Hoe de ether verdween uit de natuurkunde – deel 2

Een kleine geschiedenis van de Lorentztransformaties

In deel 2 van dit tweeluik laten we zien hoe het werk van Lorentz aan elektromagnetische verschijnselen in bewegende systemen lengtecontractie aannemelijk maakt. We laten ook zien hoe zijn werk zich verhoudt tot de relativiteitstheorie van Einstein.

De Lorentztransformaties volgens Lorentz, aangepast door Poincaré

In 1904 vond Lorentz [1] een theoretische onderbouwing voor de door hem twaalf jaar eerder voorgestelde contractie. We zullen die hieronder kort toelichten. Hij constateert: "*It will easily be seen that the hypothesis that has formerly been made in connexion with Michelson's experiment, is implied in what has now been said*".
In zijn denken blijft het stelsel waarin de ether in rust is een centrale en bijzondere rol spelen. Hierdoor bleef hij net een stap verwijderd van de 'definitieve' Lorentztransformaties die Poincaré kort na Lorentz als aanvulling op diens artikel, met alle eer voor Lorentz, publiceerde [2].
Voor Lorentz was alleen in het etherstelsel de lichtsnelheid gelijk aan c en waren de Maxwellvergelijkingen, waaruit deze snelheid volgt, strikt genomen alleen geldig in dit stelsel. Daarin zien de Maxwellvergelijkingen er als volgt uit:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{D}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\rho\vec{v}\right) \tag{1}$$

met een bewegende ladingsverdeling ρ.

Daarnaast geeft hij de kracht, per ladingseenheid, die de ether uitoefent op een volume-element van een elektron, voor hem geen puntdeeltje. (Het gedetailleerde model van de structuur der materie gebaseerd op het atoommodel van Rutherford was nog niet bekend):

$$\vec{F}=\vec{D}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H} \tag{2}$$

We gebruiken dezelfde notatie (en eenheden) als Lorentz, met D de elektrische kracht, ook diëlektrische verplaatsing genoemd, en H de magnetische kracht. ρ is de ladingsdichtheid. Bovenstaande vergelijkingen (1) gelden in het rustsysteem van de ether. (En zoals we nu weten in elk willekeurig inertiaalstelsel.) Lorentz wil ze echter oplossen in het laboratoriumsysteem (waarin bijvoorbeeld de opstelling van Michelson en Morley staat) dat, met de aarde, beweegt door de ether. Zo'n aanpak maakt het mogelijk experimentele resultaten te vergelijken met de theorie. Hij gaat dus over op nieuwe x-coördinaten zodat $x \rightarrow x - vt$ en dus $\partial/\partial t \rightarrow \partial/\partial t - v\partial/\partial x$. Ook maakt hij de substitutie $\vec{v} \rightarrow (v+u_x, u_y, u_z)$. Het laboratorium beweegt dus met snelheid v langs de x-as. Zo maakt hij een onderscheid tussen algehele beweging van het systeem door de ether en de beweging van de ladingen ten opzichte van het systeem, dat wil zeggen in het laboratorium.
Samengevat:

$$\partial/\partial t \rightarrow \partial/\partial t - v\partial/\partial x$$
$$\vec{v} \rightarrow (v+u_x, u_y, u_z) \tag{3}$$

Substituties die Lorentz maakt in (1) alvorens de transformaties te zoeken die weer vergelijkingen van de vorm (1) opleveren.

Merk op dat de vergelijkingen die op die manier worden verkregen niet meer de Maxwellvergelijkingen zijn. Vervolgens vindt Lorentz door verandering van variabelen, van de plaats- en tijdcoördinaten én een herdefinitie van elektrische en magnetische velden, de ladingsdichtheid en de snelheid $\vec{u}$ een stelsel vergelijkingen dat de vorm heeft van de Maxwellvergelijkingen in het rustsysteem van de ether. (Hij bereikt echter niet helemaal, wat wij nu covariantie noemen, maar zijn 'accentvergelijkingen' komen wel heel dicht in de buurt van de transformaties die Einstein een jaar later publiceerde.)
De verandering van variabelen die Lorentz vond, is (we beschouwen beweging met snelheid v in de x-richting):

$(\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2})$:

$$x' = \gamma x$$
$$t' = t/\gamma - \gamma v x/c^2 \tag{4}$$

Verandering van variabelen (Lorentz).

