Inhoudsopgave

1	Mechanica van Newton (G1:1-2)			
	1.1	Definities; Vergelijkingen van Newton	3	
	1.2	Behoud van impuls	5	
	1.3	Impulsmoment	6	
	1.4	Energie	9	
2	Vrijheidsgraden en d'Alembert (G1:3-4)			
	2.1	Kinematische relaties en gegeneraliseerde coördinaten	15	
	2.2	Kinematische relaties en arbeid	17	
	2.3	Het principe van d'Alembert	19	
3	Mechanica van Lagrange (G1:5-6)			
	3.1	De vergelijkingen van Lagrange	25	
	3.2	Niet-conservatieve systemen; Lorentzkracht	29	
	3.3	Coördinaten transformaties	31	
4	Niet-inertiale coördinaten stelsels (G4:1,9-10,G5:9)			
	4.1	Het aardoppervlak als roterend stelsel	39	
	4.2	Beweging in een magnetisch veld; Larmor effect (G5.9) $\ldots \ldots \ldots$	40	
5	Variatie rekening (G2:1-5)			
	5.1	Variatie Rekening	43	
	5.2	Het Brachistochrone Probleem	45	
	5.3	Het principe van Hamilton	46	
	5.4	Lagrange multiplicatoren	47	
	5.5	Een interpretatie van de Lagrangiaan	49	
6	Lagrange en symmetriën (G2:6-7, G7:9)			
	6.1	Gegeneraliseerde ("canonieke") impulsen	52	
	6.2	Is een Lagrangiaan uniek?	54	
	6.3	Infinitesimale transformaties en Noether's stelling	55	
	6.4	Tijdsevolutie en de Hamiltoniaan	56	
	6.5	Relativistische Mechanica (G7.9) $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	58	

INHOUDSOPGAVE

7	Bew	vegingen in een potentiaal (G3)	60
	7.1	Beweging in een één-dimensionale potentiaal	. 60
	7.2	De faseruimte	. 61
	7.3	Centrale krachtvelden	. 64
8	Med	chanica van Hamilton (G8)	77
	8.1	Legendre Transformaties	. 77
	8.2	Vergelijkingen van Hamilton	. 79
	8.3	Principe van Hamilton in de (q, p) -faseruimte	. 86
	8.4	Poisson Haakjes	. 87
	8.5	Integratie van infinitesimale transformaties	. 95
	8.6	Nog een keer symmetrieën en behouden grootheden	. 97
	8.7	De stelling van Liouville	. 98
9	Can	onieke transformaties (G9)	102
	9.1	Canonieke transformaties en Poisson haakjes	. 103
	9.2	Genereren van canonieke transformaties	. 105
10	Har	monische Oscillatoren (G6)	109
	10.1	Oplossing door middel van eigenwaarden en eigenvectoren	. 113
	10.2	Eigenmodes en coördinaat transformaties	. 115
11	Klas	ssieke Veldentheorie (G13)	120
	11.1	Lagrangiaan voor continue systemen	. 120
	11.2	Het principe van Hamilton voor velden	. 124
	11.3	Lagrangiaan voor het elektromagnetische veld	. 125
A	Con	stanten	127
в	Vec	tor Calculus	129
	B.1	coördinaten en coördinatentransformaties	. 129
	B.2	niet-Carthesische coordinaten systemen	. 131
	B.3	scalaire en vector grootheden	. 132
	B.4	vector product en het Levi-Civita symbool	. 133
	B.5	Combinaties van scalar en vector producten	. 134
	B.6	Differentiëren van velden	. 135
\mathbf{C}	Lite	ratuur	137

 $\mathbf{2}$

Hoofdstuk 1 Mechanica van Newton (G1:1-2)

1.1 Definities; Vergelijkingen van Newton

De beschrijving van de mechanica door Newton kan worden samengevat als volgt:

1. positie. De positie van voorwerpen word beschreven door vectoren in een Euclidische ruimte. Gegeven een orthornormale basis, geven door de de vectoren $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$, dan kunnen deze vectoren kunnen in Carthesische coördinaten gerepresenteerd worden als:

$$\boldsymbol{r} \equiv r_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + r_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 + r_3 \hat{\boldsymbol{e}}_3 \equiv \sum_{i=1}^3 r_i \hat{\boldsymbol{e}}_i.$$
 (1.1)

Op dit punt is het handig om de zogenaamde sommatie conventie te introduceren: als een index (e.g. i in 1.1) twee keer voorkomt, dan wordt erover gesommeerd, tenzij er expliciet vermeld is dat dit niet het geval is. Met deze conventie kunnen we 1.1 schrijven als:

$$\boldsymbol{r} \equiv r_i \hat{\boldsymbol{e}}_i. \tag{1.2}$$

2. absolute tijd. Dit betekent dat de snelheid gedefinieerd kan worden als de afgeleide van de positie naar de tijd:

$$\boldsymbol{v} \equiv \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} \\
= \frac{d}{dt}(r_i \hat{\boldsymbol{e}}_i) \qquad (1.3) \\
= \frac{dr_i}{dt} \hat{\boldsymbol{e}}_i$$

waar we, in de laatste stap, hebben aangenomen dat de basis vectoren $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ niet van de tijd afhangen. Let op: dit is niet altijd het geval, bijvoorbeeld in niet-Carthesische coördinaat system zoals poolcoördinaten. Voor meer details, zie Appendix B.2. Omdat differentiëren naar de tijd vaak voor komt, wordt dit vaak genoteerd door een punt boven de grootheid die gedifferentieerd wordt te zetten:

$$\boldsymbol{v} \equiv \dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.4}$$

$$= \dot{r}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.5}$$

Ook hier hebben we weer aangenomen dat de basisvectoren zelf *niet* veranderen als functie van de tijd. Als we de snelheid \boldsymbol{v} differentiëren, dan vinden we de versnelling:

$$\boldsymbol{a} \equiv \frac{d}{dt} \boldsymbol{v} \tag{1.6}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(v_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \right) \tag{1.7}$$

$$= \dot{v}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.8}$$

$$= \ddot{r}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.9}$$

3. impuls: De *impuls* (eng: momentum) \boldsymbol{p} van een voorwerp is gedefinieerd als het product van de massa m en de snelheid $\dot{\boldsymbol{r}}$:

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.10}$$

4. krachten: als twee krachten op hetzelfde punt van een voorwerp werken, dan is de totale kracht de vector som van de krachten:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{1.11}$$

5. Eerste en tweede wet van Newton: de impuls van een voorwerp verandert als een kracht F op het voorwerp werkt:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}.\tag{1.12}$$

Dit is de befaamde vergelijking van Newton. Als de massa onafhankelijk is van de tijd, dan is de verandering van de snelheid, i.e. de versnelling, gegeven door de kracht F:

$$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} = \frac{d}{dt} \left(m \dot{\boldsymbol{r}} \right) = \dot{m} \dot{\boldsymbol{r}} + m \ddot{\boldsymbol{r}}$$
(1.13)

$$= m\ddot{\boldsymbol{r}} \equiv m\boldsymbol{a} \tag{1.14}$$

waar we hebben aangenomen dat de massa constant is (dit is zeker niet altijd het geval – bijvoorbeeld in het geval van een raket). Dit is een uitbreiding van het principe van traagheid van Galileo (door Newton overgenomen, en ook bekend als de eerste wet van Newton) dat zegt, dat een lichaam, dat niet wordt verstoord (i.e. $\mathbf{F} = 0$) in een rechte lijn met constante snelheid zal bewegen (i.e. $\ddot{\mathbf{r}} = 0$).

6. Derde wet van Newton: er is een relatie tussen de krachten die twee voorwerpen op elkaar uitoefenen: voor elke actie is er een even grote, tegengestelde, reactie ofwel, als we \mathbf{F}_{ij} definieren als de kracht die door voorwerp j op voorwerp i wordt uitgeoefend, dan geldt:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{1.15}$$

De rest van dit hoofdstuk zal gaan over de implicaties van deze punten, en een aantal verschillende toepassingen.

1.2 Behoud van impuls

De wetten van Newton gaan over de beweging van puntmassa's, waar een puntmassa een voorwerp is zonder interne structuur. Het enige wat deze puntmassa's kunnen doen is dus bewegen. De eerste stap om het gedrag van lichamen *met* een interne structuur te bepalen is door te kijken hoe puntmassa's gecombineerd kunnen worden tot zulke lichamen.

Stel dat een verzameling van N voorwerpen alleen beweegt door de krachten die deze op elkaar uitoefenen. Voor dit systeem betekent (1.15) dat voor *elke* kracht die voorwerp i op voorwerp j uitoefent er een tegengestelde kracht is van voorwerp j op i, en dat dus, vanwege (1.11), de totale som van al deze krachten nul is. Dit kunnen we gebruiken door (1.12) te sommeren over alle impulsen:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i}\boldsymbol{p}_{i} = \sum_{i}\dot{\boldsymbol{p}}_{i} = \sum_{i}\sum_{j}\boldsymbol{F}_{ij} = 0$$
(1.16)

ofwel, de (vector)som van de impulsen, het *zwaartepunts impuls*, $\boldsymbol{P} = \sum_{i} \boldsymbol{p}_{i}$ is behouden. Een alternatieve manier om te zien dat $\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} = 0$ is om op te merken dat $\sum_{i,j}$ symmetrisch is voor de verwisseling van i en j, terwijl \boldsymbol{F}_{ij} juist anti-symmetrisch is onder deze verwisseling (merk op: $\boldsymbol{F}_{ii} = 0$):

$$\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{F}_{ij} - \boldsymbol{F}_{ji} \right)$$
(1.17)

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} - \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ji} \right)$$
(1.18)

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij} - \sum_{j,i} \boldsymbol{F}_{ij} \right)$$
(1.19)

$$= 0$$
 (1.20)

Immers, in het geval van een sommatie maakt de volgorde niet uit.

Als we naar de beweging van een collectie voorwerpen kijken, en de enige krachten in het spel zijn de onderlinge krachten tussen de voorwerpen, dan is het impuls van het zwaartepunt een behouden grootheid. Om de zwaartepunt-impuls in dezelfde vorm als (1.10) te kunnen schrijven, i.e. als het product van een massa en de tijds-afgeleide van een positie, definieren we het *zwaartepunt* door middel van:

$$\boldsymbol{P}_{\rm CM} \equiv M \dot{\boldsymbol{R}}_{\rm CM}; \quad M = \sum_{i} m_{i}; \quad \boldsymbol{R}_{\rm CM} = \frac{m_{i} \boldsymbol{r}_{i}}{\sum_{j} m_{j}}$$
 (1.21)

Merk op dat deze formule recursief kan worden toegepast: je kunt eerst de eerste twee voorwerpen combineren, en dan bij die combinatie een derde voorwerp optellen, i.e.

$$m_{1+2} = m_1 + m_2; (1.22)$$

$$\boldsymbol{r}_{\text{CM},1+2} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2};$$
 (1.23)

gevolgd door

$$m_{1+2+3} = m_{1+2} + m_3 = m_1 + m_2 + m_3;$$
 (1.24)

$$\boldsymbol{r}_{\text{CM},1+2+3} = \frac{m_{1+2}\boldsymbol{r}_{\text{CM},1+2} + m_3\boldsymbol{r}_3}{m_{1+2} + m_3} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$
 (1.25)

Met behulp van deze constructie kunnen we nu ook beschrijven wat er gebeurd als er, behalve de krachten tussen de deeltjes onderling, ook een externe kracht op alle deeltjes werkt. Dit is simpel een kwestie van de bewegings vergelijkingen van alle deeltjes bij elkaar op tellen:

$$\sum m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{(e)} + \sum_{i,j} \boldsymbol{F}_{ij}$$
(1.26)

De linker kant van deze vergelijking is niets anders dan de totale massa van alle deeltjes keer de zwaartepunts positie. De eerste som aan de linkerkant is de totale externe kracht, en de tweede som valt, zoals al eerder opgemerkt, precies weg. Het uiteindelijke resultaat is dus:

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_{\rm CM} = \boldsymbol{F}^{(e)}; \ \boldsymbol{F}^{(e)} \equiv \sum_{i} \boldsymbol{F}_{i}^{(e)}$$
 (1.27)

Deze simpele observatie is een rechtvaardiging waarom het (vaak) mogelijk is om (collecties van) macroscopische voorwerpen te beschrijven zonder a-priori iets te moeten zeggen over hun interne structuur.

