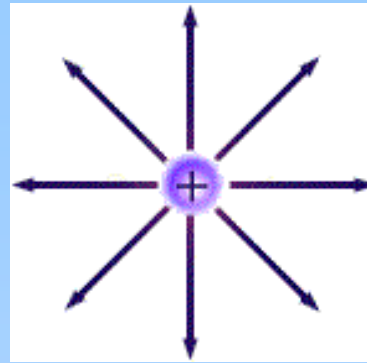
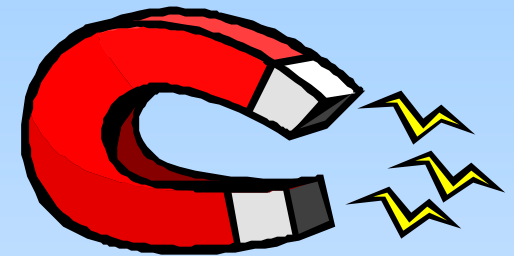


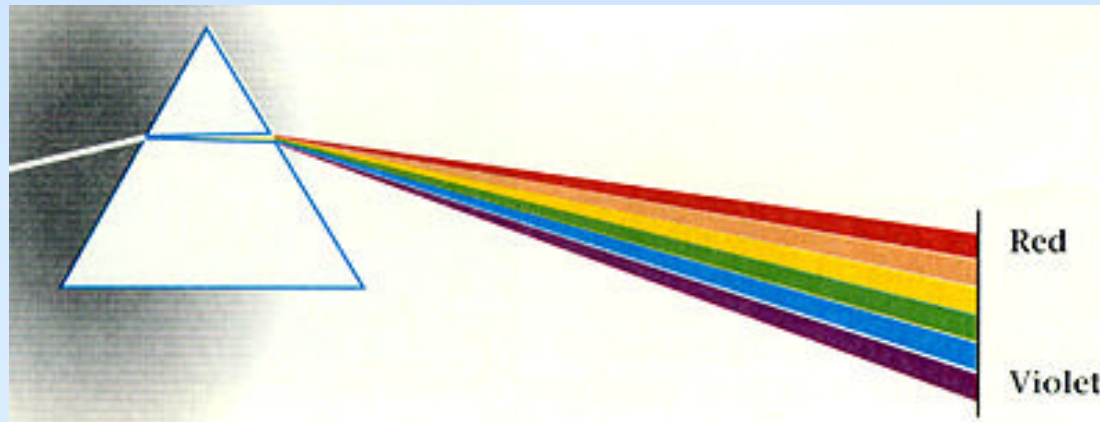
**Elektrostatica**



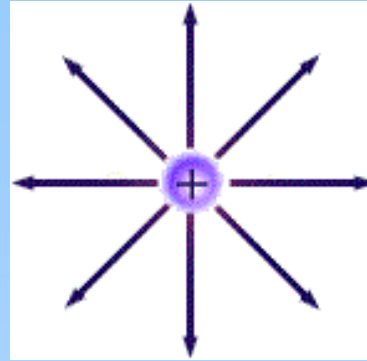
**Magnetostatica**



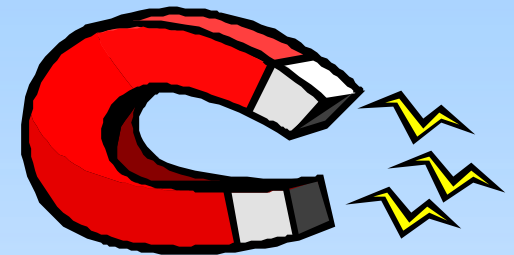
**Elektromagnetisme  $\mathcal{P}$  Licht**



**Elektrostatica**



**Magnetostatica**



**Slides magnetostatica college I t/m III**

**(de rest wordt later uitgedeeld)**

# Inhoud Magnetostatica

## Magnetostatica (5 colleges)

### → I. Lorentz kracht en magnetisch veld (Biot-Savart)

### II. Wet van Ampere

### III. Veldvergelijkingen nader bekeken: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ & $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

### IV. Magnetische velden in materie: magnetisatie

### V. Toepassingen/Practikum: Hall effect, Toroïde met spleet.

#### Griffiths:

- Lorentz Force Law: §5.1 t/m §5.2 (Niet stroomdichtheden  $K, J$ )

#### UP:

- Magnetic field and forces §27.1 , §27.2 , §27.4 t/m §27.7
- Biot-Savart §28.2 t/m §28.5

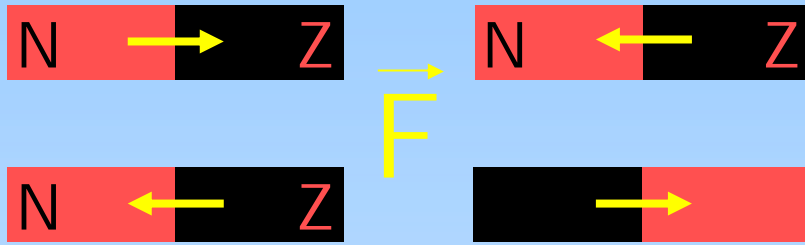


## MAGNETISCHE VELDLIJNEN STAAFMAGNEET

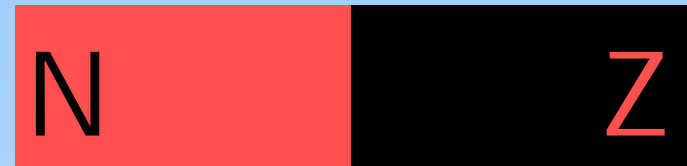
Een staafmagneet wordt in de buurt gehouden van een hoeveelheid kompasnaaldjes. De naaldjes gaan zich richten langs het aangelegde veld.

# Magneet: experiment

noord/zuid



geen monopolen!



nieuwe kracht:

$F_{\text{magnetisch}} \gg F_{\text{gravitatie}}$

noord: "N" & zuid: "Z"

NN & ZZ: afstotend

NZ & ZN: aantrekkend

Eenheden:

- Stroom [I]: Ampère  $A=C/s$

- Magneetveld [B]:

Tesla  $T=N/Am=Ns/Cm=kg/Cs$

geen monopolen!  
dipolen: "kleinste"

Anders dan elektrostatica:

1. beweging lading  $q$  in B-veld
2. B-veld als gevolg van stroom  $I$

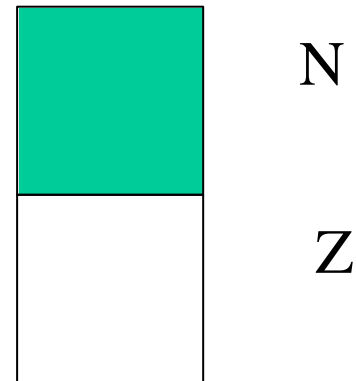
Een stilstaande positieve lading bevindt zich in de getekende positie boven de noordpool van een magneet. Op de lading zal:

A Een afstotende kracht werken

B Een aantrekkende kracht werken

C Geen kracht werken

D Een kracht naar achteren werken



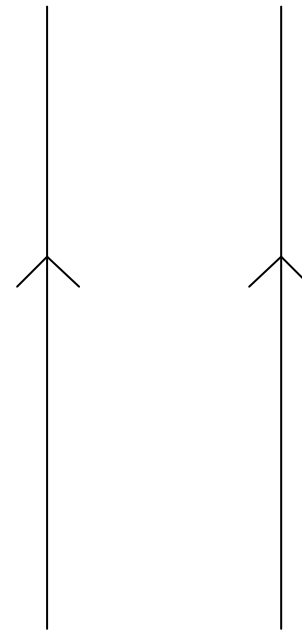
In twee draden lopen stromen, in dezelfde richting.

Er geldt:

**A** De draden stoten elkaar af

**B** De draden trekken elkaar aan

**C** Er zijn geen krachten tussen de draden



Constant B-veld

⇒ Lorentzkracht

⇒ bewegingsvergelijking voor  $q$



# Lorentzkracht

De Lorentzkracht

Voorbeelden

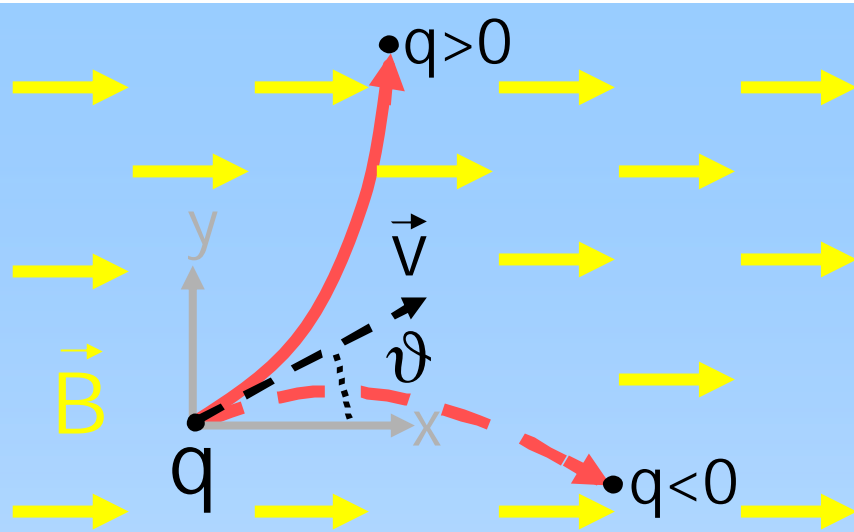
Het Hall effect

Kracht op stroomdraad

Moment op stroomlus

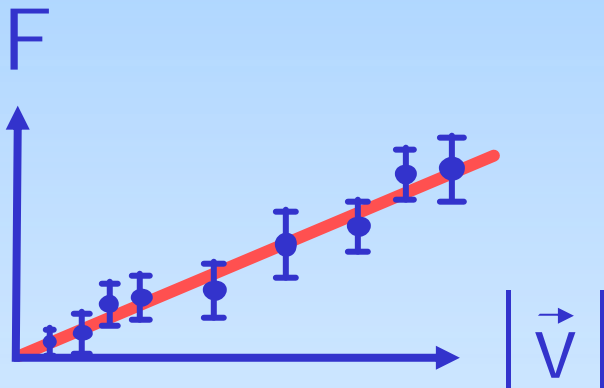


# Lorentzkracht

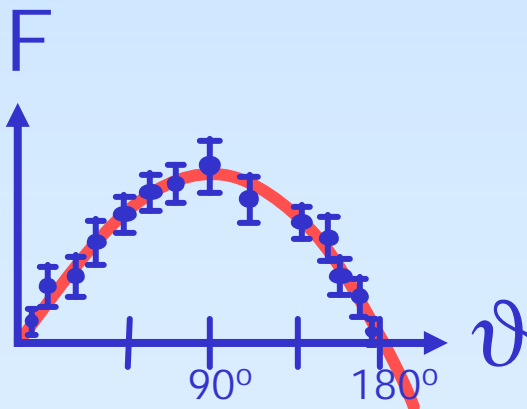


## Experiment

- $F \propto$  veld  $B$
- $F \propto$  lading  $q$
- $F \propto$  snelheid  $v$
- $F \propto$  sinus  $\angle(\vec{v}, \vec{B})$
- $\vec{F} \perp \vec{v}$  en  $\vec{F} \perp \vec{B}$



$$\Rightarrow F \propto |\vec{v}|$$



$$\Rightarrow F \propto \sin\vartheta$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

<http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/kap21/cd533capp.htm>

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html>



## **AFBUIGING ELEKTRONEN**

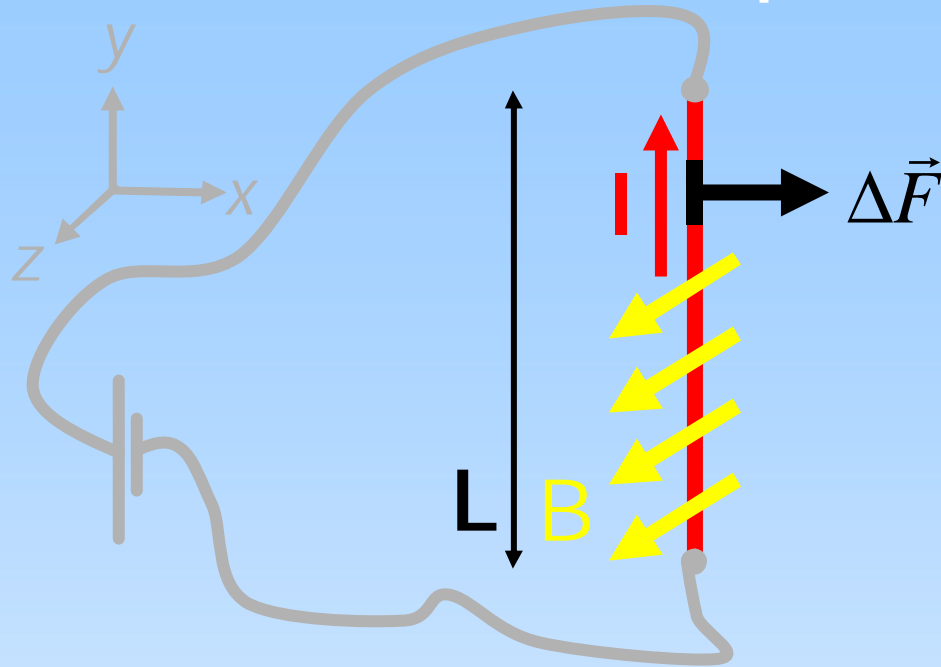
**Elektronen uit een Cs-137 bron worden, afhankelijk van een magneetveld, naar een GM-buis toe gebogen of er juist vanaf. Het teken van de lading van de elektronen kan uit de richting van de lorentzkracht gevonden worden. Bij de eerste meting heerst geen magneetveld.**



## **AFBUIGING POSITRONEN**

**Positronen uit een Na-22 bron worden, afhankelijk van een magneetveld, naar een GM-buis toe gebogen of er juist vanaf. Het teken van de lading van de positronen kan uit de richting van de lorentzkracht gevonden worden. Bij de eerste meting heerst geen magneetveld.**

# V.b. kracht op een stroomdraad



Situatie:

- uniform B-veld
- draadstuk L stroom I

Gevraagd:

- kracht F op draadstuk

$$\vec{B} = B\hat{k}, \quad \vec{I} = I\hat{j} \quad \text{en} \quad \vec{I} = I\vec{v}$$

met:  $\begin{cases} I: \text{lijnlading [C/m]} \\ \vec{v}: \text{snelheid [m/s]} \end{cases}$

$$\Delta\vec{F} = (\Delta q)\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\rightarrow (I\Delta l)\vec{v} \times \vec{B} = (I\Delta l)vB\hat{i} \Rightarrow \vec{F} = \hat{i} \int_{\text{lijnstuk}} I v B dl = \hat{i} I v B L = \hat{i} I B L$$

**Samenvattend:  $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$  en  $|\vec{F}| = I B L$**



## KRACHTMOMENT OP DIPOOL

Een stroomvoerende spoel heeft een dipoolkarakter. In een homogeen magneetveld ondervindt een dipool een krachtmoment, waardoor het gaat draaien. De dipool gaat zich dan richten langs het magneetveld.

# V.b. draaimoment stroomlus

Situatie:

- uniform B-veld
- draadlus L\*L stroom I

Gevraagd:

- Kracht op draadlus
- moment  $\tau$  op draadlus

Draaimoment:

$$\begin{cases} \vec{F}_L = +BIL\hat{z} \\ \vec{F}_R = -BIL\hat{z} \end{cases} \quad \vec{F}_L + \vec{F}_R = \vec{0}$$

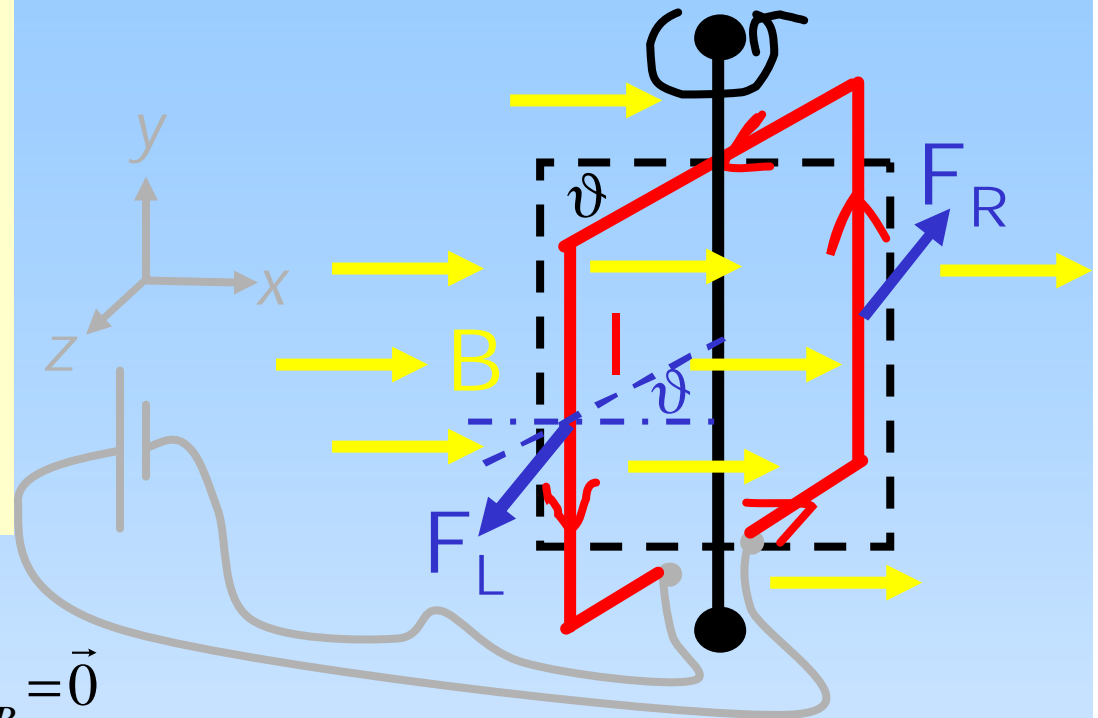
$$\tau = 2|\vec{F}|(L/2 \cos J) = BIL^2 \cos J$$

Magnetisch moment:

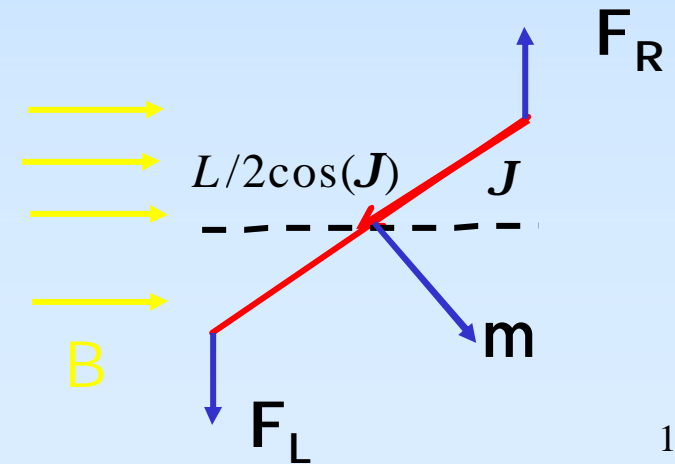
$$|\vec{m}| \equiv I \cdot \vec{A}$$

Formeel:

$$\tau = BIL^2 \cos J = BIL^2 \sin\left(\frac{1}{2}\pi - J\right) = |\vec{m} \times \vec{B}|$$



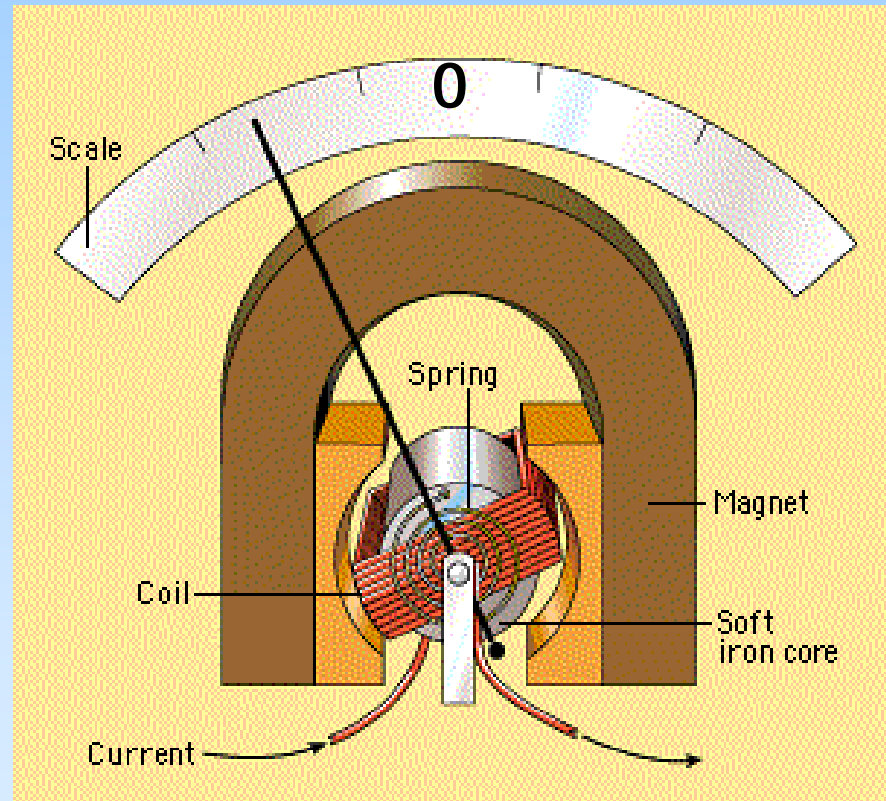
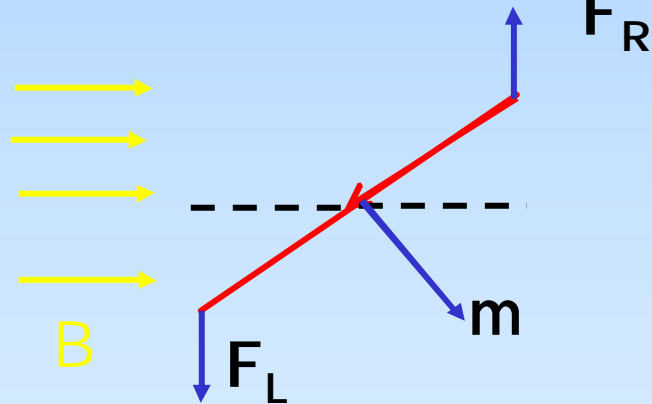
Bovenaanzicht



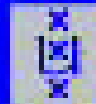
# Toepassing

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Galvano (stroom) meter



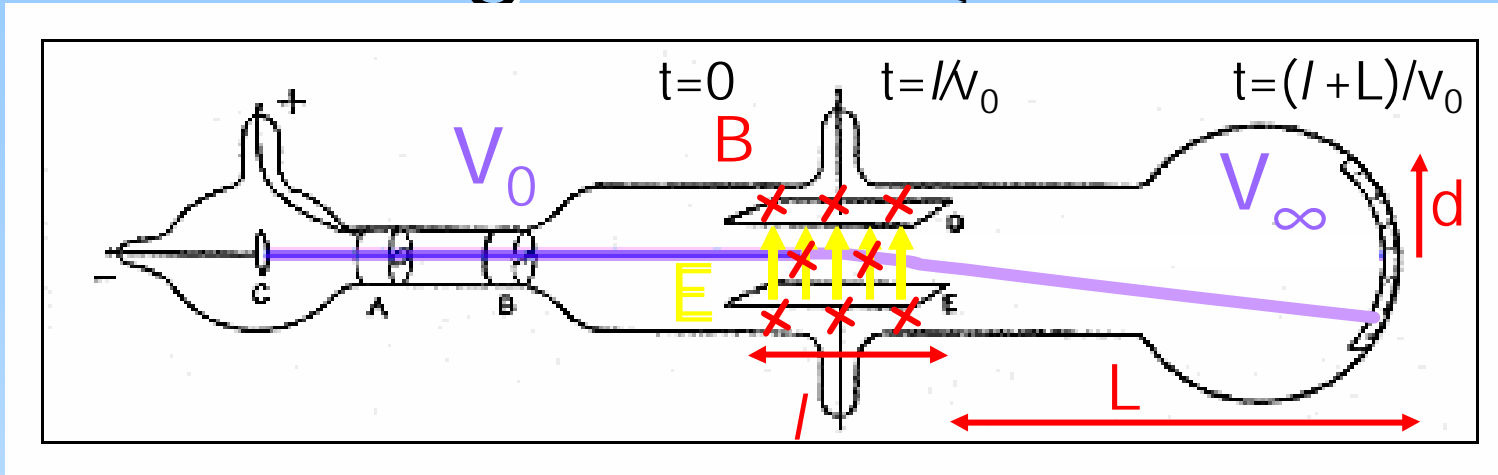
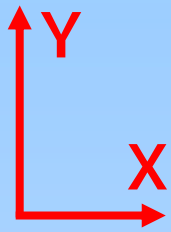
Spoeltje wil loodrecht op B veld staan



## AFBUIGING ELEKTRONENBUNDEL (I)

Vanuit een elektronenkanon scheert de elektronenbundel langs een fluorescerend scherm en doet het oplichten. De elektronen ondervinden een krachtwerking door een magnetisch veld.