Het was Poincaré [2] die zonder veel uitleg, en alle eer aan Lorentz latend, de bovenstaande transformaties generaliseerde, bovendien beredeneerde dat deze een groep moesten vormen. Hij schreef de, door hem zo genoemde, Lorentztransformaties als:

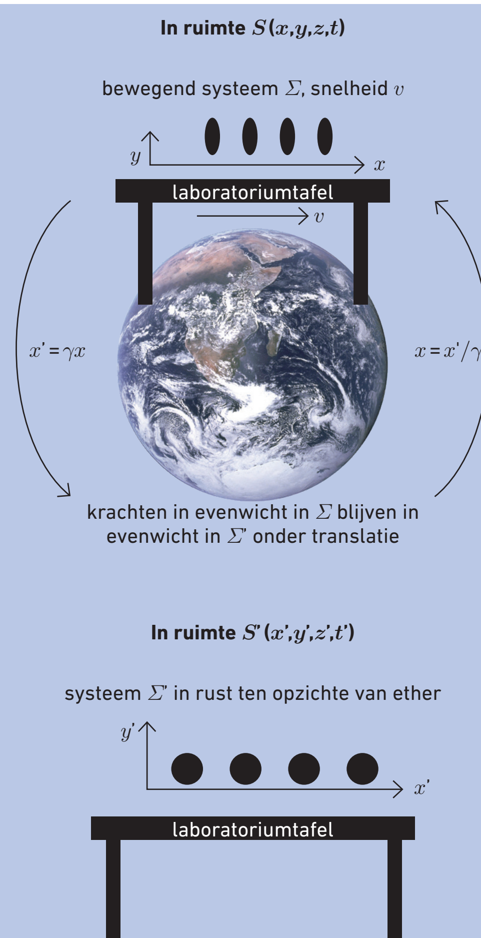
$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \tag{5}$$

De Lorentztransformaties (Poincaré; Einstein).

"Poincaré realiseerde zich zo te zien niet de draagwijdte van zijn 'kleine' aanpassingen."

Merk op dat deze vergelijkingen worden verkregen uit de vergelijkingen van Lorentz (4) na de substitutie $x \rightarrow x - vt$. Merk ook op dat er een perfecte symmetrie is tussen plaats- en tijdcoördinaten. En dat er al doende afscheid is genomen van een voorkeursstelsel. (Volgens Lorentz echter niet van de ether als fysisch medium voor het dragen van elektromagnetische velden en golven, zie [3].) Poincaré realiseerde zich zo te zien niet de draagwijdte van zijn 'kleine' aanpassingen. Het artikel van Poincaré [2] verscheen vrijwel gelijktijdig – een kleine maand vóór dat van Einstein [4] – maar beiden waren van elkaars werk niet op de hoogte.

Lorentz	Einstein
Ga uit van Maxwellvergelijkingen (1) in het 'ethersysteem'	Ga uit van relativiteitsprincipe en constantheid lichtsnelheid
Ga over op met snelheid v in x-richting bewegend assenstelsel:	
$\partial_t \to \partial_t - v\partial_x$	
Herdefinieer $\vec{v} \to (v + u_x, u_y, u_z)$ dus u is de snelheid van bewegende lading boven op algehele beweging v	
Verandering van variabelen in gemodificeerde Maxwellvergelijkingen: $x \to x', t \to t'$; herdefinitie D, H et cetera D', H' et cetera zó, dat vergelijkingen van vorm (1) teruggevonden worden	Coördinatentransformatie $x \to x', t \to t'$ afgeleid uit relativiteitsprincipe en constantheid c; eis dat vergelijkingen (1) precies teruggevonden worden, zo volgen de transformaties voor D, H et cetera.
$\partial_x = \gamma\left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2}\partial_{t'}\right)$	$\partial_x = \gamma\left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2}\partial_{t'}\right)$
$\partial_t - v\partial_x = \gamma(\partial_{t'} - v\partial_{x'})$	$\partial_t = \gamma(\partial_{t'} - v\partial_{x'})$
Lichtsnelheid alleen c in 'etherstelsel'; $(c - v)$ in meebewegende stelsel	Lichtsnelheid c in elk inertiaalstelsel
Vindt niet het goede voorschrift voor het optellen van snelheden	Vindt voorschrift voor relativistisch optellen van snelheden
Maakt lengtecontractie aannemelijk; tijd is 'absoluut'; t' ('lokale tijd') slechts wiskundig hulpmiddel	Lengtecontractie en tijddilatatie volgen dwingend uit coördinatentransformaties



