Periodieke beweging op een cycloïdebaan

Jos Engelen

1 Een harmonische slinger

Het is bekend dat een ideale slinger met lengte L een trillingstijd heeft, die gelijk is aan:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1}$$

met g de versnelling van de zwaartekracht. 'Ideaal' betekent: het koord waaraan het slingergewicht hangt is massaloos, het gewicht is een puntmassa m. (De slingerperiode is onafhankelijk van de grootte van m.) Bovenstaande formule geldt alleen voor kleine uitwijkingen, waar de hoek tussen het koord en de verticaal, ϕ, zo klein is dat de benadering $\sin\phi \simeq \phi$ van toepassing is. Bij grotere amplitudes is de periode niet langer onafhankelijk van de uitwijking en is de slinger niet geschikt als klok.

2 Cycloïde

De puntmassa in een slingeruurwerk beweegt langs een cirkelbaan. De uitvinder ervan, Christiaan Huygens, vermoedde dat bij beweging op een cycloïdebaan de trillingstijd onafhankelijk zou zijn van de uitwijking. Hij kon dit aannemelijk maken maar formeel bewijzen kon hij het nog niet. Met behulp van integraalrekening kunnen we dat nu wel.

Zie Fig. 1. Een punt op de cycloïde wordt bepaald door ϕ en r, zoals aangegeven in de figuur. De coördinaten zijn te parametrizeren als:

$$x = -r\sin\phi + r\phi \tag{2}$$

$$y = r\cos\phi \tag{3}$$

De puntmassa wordt losgelaten in y_0, Fig. 2, in y aangekomen heeft deze een snelheid v:

$$mg(y_0 - y) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4}$$

$$mgr(\cos\phi_0 - \cos\phi) = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5}$$

$$v = \sqrt{2gr(\cos\phi_0 - \cos\phi)} \tag{6}$$

Om punt D te bereiken is een tijd t_D nodig:

$$t_D = \int_{\phi_0}^{\pi} \frac{dl}{v} \tag{7}$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{8}$$

$$dl = r\sqrt{2(1-\cos\phi)}d\phi \tag{9}$$

$$t_D = \int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{r}{g}} \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{\cos\phi_0 - \cos\phi}} d\phi \tag{10}$$

Substitueer:

$$s = \frac{\cos\phi_0 - \cos\phi}{1+\cos\phi_0} \tag{11}$$

$$s(1-s) = \frac{\cos\phi_0 - \cos\phi}{1+\cos\phi_0} \cdot \frac{1+\cos\phi}{1+\cos\phi_0} \tag{12}$$

$$ds = \frac{\sin\phi}{1+\cos\phi_0} d\phi \tag{13}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} = \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{\cos\phi_0 - \cos\phi}} d\phi \tag{14}$$

$$t_D = \int_0^1 \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} \tag{15}$$

Dit resultaat is inderdaad onafhankelijk van ϕ_0, dus onafhankelijk van de amplitude.

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(s-1)}} = \pi \tag{16}$$

Voor de trillingstijd T vinden we:

$$T(=4t_D) = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{g}} \tag{17}$$

In Fig. 2 zien we ook een in P opgehangen slinger ingetekend die zich bij het slingeren 'oprolt' langs een cycloïde. Een massa m opgehangen aan deze slinger beschrijft dus exact dezelfde baan als de massa m die in de goot heen en weer rolt, als de lengte van de slinger gelijk is aan 4r.

3 Cirkel

Laat nu, ter vergelijking, de puntmassa heen en weer glijden in een cirkelvormige goot, in tegenstelling tot de cycloïde hierboven, zie Fig. 3. In analogie met de berekening hierboven vinden we:

$$x = r\sin\phi \tag{18}$$

$$y = r - r\cos\phi \tag{19}$$

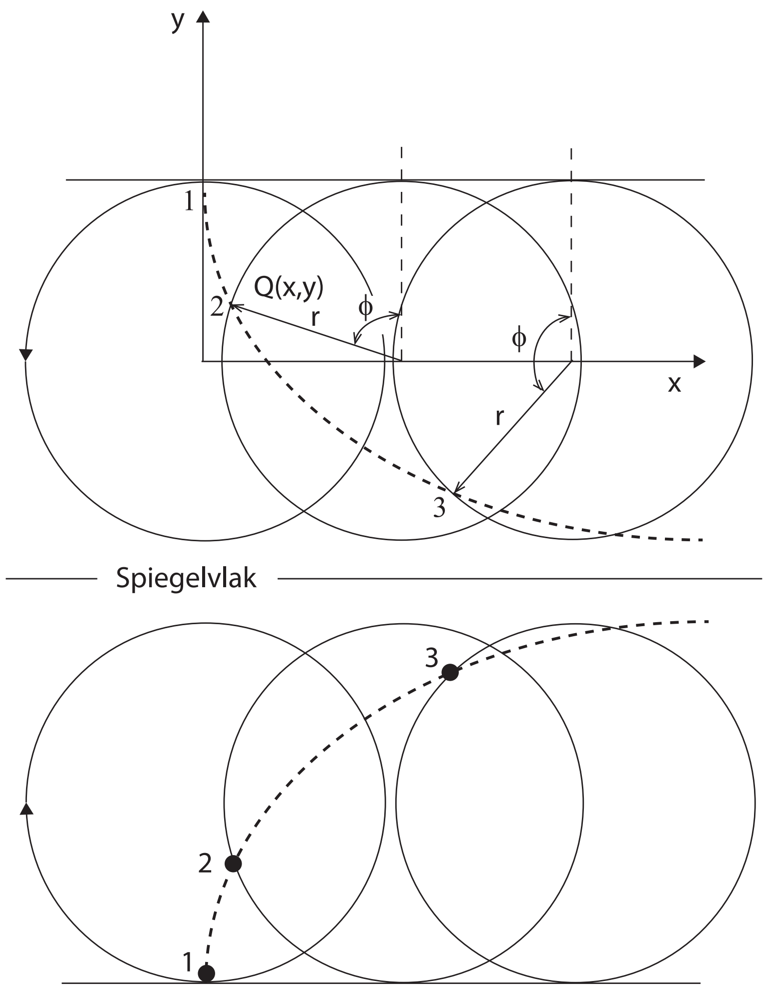
$$\begin{aligned}
\mathsf{mg}(\mathsf{y}_0-\mathsf{y}) &= \frac{1}{2}\mathsf{mv}^2 && (20)\\
\mathsf{mgr}(\cos\phi-\cos\phi_0) &= \frac{1}{2}\mathsf{mv}^2 && (21)\\
\mathsf{v} &= \sqrt{2\mathsf{gr}(\cos\phi-\cos\phi_0)} && (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{t_D} &= \int_{\phi_0}^{0}\frac{\mathsf{dl}}{\mathsf{v}} && (23)\\
\mathsf{dl} &= \sqrt{\mathsf{dx}^2+\mathsf{dy}^2} && (24)\\
\mathsf{dl} &= \mathsf{r}\mathsf{d}\phi && (25)
\end{aligned}$$