# Ontdekking elektron (1897 J.J. Thomson)



Zelf doen: bereken uitwijking d

Geen afbuiging voor  
(beginstaf) Afbuiging voor

$$\begin{cases} \vec{E} \neq \vec{0} \\ \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

$$v_{x,t=0} = v_{x,0} \quad v_{y,t=0} = v_y(0) = 0$$

$$\Delta t = l/v_{x,0}$$

$$v_y = \int_0^{\Delta t} \frac{F_y}{m} dt = \int_0^{\Delta t} \frac{eE}{m} dt = \frac{eEl}{mv_{x,0}}$$

$F = m dv/dt$

$$d \equiv v_y \Delta t_{l \rightarrow l+L} = \frac{eEl}{mv_{x,0}} \frac{L}{v_{x,0}} \Leftrightarrow \frac{e}{m} = \frac{v_0^2 d}{EL}$$

$v_0$  ?

$$\vec{E} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{0} = e\vec{E} + e\vec{v}_0 \times B \Leftrightarrow |\vec{v}_0| = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$$

Combinatie levert e/m voor het elektron!



# Voorbeeld: deeltje in uniform B-veld

Zie de animatie van een deeltje in een uniform magnetic field, 2D  
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/>

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/>

Nadenken: Lorentzkracht zorgt voor  
centripetale kracht:  $F = qvB = mv^2/R$   
Dus deeltje beschrijft cirkelbaan met ( $v \perp B$ ):  
straal  $R = mv/|q|B$  • periode  $T = 2\pi m/|q|B$

**Leidt dit nu zelf formeel  $x(t)$  en  $y(t)$   
af, uitgaande van  $F = ma = mdv/dt$**

# OPGAVE: deeltje in uniform B-veld

Deeltje met:

- lading  $q$ , massa  $m$  en snelheid  $v$ .
- Bepaal  $x(t)$  en  $y(t)$

$$t = 0: \begin{cases} \vec{r} \equiv \vec{0} \\ \vec{v} \equiv v\hat{i} \end{cases}$$

$$\text{Newton: } \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

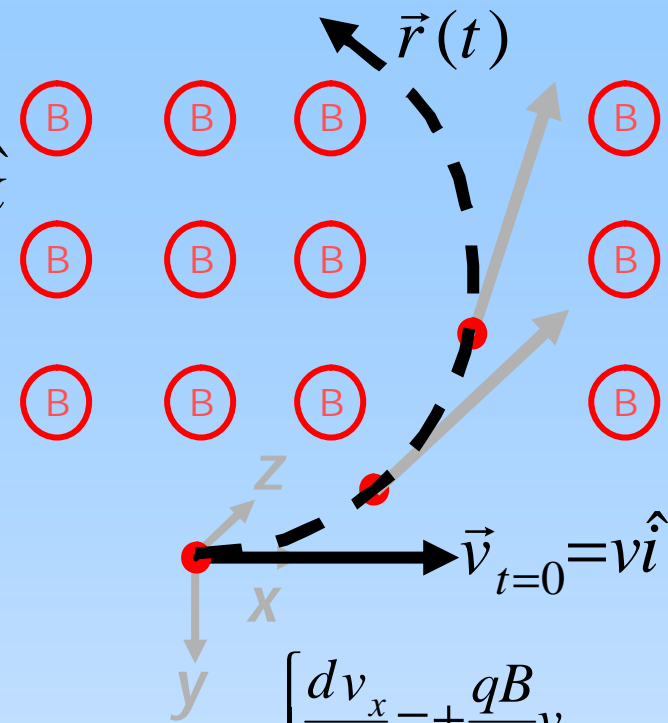
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = qBv_y\hat{i} - qBv_x\hat{j} = m \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + m \frac{dv_y}{dt}\hat{j} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = +\frac{qB}{m}v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x \end{cases}$$

$$x(0) = 0$$

$$x(t) \text{ b.v.: } \frac{d^2v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \Rightarrow v_x(t) = v \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) \Rightarrow x(t) \equiv \int_0^t v_x(t') dt' = \frac{mv}{qB} \sin\left(\frac{qBt}{m}\right)$$

$$y(t) = \frac{mv}{qB} \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) - \frac{mv}{qB}$$

$$\vec{B} = B\hat{k}$$



# Voorbeeld: deeltje in E,B-veld

Zie de animatie van een deeltje in een E/B veld  
<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/>

<http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/>

Bespreek/begrijp de baan van het deeltje t.g.v.  
het elektrische en magnetische veld

$I = \text{constant}$  gegeven  $\Rightarrow$  B-veld



# Wet van Biot-Savart

De elektrische stroom  $I$

Het verband tussen stroom  $I$  en veld  $B$

Voorbeelden

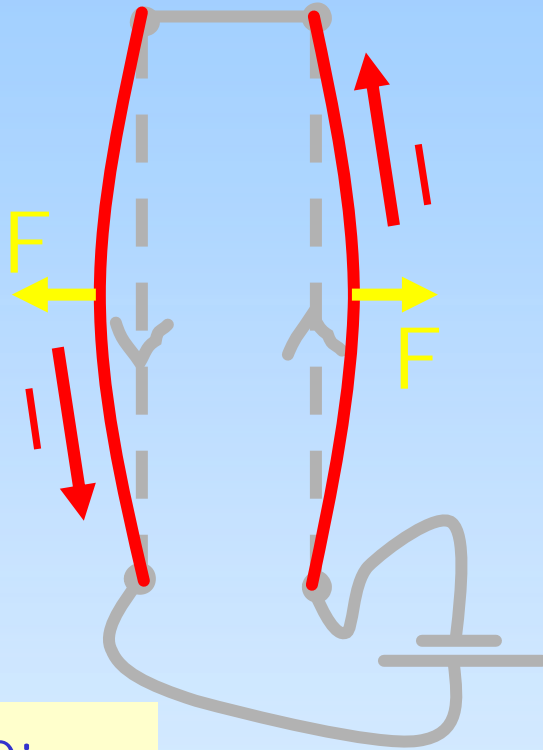


## KRACHT OP PARALLELE STROOMDRADEN (3)

**Twee parallel lopende draden ondervinden een krachtwerking als er stroom door gaat. Als de stromen in de draden tegengesteld gericht zijn, is de kracht afstotend.**

# V.b. kracht tussen stroomdraden

## Experiment A



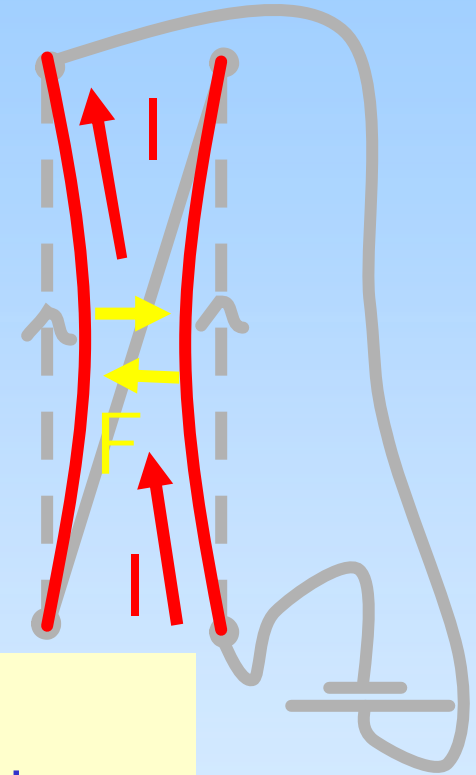
Observatie:

- afstoting

Uitleg:

- elektrisch?

## Experiment B



Observatie:

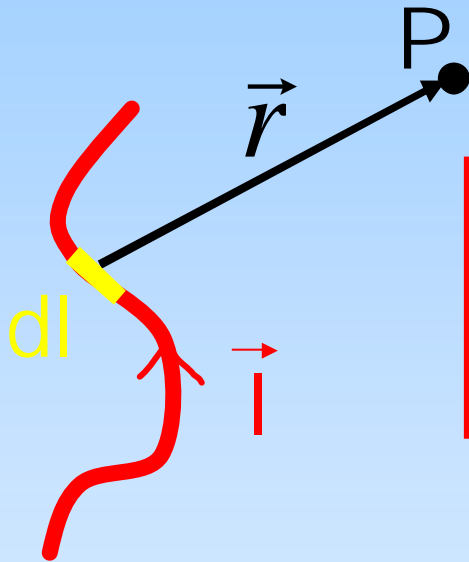
- aantrekking!

Uitleg:

- niet elektrisch!
- Magnetisch? Ja!

# Wet van Biot-Savart: experiment

Elektrische stroom  $\Rightarrow$  magnetisch veld!



$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{lijn}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{lijn}} dl \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{r^2}$$

– permeabiliteit:

$$\mu_0 \equiv 4\pi * 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

– permittiviteit:

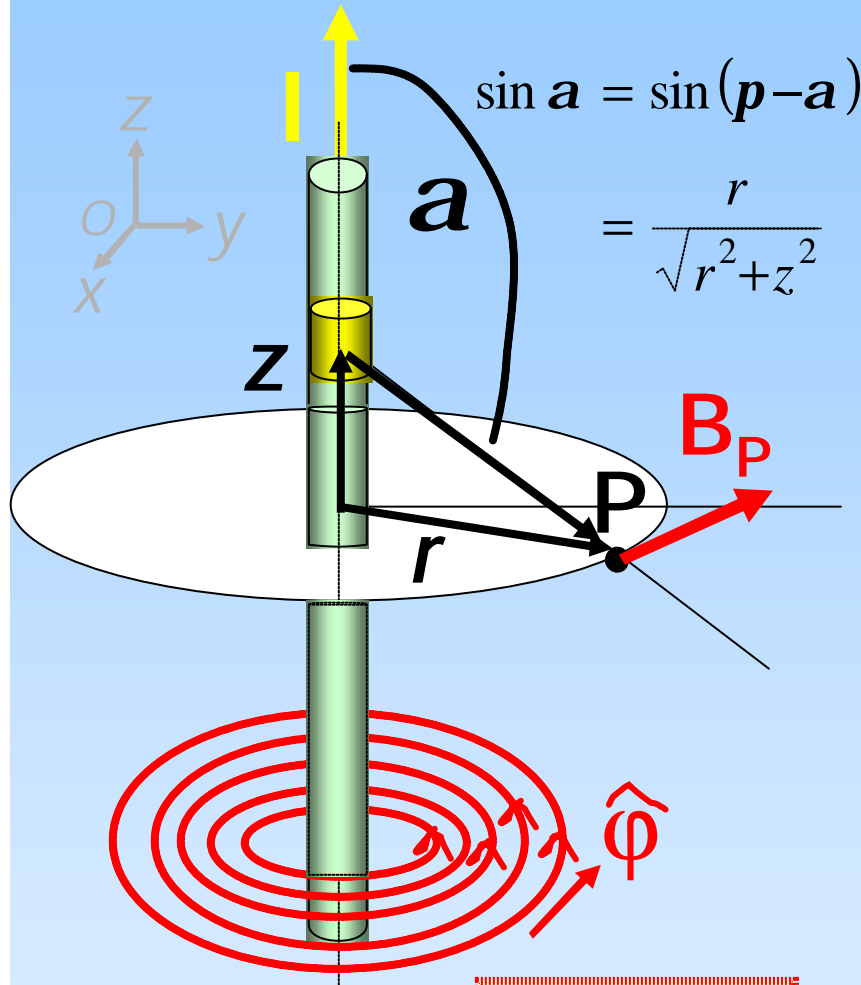
$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{4\pi * 10^{-7} c^2} \frac{C^2}{Nm^2}$$

Samenhang:

- elektrostatica: ladingen
- magnetostatica: stromen

$$1/\epsilon_0 \mu_0 = c^2 \quad [m^2/s^2]$$

# V.b. B-veld $\infty$ lange draad



$$\sin a = \sin(p-a)$$

$$= \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{j}$$

## Berekening B-veld:

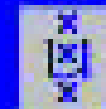
Nadenken:

- Cilindersymmetrie: (rj z)
- **B in azimuthale (j) richting**

Rekenen:

$$\begin{aligned} |\vec{B}_P| &= \left| \int_{\text{lijn}} d\vec{B}_j \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{[r^2+z^2]} \sin a \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{[r^2+z^2]} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z}{r\sqrt{r^2+z^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\mu_0 I}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned}$$

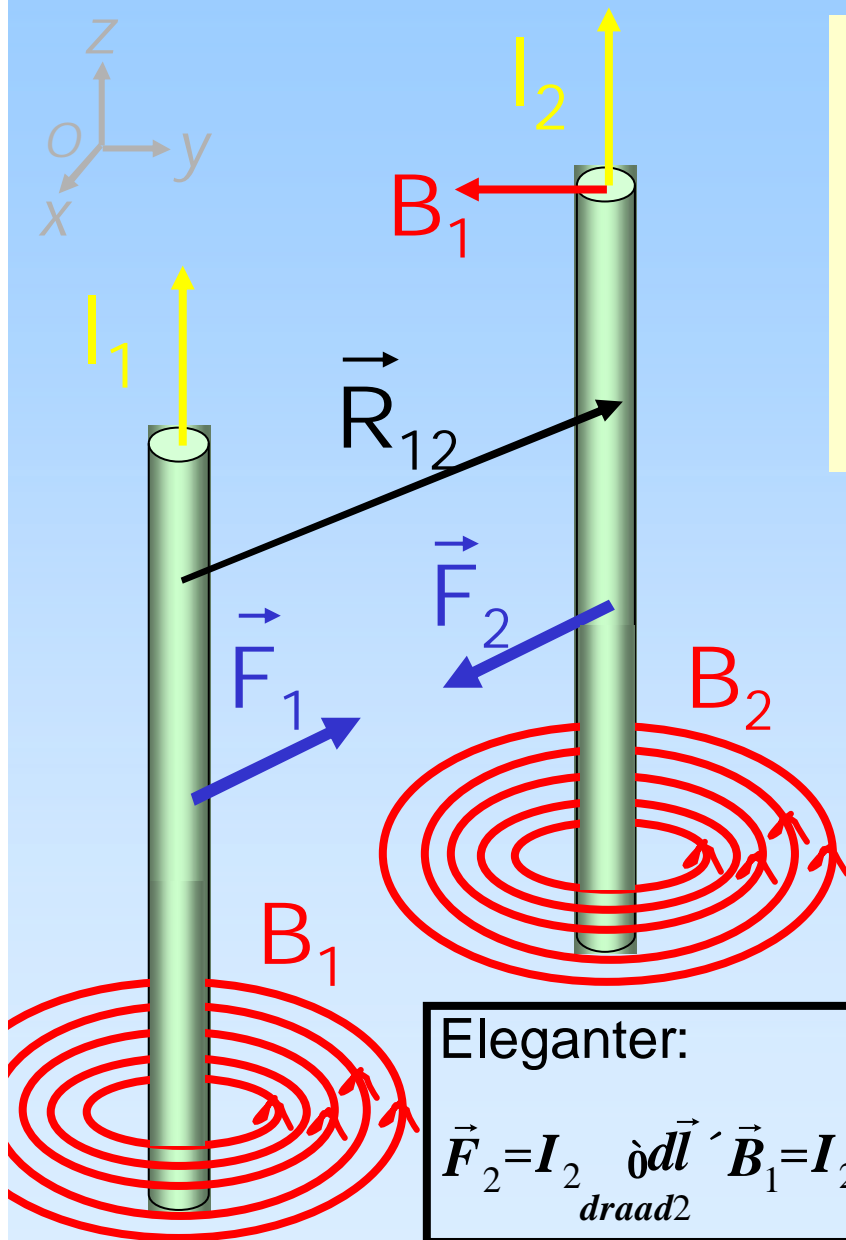




## D MAGNETISCHE VELDLIJNEN DRAAD

Rondom een stroomvoerende draad is ijzervijlsel gestrooid. Door op de tafel te tikken kunnen de ijzerdeeltjes (dipooltjes) zich richten langs de magnetische veldlijnen. Het veld om de draad heeft de symmetrie van een cylinder.

# V.b. kracht tussen stroomdraden



Situatie:

- stroomdraden met  $I_1$  en  $I_2$
- afstand  $R_{12}$ , draadlengten  $L \gg R_{12}$

Gevraagd:

- kracht op draad 2

Slim/snel antwoord:

- B-veld draad 1 op draad 2:

$$B_1 = \mu_0 I_1 / 2\pi R_{12}$$

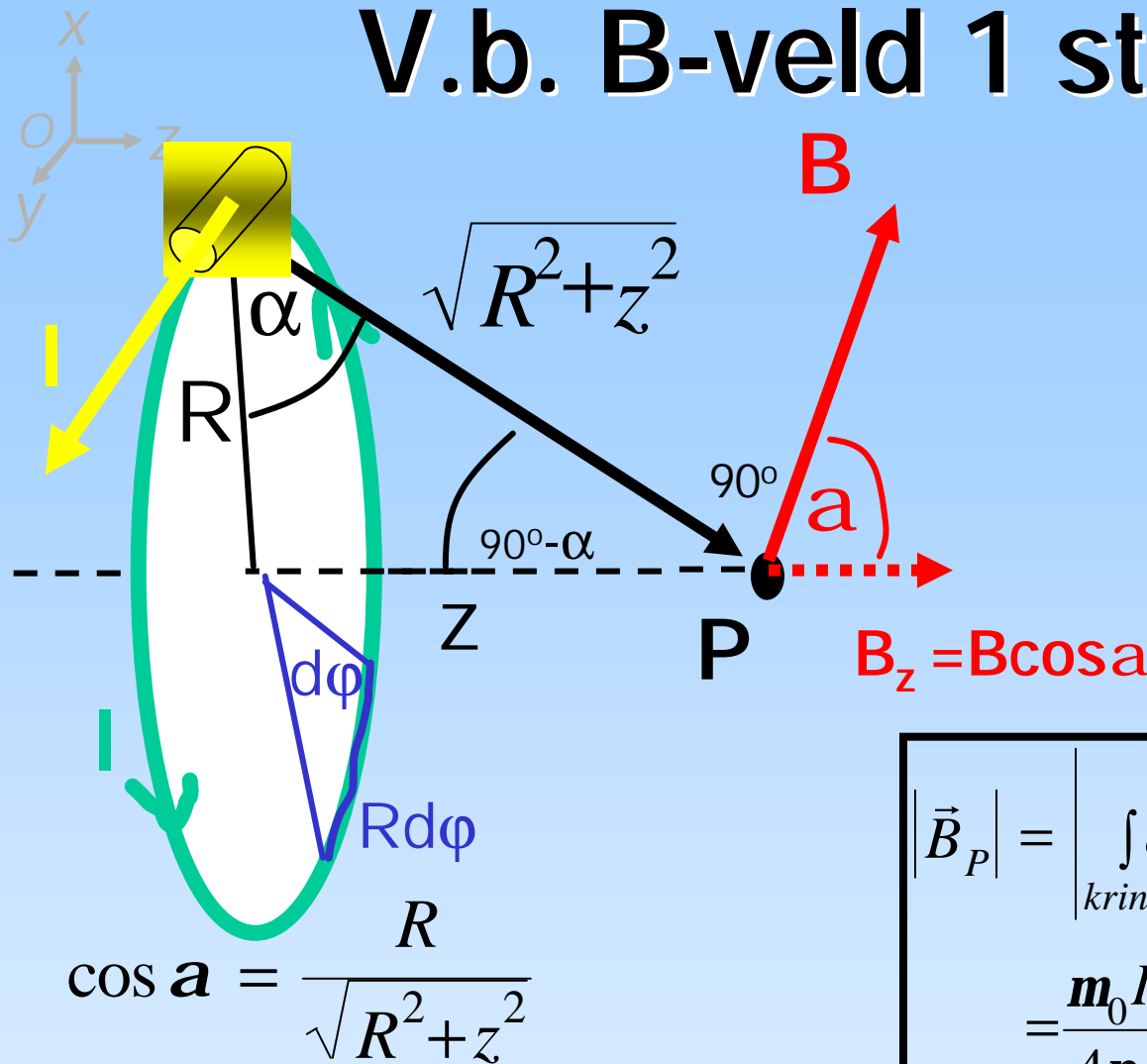
- kracht op draad 2 door  $B_1$

$$F_2 = B_1 I_2 L = \mu_0 I_1 I_2 L / 2\pi R_{12}$$

Eleganter:

$$\vec{F}_2 = I_2 \oint_{\text{draad2}} d\vec{l} \times \vec{B}_1 = I_2 \oint_{\text{draad2}} d\vec{l} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R_{12}} \hat{j} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi R_{12}} \hat{R}_{12}$$

# V.b. B-veld 1 stroomkring



Berekening B-veld:

Nadenken:

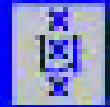
- Cilindersymmetrie
- $\vec{B} \parallel$  as stroomkring

Rekenen:

$$R d\phi = dl$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{B}_P| &= \left| \int_{\text{kring}} dB_z \right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R dj}{[R^2 + z^2]} \cos \alpha \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R dj}{[R^2 + z^2] \sqrt{R^2 + z^2}} \quad \leftarrow \cos \alpha \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2 j}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \hat{z}$$



## MAGNETISCHE VELDLIJNEN SPOEL

In en om een stroomvoerende spoel is ijzervijlsel gestrooid. Door op de tafel te tikken kunnen de ijzerdeeltjes (dipooltjes) zich richten langs de magnetische veldlijnen. Het veld in de spoel is homogeen.