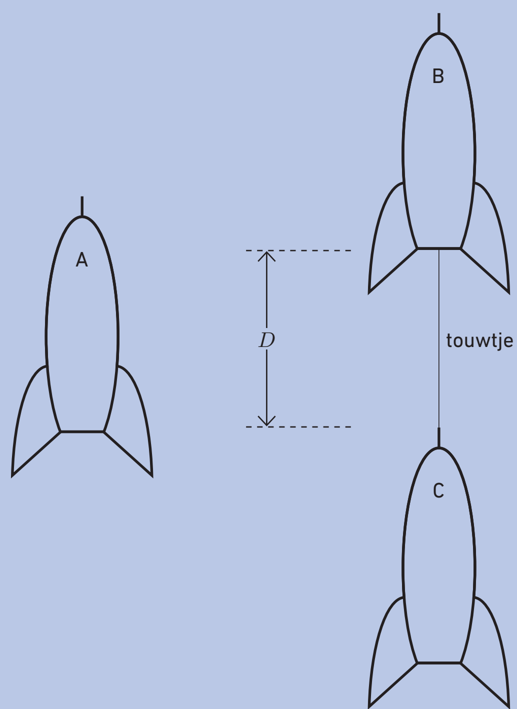
Figuur 1. Lengtecontractie zoals uitgelegd door Lorentz. Foto: NASA.

Einsteins relativiteitstheorie

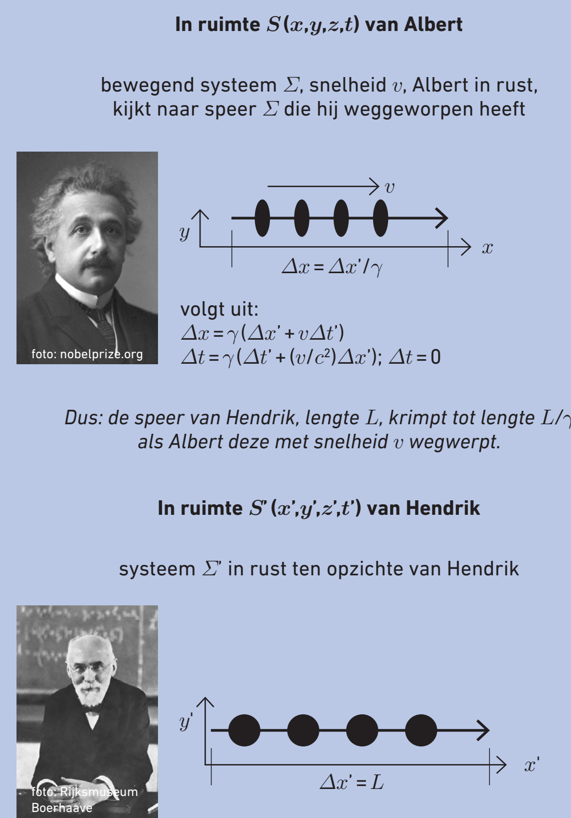
Einsteins benadering was volstrekt anders. Hij ging uit van de constantheid van de lichtsnelheid en het relativiteitsprincipe (dezelfde wetten van de optica en de elektrodynamica zijn geldig voor alle referentiestelsels waarvoor de vergelijkingen van de mechanica geldig zijn – in Einsteins woorden: "*daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten*"). Zo vond hij de coördinatentransformaties in het eerste deel van zijn artikel: *kinematical part*. In deel twee vond hij, door – wat we nu noemen – Lorentzinvariantie van de Maxwellvergelijkingen te eisen, de veldtransfomaties: *electrodynamical part*.
De transformaties (5) zijn precies dezelfde als degene die Einstein vond. (Einstein publiceerde zijn transformaties in 1905, een jaar na Lorentz, maar was, op zijn beurt, van de resultaten van Lorentz (en Poincaré) niet op de hoogte.)
De tabel vergelijkt de benaderingen van Lorentz en Einstein.

