kringintegraal van het elektrostatische veld: voor de rotatie van het elektrische veld geldt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}}$$

voorbeelden

Het magnetische veld ten gevolge van een uniforme stroomdichtheid $K\hat{y}$ in het vlak $x = 0$ is

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 K}{2}\hat{z} \quad (\text{als } x > 0) \tag{p695}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2}\hat{z} \quad (\text{als } x < 0) \tag{p695}$$

Het magnetische veld ten gevolge van een stroom I in een cilinder rond de z-as met straal R en uniforme stroomdichtheid $J\hat{z}$ is, op afstand r van de z-as:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J R^2}{2r}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \quad (\text{als } r \geq R) \tag{26.3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J r}{2}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}\hat{\varphi} \quad (\text{als } r \leq R) \tag{26.4}$$

Binnen, respectievelijk buiten een cilinder om de z-as met straal R en uniforme stroomdichtheid $\vec{J}$ is

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0 J R^2}{2r}\hat{\varphi} \right) = 0 \quad (\text{als } r > R)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0 J r}{2}\hat{\varphi} \right) = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{als } r \leq R)$$

Het magnetische veld ten gevolge van een stroom I in een lange solenoïde rond de z-as met N windingen per lengte-eenheid is

$$\vec{B} = \mu_0 N I \hat{z} \tag{p694}$$

wiskunde

De *rotatie* van een vectorveld $\vec{A}(x,y,z)$ is het vectorveld

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Stelling van Stokes: de integraal van de rotatie van $\vec{A}$ over een oppervlak o is gelijk aan de kringintegraal van $\vec{A}$ over de rand l van o:

$$\int_o (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \bullet \mathrm{d}\vec{o} = \oint_l \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l}$$

VI MAGNETISCHE VELDEN IN MATERIE: MAGNETISATIE

definities

De *magnetisatie* $\vec{M}$ in een medium is het magnetisch dipoolmoment per volume-eenheid.
Het *magnetiserend veld* $\vec{H}$ is overal gedefinieerd door

$$\vec{B} \equiv \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \tag{26.15}$$

Voor *lineaire* media worden de *magnetische susceptibiliteit* χ_m, de *relatieve permeabiliteit* K_m en de *permeabiliteit* μ gedefinieerd door de relaties

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{26.16}$$

$$K_m = 1 + \chi_m \tag{26.19}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{26.17}$$

Een lineair medium heet *diamagnetisch* als $\chi_m < 0$, *paramagnetisch* als $\chi_m > 0$.

Gebonden stromen zijn stromen die samenhangen met beweging van gebonden lading (ofwel de aanwezigheid van magnetische dipooltjes) in een medium.

afgeleide wetten

De gebonden stroomdichtheden op, respectievelijk in een medium zijn gelijk aan

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \hat{n} \tag{26.8}$$

$$\vec{J}_{mag} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \ (\ = 0 \text{ als } \vec{M} \text{ homogeen is})$$

Het veld $\vec{H}$ voldoet algemeen aan

$$\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = I_{vrij} \quad \text{ofwel} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{vrij} \tag{26.14}$$

In een lineair medium geldt

$$\mu = K_m \mu_0 = (1 + \chi_m)\mu_0 \tag{26.18}$$

voorbeeld

Beschouw een dunne toroïde (een met stroomdraad omwikkelde 'fietsband' van weekijzer met permeabiliteit μ) met een dwarse luchtspleet waarvan de wijdte s klein is ten opzichte van de totale omtrek $2\pi R$.
Stel het totaal aantal windingen bedraagt N en de stroom daardoorheen I, terwijl tevens voldaan is aan $\frac{\mu}{\mu_0} \gg \frac{2\pi R}{s}$. Dan geldt voor het magnetische veld in de spleet:

$$B_s \simeq \frac{\mu_0 N I}{s}$$

Bij I - VI: Maxwellvergelijkingen voor het statische elektromagnetische veld

De acht omkaderde vergelijkingen op de (voorgaande) bladzijden 1, 3 en 9 geven de vier Maxwellververgelijkingen voor statische velden, elk in integraalvorm én in differentiële vorm. Dit zijn:

		integraalvorm (p711)	differentiële vorm
1	wet van Gauss voor het elektrische veld	$\oint_o \vec{E} \bullet d\vec{o} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
2	wet van Gauss voor het magnetische veld	$\oint_o \vec{B} \bullet d\vec{o} = 0$	$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$
3*	kringintegraal en rotatie van het elektrostatische veld	$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$
4*	wet van Ampère voor het magnetostatische veld	$\oint_l \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 I$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

* De vergelijkingen 3 en 4 zullen moeten worden gegeneraliseerd zodra tijdsafhankelijke velden worden beschouwd.

De gelijkwaardigheid van integraalvorm en differentiële vorm berust voor vergelijkingen 1 en 2 op de stelling van Gauss, voor vergelijkingen 3 en 4 op de stelling van Stokes.

VII - VIII TIJDSAFHANKELIJKE VELDEN DE MAXWELLVERGELIJKINGEN ELEKTROMAGNETISCHE GOLVEN

empirische wetten

Wet van Faraday-Henry: voor een kringintegraal van het elektrische veld geldt

$$\boxed{\oint_{l \text{ om } o} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_o \vec{B} \bullet d\vec{o}} \qquad (27.2)$$

Wet van Ampère-Maxwell: voor een kringintegraal van het magnetische veld geldt

$$\boxed{\oint_{l \text{ om } o} \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_o \vec{E} \bullet d\vec{o}} \qquad (27.14)$$

definities

De *weerstand* R tussen twee aansluitpunten van een (niet ideale) geleider wordt gedefinieerd door

$$V = RI \qquad (24.5)$$

waarin V het potentiaalverschil tussen de aansluitpunten is, en I de stroom in de geleider (de waarde van R hangt in het algemeen af van V).

Het *geleidingsvermogen* (kortweg: de *geleiding*) σ van een materiaal wordt gedefinieerd door

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (24.8)$$

waarbij de stroomdichtheid $\vec{J}$ en de elektrische veldsterkte $\vec{E}$ in een cilindrisch stuk van het materiaal beschouwd worden.

De *zelfinductiecoëfficiënt* (kortweg: *zelfinductie*) L van een geleidend circuit is de omvatte magnetische flux Φ_B ten gevolge van de eigen stroom I, gedeeld door die stroom, volgens

$$\Phi_B = LI \qquad (27.17)$$

afgeleide wetten

Voor de weerstand van een cilindrisch stuk draad met doorsnede A, lengte l en geleidingsvermogen σ geldt

$$R = \frac{l}{\sigma A} \qquad (24.7)$$

Het vermogen gedissipeerd in een geleider met potentiaalverschil V tussen de aansluitpunten en stroom I is

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \qquad (24.10)$$

Differentiële vorm van de wet van Faraday-Henry: voor de rotatie van het elektrische veld geldt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Differentiële vorm van de wet van Ampère-Maxwell: voor de rotatie van het magnetische veld geldt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Wet van behoud van lading (in de vorm van de continuïteitsvergelijking):

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

De energie behorend bij een magnetisch veld $\vec{B}$ is de volume-integraal

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{ruimte} B^2 \mathrm{d}v \qquad (27.42)$$

De energie van een circuit met zelfinductiecoëfficiënt L, stroom I en magnetische flux Φ_B is

$$U = \tfrac{1}{2} L I^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\Phi_B^2}{L} \qquad (27.40)$$

voorbeelden

De zelfinductiecoëfficiënt van een dunne toroïde met N windingen per lengte-eenheid, doorsnede A en totale omtrek $2\pi R = l$, gevuld met een medium met permeabiliteit μ, is

$$L = \mu N^2 A\, l$$

De zelfinductiecoëfficiënt van een stuk ter lengte l van een lange solenoïde met N windingen per lengte-eenheid en doorsnede A, gevuld met een medium met permeabiliteit μ, is