# I Wat heb ik geleerd?

Magneet N of Z

Kracht,  $\vec{B}$ -veld



$$\vec{F} = \int_{\text{stroom}} \vec{I} \times \vec{B} dl \rightarrow I \int_{\text{stroom}} d\vec{l} \times \vec{B}$$

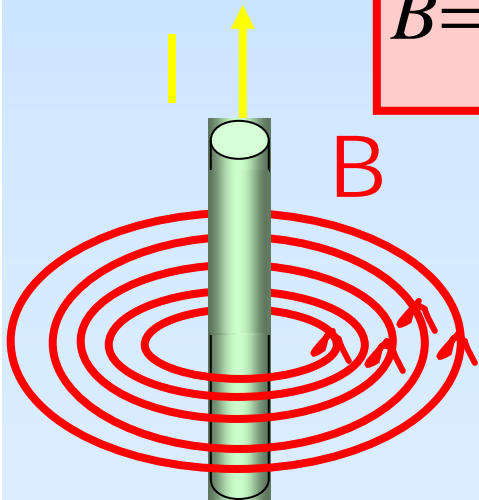
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{stroom}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{stroom}} dl \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{r^2}$$

Lorentzkracht

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

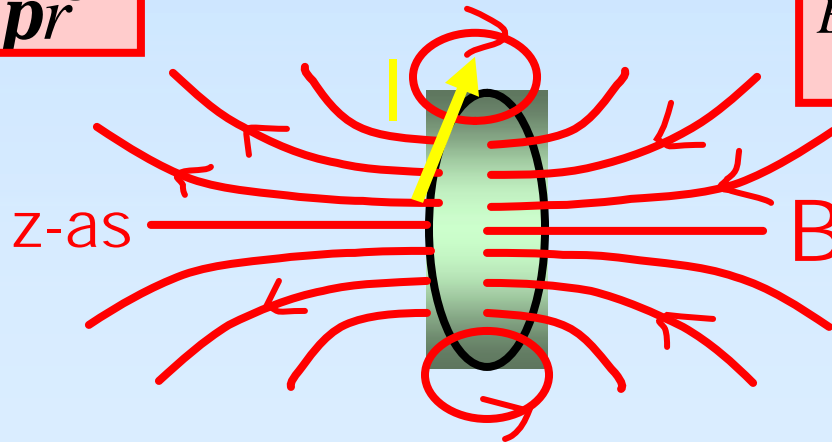
stroomdraad

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{j}$$



stroomkring

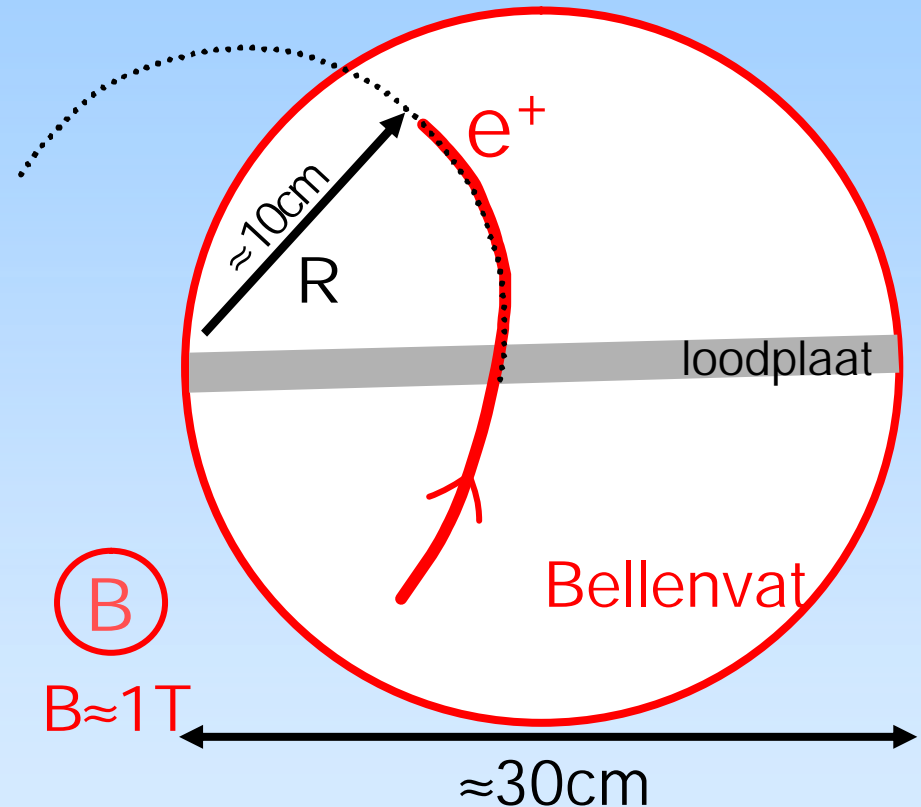
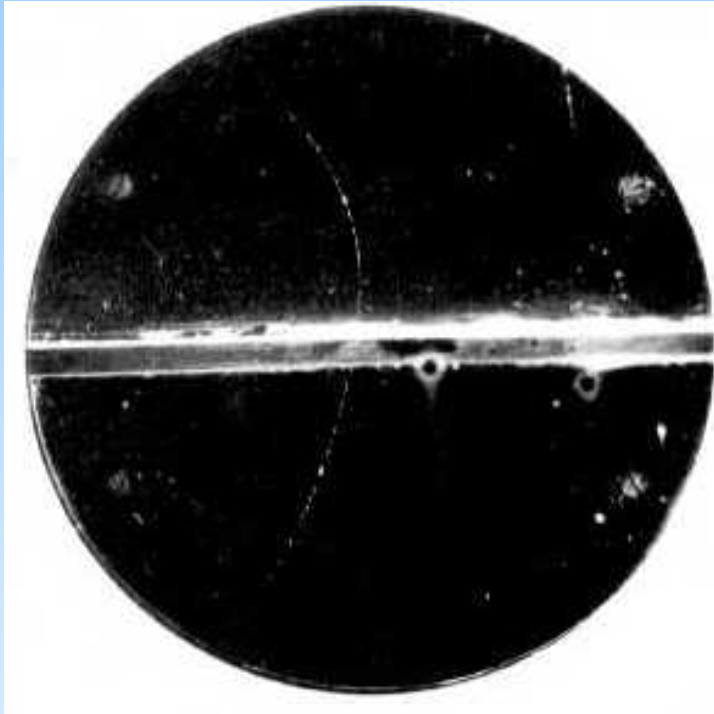
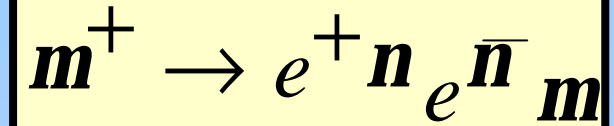
$$\vec{B}_{z-as} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \hat{z}$$



# Ontdekking positron (1932 C.D. Anderson)

Spoorreconstructie:

- In deeltjes fysica wordt energie bepaald uit kromming van spoor!



$$p_{\perp} \approx 0.1[m] * 1[T=N/mA=Ns/mC =kg/Cs] * 1.6 * 10^{-19} [c] = 1.6 * 10^{-20} [kg m/s]$$

iedereen

liefhebbers

$$m_e \approx 9.1 * 10^{-31} [kg] \Rightarrow v_{\perp} \approx \frac{1.6 * 10^{-20}}{9.1 * 10^{-31}} \approx 1.8 * 10^{10} [m/s] \text{ (6 x lichtsnelheid; dus foutje!)}$$

# Inhoud Magnetostatica

## Magnetostatica (5 colleges)

I. Lorentz kracht en magnetisch veld (Biot-Savart)

→ II. Wet van Ampere`

III. Veldvergelijkingen nader bekeken:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

IV. Magnetische velden in materie: magnetisatie

V. Toepassingen: Hall effect, Toroide met spleet.

### Griffiths:

- Currents: §5.1.3 (stroomdichtheden  $K$ ,  $J$ )
- Divergence of B: §5.3.1, §5.3.3

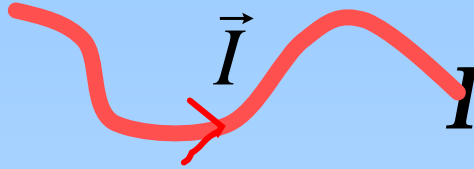
### UP:

- Pas op: Stroomdichtheden worden niet in UP behandeld!
- Ampere's law §28.6 t/m §28.7

# Stroomelementen: I, K en J

Lijn:

$$\vec{I} = I \vec{v}$$

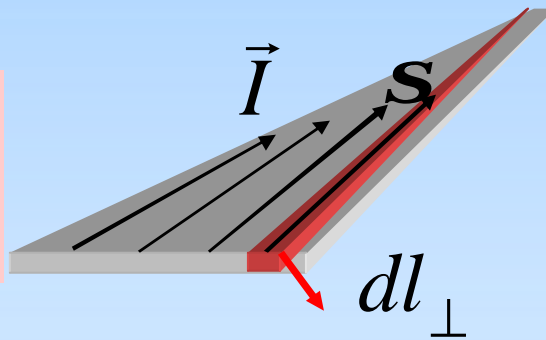


$$[I] = \text{C/s} \equiv \text{A (Ampère)}$$

$$\vec{F} = \int_{\text{lijn}} \vec{v} \times \vec{B} I dl = \int_{\text{lijn}} \vec{I} \times \vec{B} dl \rightarrow I \int_{\text{lijn}} d\vec{l} \times \vec{B}$$

Oppervlak:

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}} = \mathbf{s} \vec{v}$$

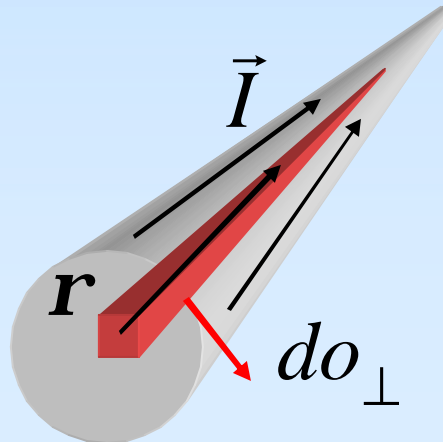


$$[K] = \text{A/m}$$

$$\vec{F} = \int_{\text{oppervlak}} \vec{v} \times \vec{B} \mathbf{s} do = \int_{\text{oppervlak}} \vec{K} \times \vec{B} do$$

Volume:

$$\vec{J} \equiv \frac{d\vec{I}}{do_{\perp}} = \mathbf{r} \vec{v}$$



$$[J] = \text{A/m}^2$$

$$\vec{F} = \int_{\text{volume}} \vec{v} \times \vec{B} \mathbf{r} dV = \int_{\text{volume}} \vec{J} \times \vec{B} dV$$



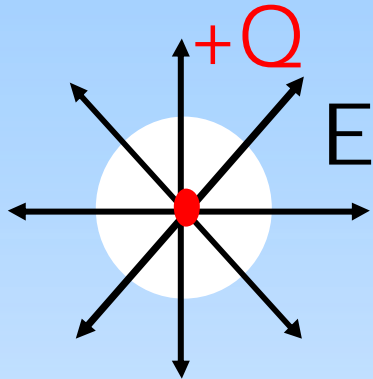
# Wet van Ampère



De wet van Ampère  
Voorbeelden

# Wet van Ampère

Vergelijk E-veld:  
wet van Gauss



puntlading

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

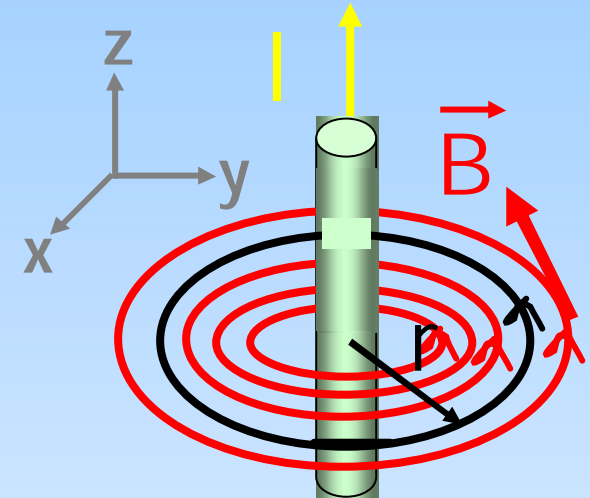
$$\oint_{\text{oppervlak } O} \vec{E} \cdot d\hat{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\text{omsloten}} Q_i$$

B-veld:

wet van Ampère

stroomdraad

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{j}$$



$$\begin{aligned} \oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\phi \\ &= \mu_0 I = \mu_0 \int_{\text{schijf}} \vec{J} \cdot d\vec{o} \end{aligned}$$

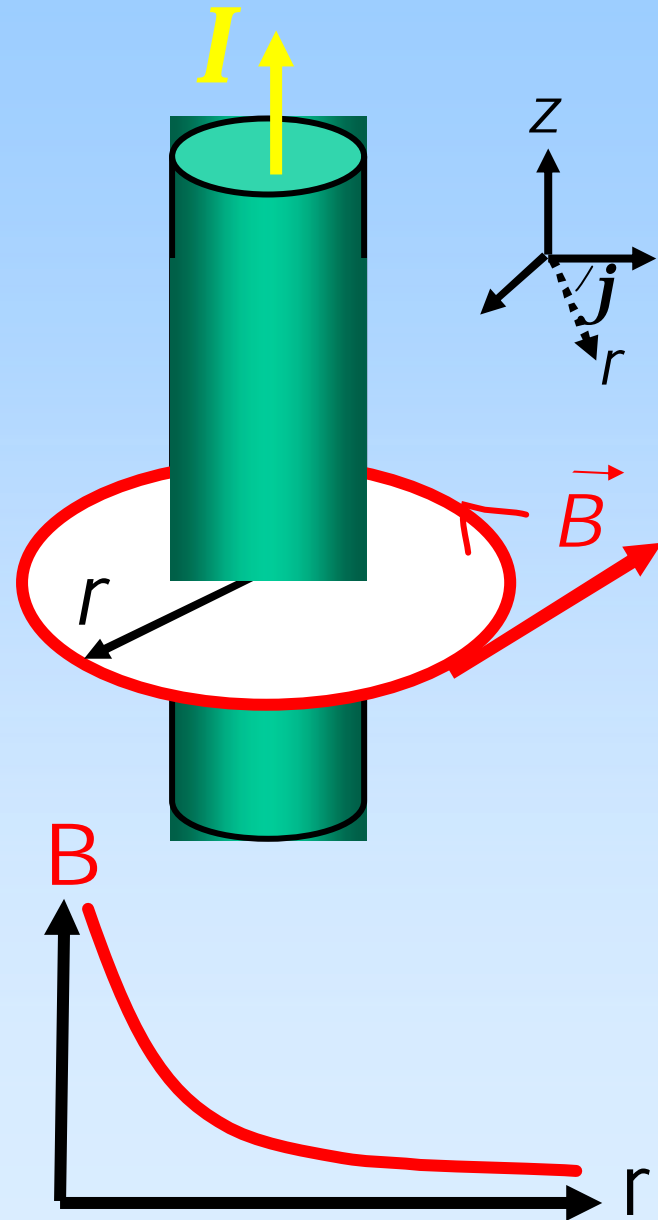
# V.b. Ampère dunne draad (flauw)

## Dunne draad:

- stroom:  $I$  [A°C/s]
- symmetrie:  $\vec{B} \parallel \hat{j}$
- "Ampère lus": cirkeltje

$$\begin{aligned} m_0 I &= \oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2p} Br dj \\ &= 2prB \Leftrightarrow B = \frac{m_0 I}{2p r} \end{aligned}$$

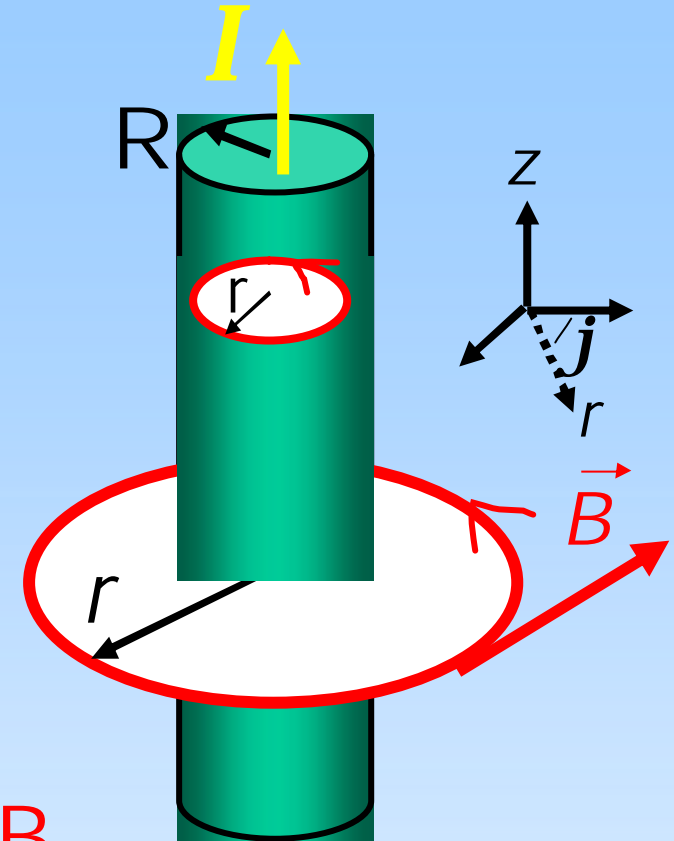
$$\vec{B} = \frac{m_0 I}{2p r} \hat{j}$$



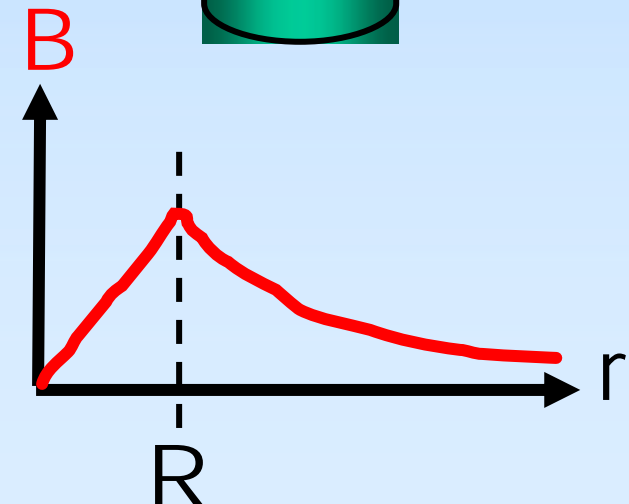
# V.b. Ampère dikke draad

## Dikke draad, $\mathbb{E}=2R$

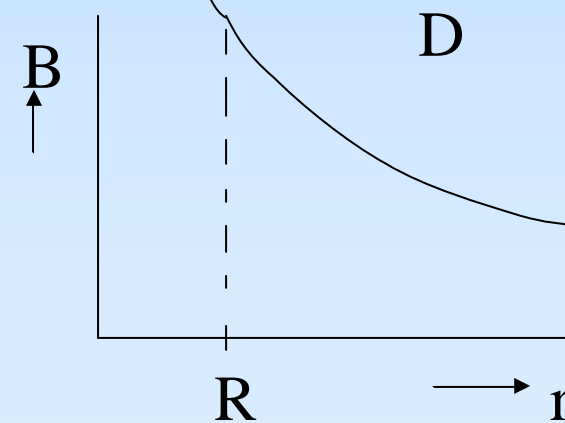
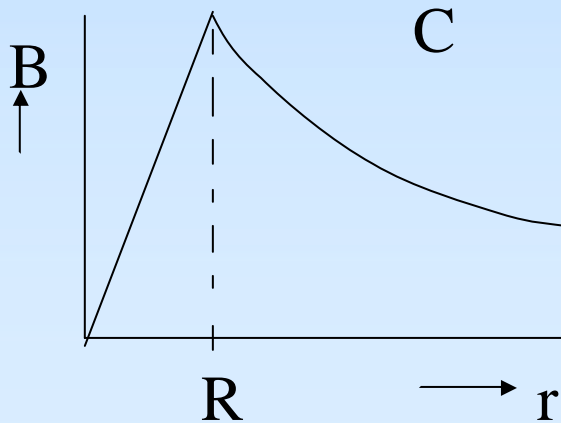
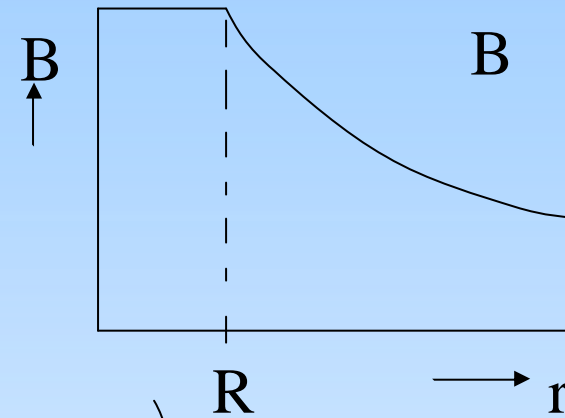
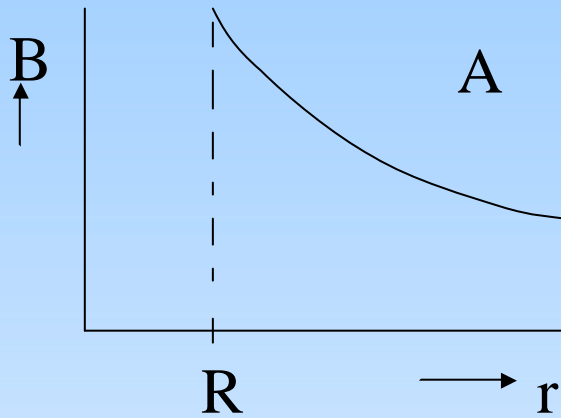
- stroomdichtheid:  $J=I/\rho R^2$  [ $A/m^2=C/sm^2$ ]
- symmetrie:  $\vec{B} \parallel \hat{j}$
- "Ampère lus": cirkeltjes



$$\oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B$$
$$= \begin{cases} r < R: & \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r > R: & \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



We beschouwen een holle metalen buis met straal  $R$ . In de wand loopt een stroom. Welke figuur geeft het magnetisch veld als functie van de afstand tot de as van de buis?



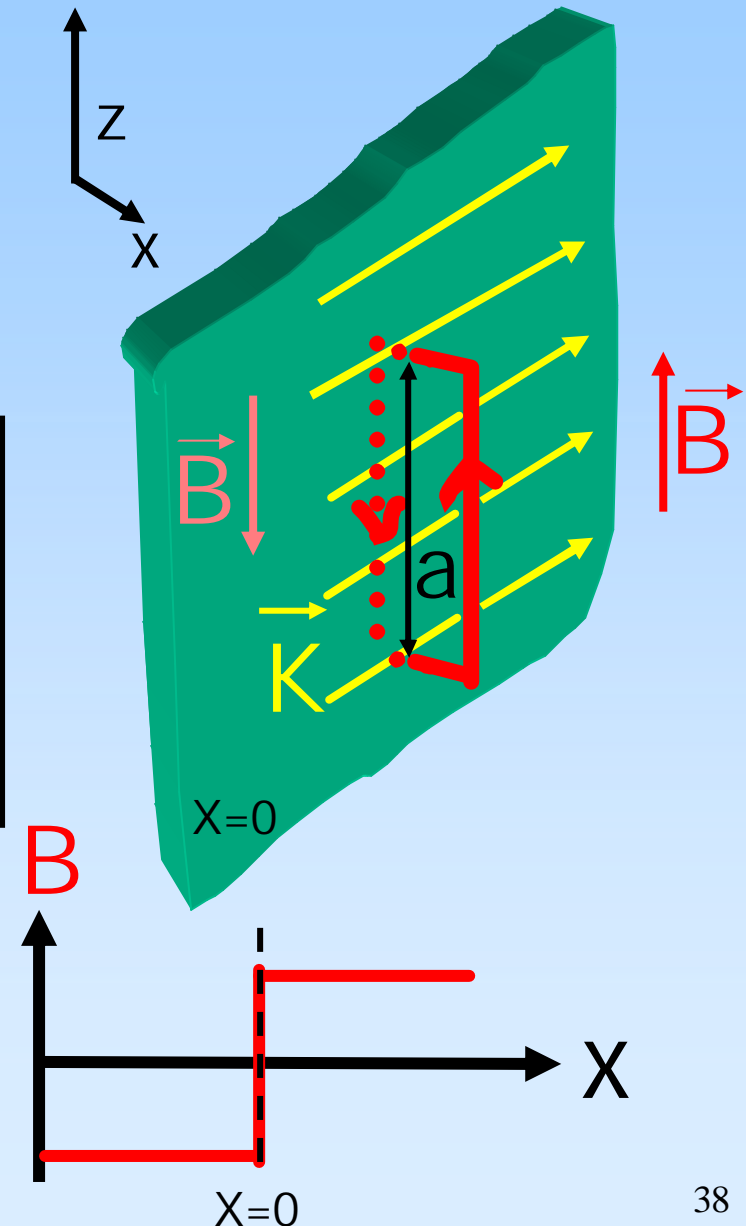
# V.b. Ampère vlakke plaat

## Vlakke plaat:

- stroomdichtheid:  $K$  [A/m=C/sm]
- symmetrie:  $\vec{B} // \text{vlak}$ ,  $\vec{B} \wedge \vec{K}$
- "Ampère lus": rechthoekje

$$\oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow aB + aB = \mu_0 Ka$$
$$= 2aB \Leftrightarrow B = \frac{\mu_0 K}{2}$$

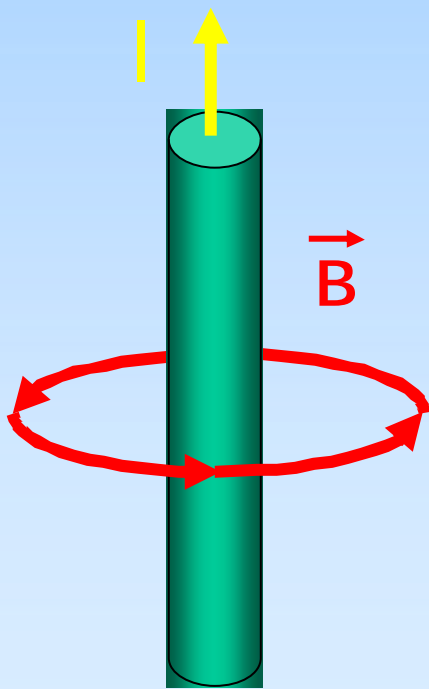
$$\vec{B} = \begin{cases} x < 0: & -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{z} \\ x > 0: & +\frac{\mu_0 K}{2} \hat{z} \end{cases}$$



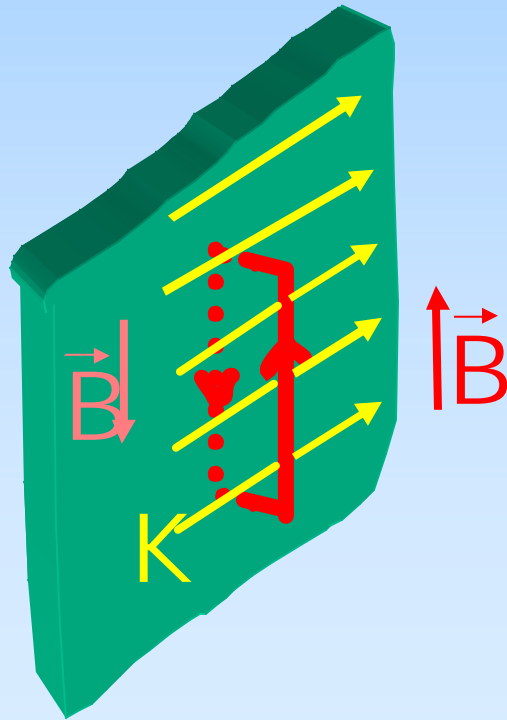
# Overzicht toepassingen wet van Ampère

$$\oint_{\text{rand}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsloten}} = \mu_0 \int_{\text{oppervlak}} \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}$$

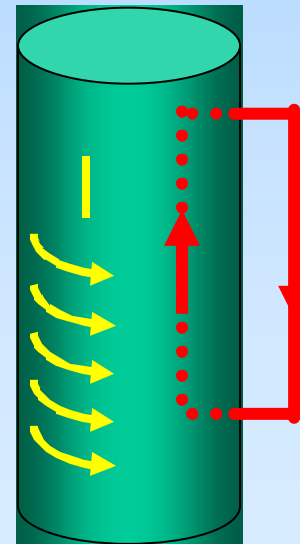
Essentie:  
Symmetrie!