1.3 Impulsmoment

Begin met de bewegings-vergelijking van Newton, en neem het uit-product (vectorproduct) met de positie-vector \mathbf{r} :

$$\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}$$
 (1.28)

Deze vergelijking kan herschreven worden als:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N} \tag{1.29}$$

1.3. IMPULSMOMENT

waar het *impulsmoment* L, en het *koppel* N worden gedefinieerd door

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}; \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}. \tag{1.30}$$

Voor systemen met koppel N = 0 zal dus het impulsmoment L behouden zijn. De relatie tussen het koppel en impulsmoment is een voorbeeld van een algemener verband tussen zogenaamde gegeneraliseerde impulsen en gegeneraliseerde krachten. Dit zal één van de onderwerpen zijn van hoofdstuk 3 over de mechanica van Lagrange.

meerdere deeltjes

In het geval van meerdere deeltjes ligt het voor de hand om de posities te beschrijven in termen van het zwaartepunt en de vector van het zwaartepunt naar elk deeltje:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_{\rm CM} + \boldsymbol{r}'_i \tag{1.31}$$

In dat geval kunnen we voor het totale impulsmoment schrijven:

$$\boldsymbol{L} \equiv \sum_{i} \boldsymbol{L}_{i} \tag{1.32}$$

$$= \sum_{i} \boldsymbol{r}_{i} \wedge \boldsymbol{p}_{i} \tag{1.33}$$

$$= \sum_{i} \boldsymbol{r}_{i} \wedge m_{i} \dot{\boldsymbol{r}}_{i} \tag{1.34}$$

$$= \sum_{i} m_{i} \left(\boldsymbol{R}_{\rm CM} + \boldsymbol{r}_{i}^{\prime} \right) \wedge \left(\dot{\boldsymbol{R}}_{\rm CM} + \dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{\prime} \right)$$
(1.35)

$$= \sum_{i} m_{i} \left(\boldsymbol{R}_{\rm CM} \wedge \dot{\boldsymbol{R}}_{\rm CM} + \boldsymbol{r}_{i}^{\prime} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{\prime} + \boldsymbol{r}_{i}^{\prime} \wedge \dot{\boldsymbol{R}}_{\rm CM} + \boldsymbol{R}_{\rm CM} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{\prime} \right)$$
(1.36)

De laatste twee termen zijn te schrijven als

$$\left(\sum_{i} m_{i} \boldsymbol{r}_{i}^{\prime}\right) \wedge \dot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{CM}} + \boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}} \wedge \frac{d}{dt} \left(\sum m_{i} \boldsymbol{r}_{i}^{\prime}\right)$$
(1.37)

maar deze termen verdwijnen. Immers,

$$\sum_{i} m_{i} \boldsymbol{r}_{i}^{\prime} = \sum_{i} m_{i} \left(\boldsymbol{r}_{i} - \boldsymbol{R}_{\text{CM}} \right) = M \boldsymbol{R}_{\text{CM}} - M \boldsymbol{R}_{\text{CM}} = 0$$
(1.38)

We vinden dus

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}_{\rm CM} \wedge \boldsymbol{P}_{\rm CM} + \sum_{i} \boldsymbol{r}'_{i} \wedge \boldsymbol{p}'_{i}, \qquad (1.39)$$

ofwel het totale impuls moment van een systeem van deeltjes is de som van het impuls moment van het zwaartepunt en de impulsmomenten van de individuele deeltjes *ten opzichte van* het zwaartepunt.



Figuur 1.1: De starre mathematische slinger.

Een voorbeeld: de slinger

Een puntmassa is zodanig opgehangen aan een (massaloze) staaf met lengte l dat deze slechts in één vlak kan slingeren, zie de tekening in fig.1.1. We kunnen de beweging beschrijven in termen van de uitwijking θ van de slinger ten opzichte van de verticale richting. Het impulsmoment van de puntmassa is gegeven door $\boldsymbol{L} = lml\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_y$, terwijl het door de zwaartekracht gegenereerde koppel $\boldsymbol{N} = -lgm\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_y$ is¹. Dit betekent dat voor deze slinger (1.29) geschreven kan worden als:

$$\frac{d}{dt}\left(ml^{2}\dot{\theta}\right) = -mgl\sin\theta. \tag{1.40}$$

Differentiëren levert op:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1.41}$$

Als we dit nu in de vorm van de bewegingsvergelijking van Newton willen schrijven, dan moeten we ons realiseren dat θ eigenlijk geen coördinaat is – het is een zogenaamde gegeneraliseerde coördinaat; deze zullen in hoofdstuk 3 over de mechanica van Lagrange uitgebreid terug komen. Om een coördinaat te krijgen kunnen we θ met l vermengvuldigen – $l\theta$ heeft ook de correcte dimensie voor de vergelijking van Newton. In dat geval vinden we:

$$ml\ddot{\theta} = -\frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-mgl\cos\theta\right) \tag{1.42}$$

Dit correspondeert met de bewegingsvergelijking van een één-dimensioneel systeem met als potentiaal² $V(\theta) = mgl (1 - \cos(\theta))$, precies wat je zou verwachten voor de potentiële energie van een homogeen zwaartekracht veld.

¹Het relatieve – teken tussen L en N komt omdat, als je vanuit de oorsprong 'langs' de slinger kijkt zoals getekend in Fig. 1.1, dan wijst voor positieve $\dot{\theta}$, en positieve θ , de momentum vector naar links van de vector, en de zwaartekracht naar rechts. Het is simpel om te zien dat ook Voor de andere drie teken combinaties van $\dot{\theta}$ en θ dit – teken ook correct is.

²het nulpunt van V is zodanig gekozen dat V(0) = 0

1.4. ENERGIE

1.4 Energie

In sectie (1.3) hebben we het uitproduct van de bewegingsvergelijking (1.14) met de vector \mathbf{r} genomen. Als we in plaats hiervan het inproduct met de vector $\dot{\mathbf{r}}$ nemen, dan zien we de kettingregel in actie. Immers:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2\right) = \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$$
(1.43)

Als we nu de kinetische energie T,

$$T \equiv \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \equiv \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 \tag{1.44}$$

introduceren, dan zien we dat:

$$\frac{d}{dt}T = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \tag{1.45}$$

Door deze vergelijking te integreren van tijd $t = t_0$ tot $t = t_1$ vinden we:

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} dt = \int_{\boldsymbol{r}_0, \mathcal{C}}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$
(1.46)

waar C het pad is waarlangs de beweging loopt. Als nu de *arbeid*, W_C , gedefinieerd wordt als

$$W_{\mathcal{C}} \equiv \int_{\boldsymbol{r}_{0},\mathcal{C}}^{\boldsymbol{r}_{1}} \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{r}\right) \cdot d\boldsymbol{r}$$
(1.47)

dan is duidelijk uit (1.46) dat als een kracht geen arbeid verricht de kinetische energie behouden is, immers

$$T(t_1) - T(t_0) = W_{\mathcal{C}}.$$
(1.48)

Op dit punt hebben we twee verschillende mogelijkheden: òf de arbeid hangt alleen af van de eindpunten van de beweging, òf de arbeid hangt ook nog af van het pad Cvan de beweging. De eerste categorie zijn *conservatieve* systemen, en de tweede zijn *niet-conservatieve* systemen. Een voorbeeld van een niet-conservatief systeem is een beweging met wrijving – deze kan bijvoorbeeld beschreven worden door een kracht die langs de richting van de snelheid wijst, en afhangt van de snelheid. Het is duidelijk dat in dit soort gevallen de arbeid niet alleen van de eindpunten van de beweging afhangt. Alle (tot nu toe bekende) fundamentele krachten zijn echter conservatief: alle gevallen van niet-conservatieve systemen zijn uiteindelijk het gevolg van een incomplete, "collectieve" beschrijving: in het geval van wrijving is bijvoorbeeld geen rekening gehouden met de warmte die gegenereerd wordt, ofwel de bewegingen van de individuele atomen van het systeem.

Voor conservatieve systemen hebben we

$$\int_{\boldsymbol{r}_{0},\mathcal{C}}^{\boldsymbol{r}_{1}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_{0}}^{\boldsymbol{r}_{1}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \forall \mathcal{C}$$
(1.49)

en er kan dus een *potentiaal* $V(\mathbf{r})$ worden geïntroduceerd:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} V(\boldsymbol{r}) \equiv -\nabla V(\boldsymbol{r})$$
(1.50)

Met behulp van deze potentiaal kan (1.49) worden geschreven als:

$$\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_0) - V(\boldsymbol{r}_1)$$
(1.51)

In dit geval is de verrichte hoeveelheid arbeid gelijk aan het verschil in *potentiële energie*. Deze definitie kan worden gebruikt om (1.43) te (her)schrijven als:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^{2}\right) = -\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$
(1.52)

Als we nu alle afgeleiden combineren en de totale energie E definiëren als $E \equiv T + V$, dan volgt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + V(\boldsymbol{r})\right) \equiv \frac{d}{dt}E = 0$$
(1.53)

Voor een conservatieve kracht is dus de som van de kinetische en potentiële energie onafhankelijk van de tijd, een *constante van de beweging*, en wordt ook wel een *bewegingsconstante* of *behouden grootheid* genoemd.

Bewegingen in een potentiaal veld

Met dit resultaat kunnen we onmiddellijk aan de slag: als we voor een systeem met een bekende potentiaal $V(\mathbf{r})$ op een gegeven moment t zowel de positie \mathbf{r} als de snelheid $\dot{\mathbf{r}}$ (of het impuls \mathbf{p}) kennen, dan kunnen we de energie E bepalen. Omdat de kinetische energie duidelijk niet negatief kan zijn, betekent dit dat de beweging altijd binnen het gebied

$$V(\boldsymbol{r}) \le E \tag{1.54}$$

zal blijven. Met behulp hiervan is bijvoorbeeld uit te rekenen wat de kinetische energie van een balistisch projectiel (i.e. zonder voorstuwing) bij vertrek vanaf het aardoppervlak moet zijn om te kunnen ontsnappen aan het zwaartekrachtveld van de aarde. En omdat in dit geval zowel de kinetische energie als de potentiele energie evenredig zijn met de massa, kan ook de minimale snelheid van zo een projectiel bepaalt worden.

Voorbeeld: Verstrooïng van deeltjes

Met alleen het behoud energie en (totale) impuls kan je al niet-triviale antwoorden vinden, zoals de werking van een massa-spectrometer, waar een bundel van deeltjes met een bekende massa en energie op een trefplaatje van onbekend materiaal wordt geschoten. Om dit te beschrijven, kijken we naar de verstrooïng (botsing) van een inkomend deeltje met massa m_1 en snelheid v_1 op een stilstaand deeltje met massa m_2 .

1.4. ENERGIE

Als we ervan uitgaan dat in zowel de begin- als eind-toestand de deeltjes zo ver uit elkaar zijn dat er geen sprake meer is van eg. electrische wisselwerking tussen ze, dan bestaat de totale energie voor en na de botsing alleen uit de kinetische energie van de deeltjes. Voor de botsing is dit niets anders dan de kinetische energie van deeltje 1:

$$E_{\rm voor} = T_{1,\rm voor} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \tag{1.55}$$

Deze moet natuurlijk gelijk zijn aan de totale energie na de botsing, ofwel de som van de kinetische energieën van de de twee deeltjes:

$$E_{\rm na} = T_{1,\rm na} + T_{2,\rm na} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \tag{1.56}$$

waar u_1 en u_2 de snelheden van beide deeltjes na de botsing zijn. Dit kunnen we combineren met het behoud van (totale) impuls:

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 = m_1 \boldsymbol{u}_1 + m_2 \boldsymbol{u}_2$$
 (1.57)

om \boldsymbol{u}_2 te elimineren uit (1.56):

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\left(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u}_1\right)^2 \tag{1.58}$$

$$= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}\left(v_1^2 + u_1^2 - 2u_1v_1\cos\psi\right)$$
(1.59)

waar ψ de hoek is waaronder het inkomende deeltje verstrooid wordt. Omdat het typisch in dit soort situaties makkelijker is om de energie te meten dan de snelheid schrijven we dit in termen van de energie van het ingeschoten deeltje voor en na de verstrooïng, en de verstrooïngshoek, als:

$$T_{1,\text{voor}} = T_{1,\text{na}} + \frac{m_1}{m_2} T_{1,\text{voor}} + \frac{m_1}{m_2} T_{1,\text{na}} - \frac{2}{m_1} \sqrt{T_{1,\text{voor}} T_{1,\text{na}}} \cos\psi$$
(1.60)

Als we nu de energie van de verstrooide deeltjes meten onder een hoek van $\psi = \pi/2$, dan wordt (1.60) een stuk simpler, en vinden we:

$$\left. \frac{T_{1,\text{na}}}{T_{1,\text{voor}}} \right|_{\psi=\pi/2} = \frac{m_2/m_1 - 1}{m_2/m_1 + 1} \tag{1.61}$$

Ofwel, als $T_{1,\text{voor}}$ en m_1 bekend zijn, dan kan, door het meten van $T_{1,\text{na}}$, voor die deeltjes die precies loodrecht worden afgebogen, de massa m_2 gevonden worden, en dus zien of bepaalde elementen voorkomen in het trefplaatje, zonder ooit iets van het trefplaatje zelf te hoeven meten! Merk op dat, omdat we de *kans* op een bepaalde afbuiging niet kennen, we a-priori niet weten wat de relatieve verhouding van verschillende elementen in het trefplaatje is; om de gemeten relatieve intensiteit tussen twee energie pieken om te zetten in de verhouding in het trefplaatje moeten we de zogenaamde *werkzame doorsnede* weten.

Kinetische energie van meerdere deeltjes

De totale kinetische energie van een systeem met meerdere deeltjes is niets anders dan de som van de individuele kinetische energieën: $T = \frac{1}{2}m_i \dot{r}_i^2$. Als we nu de positie van individuele deeltjes schrijven als:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_{\rm CM} + \boldsymbol{r_i}^* \tag{1.62}$$

dan kan de totale kinetische energie in de vorm van

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}_{\rm CM}^2 + \frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^{*2}.$$
 (1.63)

worden geschreven, ofwel een combinatie van de kinetische energie van het zwaartepunt, en de "interne" kinetische energie.