Fysische interpretatie

Een fysische interpretatie van de 'accentruimte' waarnaar Lorentz bewegende systemen herleidt, wordt geïllustreerd in figuur 1 aan de hand van lengtecontractie. Hij beschouwt een fysisch systeem Σ (denk, om de gedachten te bepalen, bijvoorbeeld aan een vaste stof), beschreven ten opzichte van een coördinatenstelsel $S(x,y,z,t)$ (denk, om de gedachten te bepalen aan het laboratoriumstelsel); dat systeem Σ wordt nu in een gedachtenexperiment getransformeeerd tot een systeem Σ' door het over te brengen naar een stelsel $S'(x',y',z',t')$ waarin de ether in rust is, door de verandering van variabelen, velden en krachten zoals door Lorentz gevonden, toe te passen.
Naast de oprekking van de x-richting gaat Lorentz dus ook na hoe de (elektromagnetische) krachten transformeren en hij overtuigt zich ervan dat krachten die binnen een vaste stof in evenwicht zijn in het 'laboratorium', dat ook zijn in het accentstelsel en vice versa. Met behulp van (2) en (6) is gemakkelijk in te zien dat elektrostatische krachten in Σ respectievelijk Σ' zich verhouden als: $F(\Sigma) = (1, 1/\gamma, 1/\gamma)\, F(\Sigma')$.



Figuur 2. Gedachte-experiment aangehaald door John Bell. Knapt het touwtje als raketten B en C identiek versnellen en dus op gelijke afstand blijven?



Figuur 3. Lengtecontractie volgens de relativiteitstheorie.

Als de bouwstenen van een vast lichaam in evenwicht zijn onder aantrekking en afstoting door naburige bouwstenen dan zal dat evenwicht gehandhaafd blijven als dat lichaam in beweging wordt gezet en de evenwichtsposities veranderen zoals volgt uit de relatie tussen x en x'.

$$
\begin{aligned}
D'_x &= D_x \\
D'_y &= \gamma(D_y - \frac{v}{c}H_z) \\
D'_z &= \gamma(D_z + \frac{v}{c}H_y) \\
H'_x &= H_x \\
H'_y &= \gamma(H_y + \frac{v}{c}D_z) \\
H'_z &= \gamma(H_z - \frac{v}{c}D_y)
\end{aligned} \tag{6}
$$

Transformatie van elektrische en magnetische velden (Lorentz én Einstein).

Zo bereikt Lorentz, wat lengtecontractie betreft, de conclusie, we citeren: "*... that the system Σ', if the velocity v is imparted to it, will of itself change into the system Σ. In other terms, the translation will produce the deformation $(1/\gamma, 1, 1)$.*"
De ruimte S' (zie figuur 1) blijft echter een 'hulpruimte' die niet helemaal equivalent is aan S, in het bijzonder vanwege het in de ogen van Lorentz niet-fysische karakter van t', door hem de 'lokale tijd' genoemd.
Toch kunnen we aan de 'lokale tijd' t' wel degelijk een fysisch karakter toekennen in de volgende oefening. Wanneer we voor de variabelen van Lorentz $V' \equiv x'/t'$ uitdrukken in $V \equiv x/t$ vinden we:

$$V' = \frac{V}{\frac{1}{\gamma^2} - \frac{v}{c^2}V}.$$

Voor een lichtstraal moet, volgens Lorentz gelden $c = x'/t'$, wanneer we onder deze voorwaarde $V = x/t \equiv \tilde{c}$ uitrekenen, vinden we:

$$\tilde{c} = \frac{c}{\gamma^2 + \gamma^2 v/c} = c - v.$$

Dit is precies de lichtsnelheid die ook volgt uit de veldvergelijkingen ten opzichte van het meebewegende coördinatenstelsel, die Lorentz als uitgangspunt koos, zie ook de tabel. (Als we de correcte Lorentztransformaties (5) gebruiken vinden we, uiteraard, $\tilde{c}=c$.)

Lessen voor de optimale didactische opzet van een college 'speciale relativiteit'?