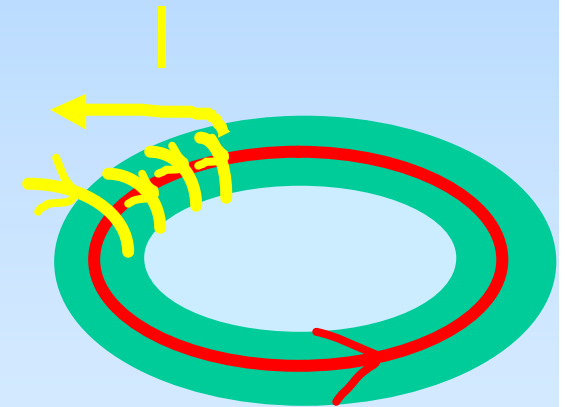
Draad



Plaat



Solenoid



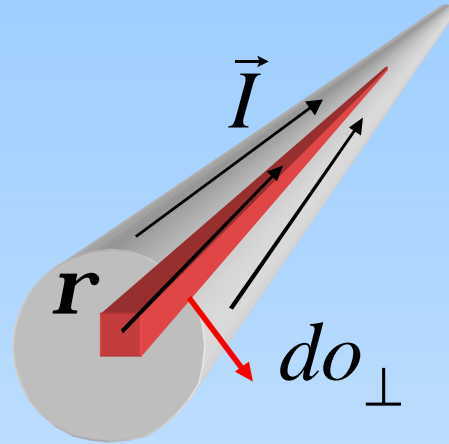
Toroide

**Komen nog!**

# Wat heb ik geleerd?

Volume:

$$\vec{J} \equiv \frac{d\vec{I}}{do_{\perp}} = \mathbf{r} \vec{v}$$



$$[J] = A/m^2$$

$$\vec{F} = \int_{\text{volume}} \vec{v} \times \vec{B} r dV = \int_{\text{volume}} \vec{J} \times \vec{B} dV$$

$$\oint_{\text{rand}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mathbf{m}_0 I_{\text{omsloten}} = \mathbf{m}_0 \int_{\text{oppervlak}} \vec{J} \cdot d\vec{o}$$



# Inhoud Magnetostatica

## Magnetostatica (5 colleges)

I. Lorentz kracht en magnetisch veld (Biot-Savart)

II. Wet van Ampere`

→ III. **Veldvergelijkingen nader bekeken:**  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

IV. Magnetische velden in materie: magnetisatie

V. Toepassingen: Hall effect, Toroide met spleet.

### Griffiths:

- Vektor: §1.2.5 en §1.3.5
- Divergence of B: §5.3.2 tot vergelijking 5.48 doorlezen
- Comparison E, B: §5.3.4

### UP:

- Pas op: rotatie en divergentie van B worden niet in UP behandeld
- §27.3 (Gauss law for Magnetism)

# Stelling van Stokes (wiskunde)



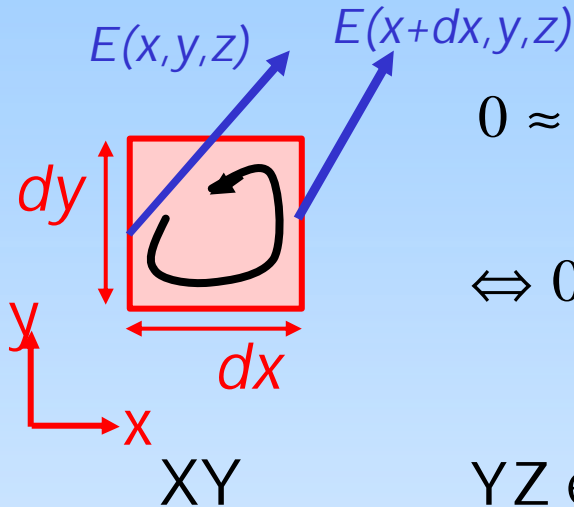
De rotatie  
De stelling van Stokes  
Voorbeeld

# Rotatie:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Beschouw lokaal de uitdrukking:

$$\oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$



$$0 \approx dx E_x(x, y) + dy E_y(x + dx, y) - dx E_x(x, y + dy) - dy E_y(x, y)$$

$$\Leftrightarrow 0 = dy dx \frac{\partial E_y}{\partial x} - dx dy \frac{\partial E_x}{\partial y} \Leftrightarrow 0 = dx dy \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$\text{YZ en XZ: } 0 = dy dz \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = dz dx \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

"rotatie":

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} \equiv \hat{i} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Dus:

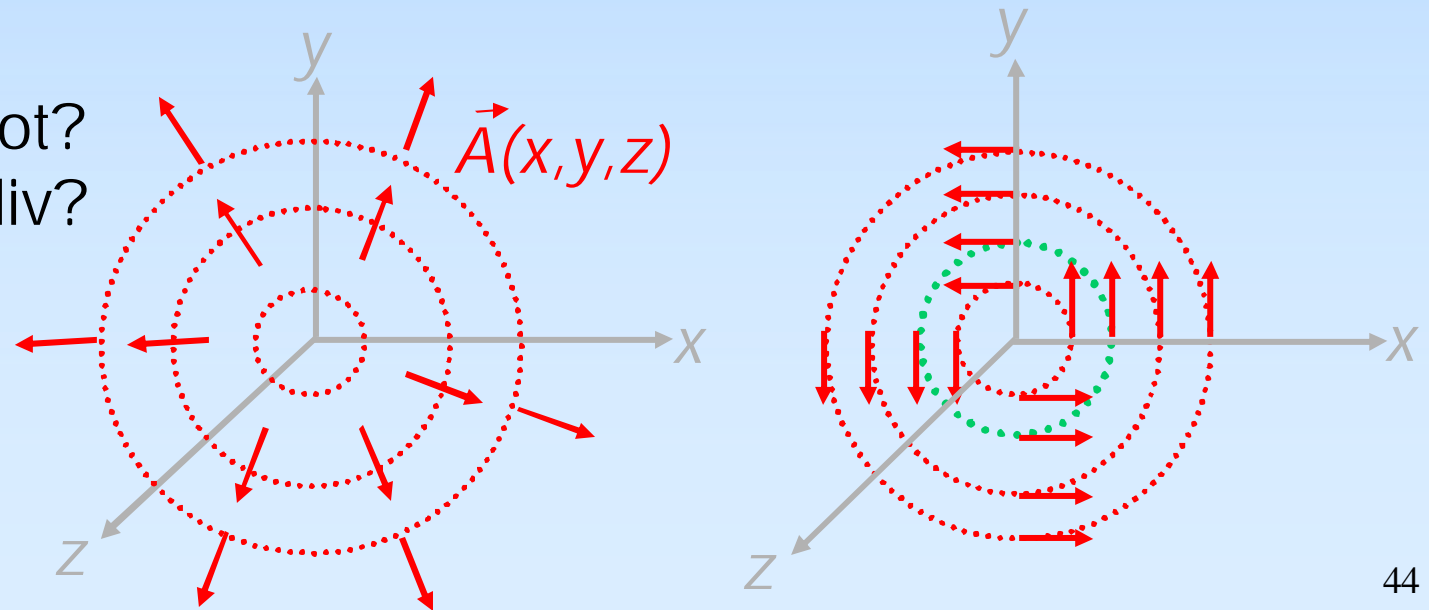
$$\oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

# Rotatie van vectorvelden voorbeelden/discussievragen

Je fietst naar het café en via een andere weg weer terug bij gelijke windsterkte en richting. Heeft het windsnelheidsvectorveld rotatie?

Je fietst een rondje IJsselmeer, waar een lagedrukgebied zich bevindt. Heeft het windsnelheidsvectorveld rotatie?

Wel of geen rot?  
Wel of geen div?



# Stelling van Stokes (wiskunde)

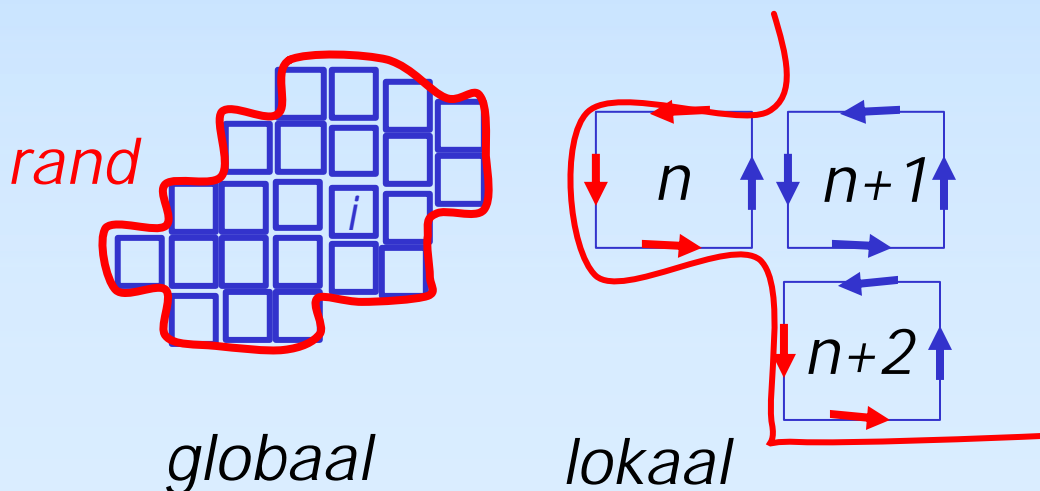
Er volgt meer!

Opmerking:  
consistentie keuze  
oriëntaties vereist!

$$\oint_{rand} \vec{A} \cdot d\vec{l} = dx dy \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) = do (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{o}$$

$$\Rightarrow \oint_{rand} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{oppervlak} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{o}$$

Willekeurige kromme:  $\oint_{rand} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{\dots} \oint_i \vec{A} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{\dots} \int_i \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{o} = \int_{oppervlak} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{o}$



Stelling van Stokes :

$$\oint_{rand} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{oppervlak} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{o}$$

Let op : willekeurige  $\vec{A}$

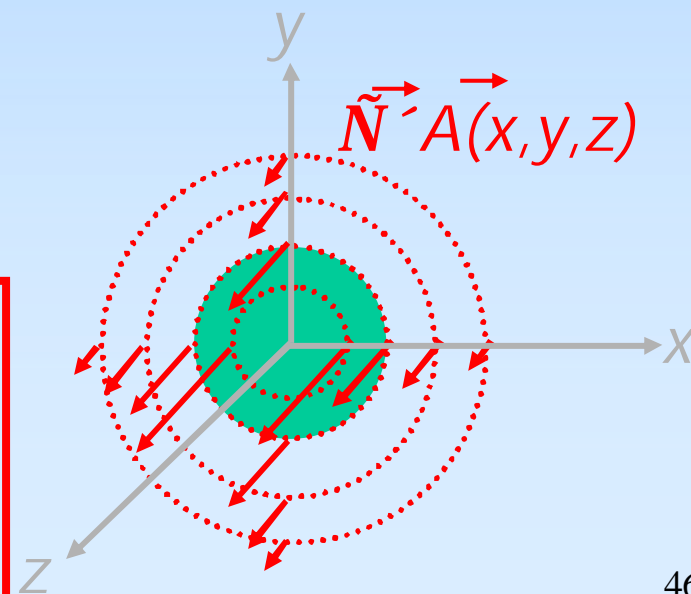
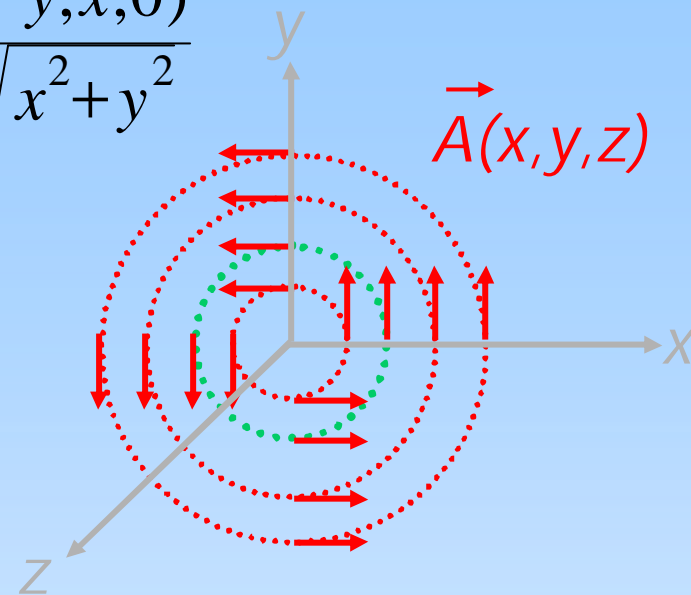
# V.b. rotatie en Stokes

expliciet voorbeeld:  
rekenen:

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{(-y, x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \equiv \frac{\hat{k}}{r}$$



Stokes:

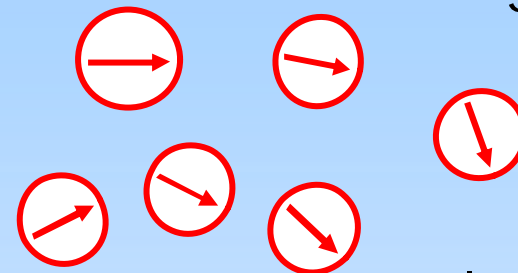
$$\oint_{\text{rand}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{oppervlak}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{o}$$

$$\oint_{\text{cirkel}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{cirkel}} dl = 2\pi R$$

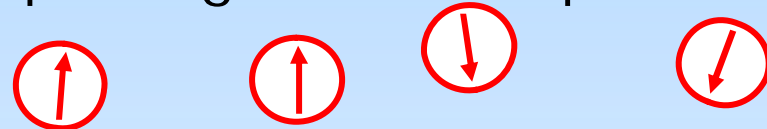
$$\int_{\text{schijf}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{o} = \int_0^{2\pi} \int_0^R -r dr d\phi = 2\pi R$$

# Rotatie van vectorvelden voorbeelden/discussievragen

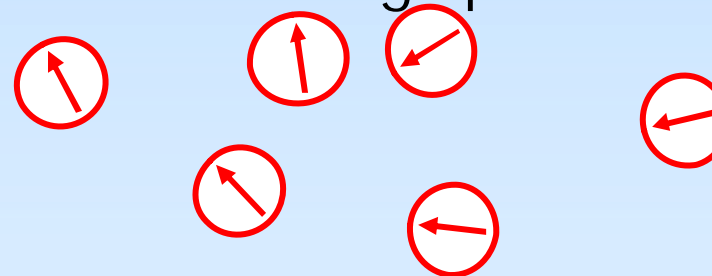
Er drijven kurkjes (met orientatiepijltje) in wild stromend water. Hoe kun je zien of het (snelheids)vectorveld rotatie ongelijk nul heeft?



Heeft het snelheids vectorveld op een grammofoonplaat rotatie?



Heeft het snelheids vectorveld van een leeglopende wasbak (v radieel) rotatie?



Heeft het snelheids vectorveld van een draaikolk rotatie? Heeft dit veld divergentie?

# Veldvergelijkingen voor $B$

De rotatie van  $B$

De divergentie van  $B$

Voorbeeld: solenoïde



$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \text{ via:}$$

stelling van Stokes & wet van Ampere

Wet van Ampère

Stelling van Stokes:

$$\oint_{\text{rand}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{\text{oppervlak}} \vec{J} \cdot d\vec{o}$$

$$\oint_{\text{rand}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{oppervlak}} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{o}$$

Dus:

Natuurkunde:  
Ampère

Wiskunde:  
Stokes

$$\mu_0 \int_{\text{oppervlak}} \vec{J} \cdot d\vec{o} = \oint_{\text{rand}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{oppervlak}} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{o}$$

$$\Rightarrow \mu_0 \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

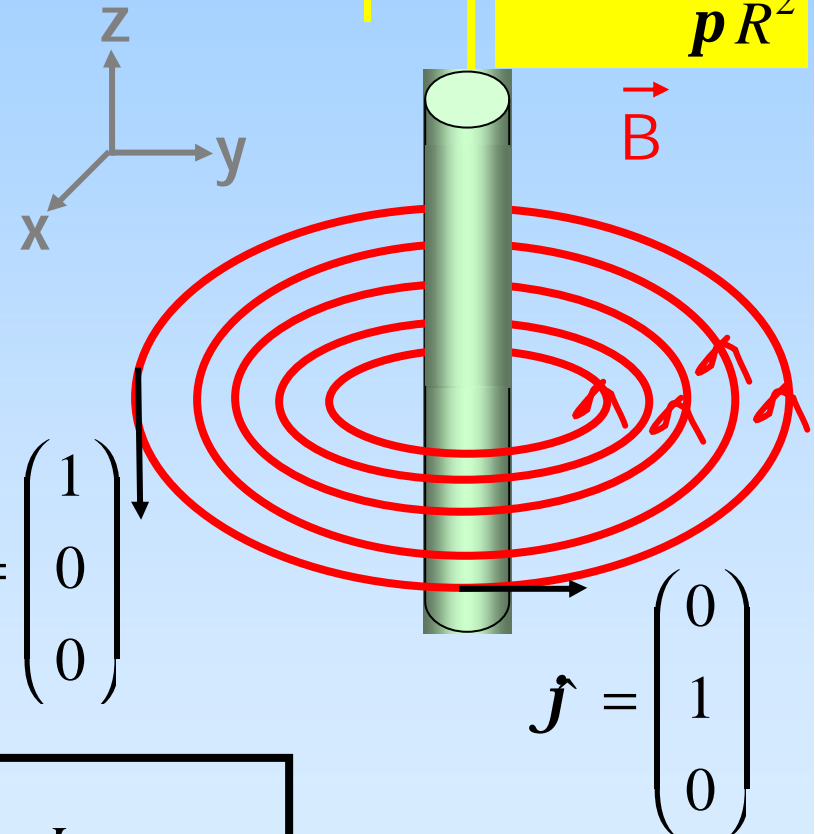
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \text{ als:}$$

voorbeeld bij een dikke stroomdraad

$$r < R: \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \hat{j} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \begin{pmatrix} -y \\ +x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{I \hat{k}}{\pi R^2}$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \rightarrow \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \hat{j} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & +x & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\mu_0 I}{2\pi R^2} \hat{k} \equiv \mu_0 \vec{J}$$

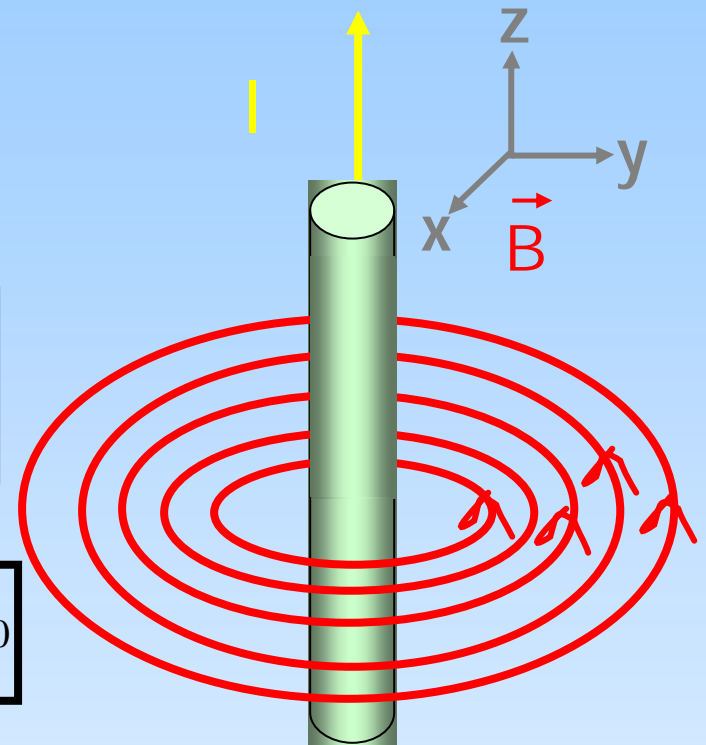
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ als:}$$

voorbeeld bij een dikke stroomdraad

$$r < R: \vec{B} = \frac{m_0 I r}{2\mu R^2} \hat{\mathbf{j}} = \frac{m_0 I}{2\mu R^2} \begin{pmatrix} -y \\ +x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{m_0 I r}{2\mu R^2} \hat{\mathbf{j}} = \frac{m_0 I}{2\mu R^2} (-\partial_x y + \partial_y x) = 0$$

$$r > R: \vec{B} = \frac{m_0 I}{2\mu r} \hat{\mathbf{j}} = \frac{m_0 I}{2\mu r^2} \begin{pmatrix} -y \\ +x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{m_0 I}{2\mu r} \hat{\mathbf{j}} = \frac{m_0 I}{2\mu} \left( -\partial_x \frac{y}{r^2} + \partial_y \frac{x}{r^2} \right) = 0$$



Vraag:

Waarom dikke stroomdraad?