Als voorbeeld laten we kijken naar de kinetische energie van een schijf, met dikte den straal l, die met een hoeksnelheid ω over een horizontaal oppervlak rolt zonder te slippen. In dit geval is de grootte van de snelheid van het zwaartepunt $v = \omega l$, en is de eerste term uit (1.63) dus:

$$\frac{1}{2}M\dot{R}_{\rm CM}^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 l^2.$$
(1.64)

Om de bijdrage aan de kinetische energie van de rotatie te bepalen, nemen we aan dat we de schijf kunnen beschrijven als een homogeen volume met een constante dichtheid ρ . We kunnen dit beschrijven door de limiet te nemen waar het aantal punten naar oneindig gaat, en de individuele massa van deze punten naar nul, terwijl de totale massa (het product van het aantal punten en hun individuele massa) constant blijft. Om de dichtheid ρ uit te rekenen bepalen we de total massa, M van de schijf als volgt:

$$M = \int \int \int_{schijf} \rho dx dy dz = \rho \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{l} r dr$$
(1.65)

waar we z langs de as van de schijf hebben gekozen, en gebruikt hebben dat

$$dxdy = det \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial r\cos\theta}{\partial r} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial r}\\ \frac{\partial r\cos\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial r\sin\theta}{\partial \theta} \end{array}\right) drd\theta = det \left(\begin{array}{cc} \cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{array}\right) drd\theta = rd\theta dr.$$
(1.66)

Dit betekent dat ρ gegeven wordt door:

$$\rho = \frac{M}{\int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{l} r dr}$$
(1.67)

Om nu rotatie bijdrage aan de kinetische energie uit te rekenen vervangen we de sommatie in 1.63 door de volgende integraal:

$$\sum_{i} \frac{1}{2} m_{i} \dot{\boldsymbol{r}}_{i}^{*2} \to \int_{-d/2}^{d/2} dz \int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{l} r dr \frac{1}{2} \rho \omega^{2} r^{2}.$$
 (1.68)

1.4. ENERGIE

Als we nu de gevonden dichtheid invullen, dan vinden we hiervoor:

$$\frac{1}{2}M\omega^2 \frac{\int_0^l r^3 dr}{\int_0^l r dr} = \frac{1}{4}M\omega^2 l^2.$$
(1.69)

Ofwel, de totale kinetische energie van de schijf is de som van (1.64) en (1.69):

$$T = \frac{1}{2}M\omega^2 l^2 + \frac{1}{4}M\omega^2 l^2 = \frac{3}{4}M\omega^2 l^2$$
(1.70)

$$= \frac{3}{4}Mv^2. (1.71)$$

We kunnen dit gebruiken in combinatie met (1.53) om te vinden hoeveel kleiner de snelheid van de (rollende) schijf is ten opzichte van een even zwaar, maar niet rollend, blok nadat ze van een heuvel van een bepaalde hoogte zijn gerold dan wel gegleden. Als ze beide op dezelfde positie, uit stilstand, beginnen (merk op: we verwaarlozen wrijving in dit voorbeeld), dan hebben ze aanvankelijk evenveel potentieële energie. Onder aan de heuvel is deze potentieële energie omgezet in kinetische energie, en hebben beide dus evenveel kinetische energie. Maar vanwege de extra term in (1.71) zal de (zwaartepunts) snelheid van de rollende schijf een factor $\sqrt{3/2}$ kleiner zijn dan het glijdende blok.

Hoofdstuk 2

Vrijheidsgraden en d'Alembert (G1:3-4)

Onder vrijheidsgraden van een systeem verstaat men de (in het algemeen continue) variabelen die de ruimtelijke configuratie van het systeem volledig specificeren. Tot die ruimtelijke configuratie rekenen we voor het ogenblik ook de positie van het zwaartepunt van het systeem in een gegeven Euclidische ruimte. We geven een paar voorbeelden.

Stel dat het systeem bestaat uit slechts één puntdeeltje, dat zich vrij kan bewegen. Er zijn dan drie vrijheidsgraden, namelijk de coördinaten x, y en z van het deeltje. Maar we kunnen ook kiezen voor poolcoördinaten r, θ en ϕ , of cylindercoördinaten r, ϕ en z of parabolische coördinaten of wat we maar willen. Uit dit voorbeeld is al duidelijk dat hoewel het *aantal* vrijheidsgraden van het systeem bestaande uit slechts één vrij puntdeeltje steeds gelijk aan drie is, de keuze van de parametrisering nog vrij is.

Het is nu duidelijk dat het aantal vrijheidsgraden voor een gas met N atomen gelijk is aan 3N. Dit verandert niet wanneer de atomen met elkaar wisselwerken, zelfs niet (in principe) bij overgang naar vloeistof- of vaste fase. Dit laatste vraagt om nader commentaar, dat we geven aan de hand van nog een voorbeeld: het H_2 molecuul.

In onze eenvoudigste voorstelling is het H_2 molecuul een halter (twee H atomen als massapunten op vaste afstand van elkaar). Het aantal vrijheidsgraden van de halter kunnen we vaststellen door een bepaalde parametrisatie te kiezen, bijvoorbeeld de positie van het zwaartepunt (x_{CM} , y_{CM} , z_{CM}) en twee hoeken (θ, ϕ) die de richting van de verbindingslijn vastleggen. Het aantal vrijheidsgraden is dus vijf, hetgeen ook bevestigd wordt door de soortelijke warmte van het H_2 gas die 5/2 maal k_BT is. Dit geldt echter alleen bij voldoende lage temperatuur en wanneer men kijkt met licht van voldoende lange golflengte. Bij geleidelijke verhoging van de temperatuur gaat men ook de vibratievrijheidsgraad aanslaan. De afstand tussen de atomen is dan een relevante variabele geworden en het aantal vrijheidsgraden gelijk aan zes. Bij nog hogere temperatuur, of beschijning met licht van kortere golflengte, blijkt het systeem opgebouwd uit twee kernen en twee electronen die alle onafhankelijk van elkaar kunnen bewegen. Het aantal vrijheidsgraden is dan al 12 geworden, nog afgezien van spinvrijheidsgraden. Kijkt men met fotonen van ongeveer 10^9 eV (of bij temperaturen van ongeveer 10^{13} K) dan blijken ook de protonen structuur te hebben en met elk een aantal vrijheidsgraden. Op soortgelijke wijze kan men vaststellen dat in een vaste stof maar een klein aantal trillingswijzen van de atomen ten opzichte van elkaar bij lage temperatuur ter zake doen. Alleen langgolvige trillingen door het hele rooster hebben voldoende lage frequentie (fonon-energie) om te kunnen optreden; de talloze alternatieve trillingen hebben te hoge fonon-energie en mogen dan buiten beschouwing worden gelaten.

De conclusie moet zijn dat voor vrijwel alle fysische systemen geldt dat het aantal vrijheidsgraden afhankelijk is van de energie die men aan het systeem geeft; bij lage temperatuur kan een aantal vrijheidsgraden als "bevroren" worden beschouwd. Bij dit bevroren zijn speelt de quantummechanica een wezenlijke rol: de quantumsprongen zijn te groot om te kunnen optreden bij de beschikbare energie.

2.1 Kinematische relaties en gegeneraliseerde coördinaten

Uit de gegeven voorbeelden bleek dat het niet altijd zinvol is voor een systeem van N deeltjes alle 3N vrijheidsgraden in de beschouwingen te betrekken. Voor practische toepassingen kan men sommige, of bijna alle, als "bevroren" beschouwen. Bijvoorbeeld voor het H_2 molecuul kan men de afstand tussen de atomen vast aannemen:

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \cdot (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - a^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - a^2 = 0.$$
(2.1)

Deze relatie is een idealisatie van de werkelijkheid, overeenkomend met de aanname van een massaloze starre staaf met lengte a tussen de atomen. Een relatie tussen de coördinaten, zoals (2.1), heet een kinematische relatie (Eng: constraint); d.w.z. een aan de beweging van het systeem opgelegde relatie. Deze introduceert een afhankelijkheid tussen de zes coördinaten; er blijven nog maar vijf onafhankelijke coördinaten over.

In het algemeen zal gelden dat, indien een systeem met N deeltjes aan M kinematische relaties is onderworpen,

$$f_k(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0; \quad k = 1, \dots, M$$
 (2.2)

het aantal vrijheidsgraden gelijk is aan

$$n = 3N - M. \tag{2.3}$$

Men kan nu voor de n onafhankelijke variabelen n van de oorspronkelijke coördinaten kiezen, maar dat is niet noodzakelijk, en het is meestal ook niet handig. De te kiezen (onafhankelijke!) parameters, die functies van de oorspronkelijke coördinaten zullen zijn

$$q_i(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N), \qquad i=1,\ldots,n$$
 (2.4)

noemt men gegeneraliseerde coördinaten. De vraag welke de gegeneraliseerde coördinaten van het systeem zijn is dus niet zonder meer te beantwoorden. Men kan kiezen, mits de gegeneraliseerde coördinaten *onafhankelijk* zijn. Het *aantal* staat wel vast, namelijk door vergelijking (2.3). Wegens de onafhankelijkheid zijn alle oorspronkelijke coördinaten op eenduidige wijze uit te drukken in de gegeneraliseerde coördinaten

$$\boldsymbol{r}_1(q_1,\ldots,q_n),\ldots,\boldsymbol{r}_N(q_1,\ldots,q_n) \tag{2.5}$$

Het doel is dan ook de bewegingsvergelijkingen en hun oplossingen in deze gegeneraliseerde coördinaten q_1, \ldots, q_n uit te drukken.

Opmerking:

Soms zijn er beperkingen van de beweging die niet de vorm van een functionele afhankelijkheid (2.2) hebben. Men spreekt dan van *anholonome* kinematische relaties. Hiervan is onder andere sprake wanneer de relatie niet een gelijkteken bevat, zoals in (2.2), maar een groter of kleiner dan teken. Bij atomen van een gas dat opgesloten is in een doos is er wel een begrenzing van de coördinaten, maar geen functionele afhankelijkheid.

Nog eens de slinger...

Laten we de slinger van figuur 1.1 als voorbeeld gebruiken om dit te illusteren. Als we een coördinaten systeem kiezen met de oorsprong in het ophangpunt, en de positie van de puntmassa r noemen, dan moet deze voldoen aan de kinematische relatie

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} - l_0^2 = 0 \tag{2.6}$$

waar l_0 de lengte van de slinger is. We kunnen als gegeneraliseerde coördinaten de hoek θ ten opzichte van de verticaal kiezen, en de afstand l tot de oorsprong, ofwel:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} l\sin\theta\\ -l\cos\theta \end{pmatrix}; \tag{2.7}$$

De kinematische relatie in termen van l en θ is dan simpelweg:

$$l^2 - l_0^2 = 0 \tag{2.8}$$

en omdat l niet negatief kan zijn is dus $l = l_0$ en constant. Nu zijn de snelheid en versnelling van de massa gegeven door:

$$\dot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} l\cos(\theta)\dot{\theta} \\ l\sin(\theta)\dot{\theta} \end{pmatrix}; \quad \ddot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{d}{dt}\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} -l\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + l\cos(\theta)\ddot{\theta} \\ l\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + l\sin(\theta)\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$
(2.9)

waar we expliciet hebben gebruikt dat $l = l_0$, en dus $\dot{l} = 0$. Merk op dat we begonnen zijn met een probleem met twee coördinaten en een beperking, en uiteindelijk hebben we 2 - 1 = 1 gegeneraliseerde coördinaat, in dit geval θ , over gehouden.

Om de bewegings vergelijking voor θ te bepalen kunnen we gewoon de tweede wet van Newton gebruiken. Hiervoor moeten we eerst alle krachten bepalen: de kracht \mathbf{F} die op de massa werkt bestaat uit twee komponenten: de zwaartekracht $\mathbf{F}^g = -mg\hat{\mathbf{e}}_z$

en de kracht die de staaf uitoefent op de massa. Van deze "beperkingskracht" weten we van tevoren alleen dat deze in de richting langs de staaf zal liggen, $\mathbf{F}^c = \lambda \hat{\mathbf{r}}$. Invullen van de vergelijking van Newton, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}^g + \mathbf{F}^c$, geeft:

$$\begin{pmatrix} -ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}\\ ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + ml\sin(\theta)\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ -mg \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sin\theta\\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$
(2.10)

Met wat simpele algebra vinden we dan dat:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{2.11}$$

$$\lambda = -ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta \tag{2.12}$$

Dit levert niet alleen de bewegingsvergelijking op voor de gegeneraliseerde coördinaat θ , maar ook de grootte van de kracht langs de staaf, λ . Deze kracht bestaat uit twee delen: niet alleen moet het deel van de zwaartekracht in het verlengde van de staaf gecompenseerd worden, maar er is ook een kracht nodig om de kracht te compenseren die ontstaat door de cirkelbeweging die wordt geforceerd door de kinematische relatie.

2.2 Kinematische relaties en arbeid

Aangezien de kinematische relaties extra krachten introduceren is het à priori niet duidelijk of de energie van een systeem dat zonder de relaties conservatief is nog steeds behouden is. Een belangrijke observatie voor deze extra krachten is dat ze loodrecht op het vlak staan dat door de kinematische relaties wordt gedefinieerd: ze compenseren namelijk precies die (componenten van de) krachten die proberen om de beweging uit dit vlak te trekken. Concreet hebben we gezien dat in het geval van de slinger de lengte een 2-1 = 1 dimensionaal vlak (in dit geval was dat een cirkel) definieert, en de kracht die hier door werd geïntroduceerd stond inderdaad loodrecht op deze cirkel.

