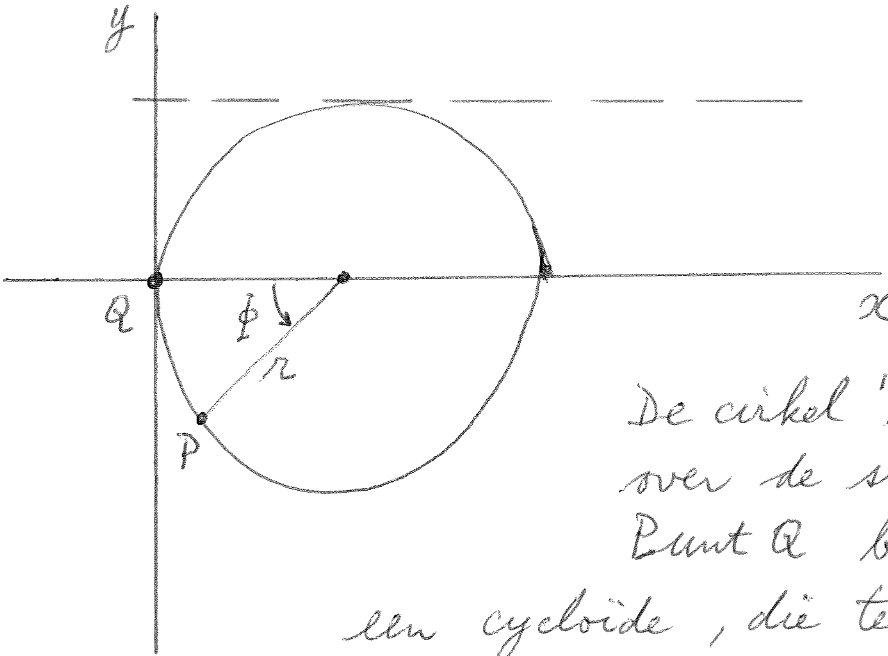
Trillingstijd van puntmassa die op en neer 'slingert' langs cycloïdebaan

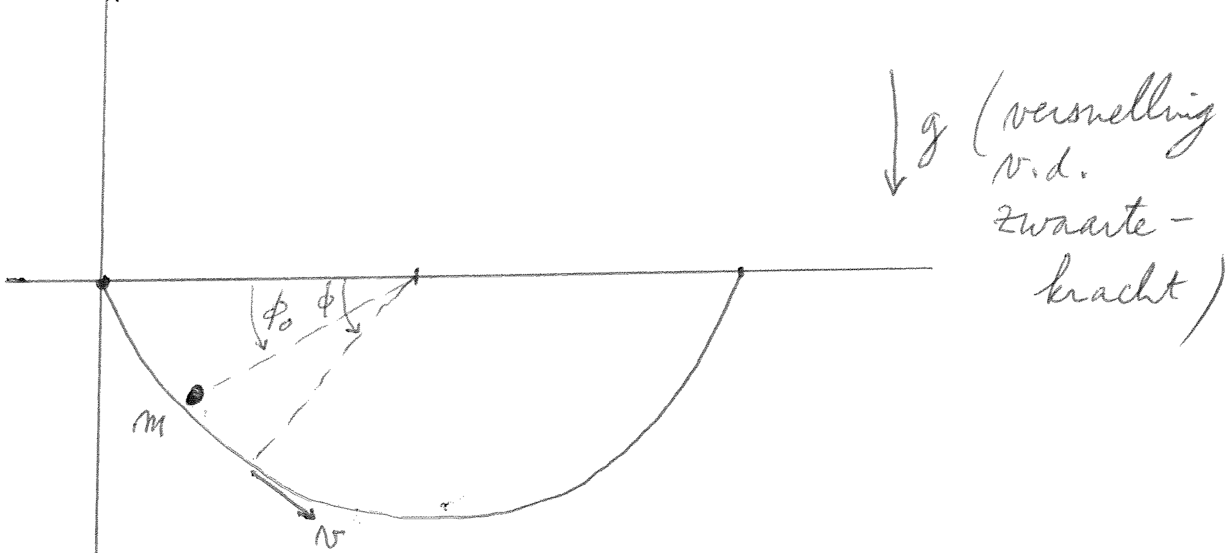


De cirkel 'rolt' naar rechts over de stippellijn. Punt Q beschrijft dan een cycloïde, die te parametrizeren is als:

$$x = r(1-\cos\phi) + r\phi$$

$$y = -r\sin\phi$$

Laat nu op deze cycloïde, wrijvingsloos, een puntmassa bewegen in een verticaal zwaartekrachtsveld:



We laten de puntmassa, m, los op tijd $t=0$; het vertrekpunt wordt beschreven door de parameters ϕ_0 en r.

Wat is nu de periode van de oscillerende beweging die ontstaat; de trillingstijd T.

De snelheid v, langs de baan gericht, volgt uit:

$$mg(y-y_0) = \frac{1}{2} m v^2$$

$$mgr(\sin\phi - \sin\phi_0) = \frac{1}{2} m v^2$$

Dus: $$v = \sqrt{2gr}\,\sqrt{\sin\phi - \sin\phi_0}$$

De tijd die de puntmassa nodig heeft om het diepste punt van de baan te bereiken is:

$$t_D = \int_{\phi_0}^{\pi/2} \frac{dl}{v}$$

waar dl een lengte-elementje van de cycloïdebaan is: $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

$$dx = r(1+\sin\phi)\,d\phi$$

$$dy = -r\cos\phi\,d\phi$$

$$dl = r\sqrt{2}\,\sqrt{1+\sin\phi}\,d\phi$$

Dus

$$t_D = \int_{\phi_0}^{\pi/2} \frac{dl}{v}$$

$$= \int_{\phi_0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{r}{g}} \sqrt{\frac{1+\sin\phi}{\sin\phi - \sin\phi_0}} \, d\phi$$

Definieer $s = \dfrac{\sin\phi - \sin\phi_0}{1-\sin\phi_0}$

Met deze substitutie vinden we

$$s\,(1-s) = \frac{\sin\phi - \sin\phi_0}{1-\sin\phi_0} \cdot \frac{1 \mp \sin\phi}{1-\sin\phi_0}$$

$$ds = \frac{\cos\phi \, d\phi}{1-\sin\phi_0}$$

dus $$\frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} = \frac{\cos\phi \, d\phi}{1-\sin\phi_0} \cdot \frac{1-\sin\phi_0}{\sqrt{(\sin\phi-\sin\phi_0)\cdot(1 \mp \sin\phi)}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2\phi} \, d\phi}{\sqrt{(\sin\phi - \sin\phi_0)(1 \mp \sin\phi)}} =$$

$$\sqrt{\frac{1+\sin\phi}{\sin\phi - \sin\phi_0}} \, d\phi$$

zo vinden we

$$t_D = \int_0^1 \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}}$$

Het resultaat is dus onafhankelijk van ϕ_0, de trillingstijd is onafhankelijk van de amplitude! Dit is de ideale slinger waar Huygens naar op zoek was.

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} = \pi$$

$$T = 4\,t_D = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

voor $r = \frac{1}{4}\,l$: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, de bekende formule voor lange slingers met kleine uitwijkingen

Jos Engelen
7/7/2013