Antwoord:

Omdat B-veld voor dunne stroomdraad in  $r=0$  singulier is!

$$\vec{B} = \frac{m_0 I}{2\mu r} \hat{\mathbf{j}}$$

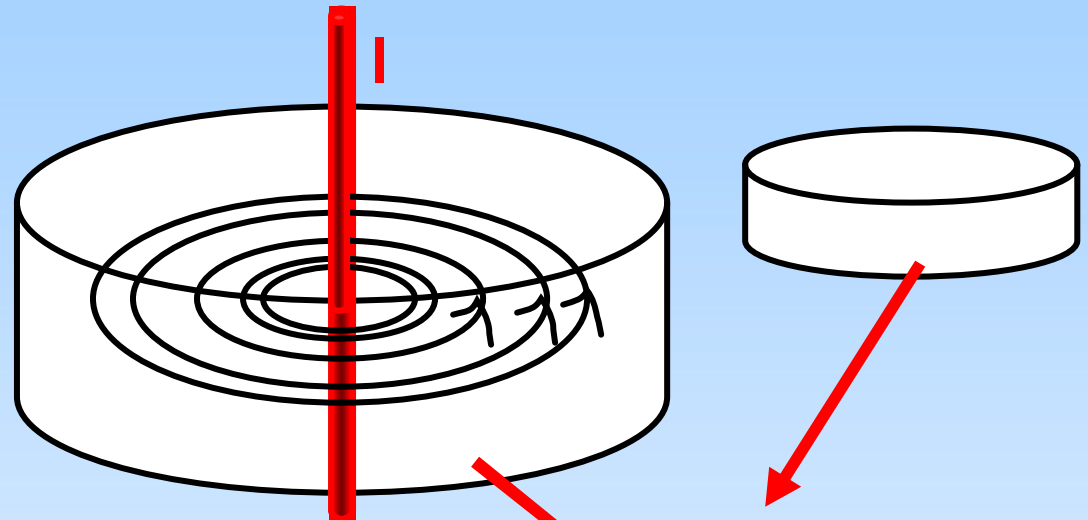
Maar: ook in  $r=0$   
geldt  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \text{ via:}$$

stelling van Gauss & magnetische flux  $\Phi_B$

Magnetische flux:

$$\Phi_B \equiv \int_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o}$$



$$\int_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0$$

Gebruik nu: stelling van Gauss:

$$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = \int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dv$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

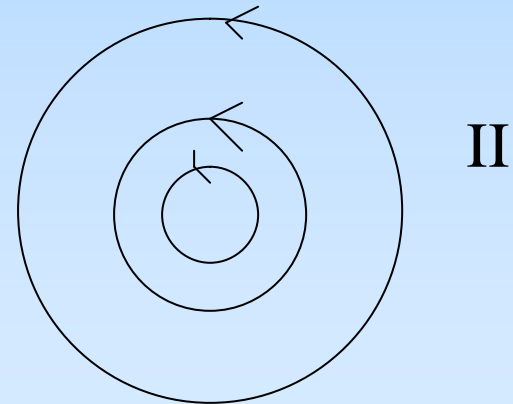
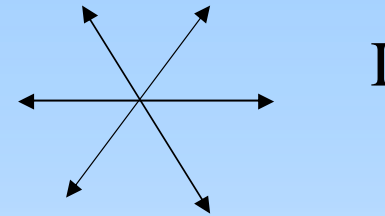
I Figuur I is mogelijk patroon van magnetische veldlijnen  
II Figuur II is mogelijk patroon van elektrische veldlijnen

A I en II zijn juist

B alleen I is juist

C alleen II is juist

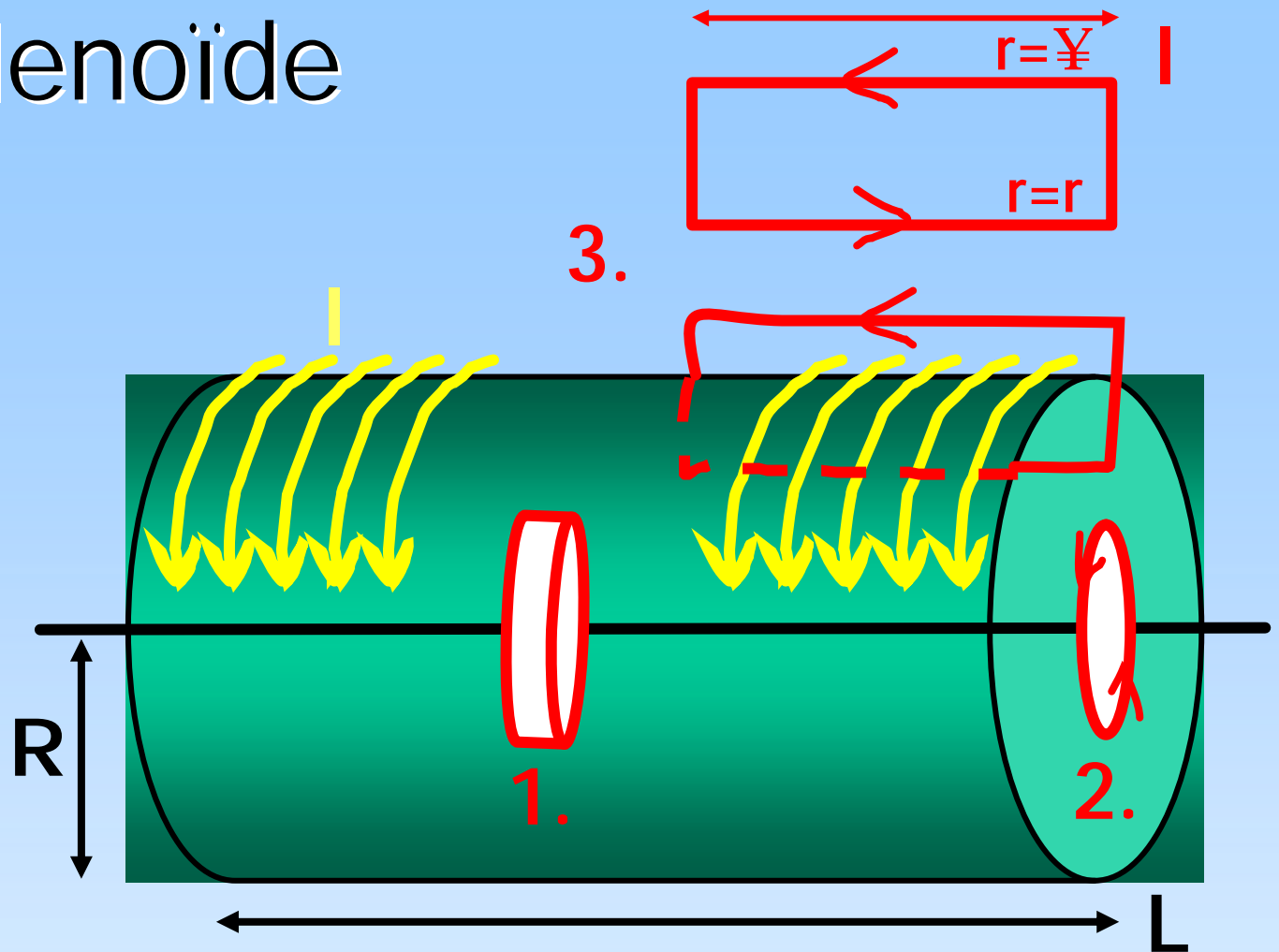
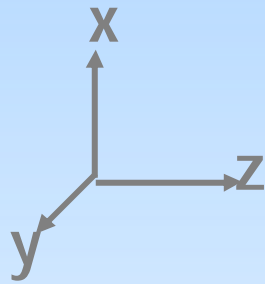
D I en II zijn onjuist



# B-veld solenoïde

## Solenoïde

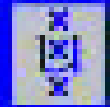
- diameter:  $2R$
- lengte:  $L \gg R$
- stroom:  $I$
- windingen/m:  $N$



1.  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0 \Rightarrow \vec{B}_r = 0$   
pillendoosje

2.  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} r < R: 0 \Rightarrow \vec{B}_j = 0 \\ r > R: 0 \Rightarrow \vec{B}_j = 0 \end{cases}$   
cirkel

3.  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} \text{buiten: } 0 \Rightarrow B_z = 0 \\ \text{binnen: } 0 \Rightarrow l B_z = NI l m_0 \\ \Leftrightarrow B_z = NI m_0 \end{cases}$   
rechthoek



## MAGNETISCHE VELDLIJNEN SPOEL

In en om een stroomvoerende spoel is ijzervijlsel gestrooid. Door op de tafel te tikken kunnen de ijzerdeeltjes (dipooltjes) zich richten langs de magnetische veldlijnen. Het veld in de spoel is homogeen.

# Wat heb ik geleerd?

Rotatie

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Stelling van Stokes :  $\oint_{\text{kring}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{oppervlak}} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{o}$

$$\int_{\text{oppervlak}} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{o} = \oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mathbf{n}_0 \int_{\text{oppervlak}} \vec{J} \cdot d\vec{o} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mathbf{n}_0 \vec{J}$$

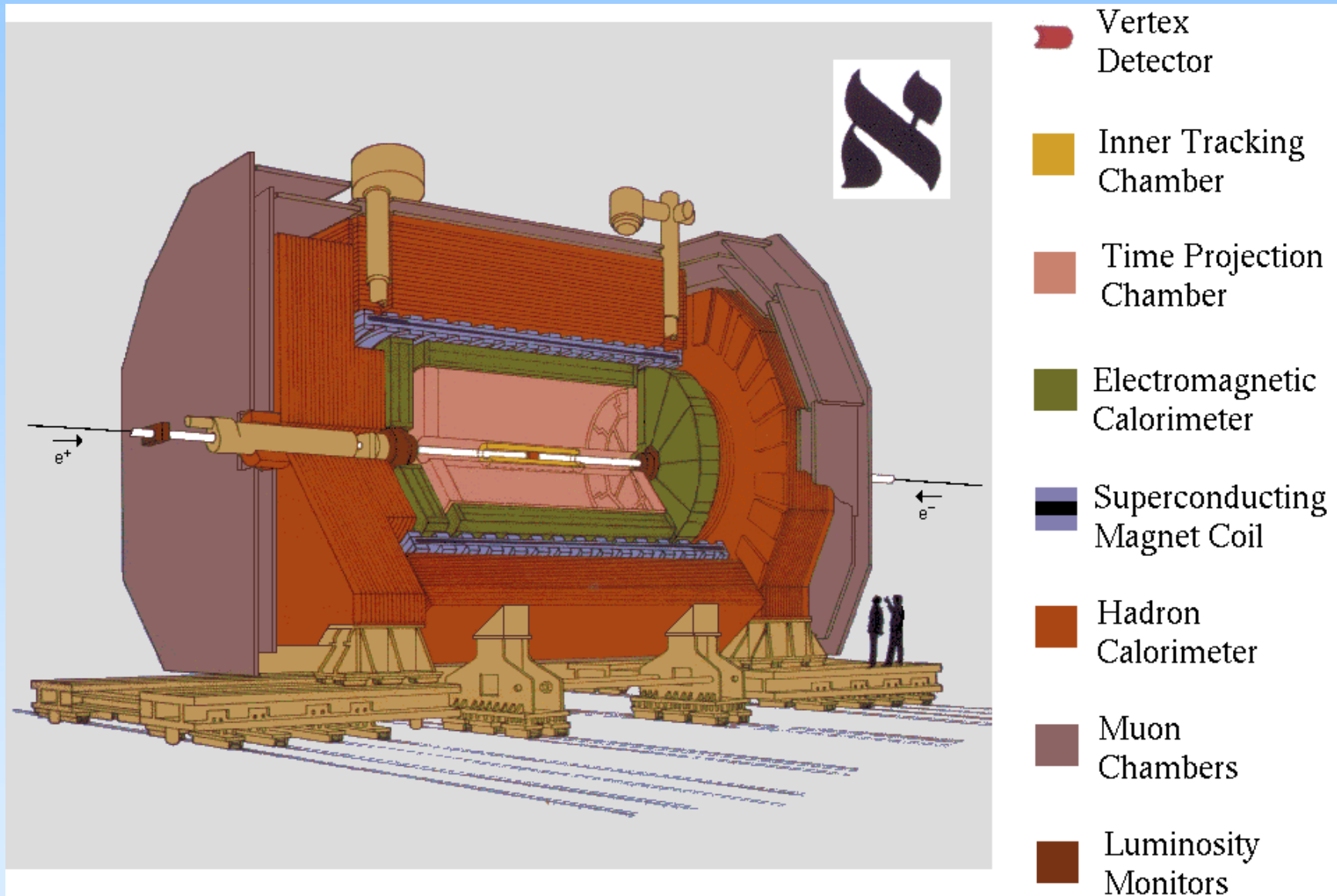
Wiskunde:  
Stokes

Natuurkunde:  
Ampère

$$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

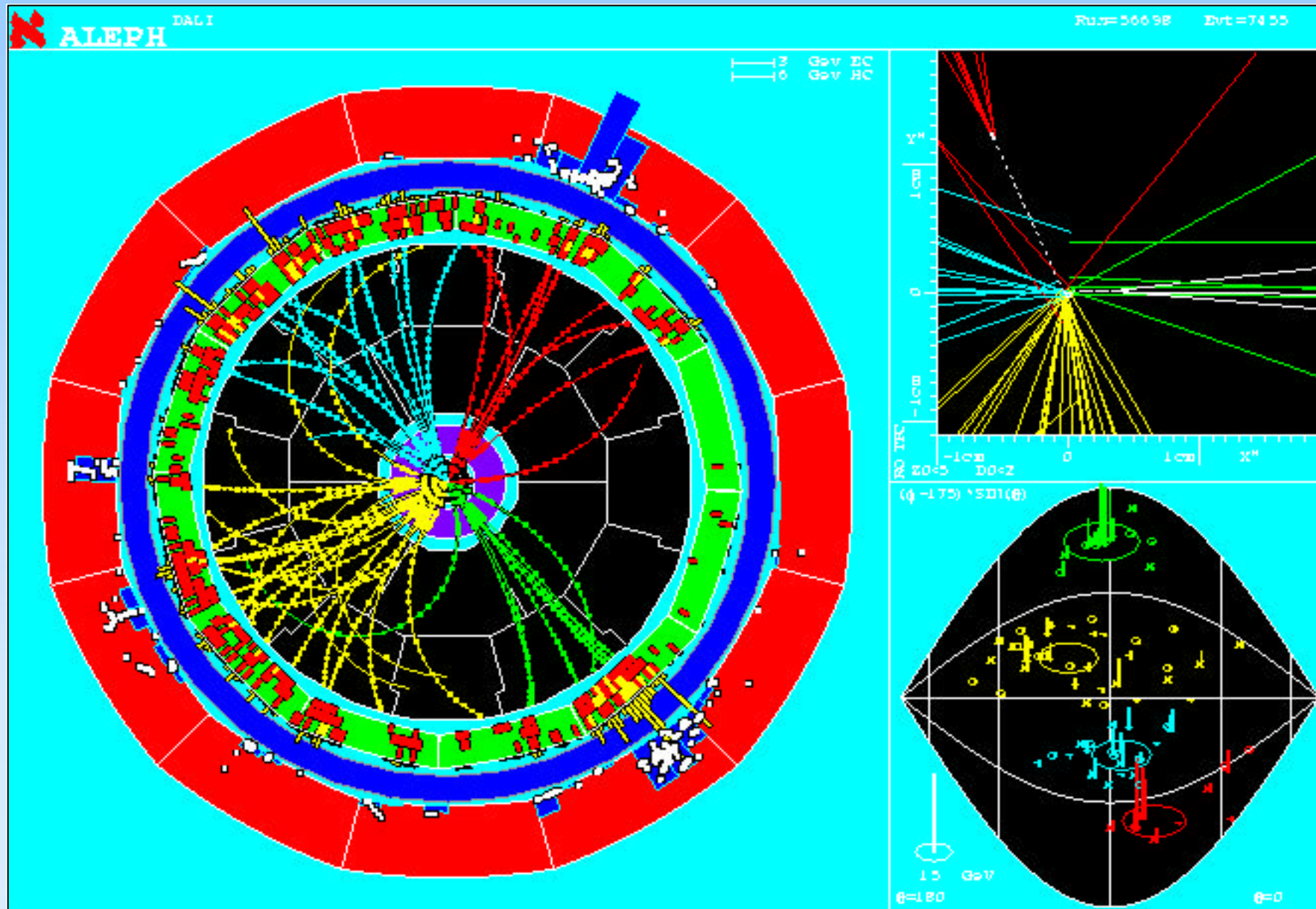


# Detector voor deeltjesfysica



**The ALEPH Detector**

# Moderne spoordetectie



# Inhoud Magnetostatica

## Magnetostatica (5 colleges)

I. Lorentz kracht en magnetisch veld (Biot-Savart)

II. Wet van Ampere`

III. Veldvergelijkingen nader bekeken:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

→ IV. Magnetische velden in materie: magnetisatie

V. Toepassingen: Hall effect, Toroide met spleet.

Griffiths:

- Magnetization: §6.1
- Bound currents: §6.2.2, §6.2.3
- Auxiliary Field H: §6.3
- Linear and NonLinear Media: § 6.4

UP:

- Magnetic Materials: §28.8
- Het Auxiliary Field H uit Griffiths en de transparanten is in UP:  $B_0 = H / \mu_0$

# Magnetisatie

Magnetisatie microscopisch bekeken

Magnetisatie en "gebonden" stroom

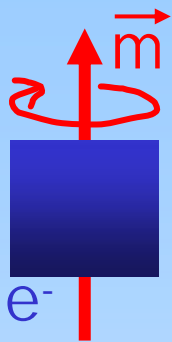
Het veld "H"

Lineaire materialen

Voorbeelden

# Elektron tolt=spint om zijn as!

Dit leer je later!



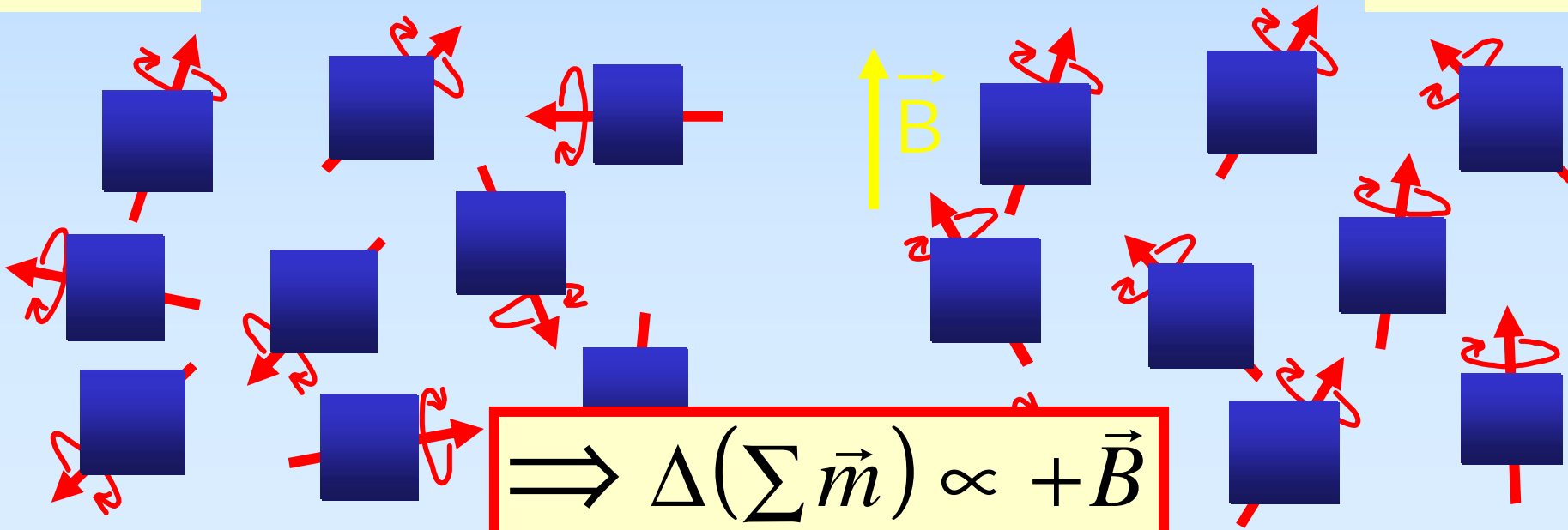
Elektron: - lading  $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$  C  
- spint om zijn as

$\Rightarrow$  magnetisch dipoolmoment:  $m \equiv \frac{q_e \hbar}{2m_e} \approx 10^{-23} \text{ A m}^2$

Voor  $B=0$ : oriëntatie  $\vec{m}$  willekeurig  
Voor  $B \neq 0$ : oriëntatie  $\vec{m} \parallel B$

$$\vec{B} = \vec{0}$$

$$\vec{B} \neq \vec{0}$$

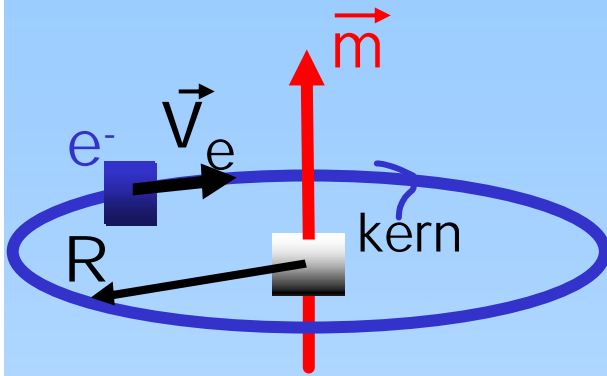


# Elektron draait rond kern (I)

- Elektron: - lading  $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$   
 - draait rond kern;  $R \approx 10^{-10} \text{ m}$   
 - snelheid  $v_e \approx 10^7 \text{ m/s}$

⇒ magnetisch dipoolmoment:

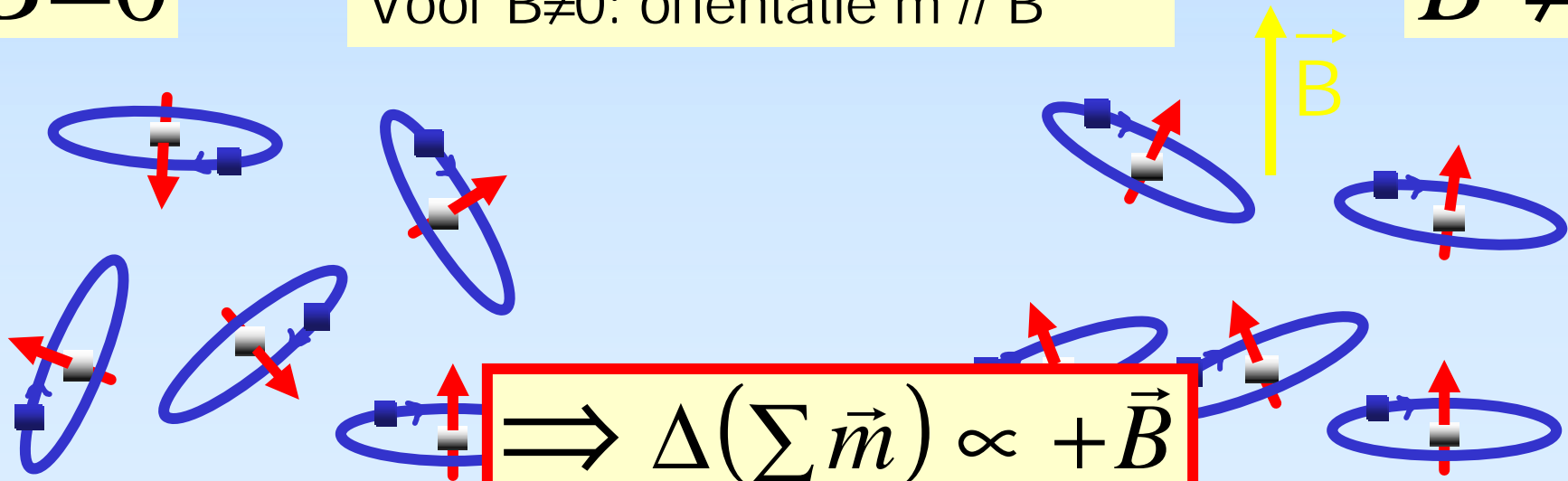
$$m \equiv I p R^2 \cong \frac{q_e v_e}{2pR} p R^2 \approx 10^{-22} \text{ A m}^2$$



$$\vec{B} = \vec{0}$$

Voor  $B=0$ : oriëntatie  $\vec{m}$  random  
 Voor  $B \neq 0$ : oriëntatie  $\vec{m} \parallel B$

$$\vec{B} \neq \vec{0}$$



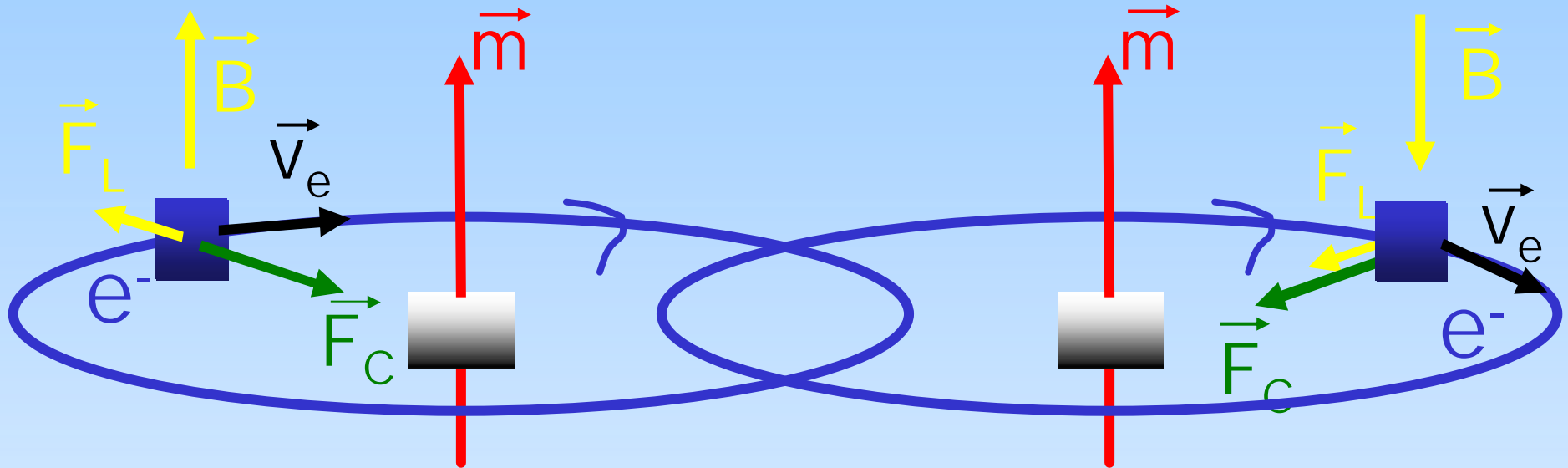
$$\Rightarrow \Delta(\sum \vec{m}) \propto +\vec{B}$$

# Elektron draait rond kern (II)

Maar, er gebeurt meer!