In het algemeen zijn we dus op zoek naar een vector die loodrecht op een gegeven beperking staat. Als deze beperking is gegeven door de relatie

$$f(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.13}$$

dan is het niet moeilijk om aan te tonen dat

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r})$$
(2.14)

hier loodrecht opstaat. In dit geval zijn er à priori drie parameters (de drie componenten van de vector \mathbf{r}) maar door de beperking $f(\mathbf{r}) = 0$ zijn er twee parameters nodig om alle toegestane \mathbf{r} te beschrijven. Als we nu deze twee parameters q_1 en q_2 noemen, dan hebben we natuurlijk:

$$f(q_1, q_2) \equiv f(\mathbf{r}(q_1, q_2)) = 0 \tag{2.15}$$

Als we nu naar q_1 en q_2 differentieren, dan vinden we met behulp van de kettingregel:

$$0 = \frac{df}{dq_k} = \frac{\partial f}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial q_k} + \frac{\partial f}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial q_k} + \frac{\partial f}{\partial r_3} \frac{\partial r_3}{\partial q_k}$$
(2.16)

$$= \frac{\partial f}{\partial r_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \tag{2.17}$$

$$\equiv \frac{\partial f}{\partial r_i} \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j \frac{\partial r_j}{\partial q_k} \tag{2.18}$$

$$= \nabla f \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_k} \equiv \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_k}$$
(2.19)

Nu zijn, bij constructie, de twee vectoren $\partial \boldsymbol{r}/\partial q_k$ precies de raaklijnen aan het oppervlak van $f(\boldsymbol{r}) = 0$, en het bovenstaande betekent dat ∇f precies loodrecht op dit oppervlak staat.

In het geval van meerdere deeltjes is het makkelijk om het bovenstaande uit te breiden:

$$f(q_1,\ldots,q_n) \equiv f(\boldsymbol{r}_1(q_1,\ldots,q_n),\ldots,\boldsymbol{r}_N(q_1,\ldots,q_n) = 0$$
(2.20)

en

$$0 = \frac{df}{dq_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$$
(2.21)

Deze observatie leidt ertoe om deze extra krachten ten gevolge van beperkingen te schrijven in de vorm van:

$$\boldsymbol{F}^{c} = \lambda(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) \frac{d}{d\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r}, t)$$
(2.22)

waar λ in het algemeen een nog te bepalen functie is van de coördinaten, hun tijdsafgeleiden en de tijd. Dit betekent dat de bewegingsvergelijking van Newton er uit zal zien als:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}^a + \boldsymbol{F}^c = \boldsymbol{F}^a + \lambda(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) \frac{d}{d\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r}, t).$$
(2.23)

Als we nu net zoals in hoofdstuk 1 deze vergelijking met \dot{r} vermenigvuldigen, dan vinden we

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^{2}\right) = \boldsymbol{F}^{a}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \lambda(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})\dot{\boldsymbol{r}}\frac{d}{d\boldsymbol{r}}f(\boldsymbol{r},t).$$
(2.24)

De nieuwe contributie van de kinematische relaties, i.e. de laatste term, kan met behulp van $0 = \frac{d}{dt}f = \frac{\partial}{\partial r}f \cdot \dot{r} + \frac{\partial}{\partial t}f$ worden herschreven als $\dot{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}f = -\frac{\partial}{\partial t}f$ wat geeft:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + V(r)\right) = -\lambda\frac{\partial}{\partial t}f \qquad (2.25)$$

Hieruit kunnen we de conclusie trekken dat de energie van een conservatief system met kinematische relaties is behouden zolang de kinematische relaties niet *expliciet* van de tijd afhangen. Een andere manier om hier tegen aan te kijken is om te realiseren dat de verandering van de totale energie wordt gegeven door de hoeveelheid werk. Blijkbaar verrichten kinematische relaties die niet van de tijd afhangen geen werk – dit is niet zo vreemd, omdat om werk afhangt van de component van de kracht langs de bewegingsrichting. Dus bijna per constructie verrichten de extra krachten die door de kinematische relaties geintroduceerd staan geen werk omdat ze, per definitie, loodrecht op de beweging staan. Deze simpele observatie zal zometeen weer terug komen...

2.3 Het principe van d'Alembert

De vraag is nu of we problemen zodanig kunnen formuleren dat het uitrekenen van de krachten van kinematische relaties kan worden voorkomen. Een hint voor de oplossing van dit probleem zit in het feit dat de beperkingskracht loodrecht op het oppervlak staat dat wordt gedefinieerd door een kinematische relatie $f(\mathbf{r},t) = 0$, i.e. $\mathbf{F}^c = \lambda(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}, t)$. Als we nu naar (virtuele) infinitesimale variaties $\delta \mathbf{r}$ van de coördinaat \mathbf{r} kijken, die voldoen aan de kinematische relatie, i.e. $\delta \mathbf{r}$ is gedefinieerd zodanig dat $f(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$. Deze variaties $\delta \mathbf{r}$ spannen dus de hele ruimte van alle mogelijke verplaatsingen die door de relaties zijn toegestaan, en de bewegingsvergelijkingen zullen hier dus de uiteindelijke beweging, als functie van de tijd, uit moeten kiezen. In dat geval kunnen we het feit dat de beperkingskrachten geen arbeid verrichten formuleren als

$$\boldsymbol{F}^{c} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0; \quad \forall \quad \delta \boldsymbol{r} : \quad f(\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}).$$
(2.26)

Omdat de totale kracht gelijk is aan de som van de beperkingskracht en de uitwendige kracht, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^a$, kunnen we de tweede wet van Newton schrijven als

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}^a + \boldsymbol{F}^c. \tag{2.27}$$

Om nu 2.26 te kunnen gebruiken, isoleren we de term \boldsymbol{F}^c aan de linkerkant,

$$\boldsymbol{F}^{c} = m\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}^{a}, \qquad (2.28)$$

om vervolgens het scalair product te nemen met δr (of, equivalent, dit in te vullen in 2.26). Dan valt precies de beperkingskracht weg, en er blijft over:

$$(m\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{F}^a) \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0. \tag{2.29}$$

Als we dit uitbreiden naar meerdere deeltjes, dan vinden we:

$$\sum_{i} \left(m \ddot{\boldsymbol{r}}_{i} - \boldsymbol{F}^{a} \right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = 0.$$
(2.30)

Deze vergelijking staat bekent als *het principe van d'Alembert*. Samen met de kinematische relaties zal deze de beweging vastleggen. Deze variant op de tweede wet van Newton heeft twee belangrijke voordelen: de meest voor de hand liggende is dat, precies zoals gehoopt, de beperkingskracht is weggevallen. Een minstens zo belangrijk voordeel is dat het een "scalaire" vergelijking is in plaats van een "vector" vergelijking. Dit betekent dat we makkelijk andere coördinaten kunnen kiezen! Dit zal sterk terugkomen in de beschrijving van de mechanica door Lagrange, waar alleen nog maar scalaire grootheden zullen voorkomen.

d'Alembert en de slinger

Laten we nu nog eens kijken naar de slinger. De kinematische relatie waaraan de puntmassa voldoet is, als voor het slingervlak het (x, z)-vlak wordt aangenomen:

$$x^2 + z^2 = l^2 \tag{2.31}$$

als l de slingerlengte is. De toegestane (virtuele) verplaatsingen moeten dus voldoen aan:

$$2x\delta x + 2z\delta z = 2l\delta l = 0. (2.32)$$

Deze verplaatsingen zijn makkelijk te parameteriseren in termen van de gegeneraliseerde coördinaat θ . Immers door

$$x = l\sin\theta; \qquad z = -l\cos\theta \tag{2.33}$$

is altijd aan de kinematische relatie voldaan. We hebben dan:

$$\delta \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} l\cos\theta\\ l\sin\theta \end{pmatrix} \delta\theta \tag{2.34}$$

Invullen in de nader uitgeschreven vergelijking van d'Alembert (2.30) levert op

$$\begin{bmatrix} -\begin{pmatrix} -ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2 + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}\\ ml\cos(\theta)\dot{\theta}^2 + ml\sin(\theta)\ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ -mg \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l\cos\theta\\ l\sin\theta \end{pmatrix} = mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0.$$
(2.35)

Dit is weer de alom bekende bewegingsvergelijking voor de slinger, en, zoals beloofd, is deze afgeleid zonder ooit maar te refereren aan de beperkingskracht.

Voorbeeld: blok op een vrij bewegende wig

Laten we beginnen door, zoals aangegeven in Fig. 2.1, het systeem te beschrijven met behulp van gegeneraliseerde coördinaten. Er zijn meerdere mogelijkheden, maar laten we als coördinaten de x positie van de wig, en de afstand l tussen het blok en de bovenkant van de wig kiezen.

De ingrediënten die we in dit geval nodig hebben is hoe de twee wig en het blok bewegen in termen van de twee coördinaten:

$$\delta \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta x; \quad \delta \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \delta l; \tag{2.36}$$



Figuur 2.1: Blok op een wig.

wat de versnellingen zijn in termen van x en l:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \begin{pmatrix} \ddot{x} + \cos(\theta)\ddot{l} \\ -\sin(\theta)\ddot{l} \end{pmatrix}$$
(2.37)

en tenslotte hebben we de externe krachten nodig:

$$\boldsymbol{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1g \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2g \end{pmatrix}$$
(2.38)

Als we dit invullen in het principe van d'Alembert:

$$(\boldsymbol{F}_1 - m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1) \cdot \delta \boldsymbol{r}_1 + (\boldsymbol{F}_2 - m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2) \cdot \delta \boldsymbol{r}_2 = 0$$
(2.39)

vinden we:

$$0 = \begin{pmatrix} -m_1 \ddot{x} \\ -m_1 g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} -m_2 \ddot{x} - m_2 \cos(\theta) \ddot{l} \\ -m_2 g + m_2 \sin(\theta) \ddot{l} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta x + \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \delta l \right)$$
(2.40)
$$= \begin{pmatrix} -m_1 \ddot{x} - m_2 \ddot{x} - m_2 \cos(\theta) \ddot{l} \end{pmatrix} \delta x$$

$$+\left(-m_2\ddot{x}\cos(\theta) + m_2g\sin\theta - m_2\ddot{l}\right)\delta l \qquad (2.41)$$

Omdat δl en δx onafhankelijk van elkaar gekozen kunnen worden, is de enige manier om uit (2.41) nul te krijgen als *beide* coëfficienten van δl en δx elk gelijk aan nul zijn:

$$0 = -m_1 \ddot{x} - m_2 \ddot{x} - m_2 \cos(\theta) \ddot{l}$$
(2.42)

$$0 = -m_2 \ddot{x} \cos(\theta) + m_2 g \sin \theta - m_2 l \qquad (2.43)$$

22 HOOFDSTUK 2. VRIJHEIDSGRADEN EN D'ALEMBERT (G1:3-4)

Merk op dat de eerste vergelijking niets anders is dan het behoud van de zwaartepunts impuls in de horizontale richting.

Hoofdstuk 3 Mechanica van Lagrange (G1:5-6)

In het voorbeeld van de slinger hebben we al gezien dat het oplossen van een bewegingsvergelijking uitgedrukt in de gegeneraliseerde coördinaat θ veel eenvoudiger is dan het oplossen van de vergelijkingen van Newton met de kinematische relaties als nevenvoorwaarde. In het laatste geval hadden we natuurlijk wel meer resultaat, want de beperkingskracht werd tegelijkertijd berekend. Toch verdient een formulering van een probleem in termen van gegeneraliseerde coördinaten verre de voorkeur. Niet alleen worden de vergelijkingen gemakkelijker om op te lossen, maar ook zal vaak de precieze interne structuur van een systeem ons niet interesseren of zelfs onbekend zijn. Als gegeneraliseerde coördinaten gebruiken we dan *die* vrijheidsgraden waarmee het systeem zich uitdrukkelijk manifesteert. Wat bijvoorbeeld te denken van systemen als een brug, de oceaan, het electron, het licht, het nucleon, het heelal? Het electron lijkt in deze rij de uitzondering, omdat het geen structuur heeft. Dit laatste weten we echter niet zeker; we weten slechts dat het zich met geen andere dan drie ruimtelijke coördinaten en spin gemanifesteerd heeft in alle experimenten tot nu toe.

We gaan nu de theorie zo opzetten dat alle relevante grootheden, inclusief de bewegingsvergelijkingen, alleen nog maar worden uitgedrukt in *gegeneraliseerde* coördinaten. Dit zijn *scalaire* grootheden. Alle grootheden die in de theorie een rol spelen zullen ook scalaire functies zijn van de gegeneraliseerde coördinaten of hun afgeleiden naar de tijd. Zoals bijvoorbeeld de ons al bekende kinetische en potentiële energie. Het zal dan blijken dat de hele beweging van een systeem wordt bepaald door zo'n scalaire functie, de functie van Lagrange of *Lagrangiaan* en de erbij behorende bewegings*vergelijkingen van Lagrange*.