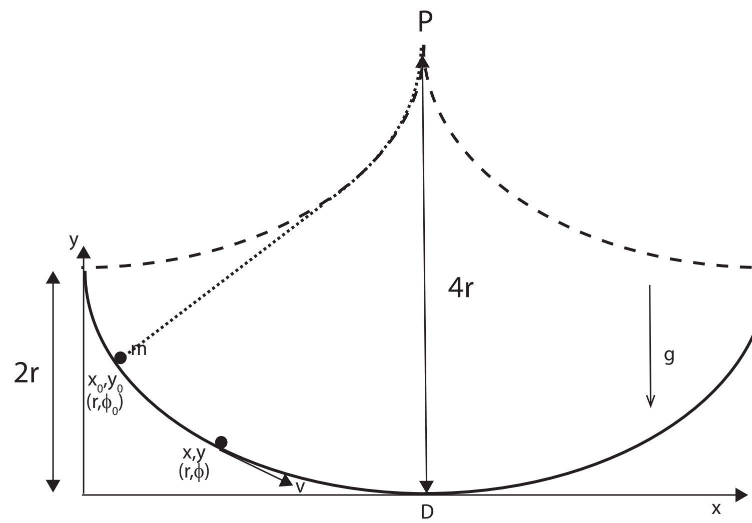
$$\mathsf{t_D} = \int_{\phi_0}^{0}\sqrt{\frac{\mathsf{r}}{2\mathsf{g}}}\sqrt{\frac{1}{\cos\phi-\cos\phi_0}}\mathsf{d}\phi \qquad (26)$$

Deze integraal is niet onafhankelijk van ϕ_0, behalve in de benadering voor kleine uitwijkingen, dus kleine $\phi,\ \phi_0$:

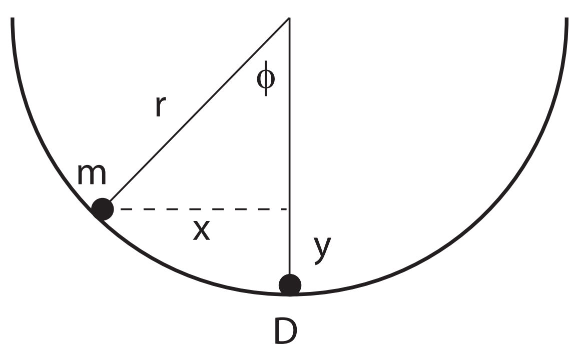
$$\begin{aligned}
\cos\phi_{(0)} &= 1-\phi_{(0)}^2/2 && (27)\\
\mathsf{t_D} &= \int_{\phi_0}^{0}\sqrt{\frac{\mathsf{r}}{\mathsf{g}}}\frac{\mathsf{d}\phi}{\phi_0\sqrt{1-\phi^2/\phi_0^2}} && (28)\\
&= \sqrt{\frac{\mathsf{r}}{\mathsf{g}}}\int_{1}^{0}\frac{\mathsf{d}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} && (29)\\
&= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\mathsf{r}}{\mathsf{g}}} && (30)\\
\mathsf{T}(=4\mathsf{t_D}) &= 2\pi\sqrt{\frac{\mathsf{r}}{\mathsf{g}}} && (31)
\end{aligned}$$



Figuur 1: **Beneden**: een naar rechts rollende cirkel, een vast punt op de cirkel beschrijft een cycloïde, aangegeven met stippellijn. **Boven**: De gespiegelde cycloïde die we in een verticaal zwaartekrachtsveld geplaatst denken en waarlangs we een puntmassa laten glijden.



Figuur 2: Een cycloïdevormige 'goot' waarlangs een puntmassa m wrijvingsloos naar beneden glijdt onder invloed van de zwaartekracht g. De puntmassa gaat rond D, het diepste punt, oscilleren. Alternatieve voorstellingswijze: slinger (de fijne stippellijn), opgehangen in P, wordt 'opgerold' langs de wang, aangegeven door een grove stippellijn, die de vorm heeft van een cycloïde.



Figuur 3: Een cirkelvormige 'goot' waarlangs een puntmassa m wrijvingsloos naar beneden glijdt onder invloed van de zwaartekracht g. De puntmassa gaat rond D, het diepste punt, oscilleren.