$B=0$ :  $F_C$  houdt elektron in baan

$B \neq 0$ :  $F_C + F_L$  houdt elektron in baan



Elektron snelheid neemt af  $\Rightarrow$   
magnetisch moment kleiner

(kwalitatieve redenering;  
berekening zeer lastig)

Elektron snelheid neemt toe  $\Rightarrow$   
magnetisch moment groter

$$\Delta \vec{m} \text{ t.g.v. } \Delta \vec{v}_e > \Delta \vec{m} \text{ t.g.v. } \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \Delta(\sum \vec{m}) \propto -\vec{B}$$

# Dia- & para-magnetisme

Elektron baan beweging:

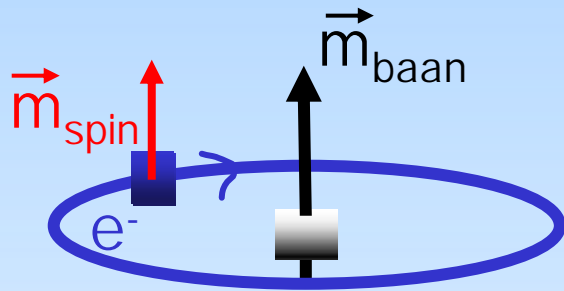
$$\Delta(\sum \vec{m}) \propto -\vec{B}$$

Elektron spin beweging:

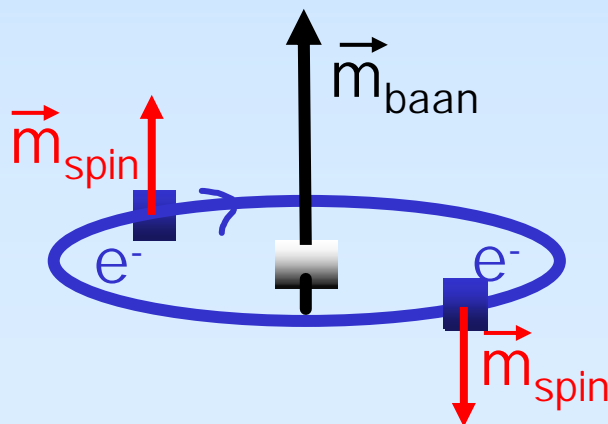
$$\Delta(\sum \vec{m}) \propto +\vec{B}$$

Wie wint: baan of spin?

Afhankelijk van # elektronen!



Waterstof



Helium

**Para-magnetisch:**

- # elektronen oneven
- spin component wint
- $\Delta \vec{m} // +B$

**Dia-magnetisch:**

- # elektronen even
- baan component wint
- $\Delta \vec{m} // -B$



# Dia- & para-magnetisme



## DIAMAGNETISME

Een stuk bismut is aan een arm van een torsiebalans bevestigd. Door een inhomogeen magnetisch veld wordt het bismut uit het veld geduwd (diamagnetisme).



## PARAMAGNETISME

Een buisje met kopersulfaat is aan een arm van een torsiebalans bevestigd. Door een inhomogeen magnetisch veld wordt het kopersulfaat in het veld getrokken (paramagnetisme).

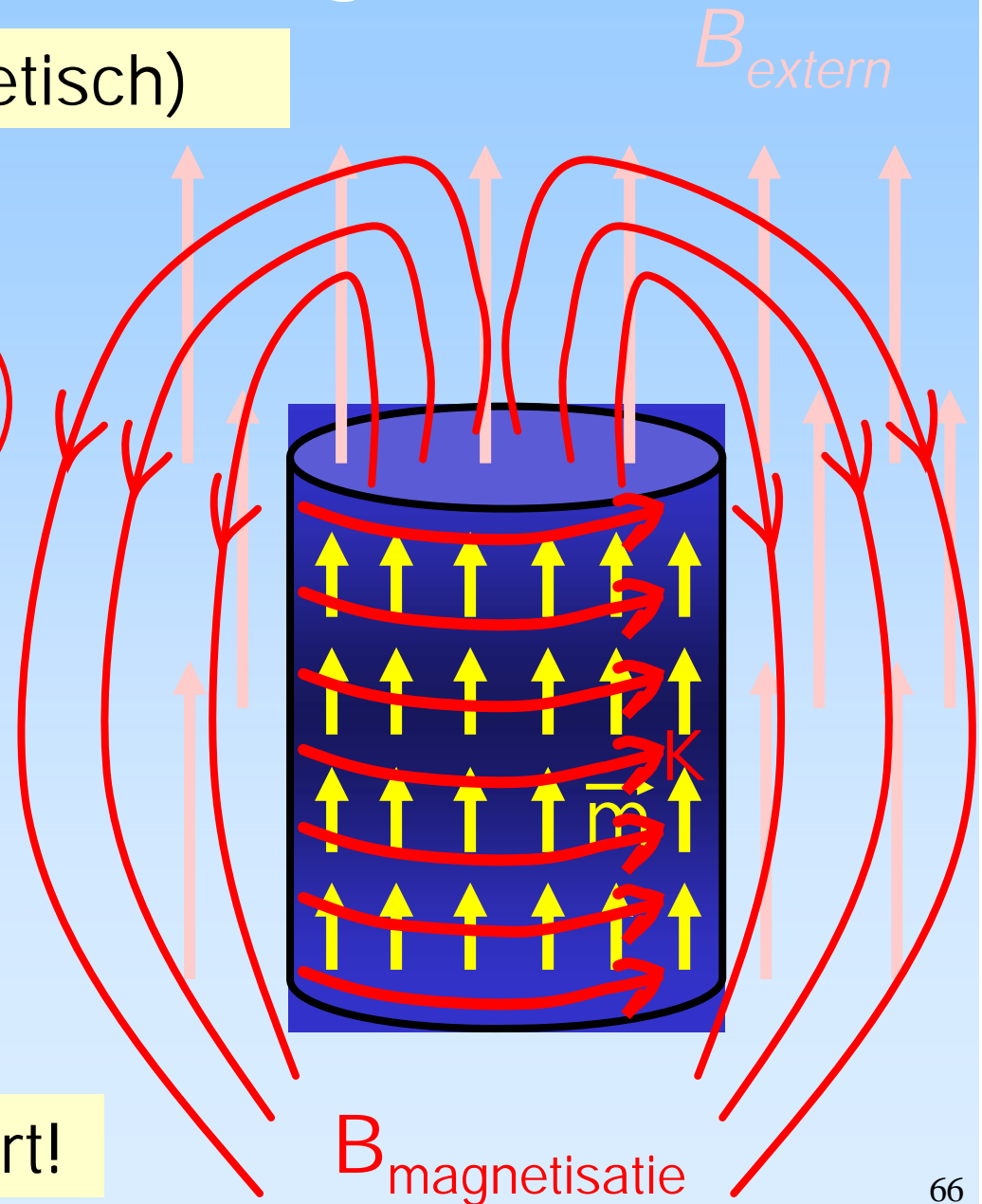
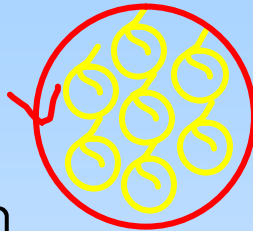
Hoef je niet numeriek te weten; slechts als illustratie dat er twee soorten magnetisme bestaan

# Macroscopisch: magnetisatie

Brok materie (para-magnetisch)

Karakteristieken in B-veld:

- magnetiseert d.w.z. atomaire dipooltjes  $m$
- magnetisatie op te vatten als: oppervlakte stroom
- deze stroom genereert B-veld: tegengesteld externe B-veld

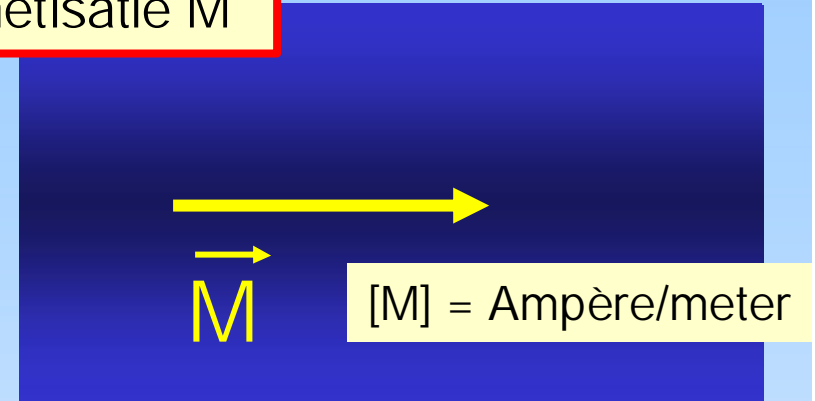
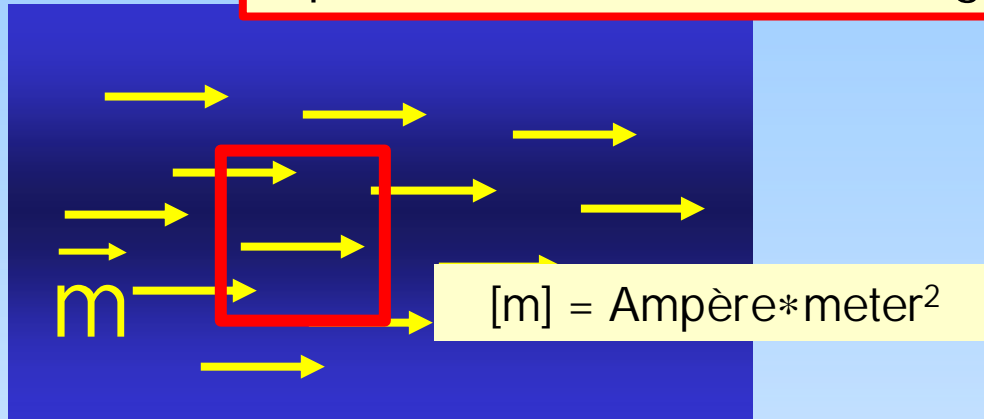


Originele B-veld verandert!

# Microscopisch → Macroscopisch

(analoog elektrische polarisatie)

dipoolmoment/volume  $\equiv$  Magnetisatie  $M$



De 'gebonden' stroom t.g.v. magnetisatie is gegeven door:

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \hat{n}$$

"Eenvoudige" lineaire relatie tussen: magnetisatie  $M$  en resulterend veld  $B$

$$\vec{M} = \frac{\mathbf{c}_m}{\mathbf{m}_0 (1 + \mathbf{c}_m)} \vec{B}$$

# Magnetisatie en Gebonden stroom

Controle relatie:  $\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \hat{n}$

We gaan uit van (constant) gemagnetiseerde cilinder met oppervlakte stroom  $K$

-Magnetisatie=dipoolmoment/Volume

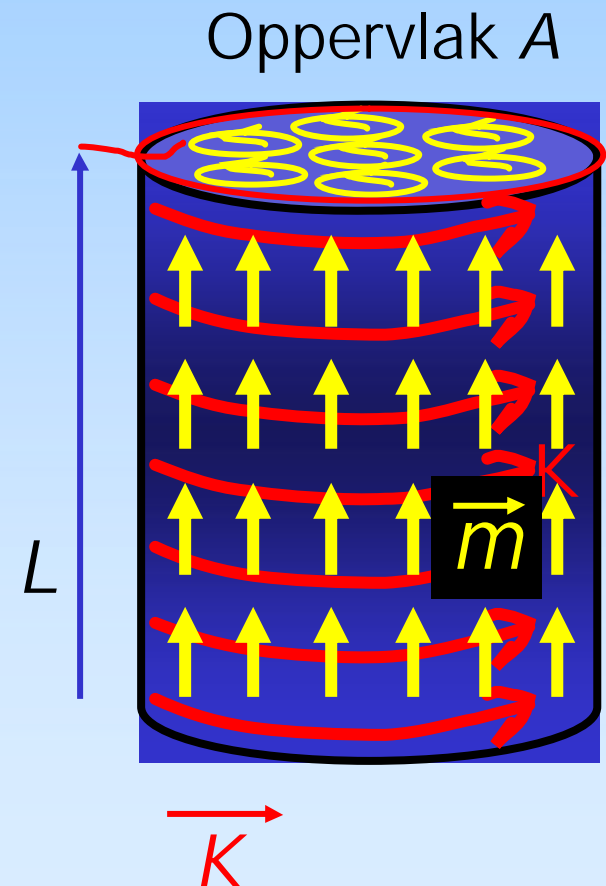
$$\vec{M} = \vec{m} / (LA)$$

-Voor het dipoolmoment schrijven we  $m=IA$

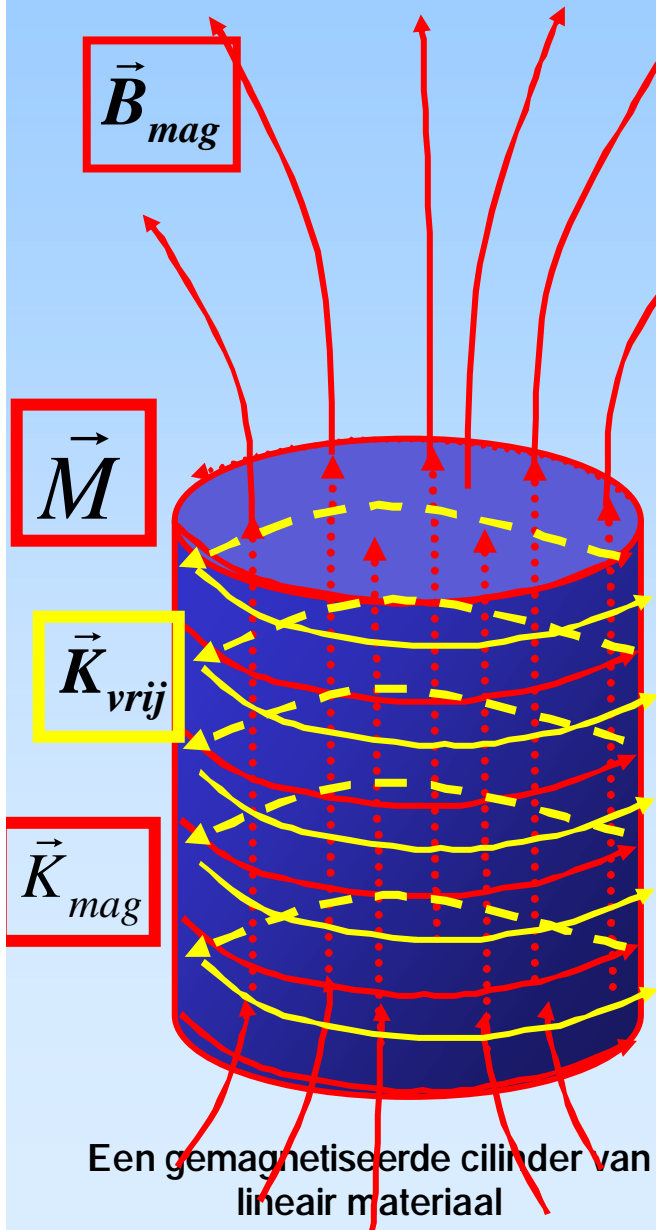
$$|\vec{M}| = IA / (LA) = I / L = |\vec{K}|$$

Dus gemagnetiseerde materie in cilinder

'Magnetisch' equivalent aan oppervlakte stroom  $K$  in 'lege' ruimte



# Spoel met kern van lineair materiaal



## Veld in lege spoel:

Stroom  $I$ , lengte  $L$ ,  $N$  windingen

$$K_{vrij} = IN / L$$

Ampere's law:

$$\vec{B}_0 = m_0 K_{vrij} \hat{z}$$

## Gevolgen(en) kern:

Kern wordt gemagnetiseerd en er gaat dus een gebonden stroom lopen, dus:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_{mag} \\ &= m_0 (K_{vrij} + K_{mag}) \hat{z} \end{aligned}$$

**Volgende stap:** Wat is  $K_{mag}$ ?

# Spoel met kern (vervolg)

We hebben

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_0 + \vec{B}_{mag} \\ &= \mu_0 (K_{vrij} + K_{mag}) \hat{z}\end{aligned}$$

Wat is  $K_{mag}$ ?

We weten

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \hat{n}$$

en

$$\vec{M} = \frac{C_m}{\mu_0 (1 + C_m)} \vec{B}$$

Door (in feite eenvoudig) invullen en combineren vinden we veld in spoel:

**Ga na!**

$$\vec{B}_{mag} = \mu_0 K_{mag} \hat{z}$$

$$\vec{B}_{mag} = C_m \vec{B}_0$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{mag} + \vec{B}_0 = (1 + C_m) \vec{B}_0$$

$$\vec{B}_{\text{met kern}} \gg 100 \vec{B}_{\text{leeg}}$$

# Het veld $\vec{H}$

Extra stof

B-veld wordt bepaald door totale stroomverdeling. Gebruik daarom i.p.v. magnetisatie equivalente oppervlakte  $K_{\text{mag}}$  en volume  $J_{\text{mag}}$  dichtheden!

$\rightarrow 0$

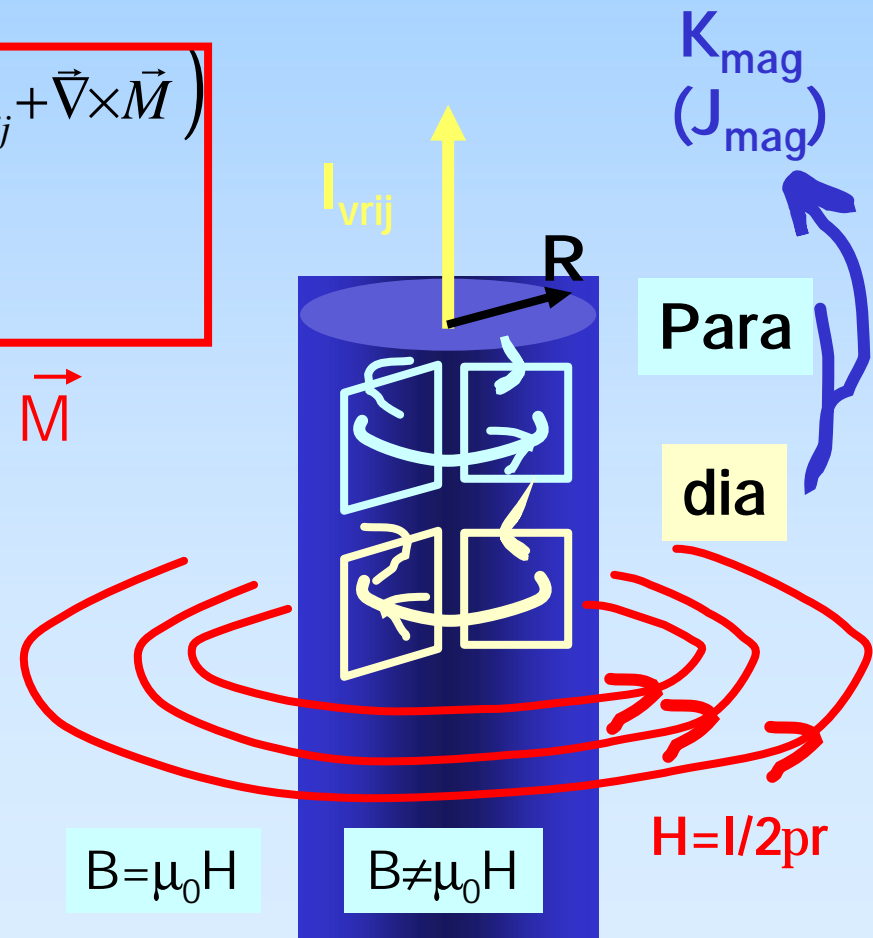
Voor B-veld (via rotatie):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \mu_0 (\vec{J}_{\text{vrij}} + \vec{J}_{\text{mag}}) = \mu_0 (\vec{J}_{\text{vrij}} + \vec{\nabla} \times \vec{M})$$
$$\Rightarrow \vec{J}_{\text{vrij}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

Veld  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$

Voor  $\vec{H}$ -veld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{vrij}} \quad \text{Stelling van Ampere}$$
$$\oint_{\text{rand}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\text{oppervlak}} \vec{J}_{\text{vrij}} \cdot d\vec{\sigma} = I_{\text{vrij}}^{\text{omsloten}}$$



# Lineaire materialen

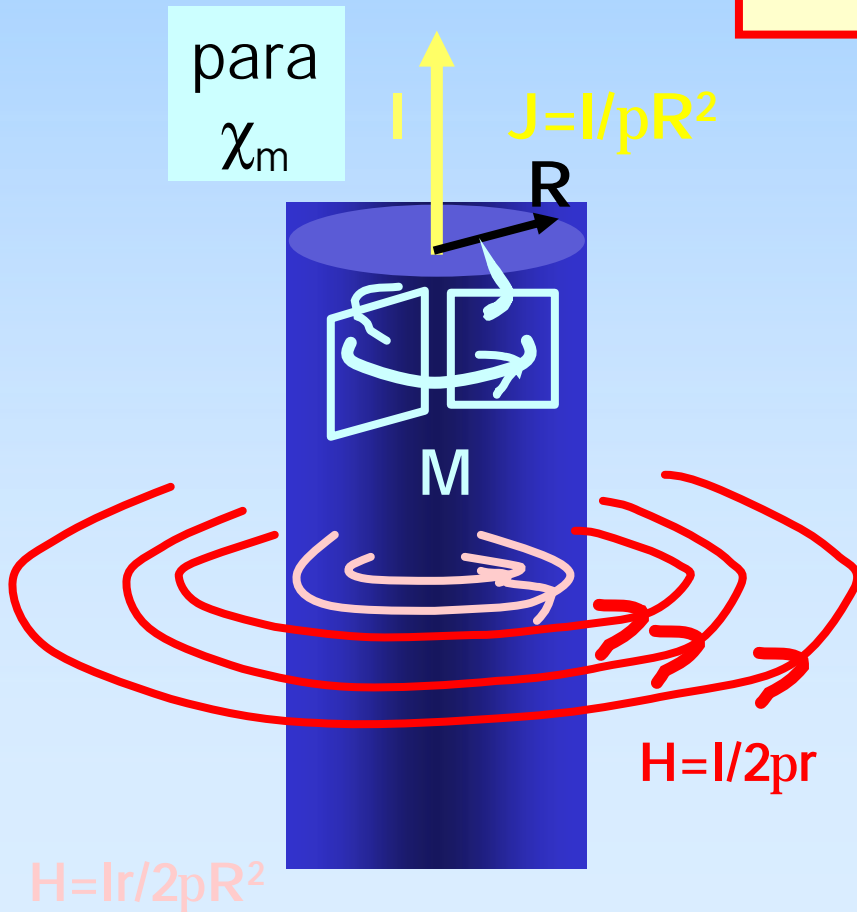
Extra stof

Lineaire relatie tussen  $\vec{M}$  en  $\vec{H}$ :

$$\vec{M} \propto \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \mathbf{c}_m \vec{H}$$

Nu volgt overal  $\vec{B}$  uit  $\vec{H}$ :

$$\begin{aligned} \vec{B} &\equiv \mathbf{n}_0 \vec{H} + \mathbf{m}_0 \vec{M} = \mathbf{n}_0 \vec{H} + \mathbf{m}_0 \mathbf{c}_m \vec{H} \\ &= \mathbf{m}_0 (1 + \mathbf{c}_m) \vec{H} \equiv \mathbf{m} \vec{H} \text{ met } \mathbf{m} \equiv \mathbf{m}_0 (1 + \mathbf{c}_m) \end{aligned}$$



$$\begin{cases} r > R: & 2prH = I \Rightarrow H = \frac{I}{2pr} \\ r < R: & 2prH = I \frac{pr^2}{pR^2} \Rightarrow H = \frac{Ir}{2pR^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > R: & M = 0 \\ r < R: & M = \mathbf{c}_m H = \mathbf{c}_m \frac{Ir}{2pR^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r > R: & B = \mathbf{m}_0 H = \frac{\mathbf{m}_0 I}{2pr} \\ r < R: & B = \mathbf{m} H = \frac{\mathbf{m} r}{2pR^2} \end{cases}$$



# Para- en diamagnetische materialen

## PARA-MAGNETISCH

$$\chi_m > 0$$

Element	Z	$\chi_m$
Helium	2	?
Zuurstof	8	$+2 \times 10^{-6}$
Neon	10	?
Aluminium	13	$+21 \times 10^{-6}$
Argon	18	?