Om de juiste vorm van deze vergelijkingen op het spoor te komen gaan we uit van de vergelijkingen van Newton en kinematische relaties. Zodra we eenmaal de Lagrangiaan en de vergelijkingen van Lagrange hebben gevonden, is het niet meer mogelijk van daar uit naar Newton terug te gaan. Bijvoorbeeld in het geval van de slinger kunnen we niet uit de vergelijking in θ de vergelijkingen in x en z afleiden. Alleen als we weten hoe de slinger in elkaar zit, dat die zich in het (x, z)-vlak beweegt, etc. kunnen we weer terug.

Dit betekent dat we in dit hoofdstuk definitief afscheid van de vergelijkingen van Newton gaan nemen, om tot een heel nieuw formalisme te komen dat in principe voor elk systeem met vrijheidsgraden geschikt is, of het nu uit puntmassa's bestaat of niet. Als rode draad loopt door de hierna volgende afleidingen, dat de n gegeneraliseerde coördinaten $q_i(t)$ onafhankelijk zijn en dus ook, bij een virtuele verplaatsing, de variaties δq_i .

We gaan nu uit van een systeem met N deeltjes en de kinematische relaties

$$f_k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0;$$
 $k = 1, \dots, M.$ (3.1)

Wegens de onafhankelijkheid van de q_i worden de oorspronkelijke coördinaten eenduidig daarin uitgedrukt:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t). \tag{3.2}$$

De tijd kan er expliciet in voorkomen, namelijk in de gevallen dat een of meer kinematische relaties expliciet tijdafhankelijk zijn, zoals bij een kraal op een bewegende rail. Voor een willekeurige infinitesimale *reële* verplaatsing van het systeem geldt

$$d\boldsymbol{r}_{i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{j}} dq_{j} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial t} dt.$$
(3.3)

Opgemerkt kan worden dat het sommatieteken voor de som over j vaak wordt weggelaten. Volgens de sommatieconventie van Einstein moet er dan steeds gesommeerd worden over herhaalde indices binnen dezelfde term. Een *virtuele* verplaatsing is een infinitesimale verplaatsing op een bepaald tijdstip, in overeenstemming met de kinematische relaties. Die relaties zijn door (3.2) al in rekening gebracht. Daarom geldt voor een (virtuele) verplaatsing $\delta \mathbf{r}_i$, dat

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{3.4}$$

De snelheid van een deeltje, uitgedrukt in gegeneraliseerde coördinaten en snelheden \dot{q}_i , leest men uit (3.3) af door het rechterlid uit te schrijven

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i(q_1,\ldots,q_n,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}(q_1,\ldots,q_n,t)\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}(q_1,\ldots,q_n,t).$$
(3.5)

Hieruit volgt dat

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_i}. \text{ merkop : geensommatieover} i$$
(3.6)

Alle factoren in (3.5) zijn weer functies van de q_i en t, behalve \dot{q}_i , want \dot{q}_i hangt alleen van zichzelf en t af. Nog eens differentiëren van (3.5) naar q_i levert dan op

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial t}.$$
(3.7)

3.1. DE VERGELIJKINGEN VAN LAGRANGE

Ook geldt (kettingregel voor differentiëren)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \partial q_j}.$$
(3.8)

Daarom volgt

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}.$$
(3.9)

aannemende dat $\mathbf{r}_i(q_1, \ldots, q_n, t)$ een fatsoenlijke functie is, zodat de differentiaties naar de q_i en t verwisselbaar zijn. We passen de gevonden relaties nu toe.

3.1 De vergelijkingen van Lagrange

Voor een systeem van N deeltjes met massa's m_i kan, dank zij de tweede wet van Newton

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i^a + \boldsymbol{F}_i^c, \qquad (3.10)$$

het principe van d'Alembert (2.30) worden geschreven in de vorm

$$(\boldsymbol{F}_{i}^{a} - m_{i} \ddot{\boldsymbol{r}}_{i}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_{i} = 0.$$

$$(3.11)$$

Als niet alle coördinaten r_i onafhankelijk zijn, is het nuttig (3.11) te herschrijven in termen van onafhankelijke gegeneraliseerde coördinaten. Invullen van (3.4) in (3.11) levert op:

$$(\boldsymbol{F}_{i}^{a} - m_{i} \ddot{\boldsymbol{r}}_{i}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{j}} \delta q_{j} = 0.$$
(3.12)

Het ligt nu voor de hand om gegeneraliseerde krachten Q_i te definiëren als

$$Q_i = \boldsymbol{F}_j^a \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial q_i}.$$
(3.13)

Met behulp van deze definitie vinden we:

$$Q_i \delta q_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0.$$
(3.14)

De vraag is nu of de versnellingsterm in (3.11) op een handigere manier geschreven kan worden in de vorm van een functie van q_i maal δq_i . Het blijkt dat dit kan met behulp van de kinetische energie:

$$T = \frac{1}{2}m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \tag{3.15}$$

Om dit te doen merken we op dat

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \right).$$
(3.16)

Met behulp van de gelijkheden (3.6) en (3.9) volgt dan

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$
(3.17)

Dit resultaat, met (3.13) maakt nu dat (3.11) kan worden geschreven als

$$\delta q_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) = 0 .$$
(3.18)

Omdat de δq_i onafhankelijk zijn volgt hieruit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \tag{3.19}$$

Merk op dat in deze vergelijkingen van Lagrange uitsluitend scalaire grootheden optreden. Met behulp van (3.5) blijkt dat $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ bij tijdonafhankelijke kinematische relaties een zuiver kwadratische functie van de gegeneraliseerde snelheden is.

De bewegingsvergelijkingen (3.19) zijn niet de meest bekende vorm van de bewegingsvergelijkingen van Lagrange. Die verkrijgt men wanneer de krachten Q_i afleidbaar zijn van een potentiële energie V. Dit is zeker het geval als de krachten conservatief zijn (wat in het algemeen betekent dat ze alleen afhangen van q, en niet van \dot{q} !), want dan geldt:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}.$$
(3.20)

In dat geval krijgen de vergelijkingen van Lagrange hun meest bekende vorm:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{3.21}$$

met de Lagrangiaan gedefinieerd als

$$L = T - V. \tag{3.22}$$

Deze vorm van de vergelijkingen is dus van toepassing voor conservatieve krachten, maar ook algemener voor krachten Q_i waarbij een potentiaal $V(q_i, \dot{q}_i, t)$ te vinden is zodanig dat

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right). \tag{3.23}$$

Een voorbeeld: de slinger

Om de Lagrange vergelijkingen (3.21) in de praktijk te kunnen gebruiken moeten we dus de potentiele en kinetische energie in termen van de gegeneraliseerde coördinaten schrijven. In het geval van de slinger is dit niets anders dan:

$$T = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 \tag{3.24}$$

$$V = -mgl\cos\theta \tag{3.25}$$

ofwel, in termen van de coördinaat θ hebben we:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$
(3.26)

De bijbehorende Lagrange vergelijking is nu:

$$\frac{d}{dt}\left(ml^{2}\dot{\theta}\right) - (mgl\sin\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} - (g/l)\sin\theta = 0$$
(3.27)

Voorbeeld: blok op een vrij bewegende wig

We kijken weer naar het blok dat, zonder wrijving, over een wig glijdt, zie Figuur (2.1). Laten we beginnen door, zoals aangegeven in Figuur 2.1, het systeem te beschrijven met behulp van gegeneraliseerde coördinaten. Er zijn meerdere mogelijkheden, maar laten we als coördinaten de x positie van de wig, en de afstand l tussen het blok en de bovenkant van de wig kiezen. Vervolgens bepalen we de Lagrangiaan van het systeem in termen van deze coördinaten, en de bijbehorende Lagrange vergelijkingen.

De eerste stap is het bepalen van de potentiele en kinetische energie van het blok en de wig. Omdat de wig op constante hoogte blijft heeft deze een constante potentiële energie (en omdat we het nulpunt vij kunnen kiezen zetten deze op nul), en de kinetische energie hangt af van het kwadraat van de snelheid van de wig, i.e. \dot{x} :

$$V_{\rm wig} = 0; \ T_{\rm wig}(\dot{x}) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2.$$
 (3.28)

De potentiële energie van het blok is niets anders dan mgh, waar h de hoogte van het blok is. Als we h = 0 kiezen op de top van de wig, i.e. als l = 0, dan is, in termen van de de gegeneraliseerde coördinaat l deze hoogte gelijk aan $h = -l \sin \theta$, dus:

$$V_{\rm blok}(l) = -mgl\sin\theta. \tag{3.29}$$

Om de kinetische energie van het blok te bepalen moeten we de snelheid van het blok bepalen in termen van \dot{x} en \dot{l} :

$$\boldsymbol{v}_{\text{blok}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{l} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$
(3.30)

De kinetische energie is dus

$$T_{\text{blok}}(x,\dot{x},l,\dot{l}) = \frac{1}{2}m\left(\left(\dot{x}+\dot{l}\cos\theta\right)^2 + \dot{l}^2\sin^2\theta\right).$$
(3.31)

Als we alle termen met elkaar combineren vinden we tenslotte de Lagrangiaan:

$$L(x, \dot{x}, l, \dot{l}) = \frac{m+M}{2} \dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{l}\cos\theta + \frac{1}{2}m\dot{l}^2 + mgl\sin\theta$$
(3.32)

De twee Lagrange vergelijking zijn:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left((m+M)\dot{x} + m\dot{l}\cos\theta\right) = 0 \tag{3.33}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}}\right) - \frac{\partial L}{\partial l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(m\cos\theta\dot{x} + m\dot{l}\right) = g\sin\theta \tag{3.34}$$

Merk op dat de eerste vergelijking precies overeenkomt met het behoud van de totale impuls in de horizontale richting. Dit was te verwachten, want in dit systeem is er geen externe kracht in de horizontale richting. Als we ervan uitgaan dat in het begin het blok en de wig stil staan en dan los worden gelaten, dan kunnen als volgt \dot{i} als functie van \dot{x} schrijven:

$$\dot{l} = -\frac{m+M}{m\cos\theta}\dot{x} \tag{3.35}$$

Invullen hiervan in de tweede vergelijking levert op:

$$\ddot{x} = -\frac{g\sin\theta\cos\theta}{M + m(1 - \cos^2\theta)}$$
(3.36)

Dit betekent dat de wig met een constante versnelling, gegeven door de rechterkant van (3.36), naar links zal bewegen, en het blok de andere kant op met een snelheid die op elk moment met behulp van (3.35); immers, volgens (3.35), \dot{l} heeft een teken tegenovergesteld aan \dot{x} .

Voorbeeld: vallende jo-jo

Neem een schijf, met straal l, waaromheen een touw is gerold. Het uiteinde van het touw is opgehangen aan een vast punt, en de schijf valt onder de invloed van de zwaartekracht naar beneden. Laten we verder aannemen dat het touw een te verwaarlozen massa heeft. We kunnen dit probleem parameterizeren als functie van de afstand y waarover (het zwaartepunt van) de schijf naar beneden is gevallen. Immers, als we y en \dot{y} weten, dan kunnen we bepalen hoe snel de schijf ronddraait. Immers, vanwege het touw, hebben we dat

$$y = l\phi \tag{3.37}$$

waarbij ϕ de hoek is waarom de schijf geroteerd is nadat deze een afstand y omlaag is gevallen. Dit lijkt, qua kinetische energie, op het probleem van de rollende schijf. Voor dat geval is de kinetische energie gegeven door (1.71). Omdat hier de hoeksnelheid niets anders is dan $\omega = \dot{y}/l$, is in dit geval is de kinetische energie als functie van \dot{y} :

$$T(\dot{y}) = \frac{3}{4}M\omega^2 l^2 = \frac{3}{4}M\dot{y}^2.$$
 (3.38)

De potentiele energie is simpelweg

$$V(y) = -mgy. ag{3.39}$$

De Lagrangiaan, als functie van y en \dot{y} is dus simpelweg

$$L(y, \dot{y}) = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 + Mgy.$$
(3.40)

De bijbehorende Lagrange vergelijking is:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{y} - Mg = 0 \Rightarrow \ddot{y} = \frac{2}{3}g.$$
(3.41)

Deze jo-jo valt dus met een versnelling van twee derde van een vrijvallend object: ten opzicht van het vrijvallende object is een deel van de vrijgekomen potentiele energie gaan zitten in de rotatie van de schijf, en dus is er minder kinitische energie over voor het zwaartepunt, en dus is, op elk tijdstip, de snelheid van het zwaartepunt van de jo-jo lager dan die van een vrijvallend object.

3.2 Niet-conservatieve systemen; Lorentzkracht

Tot nu toe hebben we conservatieve systemen bestudeerd, i.e. systemen waar de potentiaal niet van de snelheid afhangt. Maar de Lorentzkracht is een bekende fundamentele kracht die wel degelijk van de snelheid afhangt. De vraag is nu of deze kracht in de vorm van (3.23) geschreven kan worden, zodat ook de beweging van geladen deeltjes in electromagnetische velden met een Lagrangiaan kan worden beschreven.