De beschrijving van 'elektromagnetische verschijnselen in een systeem bewegend met een willekeurige snelheid kleiner dan die van het licht' door Lorentz sluit heel goed aan bij de klassieke elektrodynamica en is leerzaam. Het fysische karakter van de Lorentzcontractie volgt er op een natuurlijke wijze uit. Na een inleidend college speciale relativiteitstheorie blijft weleens de indruk hangen dat Lorentzcontractie van het standpunt van de waarnemer afhangt en niet 'echt' is. De vraag is dan: is een bewegende staaf echt korter dan diezelfde staaf in rust? In een heel charmant artikel beschrijft John Bell [5] dat hij deze vraag voorlegde aan een groep collega's op CERN en dat het meerderheidsstandpunt was dat Lorentzcontractie schijn was. De manier waarop Bell het probleem formuleerde was als volgt: drie kleine ruimteschepen A, B en C zweven vrijelijk in een gebied in de ruimte ver van andere materie (figuur 2), zonder rotatie en zonder relatieve beweging, met B en C op gelijke afstand van A. Na ontvangst van een signaal van A starten de motoren van B en C en versnellen ze rustig. B en C zijn identiek en versnellen op identieke wijze. Dan zullen ze, voor een waarnemer in A, op elk moment dezelfde snelheid hebben en zal de afstand tussen B en C een vaste waarde D hebben. Veronderstel dat een fragiel draadje is gespannen tussen B en C, dat precies lang genoeg is om de aanvankelijke afstand tussen B en C te overspannen. Zal het draadje, wanneer de ruimteschepen een grotere snelheid krijgen te kort worden, door Lorentzcontractie, en breken? Het merendeel van de ondervraagden zei spontaan nee. Vriendelijk voegt John Bell hier aan toe: na even rekenen zag natuurlijk iedereen in dat het draadje, inderdaad, wél zou breken. Maar, zo vervolgt hij, door de relativiteitstheorie uit te leggen aan de hand van de verworvenheden van de elektrodynamica is de fysische aard van de Lorentzcontractie onmiddellijk duidelijk. Hij doet dit in [5] in meer detail dan wij in dit artikel.
De interpretatie van de Lorentztransformaties in de context van de afleiding door Einstein is als volgt (en door Einstein zelf gegeven in zijn oorspronkelijke publicatie). Lorentzcontractie volgt door de afstand tussen de uiteinden van een stok langs de bewegingsrichting *op hetzelfde moment* te meten en die te vergelijken met de lengte van die stok in rust. Dit wordt geïllustreerd in figuur 3, in analogie met figuur 1.
Tijddilatatie (in de fysische aard waarvan Lorentz in zijn artikel uit 1904 niet geloofde, tijd bleef absoluut) volgt door twee identieke klokken, waarvan er één een zeker traject heeft afgelegd, terwijl de andere in rust bleef *op dezelfde plaats* met elkaar te vergelijken. (Terzijde: het was ook Einstein, die zich kort na [4] realiseerde dat als gevolg van zijn transformatievergelijkingen (van de energie van lichtgolven) het formidabele resultaat $E=mc^2$ volgde [6].)
Wat Lorentz aantoonde, is dat het experiment van Michelson en Morley ongevoelig was voor beweging door de ether. De verbeterde Lorentztransformaties generaliseren dit resultaat: er is geen enkele manier om absolute beweging (dat wil zeggen de 'ether') vast te stellen. Lorentz nam echter, anders dan Einstein, vooralsnog geen afstand van de hypothese dat er een fysische ether was, zoals uitgelegd in [3].

"Het werk van Lorentz luidde het begin in van een nieuwe tijd in de natuurkunde."

Toch luidde het werk van Lorentz het begin in van een nieuwe tijd in de natuurkunde. Hij liet er overigens nooit een misverstand over bestaan dat de relativiteitstheorie zelf een vinding van Einstein en Einstein alleen was.

Dankwoord

Veel dank ben ik verschuldigd aan Karel Gaemers voor een aantal kritische en verhelderende discussies over de ideeën van Lorentz, Poincaré en Einstein en in het bijzonder voor het vestigen van mijn aandacht op het artikel van Poincaré [2].

Jos Engelen is emeritus hoogleraar hoge-energiefysica van de UvA/Nikhef. Hij was betrokken bij het wetenschappelijke programma van CERN en DESY en bij de beginfase van Antares (astrodeeltjesfysica). Hij bekleedde onder andere het directoraat van Nikhef, het wetenschappelijke directoraat van CERN en het voorzitterschap van NWO.

REFERENTIES
1 H. A. Lorentz, *Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any Velocity less than that of Light*, *Proc. KNAW* **6**, Amsterdam (1904).
2 H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 140, 1504-1508 (5 juni 1905).
3 M. Janssen en A.J. Kox, *Lorentz als wegbereider voor de speciale relativiteitstheorie*, *NTvN* **77-7**, 344-347 (2011).
4 A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, *Annalen der Physik* **17** (1905).
5 J.S. Bell, *How to Teach Special Relativity*, *Progress in Scientific Culture* **1-2** (1976); opgenomen in: M. Bell, K. Gottfried en M. Veltman, *John S. Bell on The Foundations of Quantum Mechanics*, World Scientific.
6 A. Einstein, *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?*, *Annalen de Physik* **18**, 639 (1905).