$$L = \mu N^2 A\, l$$

De zelfinductiecoëfficiënt van een stuk ter lengte l van een oneindig lange coaxkabel, gevuld met een medium met stralen a en b en met permeabiliteit μ, is

$$L = \frac{\mu \ln \frac{b}{a}}{2\pi} l$$

De Maxwellvergelijkingen

De vergelijkingen 3 en 4 op bladzijde 12 moeten voor tijdsafhankelijke velden worden vervangen met behulp van de vier omkaderde vergelijkingen op de bladzijden 13 en 14. Dit leidt tot de uiteindelijke vorm van de Maxwellververgelijkingen:

		integraalvorm (p727)	differentiële vorm
1	wet van Gauss (elektrische veld)	$\oint_o \vec{E} \bullet d\vec{o} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
2	wet van Gauss (magnetische veld)	$\oint_o \vec{B} \bullet d\vec{o} = 0$	$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$
3	wet van Faraday-Henry	$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_o \vec{B} \bullet d\vec{o}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4	wet van Ampère-Maxwell	$\oint_l \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_o \vec{E} \bullet d\vec{o}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

De gelijkwaardigheid van integraalvorm en differentiële vorm berust voor vergelijkingen 1 en 2 op de stelling van Gauss, voor vergelijkingen 3 en 4 op de stelling van Stokes.

In de vrije ruimte (dus in afwezigheid van ladingen Q en stromen I) krijgen de Maxwellvergelijkingen een meer symmetrische vorm:

		integraalvorm	differentiële vorm
1	wet van Gauss (elektrische veld)	$\oint_o \vec{E} \bullet d\vec{o} = 0$	$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0$
2	wet van Gauss (magnetische veld)	$\oint_o \vec{B} \bullet d\vec{o} = 0$	$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$
3	wet van Faraday-Henry	$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_o \vec{B} \bullet d\vec{o}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4	wet van Ampère-Maxwell	$\oint_l \vec{B} \bullet d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_o \vec{E} \bullet d\vec{o}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Elektromagnetische golven

De golfvergelijking in 3 dimensies, resp. 1 dimensie voor een verstoring ψ luidt:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2(\nabla \bullet \nabla)\psi \equiv v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \qquad (28.11)$$

Uit deMaxwellvergelijkingen in de vrije ruimte volgt in 3 dimensies, resp. 1 dimensie:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = c^2(\nabla \bullet \nabla)\vec{E} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = c^2(\nabla \bullet \nabla)\vec{B}$$
$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial z^2} \qquad (29.1)$$

Van een electromagnetische golf voldoen alle componenten van $\vec{E}(x,y,z,t)$ en alle componenten van $\vec{B}(x,y,z,t)$ aan de 3-dimensionale golfvergelijking, met voortplantingssnelheid $v = c$.

Als $\vec{E} = \vec{E}(z,t)$ (en dus onafhankelijk is van x en van y) is ook $\vec{B} = \vec{B}(z,t)$, en voldoen $\vec{E}$ en $\vec{B}$ aan de 1-dimensionale golfvergelijking. Voorbeelden van oplossingen zijn dan de lineair gepolariseerde vlakke golven

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0\cos(kz - \omega t) \quad \text{en} \quad \vec{B}(z,t) = \vec{B}_0\cos(kz - \omega t) \qquad (29.4)$$

met

$$\omega = ck$$
$$\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, 0) \quad \text{en} \quad \vec{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, 0)$$
$$E_{0x} = cB_{0y} \quad \text{en} \quad E_{0y} = -cB_{0x} \qquad (29.5)$$

Hieruit volgt voor deze golven:

$$\vec{E} \bullet \vec{B} = 0$$
$$E = cB \qquad (29.6)$$
$$\vec{v} = c\hat{z} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

dus: $\vec{E} \perp \vec{B}$, en beide zijn transversaal, d.w.z. loodrecht op de voortplantingssnelheid.