De kracht werkend op een deeltje met lading e in een elektromagnetisch veld wordt gegeven door

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}\right) \ . \tag{3.42}$$

Van de vergelijkingen van Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.43}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.44}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.45}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_o \boldsymbol{J}$$
(3.46)

gebruiken we (3.44), waaruit volgt, dat er een vectorpotentiaal \boldsymbol{A} bestaat met de eigenschap

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{3.47}$$

en (3.45), waaruit na substitutie van (3.47) volgt, dat er een scalaire potentiaal ϕ bestaat, zodanig dat $\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$, of

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \,. \tag{3.48}$$

Substitutie van (3.47) en (3.48) in de vorm (3.42) voor de Lorentzkracht levert

$$\boldsymbol{F} = e\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})\right) . \tag{3.49}$$

Daar

$$\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla} \left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} \right) - \left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} \right) - \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

blijkt de Lorentzkracht te schrijven te zijn in de vorm (3.23) als

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}$$
(3.50)

met een snelheidsafhankelijke potentiële energie, gegeven door

$$U = e\left(\phi - \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}\right) \,. \tag{3.51}$$

Hiermee is aangetoond, dat ook de mechanica van geladen deeltjes beschreven kan worden met de Lagrange vergelijkingen (3.21). Voor een deeltje met massa m en electrische lading e in een electromagnetisch veld dat beschreven wordt door \mathbf{A} en ϕ kunnen we de volgende Lagrangiaan gebruiken:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\left(\phi - \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}\right) . \qquad (3.52)$$

Merk op dat deze Lagrangiaan niet meer te schrijven is als het verschil van een kwadratische functie van \dot{q}_i (de kinetische energie) en een functie van alleen maar q_i (de potentiele energie).

IJk invariantie

Merk op dat, gegeven een electrisch en magnetisch veld, (3.47) en (3.48) de potentiaal ϕ en de vectorpotentiaal \boldsymbol{A} niet uniek bepalen. Immers, als we tegelijkertijd ϕ en \boldsymbol{A} veranderen volgens:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$
 (3.53)

$$\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \Lambda(\boldsymbol{r}, t)$$
 (3.54)

dan vinden we dezelfde velden E en B:

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{\nabla} \wedge \boldsymbol{A}' \tag{3.55}$$

$$= \nabla \wedge A + \nabla \wedge (\nabla \Lambda)$$
(3.56)

$$= \boldsymbol{B} + \hat{\boldsymbol{e}}_{i} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_{j}} \frac{\partial}{\partial r_{k}} \Lambda$$
(3.57)

$$= B \tag{3.58}$$

$$\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{\nabla}\phi' - \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t}$$
(3.59)

$$= -\nabla \left(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial \nabla \Lambda}{\partial t} \right)$$
(3.60)

$$= -\nabla\phi - \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) \tag{3.61}$$

$$= \mathbf{E} \tag{3.62}$$

en dus zal de bewegingsvergelijking niet (mogen) veranderen. De vraag komt nu op hoe de Lagrangiaan verandert onder deze transformatie, en wat het effect hiervan is op de bijbehorende Euler-Lagrange vergelijkingen. Het antwoord is

$$L \to L' = L + e\left(\nabla\Lambda\right) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - e\left(-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) = L + e\frac{d\Lambda(\boldsymbol{r},t)}{dt}$$
(3.63)

Het is vrij gemakkelijk om te laten zien dat (gelukkig!) de Euler-Lagrange vergelijkingen voor L en L' precies hetzelfde zijn. We zullen in 6.2 hier nog uitgebreid op terug komen.

3.3 Coördinaten transformaties

Eén van de belangrijke argumenten voor dit formalisme is dat we makkelijk andere coördinatensystemen kunnen gebruiken. Omdat dit zo'n belangrijk punt is is het goed om dit expliciet te bewijzen. Laten we beginnen met een Lagrangiaan $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Wat is het effect van een (eventueel van de tijd afhangende) transformatie

$$s_1 = s_1(q_1, \dots, q_N, t)$$

$$\vdots$$

$$s_n = s_n(q_1, \dots, q_N, t)$$
(3.64)

Dit betekent dat:

$$\dot{s}_i = \frac{\partial s_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial s_i}{\partial t} \tag{3.65}$$

Omdat zowel voor als na de transformatie alle coördinaten onafhankelijk zullen moeten zijn moeten we ook de inverse transformatie kunnen uitvoeren. Dit kan zolang $\det(\partial s_i/\partial q_j) \neq 0$. Dus kunnen we ook schrijven:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial s_j} \dot{s}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \tag{3.66}$$

Als we nu in $L(s, \dot{s}, t)$ de uitdrukkingen voor s = s(q, t) substitueren, dan kunnen we de afgeleiden van L naar q en \dot{q} bepalen:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial s_j} \frac{\partial s_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \left(\frac{\partial^2 s_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 s_j}{\partial t \partial q_i} \right)$$
(3.67)

en

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \frac{\partial \dot{s}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \frac{\partial s_j}{\partial q_i}$$
(3.68)

waar in de laatste stap $\partial \dot{s}_j / \partial \dot{q}_i = \partial s_j / \partial q_i$ gebruikt is wat volgt uit (3.66). Om de Lagrange vergelijking in termen van q en \dot{q} op te kunnen schrijven, moeten we nog de tijds-afgeleide nemen van (3.68):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j}\right) \frac{\partial s_j}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \left(\frac{\partial^2 s_j}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 s_j}{\partial t \partial q_i}\right)$$
(3.69)

Als we nu het verschil tussen (3.69) en (3.67) nemen, dan vinden we tenslotte

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial s_j} \right] \frac{\partial s_j}{\partial q_i}$$
(3.70)

Het eindresultaat is dat de Lagrange vergelijkingen voor q_i een lineare combinatie zijn van de Lagrange vergelijkingen voor s_i , en, omdat $\det(\partial s_j/\partial q_i) \neq 0$, geldt dit ook andersom. Dus als de q_i een oplossing van deze vergelijkingen zijn, dan zijn ook de s_i een oplossing van de Lagrange vergelijking, en omgekeerd. Dit laat zien dat inderdaad de Lagrange vergelijkingen niet afhangen van de keuze van het coördinatensysteem. Dit is kwalitatief anders dan de vergelijkingen van Newton die alleen gelden in inertiaal systemen.

Lagrange en niet-Carthesische coördinaat systemen (1.6)

Laten we beginnen met de bewegingsvergelijkingen voor een vrij deeltje (i.e. zonder potentiaal) in carthesische coordinaten. In dat geval kunnen we de positie r beschrijven in termen van de projecties langs de assen, en deze als gegeneraliseerde coordinaten kiezen:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

In termen van (x, y, z) is de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$
(3.72)

en, omdat er geen potentiaal is, is de Lagrangiaan gelijk aan de kinetische energie. De Lagrange vergelijkingen zijn dus simpelweg:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} = 0 \tag{3.73}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{y} = 0 \tag{3.74}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{z} = 0 \tag{3.75}$$

Als we nu cylinder-coordinaten (r, ϕ, z) invoeren door te definieren:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$
(3.76)

dan is de snelheid gelijk aan

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi} \\ \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$
(3.77)

en dus is de kinetische energie gelijk aan

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right)$$
(3.78)

Merk op dat een karakteristiek verschil tussen de uitdrukking voor de kinetische energie T in cylindercoördinaten aan de ene kant, en Carthesische coördinaten aan de andere kant is dat in het ene geval alleen tijds-afgeleiden van de coördinaten voorkomen, en in het andere geval zowel afgeleiden als de coördinaten zelf. Dit betekent dat de Lagrange vergelijkingen iets meer werk zijn:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = 0 \tag{3.79}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\phi}\right) = 0 \tag{3.80}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = 0. \tag{3.81}$$

Deze vergelijkingen hadden we ook kunnen vinden door te beginnen met de bewegingsvergelijkingen in Carthesische coördinaten, en vervolgens de tweede afgeleiden $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ expliciet in termen van (r, ϕ, z) uit te rekenen door de definitie (3.76) twee keer te differentiëren. Dit is al behoorlijk meer werk, en in meer complexe (en meer realistische) systemen is het verschil meestal nog veel groter.

Hoofdstuk 4

Niet-inertiale coördinaten stelsels (G4:1,9-10,G5:9)

Tot nu toe hebben we aangenomen dat alle bewegingen in een inertiaal frame zijn beschreven. Of een gegeven stelsel inderdaad de status van een inertiaal stelsel heeft kan worden getest door de volgende procedure: gooi een object in drie verschillende richting (die niet in één vlak leggen). Als in alle drie richtingen het object een eenparigrechtlijnige pad volgt, dan is het inderdaad een inertiaal stelsel.

Maar wat gebeurt er nu in coördinatenstelsels die niet een inertiaal stelsel zijn, zoals een stelsel dat meedraait met het oppervlak van de aarde? Laten we eerst kijken naar bewegende, maar niet-roterende stelsels, en daarna naar roterende stelsels.

Bewegende, niet-roterende stelsels

Stel dat een coördinatenstelsel S^* zodanig beweegt ten opzichte van een inertiaal referentiestelsel S dat een punt dat in stelsel S wordt gerepresenteerd door \boldsymbol{r} in stelsel S^* beschreven wordt door \boldsymbol{r}^* (merk op: \boldsymbol{r} en \boldsymbol{r}^* zijn fysiek hetzelfde punt!):

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(t) \tag{4.1}$$

waar s(t) de positie van de oorsprong van het stelsel S^* is zoals gezien in het stelsel S. Merk op dat dit betekent dat de twee stelsels *niet* ten opzichte van elkaar roteren, en de oriëntatie van de twee stelsels hetzelfde is. Dankzij de absolute tijd van Newton is de tijd in de twee stelsels hetzelfde, en kunnen we de snelheden en acceleratie in de twee stelsels aan elkaar relateren door:

$$\dot{\boldsymbol{r}}^* = \dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{s}}(t); \quad \ddot{\boldsymbol{r}}^* = \ddot{\boldsymbol{r}} - \ddot{\boldsymbol{s}}(t) \tag{4.2}$$

Als frame S een inertiaal stelsel is, i.e. de wet van Newton geldt, $m\ddot{r} = F(r)$, dan hebben we in frame S^{*}:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}^* = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{r}^* + \boldsymbol{s}(t)\right) - m\ddot{\boldsymbol{s}}(t) \equiv \boldsymbol{F}^*\left(\boldsymbol{r}^*, t\right) - m\ddot{\boldsymbol{s}}(t)$$
(4.3)

Dit betekent dat een waarnemer in het frame S^* tot de conclusie komt dat de beweging van r^* niet alleen veroorzaakt wordt door $F^*(r^*, t)$ maar dat er een extra kracht, een zogenaamde *psuedo-kracht* of *schijn-kracht* is:

$$\boldsymbol{F}^{\text{pseudo}} = -m\ddot{\boldsymbol{s}}(t) \tag{4.4}$$

Roterende stelsels

Het probleem wordt wat gecompliceerder als we naar relatieve *rotaties* tussen de stelsels gaan kijken: in dat geval verandert de oriëntatie van de basisvectoren. Neem een vector \boldsymbol{r} . Als we twee referentie stelsels S en S^* hebben, dan kunnen we in termen van de basisvectoren $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ (stelsel S) en $\hat{\boldsymbol{e}}_i^*$ (stelsel S^*) deze vector schrijven als:

$$\boldsymbol{r} \equiv r_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \equiv r_i^* \hat{\boldsymbol{e}}_i^* \equiv \boldsymbol{r}^* \tag{4.5}$$

Het verschil tussen \mathbf{r} en \mathbf{r}^* is dus dat de *coëfficiënten* een andere waarde hebben omdat de basisvectoren verschillen – ze representeren dus *wel* alle twee dezelfde positie! Stel nu dat stelsel S^* ronddraait met (constante) hoeksnelheid ω rondom as $\hat{\mathbf{n}}$. Laten we aannemen dat stelsel S een inertiaal stelsel is, en dat de assen $\hat{\mathbf{e}}_j$ (dus) niet afhangen van de tijd t. Als we nu naar de tijds-afgeleide van \mathbf{r} kijken, dan kan dat ten opzichte van beide stelsels. In termen van het inertiaal stelsel S vinden we simpelweg:

$$\frac{d}{dt}\left(r_{i}(t)\hat{\boldsymbol{e}}_{i}\right) = \dot{r}_{i}(t)\hat{\boldsymbol{e}}_{i} \equiv \dot{\boldsymbol{r}}$$

$$(4.6)$$

In het stelsel S^* is het iets bewerkelijker, want niet alleen de coëfficiënten r_i kunnen van de tijd afhangen, maar ook de basisvectoren \hat{e}_i . Dit betekent dat dezelfde beweging er ten opzichte van S^* uit zal zien als:

$$\frac{d}{dt}\left(r_{i}^{*}(t)\hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t)\right) = \dot{r}_{i}^{*}(t)\hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t) + r_{i}^{*}(t)\dot{\dot{\boldsymbol{e}}}_{i}^{*}(t)$$
(4.7)

De vraag is nu wat de tijds-afgeleide van $\hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t)$ is voor een rotatie met een gegeven hoeksnelheid ω rondom een as $\hat{\boldsymbol{n}}$. Dit kan worden afgeleid door te kijken hoe in een infinitesimale tijdsinterval dt deze vectoren veranderen. In dit interval zullen vectoren \boldsymbol{x} een (infinitesimale) hoek ωdt rondom de as $\hat{\boldsymbol{n}}$ draaien. Om dit te bepalen beginnen we met bekijken hoe een vector \boldsymbol{x} verandert onder zo een beweging. We kunnen de vector ontbinden als som van twee termen: één langs de as \boldsymbol{n} , namelijk $\boldsymbol{x}_{//}$ en één loodrecht op de as, \boldsymbol{x}_{\perp} . De component langs de as blijft constant – de term loodrecht op de as wordt onder een hoek ωdt geroteerd. De verandering van de loodrechte component \boldsymbol{x}_{\perp} staat zowel loodrecht op \boldsymbol{x}_{\perp} als op de rotatie as $\hat{\boldsymbol{n}}$, en, omdat het gaat om een rotatie, is evenredig met de lengte van \boldsymbol{x}_{\perp} . Deze lengte is gegeven door $|\boldsymbol{x}_{\perp}| = \boldsymbol{x}_{\perp} = |\boldsymbol{x}| \sin \alpha$. Verder is de verandering ook evenredig met de hoeksnelheid ω – dit is namelijk precies $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \theta / \Delta t$. Dit betekent dat de grootte van de snelheid gegeven is door $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{x}| \omega \sin \alpha$. Dit is precies de lengte van het vector-product van \boldsymbol{x} en $\boldsymbol{\omega}$. Zoals al opgemerkt, de richting van de snelheid is loodrecht op zowel x als n, en ligt dus langs het vector product. Als we alles combineren, dan zien we dat

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{x} \tag{4.8}$$

precies is wat nodig hebben.