## DIA-MAGNETISCH

$$\chi_m < 0$$

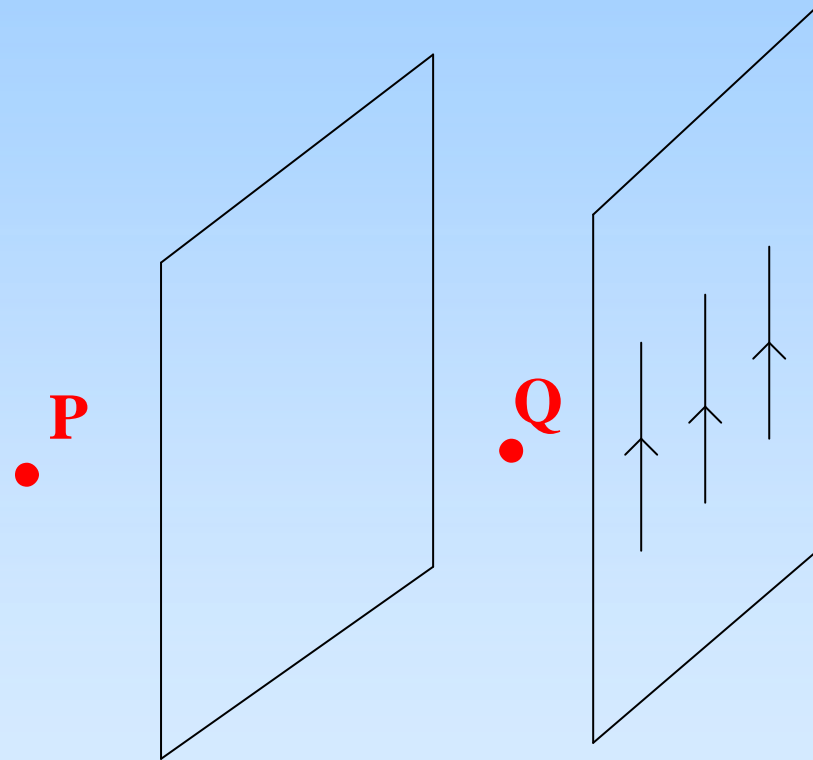
Element	Z	$\chi_m$
Waterstof	1	$\approx 0$
Koper	29	$-10 \times 10^{-6}$
Zilver	47	$-25 \times 10^{-6}$
Goud	79	$-30 \times 10^{-6}$

## Terminologie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_m \quad \text{susceptibiliteit} \left\{ \begin{array}{l} \chi_m < 0 \text{ dia} \\ \chi_m > 0 \text{ para} \end{array} \right. \\ (1 + \chi_m) \equiv K_m \quad \text{relatieve permeabiliteit} \\ (1 + \chi_m) \mathbf{m}_0 \equiv \mathbf{m} \quad \text{permeabiliteit} \end{array} \right.$$

In de (oneindig doorlopende) rechterplaat loopt een oppervlaktestroom in de aangegeven richting. De (oneindig doorlopende) linkerplaat is van paramagnetisch materiaal. In punt P geldt voor het magnetisch veld:

- A dat is groter dan in Q
- B dat is kleiner dan in Q
- C dat is even groot als in Q
- D dat is gelijk aan nul



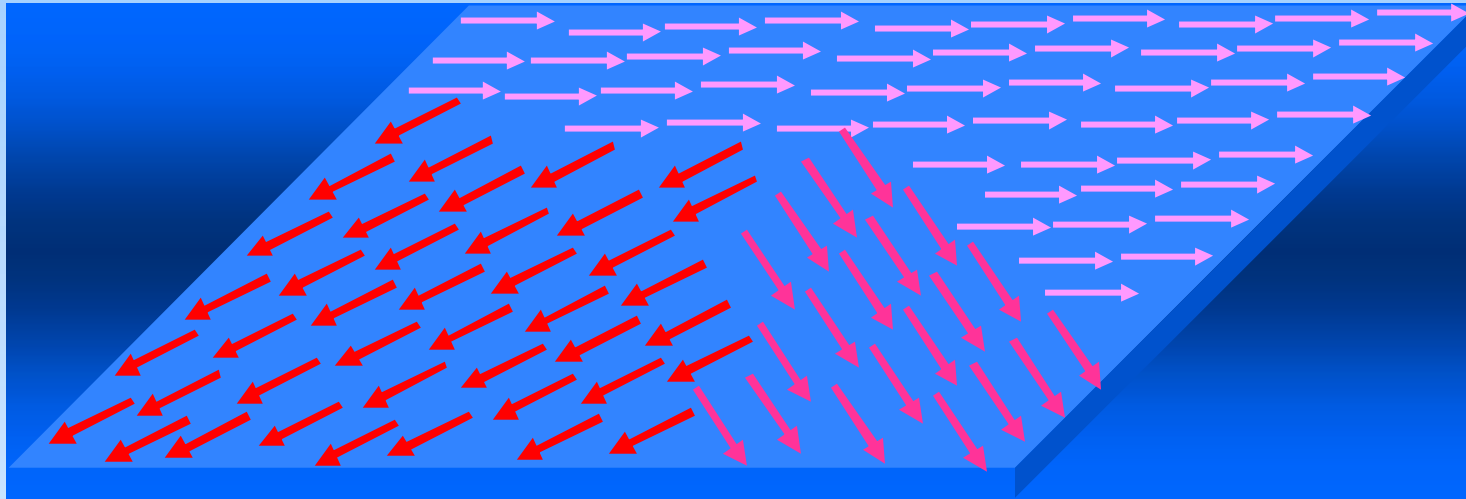
# Ferromagnetisme

Principe & hysteresese

# Permanente magneet?

Para-magnetisme  
dia-magnetisme

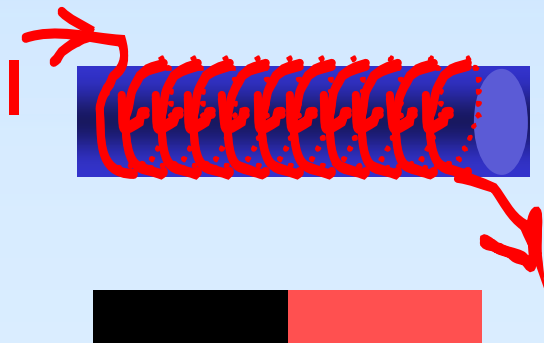
Ferro-magnetisme  
(temperatuur afhankelijk!)



$T < T_{Curie}$ : orde  
 $T > T_{Curie}$ : chaos

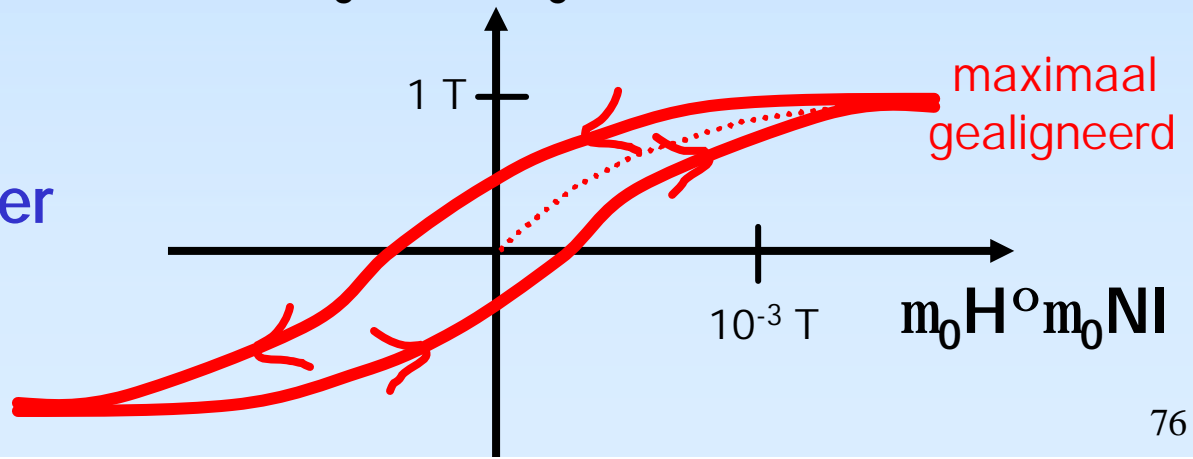
ferro-magneet:  
alignering atomaire  
momenten!

Hysterese:



ijzer

$$m_0 M \circ B - m_0 H \gg B$$



# Spontane alignering



## MAGNETISEREN EN DEMAGNETISEREN

Kompasnaaldjes vormen een model van een magnetische stof. De stof is te magnetiseren door een uitwendig veld aan te leggen. Door op het model te tikken (temperatuur van de stof verhogen) verliest de stof zijn magnetisatie. Wat over blijft zijn de weissgebiedjes.

# Spoel met ijzeren kern



## **B-VELD VAN SPOEL**

**Een hallsensor meet het B-veld bij een spoel. De sterkte van dit veld neemt dramatisch toe wanneer een ijzerkern in de spoel wordt aangebracht.**

# Curie punt Nikkel



## CURIE-PUNT

Een nikkelen munt wordt door een magneet aangetrokken, omdat het gemagnetiseerd wordt. Als de temperatuur boven het curie-punt komt, verliest het nikkel zijn magnetisatie.

# Hysteresese

## HYSTERESIS TRANSFORMATORKERN (1) (ijzerkern)



Door de primaire wikkeling van een trafo met ijzerkern wordt een wisselstroom gestuurd. Dit zorgt voor een H-veld (horizontaal op scoop). De spanning over de secundaire wikkeling wordt geïntegreerd en levert het B-veld (verticaal op scoop).

## HYSTERESIS TRANSFORMATORKERN (2) (ferrietkern)



Door de primaire wikkeling van een trafo met ferrietkern wordt een wisselstroom gestuurd. Dit zorgt voor een H-veld (horizontaal op scoop). De spanning over de secundaire wikkeling wordt geïntegreerd en levert het B-veld (verticaal op scoop). De hysteresislus is smaller dan bij een ijzerkern.



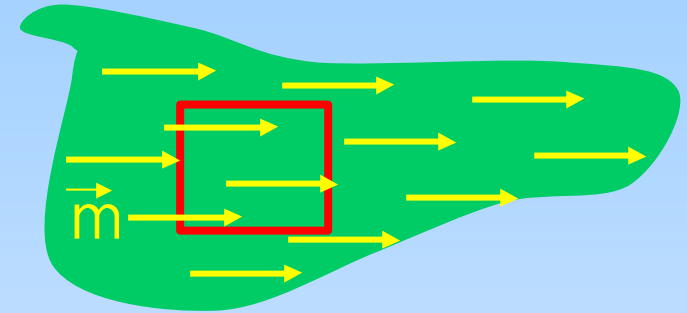
# VI Wat heb ik geleerd?

## Materialen

### – Magnetisatie

$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \cdot \hat{n}$$

$$\vec{M} = \frac{c_m}{m_0(1 + c_m)} \vec{B}$$



### – Mogelijkheden:

- Dia-magnetisme
- Para-magnetisme
- Ferro-magnetisme

$$\vec{M} \parallel - \vec{B}$$

$$\vec{M} \parallel + \vec{B}$$

$\vec{M}$  permanent (hysteresis)

Voor gemagnetiseerd  
materiaal t.g.v. een  
extern veld  $B_0$

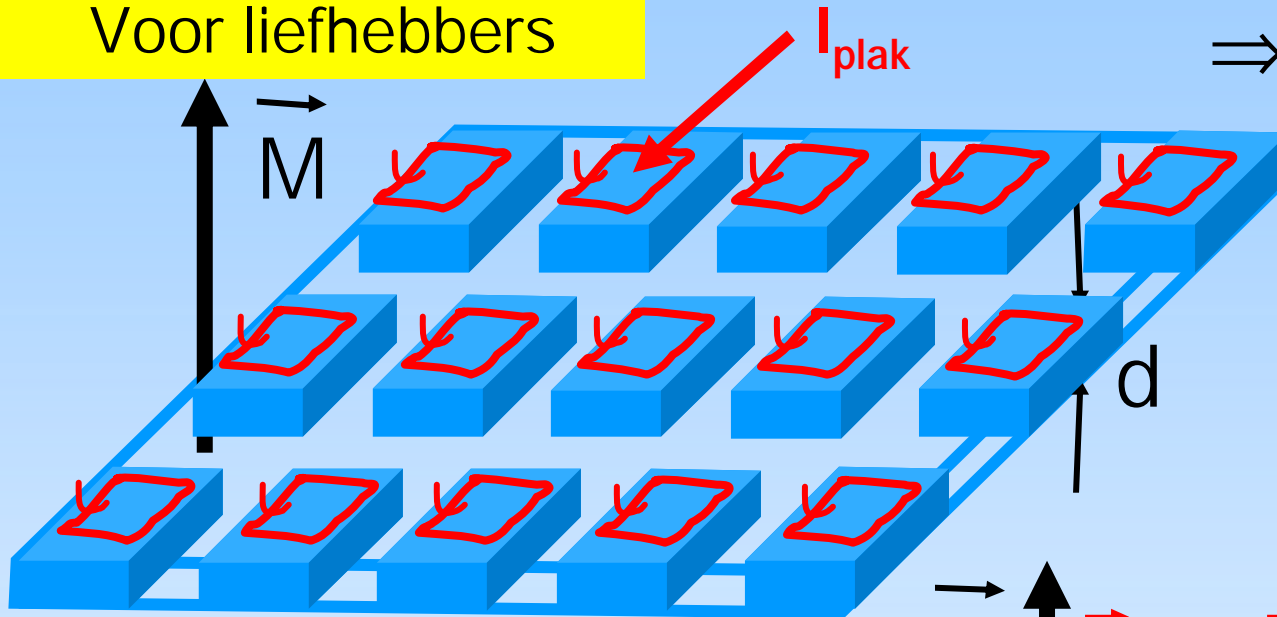
$$\vec{B}_{mag} = m_0 K_{mag} \hat{z}$$

$$\vec{B}_{mag} = c_m \vec{B}_0$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{mag} + \vec{B}_0 = (1 + c_m) \vec{B}_0$$

# (I) Magnetisatie $M$ "gebonden" stroom

Voor liefhebbers



Dipoolmoment/"plakje":

$$Md * opp \equiv I_{plak} * opp$$

$$\Rightarrow I_{plak} = Md$$

$\vec{M}$  equivalent

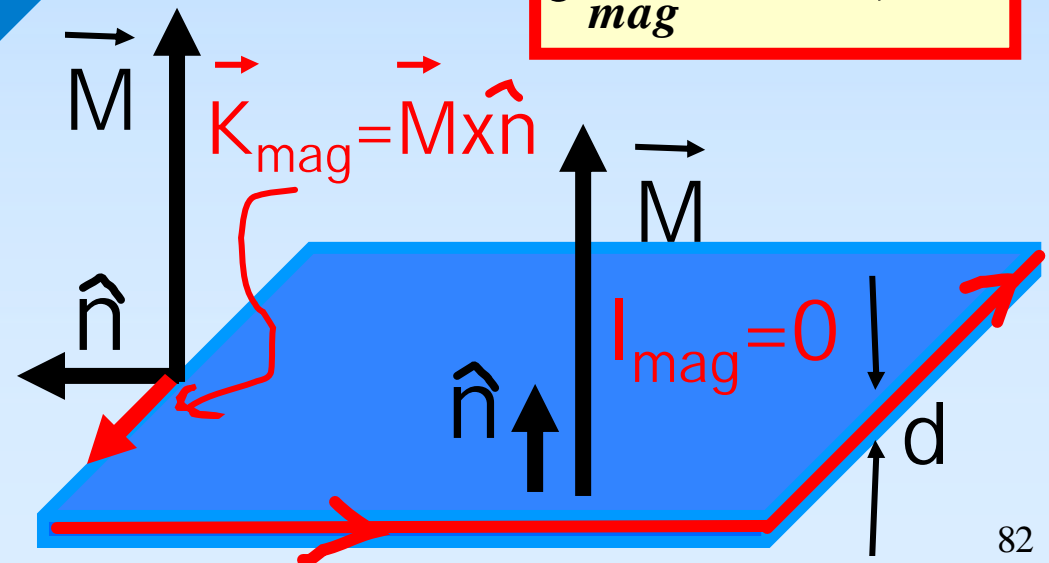
$$\vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \hat{n}$$

algemeen:

$$\vec{J}_{mag} = \vec{N} \times \vec{M}$$

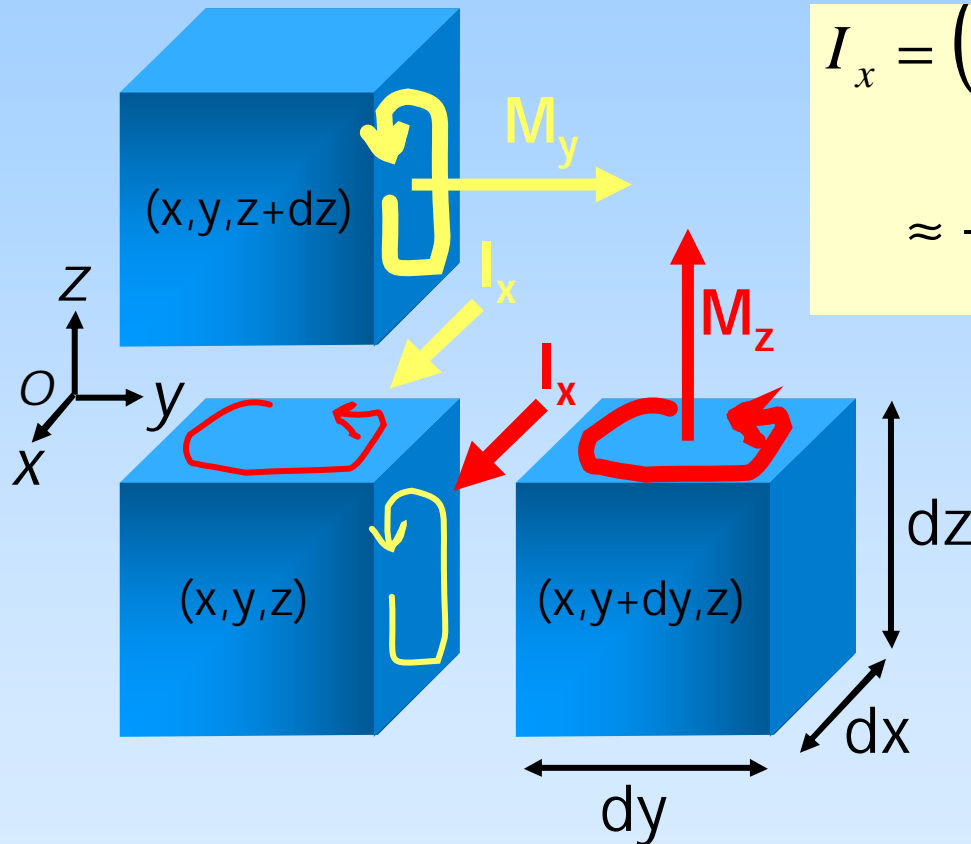
$$I_{rand} \equiv I_{plak} = Md$$

$$\Leftrightarrow K_{rand} = \frac{I_{rand}}{d} = M$$



# (II) Magnetisatie $M(x,y,z)$ "gebonden" stroom

Voor  
liefhebbers!



t.g.v.  $M_y$

$$I_x = (M_y(x,y,z) - M_y(x,y,z+dz))dy$$

$$\approx -\frac{\partial M_y}{\partial z} dz dy \Rightarrow J_x \approx -\frac{\partial M_y}{\partial z}$$

t.g.v.  $M_z$

$$I_x = (M_z(x,y+dy,z) - M_z(x,y,z))dz$$

$$\approx \frac{\partial M_z}{\partial y} dy dz \Rightarrow J_x \approx \frac{\partial M_z}{\partial y}$$

$$J_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \equiv (\vec{\nabla} \times \vec{M})_x$$

**$\vec{M}$  dus :  $\vec{M} \Leftrightarrow \vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \hat{n}$  en  $\vec{J}_{mag} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$**

# Inhoud Magnetostatica

## Magnetostatica (5 colleges)

I. Lorentz kracht en magnetisch veld (Biot-Savart)

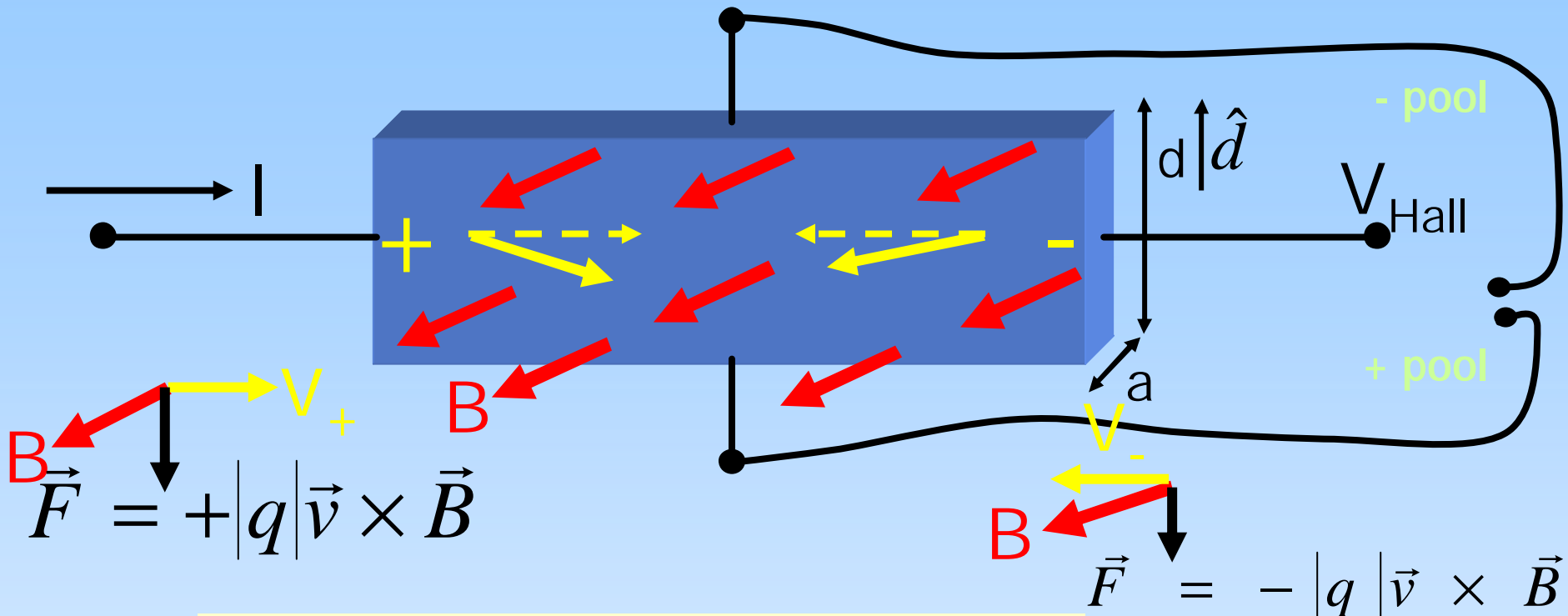
II. Wet van Ampere`

III. Veldvergelijkingen nader bekeken:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

IV. Magnetische velden in materie: magnetisatie V.

→ V. Toepassingen: Hall effect, Toroide met spleet.

# Hall effect (ter voorbereiding practikum)



⇒ afbuiging  $q=+/-$  ⇒ E-veld:  $E_{Hall}$

- Voor  $q=+/-$ :
- dichtheid:  $N$
  - lading:  $q$
  - snelheid:  $v$
- ⇒  $I=Nq*adv$  [C/s]

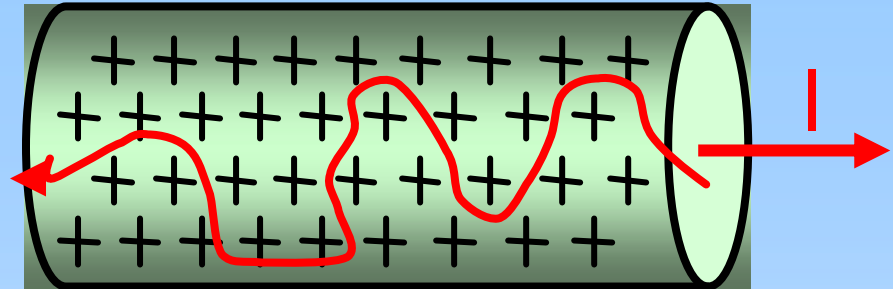
$$\vec{0} = \vec{F}_{elec} + \vec{F}_{magn} = qE_{Hall} \hat{d} - |qv|B\hat{d}$$

$$\text{D } E_{Hall} = \frac{|qv|}{q} B = \frac{I}{Nad} \frac{B}{q} \text{ D } V_{Hall} = d E_{Hall} = \frac{IB}{Nqa}$$

# Waarom beweegt stroomdraad?

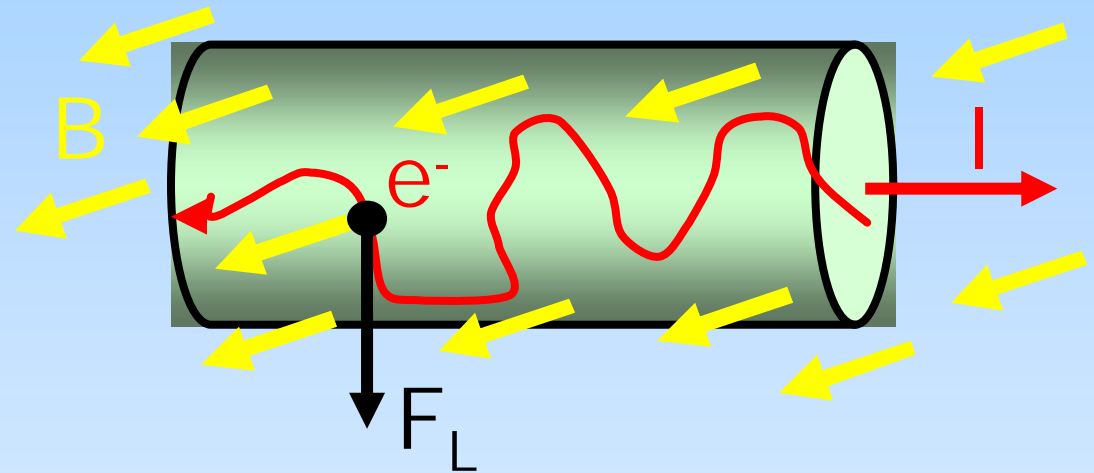
Niet  $F_{\text{Lorentz}}$ :

elektronen zwemmen  
vrijelijk door draad!