De energiedichtheid van electromagnetische golven is een som van 2 gelijke termen:

$$u(z,t) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \tfrac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad (29.11)$$

COÖRDINATENSTELSELS

inleiding

Beschouw achtereenvolgens functies $f(r)$
(a) in $\mathbb{R}^2$: van de afstand r tot het middelpunt van een cirkel met straal R om de oorsprong;
(b) in $\mathbb{R}^3$: van de afstand r tot de as van een cilinder met straal R en lengte L om de z-as;
(c) in $\mathbb{R}^3$: van de afstand r tot het middelpunt van een bol met straal R om de oorsprong.

Als we $f(r)$ willen integreren over het oppervlak van de cirkel, het volume van de cilinder of het volume van de bol, schrijven we

$$\int_{cirkel} f(r)\ \mathrm{d}o \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^R f(r)\ r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^R f(r)\ 2\pi r\mathrm{d}r \tag{a}$$

$$\int_{cilinder} f(r)\ \mathrm{d}v \equiv \int_0^L\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r)\ r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^R f(r)\ 2\pi rL\mathrm{d}r \tag{b}$$

$$\int_{bol} f(r)\ \mathrm{d}v \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^R f(r)\ r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \int_0^R f(r)\ 4\pi r^2\mathrm{d}r \tag{c}$$

Hierbij is gebruik gemaakt van
(a) poolcoördinaten $(r,\ \varphi)$ in $\mathbb{R}^2$; met lokale orthogonale eenheidsvectoren $\hat{r}$ en $\hat{\varphi}$;
(b) cilindercoördinaten $(r,\ \varphi,\ \zeta)$ in $\mathbb{R}^3$ met lokale orthogonale eenheidsvectoren $\hat{r} = \hat{\varphi}\times\hat{\zeta}$ enz;
(c) bolcoördinaten $(r,\ \theta,\ \varphi)$ in $\mathbb{R}^3$ met lokale orthogonale eenheidsvectoren $\hat{r} = \hat{\theta}\times\hat{\varphi}$ enz.

(a) poolcoördinaten $(r,\ \varphi)$

transformatie naar cartesische coördinaten en omgekeerd:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = \arg(x+\mathrm{i}y)$$

cartesische componenten van de lokale eenheidsvectoren:

$$\hat{r} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$$
$$\hat{\varphi} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi) = (\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

(b) cilindercoördinaten $(r,\ \varphi,\ \zeta)$

transformatie naar cartesische coördinaten en omgekeerd:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi \qquad z = \zeta$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = \arg(x+\mathrm{i}y) \qquad \zeta = z$$

cartesische componenten van de lokale eenheidsvectoren:

$$\hat{r} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0)$$
$$\hat{\varphi} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) = (\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0)$$
$$\hat{\zeta} = (0,\ 0,\ 1)$$

(c) bolcoördinaten $(r,\ \theta,\ \varphi)$

transformatie naar cartesische coördinaten en omgekeerd:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \varphi = \arg(x+\mathrm{i}y)$$

cartesische componenten van de lokale eenheidsvectoren:

$$\hat{r} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$\hat{\theta} = (\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta) =$$

$$= (\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$\hat{\varphi} = (-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) = (\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0)$$

voorbeelden

- (c) Het volume van een bol met straal R is te vinden via

  $$f(r) = 1$$

  waarna volgt

  $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 1\ r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

- (b) Het magneetveld van een rechte stroom I in de positieve z-richting is, uitgeschreven in cartesische componenten:

  $$\vec{B} = B\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0)$$

- (a) Bij een ladingsdichtheid op een oneindige vlakke plaat gegeven door

  $$\sigma(r) = \frac{-Qd}{2\pi(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

  is de totale lading in een cirkel met straal R om de oorsprong, respectievelijk op de hele plaat

  $$\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\sigma(r)\ r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = -Q + \frac{Qd}{(R^2+d^2)^{\frac{1}{2}}}$$

  $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\sigma(r)\ r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = -Q$$