Figuur 4.1: Snelheid ten gevolge van een rotatie.

Door (4.8) toe te passen op de basisvectoren van het roterende stelsel vinden we:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t+dt) = \hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t) + (\omega dt)\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t) = \hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t) + dt\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t)$$
(4.9)

Uit deze vergelijking kunnen we concluderen dat de tijds-afgeleide in het algemeen gegeven is door

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_{i}^{*}(t) \equiv \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t+dt) - \hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{*}(t)$$

$$(4.10)$$

Als we dit terug invullen in (4.7), en de snelheid *ten opzichte van* S^* definieren als $\dot{\mathbf{r}}^* \equiv \dot{r}_i^*(t)\hat{\mathbf{e}}_i^*(t)$, dan vinden we dat

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^* \tag{4.11}$$
37

Dit is precies wat je zou verwachten: als een object stilstaat ten opzichte van S^* , dan is dus $\dot{\boldsymbol{r}}^* = 0$. Maar ten opzichte van S zal hetzelfde object ronddraaien, $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$. Idem dito voor de omgekeerde situatie: als het object ten opzichte van S stilstaat ($\dot{\boldsymbol{r}} = 0$), dan zal ten opzicht van S^* het eruit ziet alsof het een snelheid $\dot{\boldsymbol{r}}^* = -\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*$ heeft. Kortom, als een object een snelheid heeft ten opzichte van S^* , dan is de snelheid ten opzichte van S de som van de snelheid ten opzichte van S^* plus de snelheid van S^* ten opzichte van S.

De relatie tussen de versnelling in de twee stelsels is te vinden door (4.11) twee keer toe te passen (we nemen aan dat de hoeksnelheid en rotatieas constant blijven):

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*)$$
(4.12)

$$= \ddot{\boldsymbol{r}}^* + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*)$$
(4.13)

(4.14)

Als we nu deze vergelijking met m vermenigvuldigen, en in het inertiaal stelsel S de tweede wet van Newton toepassen dan is de linkerkant van deze vergelijking te herschrijven in termen van de kracht F die op het object werkt. Door de laatste twee termen aan de rechterkant naar links te halen krijgen we dan de bewegingsvergelijking ten opzichte van S^* :

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}^* = \boldsymbol{F}^* - 2m\left(\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}^*\right) - m\boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*\right)$$
(4.15)

Een waarnemer in het roterende stelsel zal de twee extra termen in (4.15) interpreteren als krachten – de *centrifugaal kracht*:

$$\boldsymbol{F}^{\text{centrifugaal}} = -m\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*) \tag{4.16}$$

en de Coriolis kracht:

$$\boldsymbol{F}^{\text{Coriolis}} = -2m\left(\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}^*\right) \tag{4.17}$$

(tenminste, zolang de waarnemer niet door heeft dat zijn stelsel roteert, en iets van klassieke mechanica weet; zie figuur (4.2)).

Laten we eens kijken of we dit resultaat ook met behulp van een Lagrangiaan kunnen afleiden.

Beweging in roterende stelsels via een Lagrangiaan

Als we de kinetische energie in termen van de positie en snelheid in het roterende systeem, \mathbf{r}^* respectievelijk $\dot{\mathbf{r}}^*$ willen bepalen, dan hebben we eigenlijk alleen (4.11) nodig. Immers, we weten al wat de kinetische energie in termen van $\dot{\mathbf{r}}$ is. Invullen levert op:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*\right)^2$$
(4.18)

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}_{i}^{*}\dot{r}_{i}^{*}+2\epsilon_{ijk}\dot{r}_{i}^{*}\omega_{j}r_{k}^{*}+\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\omega_{j}\omega_{l}r_{k}^{*}r_{m}^{*}\right)$$
(4.19)



Figuur 4.2: Centrifugale en centripetale krachten (origineel: http://xkcd.com/c123.html).

Als we nu een beweging bekijken zonder een potentiaal, dan is L = T. De afgeleiden van L zijn dan:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}^*} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \frac{\partial L}{\partial r_i^*} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \frac{m}{2} \left(2\epsilon_{ijk} r_j^* \omega_k + \epsilon_{nji} \epsilon_{nlm} \omega_j \omega_l r_m^* + \epsilon_{njk} \epsilon_{nli} \omega_j \omega_l r_k^* \right)
= m \left(\dot{\boldsymbol{r}}^* \wedge \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*) \right)
\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}^*} = m \left(\dot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^* \right),$$
(4.20)

dus de bijbehorende Lagrange vergelijking is, als we aannemen dat de rotatie ω constant in de tijd is,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}^*} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}^*} = 0 \Rightarrow m\left(\ddot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*) + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}^*\right) = 0.$$
(4.21)

Gelukkig is dit precies vergelijking (4.15) die we eerder hadden afgeleid.

4.1 Het aardoppervlak als roterend stelsel

Een voor de hand liggend geval voor een roterend stelsel is dat van een waarnemer op het oppervlak van de aarde. Wat is het effect van (4.15) voor zo'n waarnemer? De bewegingsvergelijking zal natuurlijk zijn:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} - 2m\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\dot{\boldsymbol{r}}\right) - m\boldsymbol{\omega}\wedge\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{r}\right)$$
(4.22)

Als we een object nemen dat stilstaat, en dus de tweede term weg valt, is het eerste effect dat de valversnelling niet \boldsymbol{g} , maar $\boldsymbol{g}^* = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r})$ is. De tweede term staat loodrecht op de rotatieas en heeft als grootte $\omega^2 r \sin(\theta)$ waar θ , de *co-latitude*, de hoek is tussen de as van zuid- naar noordpool en de positie \boldsymbol{r} . De verticale component van deze vector, $g_v^* = \boldsymbol{g} - \omega^2 r \sin^2 \theta$ zorgt ervoor dat objecten op de evenaar 3.5 per-mille lichter zijn – in werkelijkheid is dit 5.3 per-mille, omdat de aarde geen perfecte bolvorm heeft. De horizontale component wijst naar het zuiden (noorden) op het noordelijk (zuidelijk) halfrond (in de richting van de evenaar dus) en heeft een grootte $g_h^* = \omega^2 r \sin \theta \cos \theta$ en zorgt ervoor dat een loodlijn niet precies naar het centrum van de aarde wijzen, maar in plaats daarvan afwijken naar het zuiden (noorden) op het noordelijk (zuidelijk) halfrond. De uitwijking ten opzichte van verticaal is gegeven door $\alpha \approx g_h^*/g_v^* \approx \frac{\omega^2 r}{g} \sin \theta \cos \theta$. Als we nu een vrij vallend object bekijken, dan is het handig om een coördinaten-

Als we nu een vrij vallend object bekijken, dan is het handig om een coördinatensysteem als volgt te kiezen: $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ wijst naar het oosten, $\hat{\boldsymbol{e}}_y$ naar het noorden, en $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ verticaal omhoog (verticaal is gedefinieerd als 'tegen de richting van \boldsymbol{g}^*). In deze coördinaten is de hoeksnelheid van de aarde $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega \sin \theta, \omega \cos \theta)$, en de zwaartekrachtsversnelling $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$. De beginvoorwaarden van het probleem zijn $\boldsymbol{r}(0) = (0, 0, h); \dot{\boldsymbol{r}}(0) =$ (0, 0, 0). Omdat $\boldsymbol{\omega}$ klein is, kunnen we het probleem ontwikkelen in ordes van $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{r}(t;\omega) = \boldsymbol{r}_0(t) + \omega \boldsymbol{r}_1(t) + \omega^2 \boldsymbol{r}_2(t) + \dots$$
(4.23)

waar \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}_1 , ... niet van ω zullen afhangen. Dit kunnen we terug invullen in de bewegingsvergelijking (4.22):

$$m\left(\ddot{\boldsymbol{r}}_{0}+\omega\ddot{\boldsymbol{r}}_{1}+\mathcal{O}(\omega^{2})\right)=m\boldsymbol{g}-2m\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\left(\dot{\boldsymbol{r}}_{0}+\omega\dot{\boldsymbol{r}}_{1}+\mathcal{O}(\omega^{2})\right)\right)-m\boldsymbol{\omega}\wedge\left(\boldsymbol{\omega}\wedge\left(\boldsymbol{r}_{0}+\mathcal{O}(\omega)\right)\right)$$
(4.24)

Als we nu de termen van dezelfde orde in ω bij elkaar voegen en aan elkaar gelijk stellen, dan vinden we:

$$\mathcal{O}(\omega^0): \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_0 \quad = \boldsymbol{g} \tag{4.25}$$

$$\mathcal{O}(\omega^1): \quad \omega \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}_0 \tag{4.26}$$

$$\mathcal{O}(\omega^2): \quad \cdots \qquad (4.27)$$

De laagste orde benadering is (niet verbazingwekkend) gewoon een verticale valbeweging. Als we dit nu invullen in de eerste orde benadering, dan vinden we een bijdrage van de Coriolis kracht:

$$\omega \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -2\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{g}t; \tag{4.28}$$

In het gekozen coördinatenstelsel levert dit op dat $\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = 2gt \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x$, en dus (gegeven de beginvoorwaarden) $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = gt^2 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x$. Als we dit combineren met de laagste orde en de beginvoorwaarden, dan vinden we

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} \omega g t^2 \sin \theta \\ 0 \\ -gt \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \omega g t^3 \sin \theta \\ 0 \\ h - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}; \quad (4.29)$$

De verticale beweging van het vallend object is niet veranderd, maar er is nu ook en horizontale beweging naar het oosten ten opzichte van het punt waar het object is losgelaten. Als termen van orde $\mathcal{O}(\omega^2)$ worden meegenomen dan is er een bijdrage van de centrifugaal kracht die voor een afwijking in de richting van de evenaar zal zorgen. In de praktijk is (voor de aarde) het eerste orde effect al erg klein: voor $\theta = \pi/4$, als iets van 100m hoogte valt, is de afwijking naar het oosten maar 45mm. Het feit dat de afwijking naar het oosten is, en niet naar het westen is makkelijk te zien (vanuit het gezichtspunt van een waarnemer in een inertiaal stelsel!) door te kijken naar het behoud van impulsmoment: het object heeft een niet-nul impulsmoment want op het moment van loslaten draait het mee met het oppervlak in de richting van het oosten. Als het object valt, neemt de afstand ten opzichte van het centrum van de aarde af, dus om het impulsmoment te behouden zal de hoeksnelheid groter moeten worden. Het object zal dus 'vooruit' gaan lopen ten opzicht van het oppervlak, en dus naar het oosten bewegen.

4.2 Beweging in een magnetisch veld; Larmor effect (G5.9)

Een deeltje met lading q dat beweegt met snelheid v in een magnetisch veld B(r) ondervindt een kracht evenredig met de snelheid en het magnetisch veld, loodrecht op de bewegingsrichting:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \tag{4.30}$$

Invullen in de wet van Newton geeft als bewegingsvergelijking

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \tag{4.31}$$

Het eerste dat opvalt is dat $\dot{\boldsymbol{v}}$ loodrecht op \boldsymbol{v} staat – het magnetisch veld verricht dus geen werk, en de kinetische energie is behouden want de grootte van \boldsymbol{v} is constant: $\dot{T} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$. Het tweede is dat deze vergelijking precies dezelfde vorm heeft als (4.11), als we $\dot{\boldsymbol{r}}^* = 0$ en $\boldsymbol{\omega} = q/m\boldsymbol{B}$ kiezen. De grootte van $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}$ staat bekend als de *cyclotron-frequentie*. Als het magneetveld homogeen en constant is, kan de conclusie worden getrokken dat ten opzichte van het stelsel dat rondom de richting van het magneetveld draait het deeltje een beweging maakt met een constante snelheid langs het magneetveld. Het deeltje volgt dus het pad van een helix. De straal van de helix is gegeven door

$$r = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mv_{\perp}}{qB} \tag{4.32}$$

waar v_{\perp} de component van \boldsymbol{v} loodrecht op het magneetveld \boldsymbol{B} is.