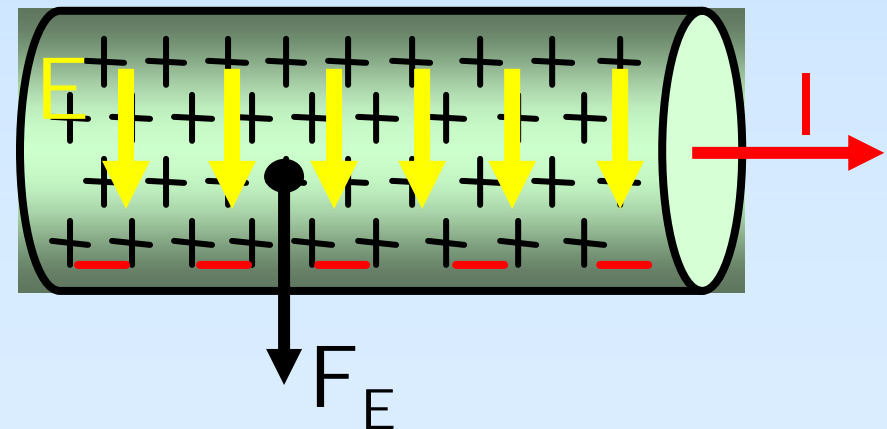
Hall effect:

Elektronen naar  
onderkant draad!



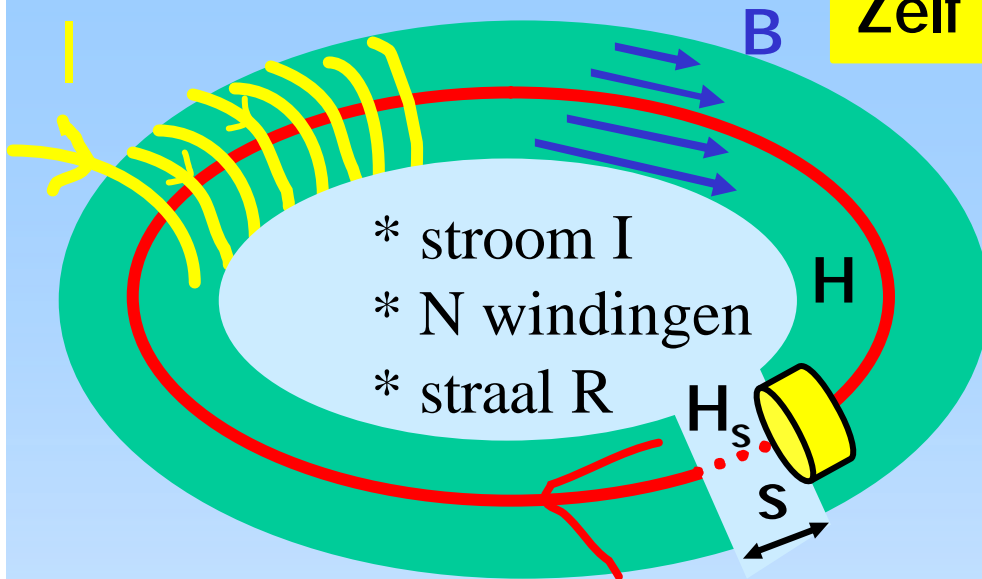
$\Rightarrow$  E-veld:

E-veld trekt rooster ionen  
(+) en daarmee de draad  
naar beneden!



# Voor labjournaal: Toroïde met spleet

Zelf doen (kan zonder H veld)



zonder materiaal:

Ampere:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{"binnen": } 2prB = \mu_0 NI \\ \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2pr} \\ \text{"buiten": } 2prB = 0 \Rightarrow B = 0 \end{array} \right.$

met materiaal:  $\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$  & spleet s

Ampere:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{"binnen": } (2pr - s)H + sH_s = NI \\ \text{"buiten": } 2prH = 0 \Rightarrow H = 0 \end{array} \right.$

Voor  $\vec{B}$ :  $B_s = \mu_0 H_s$  en  $B = \mu H$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0$

cilindertje  $\Rightarrow B = B_s$

$$\left. \begin{array}{l} (2pr - s) \frac{B = B_s}{\mu} + \frac{sB_s}{\mu_0} = NI \Leftrightarrow \\ B = B_s = \frac{\mu NI}{\frac{\mu s}{\mu_0} + 2pr - s} = \frac{\mu_0 NI}{s + \frac{\mu_0}{\mu}(2pr - s)} \end{array} \right\}$$

# Inhoud Magnetostatica

## Magnetostatica (5 colleges)

I. Lorentz kracht en magnetisch veld (Biot-Savart)

II. Wet van Ampere`

III. Veldvergelijkingen nader bekeken:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

IV. Magnetische velden in materie: magnetisatie V.

V. Toepassingen: Hall effect, Toroide met spleet.

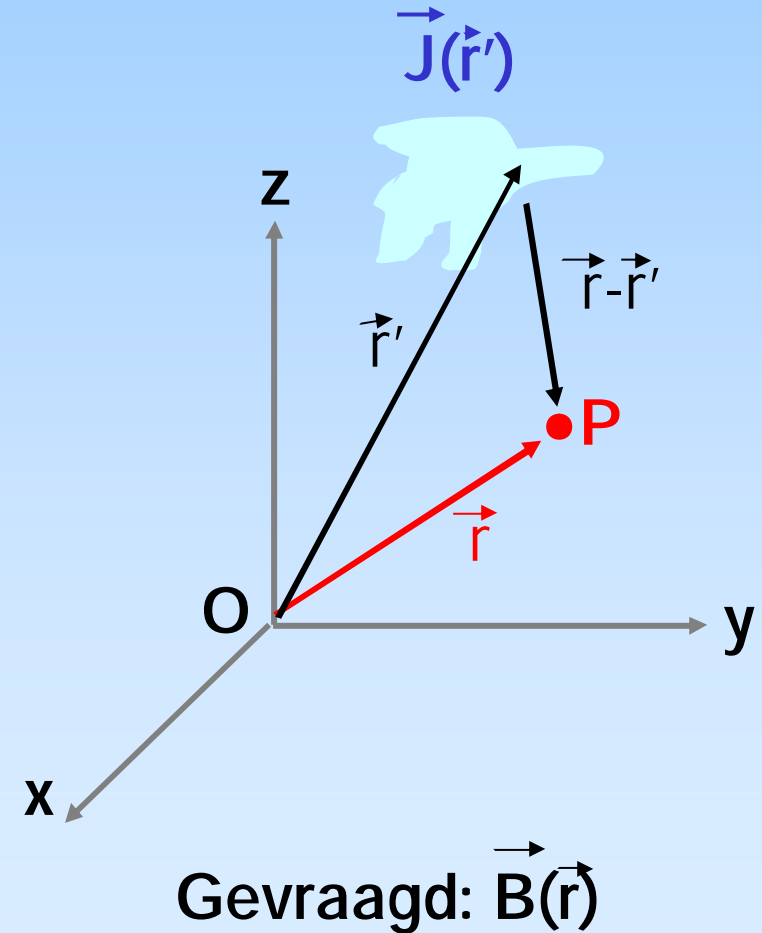
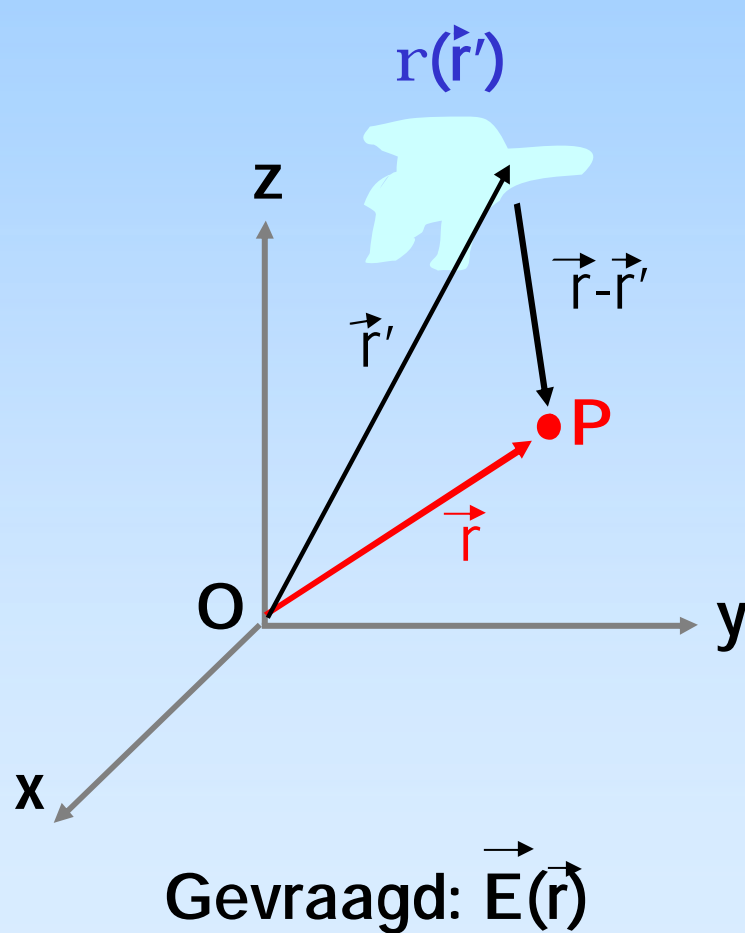
→ Einde



# Electro- & magnetostatica in vacuüm

Electrostatica: Coulomb

Magnetostatica: Biot-Savart



# Electro- & magnetostatica in vacuüm

## Electrostatica: Coulomb

$$\vec{E}_P \equiv \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'$$

β

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \Phi_E \equiv \oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{Q^{\text{omsloten}}}{\epsilon_0} \quad (\text{Gauss}) \end{array} \right.$$

β

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

## Magnetostatica: Biot-Savart

$$\vec{B}_P \equiv \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{lijn}} \frac{\vec{I} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dl'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{volume}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dv'$$

β

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I^{\text{omsloten}} \quad (\text{Ampere}) \\ \Phi_B \equiv \oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0 \end{array} \right.$$

β

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \& \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

# Electro- & magnetostatica met materie

Polarisatie:  $\vec{P}$

$\vec{P}$  equivalent met:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n} \\ \mathbf{r}_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \end{cases}$$

Introduceer "hulpveld":

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &\equiv \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ &= (\mathbf{r}_{vrij} + \mathbf{r}_{pol}) - \mathbf{r}_{pol} = \mathbf{r}_{vrij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint_{\text{oppervlak}} \vec{D} \cdot d\vec{o} = Q_{vrij}^{\text{omsloten}}$$

Lineair medium:  $\vec{P} = \mathbf{c}_e \epsilon_0 \vec{E}$

Magnetisatie:  $\vec{M}$

$\vec{M}$  equivalent met:

$$\begin{cases} \vec{K}_{mag} = \vec{M} \times \hat{n} \\ \vec{J}_{mag} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \end{cases}$$

Introduceer "hulpveld":

$$\vec{H} \equiv \vec{B} / \mathbf{m}_0 - \vec{M}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &\equiv \vec{\nabla} \times \vec{B} / \mathbf{m}_0 - \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ &= (\vec{J}_{vrij} + \vec{J}_{mag}) - \vec{J}_{mag} = \vec{J}_{vrij} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \oint_{\text{lijn}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{vrij}^{\text{omsloten}}$$

Lineair medium:  $\vec{M} = \mathbf{c}_m \vec{H}$

# Inhoud

## Elektrostatica

I. Elektrische kracht, - veld en - potentiaal

II. Veldvergelijkingen nader bekeken:  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$  &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mathbf{r} / \epsilon_0$

III. Elektrische velden in materie: polarisatie

## Magnetostatica

IV. Lorentz kracht en magnetisch veld

V. Veldvergelijkingen nader bekeken:  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  &  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

VI. Magnetische velden in materie: magnetisatie

## Elektromagnetisme

VII. Parallel Elektrostatica & Magnetostatica

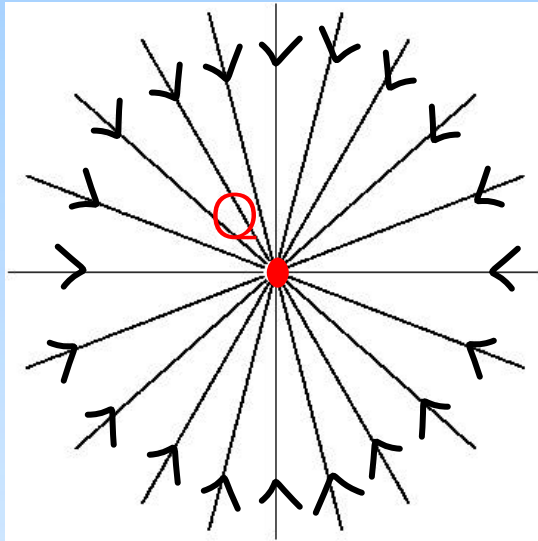
VIII. Inductie

IX. Maxwell vergelijkingen

X. Elektromagnetische golven

# Grafisch: rotatie en divergentie

## Elektrisch veld



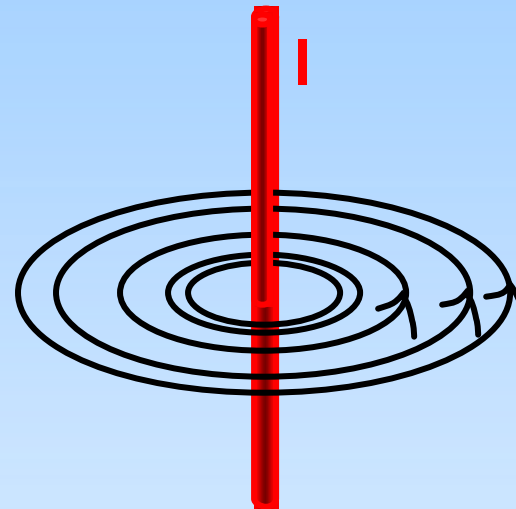
$$\vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\text{volume}} \rho dv \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

**E: rotatie vrij**

## Magnetisch veld



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I \hat{j}}{2\pi r}$$

$$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{o} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{\text{oppervlak}} \vec{J} \cdot d\vec{o} \Rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

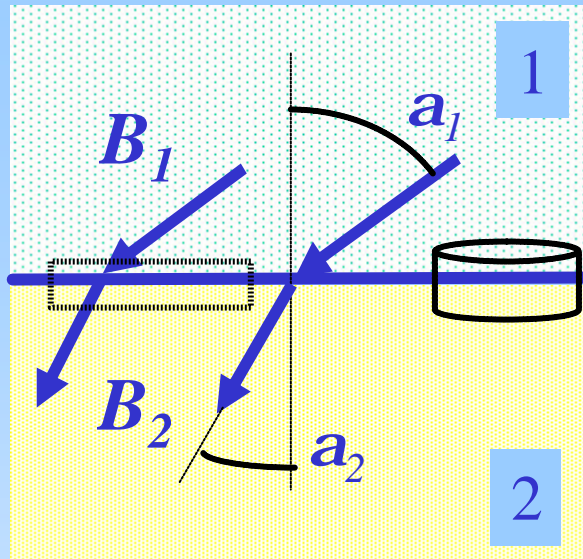
**B: divergentie vrij**

# Grensvlakken

De velden B & H

De velden E & D

# $B$ - and $H$ -fields at interface




Given:  $B_1$  ;  $m_1$  ;  $m_2$

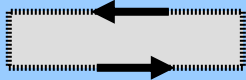
Question: Calculate  $B_2$

Needed: “Interface-crossing relations”:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{free} \quad \text{and} \quad \oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Relation  $H$  and  $B$ :  $B = m_0 m_r H$

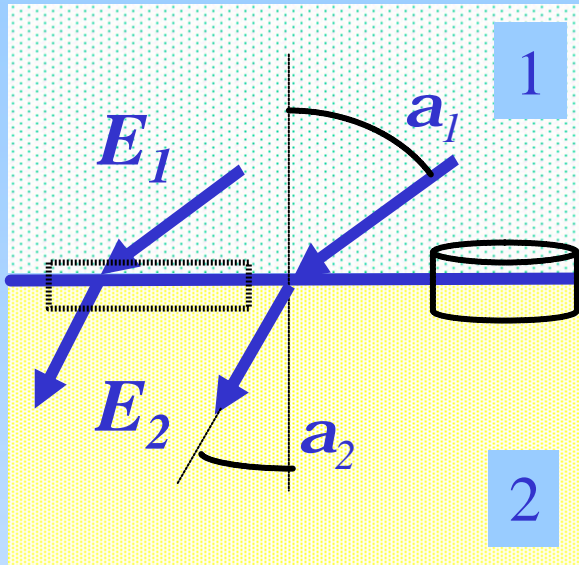
Gauss box  :  $B_1 \cdot A \cos \alpha_1 - B_2 \cdot A \cos \alpha_2 = 0 \Rightarrow B_{1\perp} = B_{2\perp}$

Circuit:  : no  $I$  :  $H_1 \cdot L \sin \alpha_1 - H_2 \cdot L \sin \alpha_2 = 0 \Rightarrow H_{1\parallel} = H_{2\parallel}$

$$\frac{B_1}{H_1} \frac{1}{\tan \alpha_1} \frac{A}{L} = \frac{B_2}{H_2} \frac{1}{\tan \alpha_2} \frac{A}{L}$$

$$\frac{m_{r1}}{m_{r2}} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}$$

# $E$ -field at interface



Given:  $E_1$  ;  $\epsilon_1$  ;  $\epsilon_2$   $\epsilon\epsilon$

Question: Calculate  $E_2$

Needed: “Interface-crossing relations”:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{and} \quad \oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{free, encl.}}$$

Relation  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{E}$ :  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$

Gauss box  (empty!):  $D_1 \cdot A \cos \alpha_1 - D_2 \cdot A \cos \alpha_2 = 0 \Rightarrow D_{1\perp} = D_{2\perp}$

Circuit:   $E_1 \cdot L \sin \alpha_1 - E_2 \cdot L \sin \alpha_2 = 0 \Rightarrow E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$

$$\frac{D_1}{E_1} \frac{1}{\tan \alpha_1} \frac{A}{L} = \frac{D_2}{E_2} \frac{1}{\tan \alpha_2} \frac{A}{L}$$

$$\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}$$



# Electret and Magnet

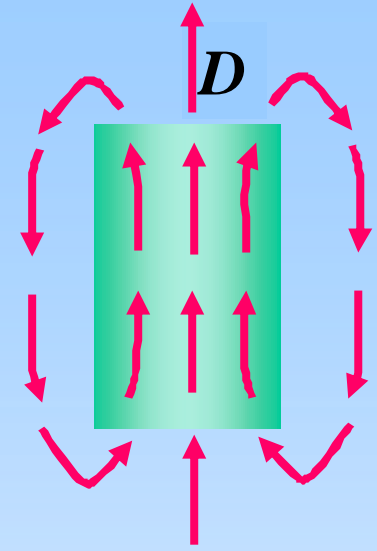
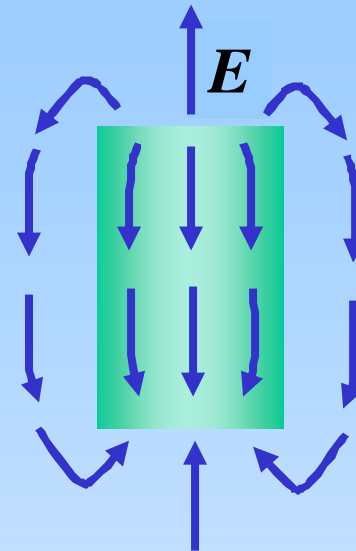
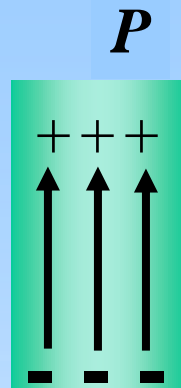
## Electret

$$E = (D - P) / \epsilon_0$$

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$\oint E \cdot dl = 0$$

$$\oiint D \cdot dS = Q_f = 0$$



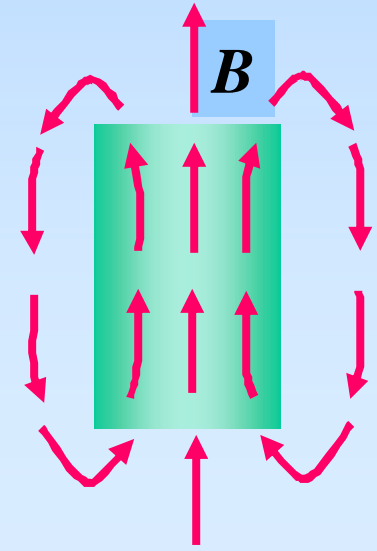
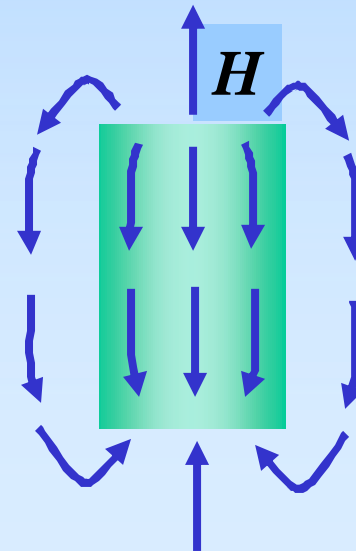
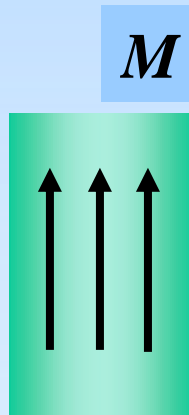
## Magnet

$$H = B / \mu_0 - M$$

$$B = \mu_0 H + M$$

$$\oint H \cdot dl = I_f = 0$$

$$\oiint B \cdot dS = 0$$



# De rotatie van $E$

De rotatie van  $E$

Voorbeeld: uniform geladen bol

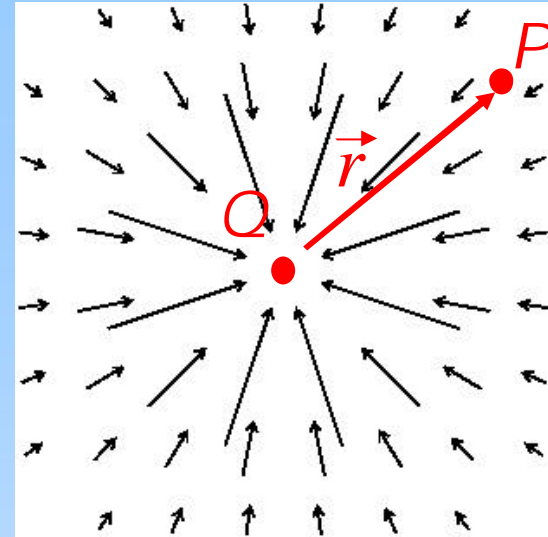
Voorbeeld: puntlading

$\nabla \times E = 0$  via stelling van Stokes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Puntlading:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

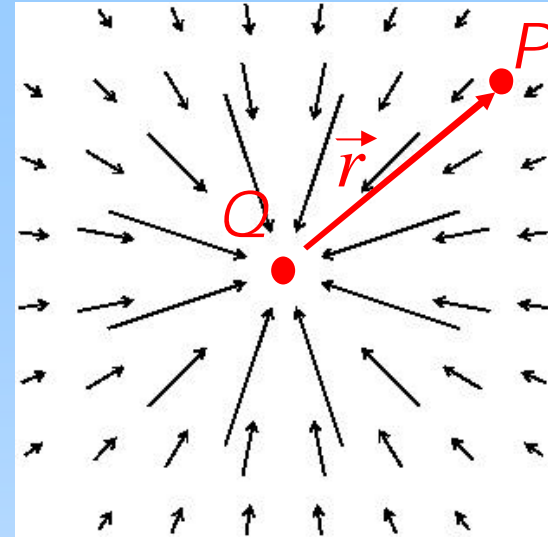


$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{i} \left( \partial_y \frac{z}{r^3} - \partial_z \frac{y}{r^3} \right) - \hat{j} \left( \partial_x \frac{z}{r^3} - \partial_z \frac{x}{r^3} \right) + \hat{k} \left( \partial_x \frac{y}{r^3} - \partial_y \frac{x}{r^3} \right) \right\} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

Uniform  
geladen bol:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \hat{i} \left( \partial_y \frac{z}{r^3} - \partial_z \frac{y}{r^3} \right) - \hat{j} \left( \partial_x \frac{z}{r^3} - \partial_z \frac{x}{r^3} \right) + \hat{k} \left( \partial_x \frac{y}{r^3} - \partial_y \frac{x}{r^3} \right) \right\} = \vec{0} \end{aligned}$$