Voor deze beweging is het impulsmomentum niet langer behouden, immers

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{r} = q/c\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{r} \neq 0$$
(4.33)

maar er is nog wel iets van te maken door op te merken dat de rechterkant loodrecht op B staat, dus als we het product met B nemen vinden we wel een behouden grootheid:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B}\right) = 0\tag{4.34}$$

Het zal later aan de orde komen dat behouden grootheden gerelateerd zijn met symmetrieën van het systeem, en in dit geval wordt de rotatie symmetrie van het systeem (gedeeltelijk) gebroken door het magneetveld: het systeem is alleen nog maar symmetrisch onder rotaties rond de richting van het magneetveld, in plaats van alle mogelijke rotaties.

Om het iets realistischer (en moeilijker) te maken, bekijken we een deeltje met electrische lading q dat in een baan rond een punt met lading -q' beweegt, in combinatie met een (zwak) magnetisch veld **B**. De bewegingsvergelijking wordt dan:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} + q\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{B}$$
(4.35)

met $k = qq'/4\pi\epsilon_0$. We hebben gezien dat zonder het elektrische veld het deeltje ronddraait rond de richting van het magnetische veld. In dat geval is het dus makkelijker om de beweging te beschrijven in een coördinatenstelsel dat "meedraait" met het deeltje. Als we dat hier doen, i.e. we kiezen een stelsel dat ronddraait rondom de lading -q'met een nog nader te bepalen hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$. In dat stelsel vinden we:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}^* + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*) = -\frac{k}{mr^2}\hat{\boldsymbol{r}}^* + \frac{q}{m}\left(\dot{\boldsymbol{r}}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}^*\right) \wedge \boldsymbol{B}$$
(4.36)

We gebruiken nu het feit dat we $\boldsymbol{\omega}$ nog vrij kunnen kiezen. Het probleem wordt eenvoudiger als we kiezen voor $\boldsymbol{\omega} = -(q/2m)\boldsymbol{B}$ (merk op: dit is de *helft* van de cyclotron frequentie vanwege de factor twee in de Coriolis kracht!) want dan vallen de termen evenredig met $\dot{\boldsymbol{r}}^*$ weg, en is het resultaat:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}^* = -\frac{k}{mr^2}\hat{\boldsymbol{r}}^* - \left(\frac{q}{2m}\right)^2 \boldsymbol{B} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{r}^*)$$
(4.37)

Als we de tweede term zouden kunnen verwaarlozen, dan staat hier niets anders dan de bewegingsvergelijking in een 1/r potentiaal, en is de oplossing bekend: ellipsen. We kunnen de tweede term verwaarlozen als het magneetveld voldoende zwak is, i.e. als

$$\omega^2 = \left(\frac{qB}{2m}\right)^2 \ll \frac{k}{mr^3} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 mr^3} \approx \omega_0^2,\tag{4.38}$$

waar ω_0 de (gemiddelde) hoeksnelheid is van de beweging. In het *niet*-roterende stelsel is de beweging dus van de vorm van een ellips die langzaam (waar langzaam gedefinieerd is als (4.38)), ronddraait met snelheid ω . Dit effect is bekend als het *Larmor* effect, en de hoeksnelheid van de precessie van de ellips is de *Larmor frequentie*:

$$\omega_L = \frac{qB}{2m} \tag{4.39}$$

Een bekend voorbeeld hiervan in de praktijk is het Zeeman effect: de spectra van atomen in een (zwak) magneet veld schuiven op ten opzichte van de situatie zonder magneetveld. In het geval dat de benadering (4.38) niet goed genoeg is, kan de beweging erg ingewikkeld worden.

Het Larmor effect is een voorbeeld van een algemeen fenomeen: het effect van een (kleine) verstoring op een roterend systeem is dat het impulsmoment gaat ronddraaien. Dit is eigenlijk niets anders dan (1.29).

Hoofdstuk 5 Variatie rekening (G2:1-5)

We hebben gezien dat met behulp van de Lagrangiaan we een hoop problemen makkelijk(er) kunnen oplossen. Er is echter een hele categorie van problemen die zo anders zijn, dat er wat nieuw gereedschap nodig is. Een voorbeeld is de prijsvraag die op nieuwjaarsdag 1697 werd gesteld door Bernoulli: welke curve die 'start' (S) en 'finish' (F) aan elkaar verbindt, is het snelste af te leggen voor een rollende (zonder wrijving) bal in een homogeen zwaartekrachtveld? Deze vraag staat bekend als het 'brachistochrone' (korste tijd) probleem. De tijd die hiervoor nodig is, is gegeven door:

$$T = \int_{S}^{F} \frac{ds}{v} \tag{5.1}$$

Als z(s) het verschil in hoogte ten opzichte van de 'start' is op afstand s gemeten langs de curve, dan kan het behoud van energie gebruikt worden om de snelheid, v(s), op dat punt te bepalen:

$$\frac{1}{2}mv^2(s) = mgz(s) \tag{5.2}$$

Vervolgens kunnen we, omdat $ds^2 = dx^2 + dz^2$, ds vervangen door

$$ds = \sqrt{1 + (x'(z))^2} dz$$
 (5.3)

waar x' = dx/dz. Voor een curve x(z) is de tijd dus gegeven door de volgende functionaal T, een afbeelding van curves naar getallen, gedefinieerd als:

$$T[x(z)] = \int_{S}^{F} \sqrt{\frac{1 + (x'(z))^{2}}{2gz}} dz$$
(5.4)

Het probleem dat nog over is het vinden van het minimum van de functionaal T[x(z)].

5.1 Variatie Rekening

Om dit probleem op te lossen is het goed om eerst het volgende algemene probleem op te lossen: voor welke functie $f(y, \dot{y}, t)$, die afhangt van y(t), $\dot{y}(t)$ en t, met $y(t_0) = y_0$



Figuur 5.1: Brachistochrone probleem: welk pad zorgt ervoor dat een bal die van S naar F rolt zo snel mogelijk aankomt bij F?

en $y(t_1) = y_1$, is de volgende integraal minimaal:

$$J[y, \dot{y}] = \int_{t_0}^{t_1} f(y(t), \dot{y}(t), t) dt$$
(5.5)

De grootheid J wordt een functionaal genoemd: gegeven een functie y(t) hoort een getal $J[y, \dot{y}, t]$. Dit probleem is te herformuleren om het herkenbaarder (en dus oplosbaarder) te maken. Laten we een verzameling paden nemen, een zogenaamde *schaar* van functies, en laten we deze zo kiezen dat we de individuele paden kunnen labellen met een (continue) parameter α :

$$y(t, \alpha) = y(t, 0) + \alpha \eta(t); \quad \dot{y}(t, \alpha) = \dot{y}(t, 0) + \alpha \dot{\eta}(t)$$
 (5.6)

Voor deze collectie hebben we nu dat de functionaal een gewone *functie* is van α (i.e. voor elke waarde van α is $J(\alpha)$ een getal):

$$J(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} f(y(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), t) dt$$
 (5.7)

Omdat dit nu een gewone functie is, kunnen we nu het minimum (als functie van α !) bepalen door te eisen dat de afgeleide van $J(\alpha)$ naar α moeten verdwijnen:

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}|_{\alpha=0} = 0 \tag{5.8}$$

Als dit inderdaad het geval is, dan zal de curve die overeenkomt met $\alpha = 0$, namelijk y(t, 0) de functionaal minimaliseren. De volgende stap is om deze afgeleide te bepalen. Laten we aannemen dat we de volgorde van het differentiëren naar α en het integreren

over t kunnen omdraaien. Dan vinden we:

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\alpha} \left[f\left(y(t,\alpha), \dot{y}(t,\alpha), t\right) \right] dt$$
(5.9)

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right] dt$$
(5.10)

Nu is \dot{y} geen onafhankelijke grootheid – het zou beter zijn als we $\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha}$ zouden kunnen vervangen door eg. $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$. Dit kan als we de tweede term onder de loep nemen: door partieel te integreren vinden we namelijk:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \alpha} dt$$
(5.11)

$$= \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dt \qquad (5.12)$$

Omdat we willen dat op $t = t_0$ en op $t = t_1$ alle curves door hetzelfde punt gaan, i.e. voor alle α hebben we $y(t_0, \alpha) = y_0$ en $y(t_1, \alpha) = y_1$, verdwijnt de eerste term. Immers $y(t_0, \alpha)$, en $y(t_1, \alpha)$ hangen niet van α af! Als we dit gebruiken, dan vinden we uiteindelijk dat:

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dt$$
(5.13)

Als we nu de variatie van y ten gevolge van een variatie $d\alpha$ noteren als:

$$\delta y \equiv \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha \tag{5.14}$$

dan kunnen we de variatie van J schrijven als:

$$\delta J \equiv \frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right] \delta y dt$$
(5.15)

Aangezien we de variatie δy vrij kunnen kiezen, is de enige mogelijkheid om altijd $\delta J = 0$ te krijgen voor elke mogelijk variatie δy dat de hele factor voor δy verdwijnt, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{5.16}$$

Deze vergelijking staat in deze context bekend als de Euler-Lagrange vergelijking.

5.2 Het Brachistochrone Probleem

Om weer terug te komen bij het brachistochrone probleem, de oplossing x(z) voor het snelste pad zal dus moeten voldoen aan:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{2gz}}\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} = C\sqrt{2gz}$$
(5.17)

Dit kan herschreven worden als:

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{2gC^2z}{1 - 2gC^2z}}$$
(5.18)

De oplossing kan gevonden worden door de substitutie $2gC^2z \rightarrow \sin^2\theta$. Dit levert op (hint: vermenigvuldig (5.18) met $dz/d\theta$) dat:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sin^2 \theta}{gC^2} \tag{5.19}$$

Ofwel:

$$x = x_{\rm S} + \frac{1}{2gC^2} \left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$z = z_{\rm S} + \frac{1}{2gC^2}\sin^2\theta \qquad (5.20)$$

waar gebruikt is dat de curve door $(z_{\rm S}, x_{\rm S})$ moet gaan, i.e. $x(\theta = 0) = x_{\rm S}$. De eis dat deze curve door het eindpunt $(z_{\rm F}, x_{\rm F})$ loopt bepaalt de waarde van C. Het is niet moeilijk om te laten zien dat voor $\theta = 0$ de curve verticaal omlaag loopt, en precies horizontaal is bij de finish. Deze curve is precies een *cycloide*: de beweging van een punt op de rand van een rollende cirkel.

5.3 Het principe van Hamilton

Zoals reeds opgemerkt vormt tot op vandaag de Langrangiaan het uitgangspunt voor de beschrijving van de dynamica van de meest uiteenlopende systemen. Bij de verdere uitbouw van de theorie speelt het *principe van Hamilton* een centrale rol. Dit principe vloeit voort uit het feit dat (5.16) precies de Lagrange vergelijkingen zijn indien we $f = L(q, \dot{q})$ substitueren! We kunnen dus concluderen dat het pad q(t), van een systeem dat door een Lagrangiaan $L(q, \dot{q}, t)$ wordt beschreven, precies het pad is waarvoor de actie, S, extreem is:

$$S[q,\dot{q}] = \int L(q,\dot{q})dt \tag{5.21}$$

Tussen de n gegeven begin- en eindposities bepalen de tweede-orde differentiaalvergelijkingen (5.16), de vergelijkingen van Euler-Lagrange, inderdaad eenduidig een weg van beginpunt naar eindpunt in de configuratieruimte. Het principe van Hamilton is dus inderdaad equivalent met de vergelijkingen van Lagrange.

Ook is op te merken dat het principe van Hamilton niet afhangt van de keuze van coördinatensysteem, zolang de Lagrangiaan een scalaire grootheid is. Aangezien inderdaad de kinetische en potentiële energie beiden scalair zijn, is dit inderdaad het geval. Dit is ook consistent met het gedrag onder de coördinatentransformaties (3.70).



Figuur 5.2: Principe van Fermat: een brekende lichtstraal volgt een zodanig pad dat het tijdsverloop, en dus ook het aantal golflengten, minimaal is.

Opmerking

Het principe van Hamilton was in zekere zin geïnspireerd door het principe van Fermat in de geometrische optica. Dit houdt in dat de gang van de lichtstraal zodanig is dat de tijd die het licht erover doet om het pad tussen twee gegeven punten af te leggen minimaal is. Er zijn verschillende variatieprincipes nauw verwant met het principe van Hamilton, zoals o.a. het "principe van de kleinste werking". Voor details verwijzen we geïnteresseerden naar Goldstein, paragraaf 8.6. Het spreekt voor zich dat dergelijke variatieprincipes aanleiding zijn geweest tot filosofische bespiegelingen.

5.4 Lagrange multiplicatoren

Eén van de aspecten van Lagrange vergelijking (3.21) is dat we problemen kunnen schrijven in termen van de onafhankelijke vrijheidsgraden, en niet hoeven te referenen aan beperkingskrachten. Maar soms is het juist handig om de beperkingskrachten te kennen, al was het alleen maar te weten wanneer eg. de ophanging van een slinger zal breken.

Een elegante methode zou zijn als de kinematische relatie(s) gewoon één van de Lagrange vergelijkingen zou(den) zijn. Dit is niet zo'n vreemd idee: voor een systeem met à priori N vrijheidsgraden, en n relaties kan beschreven worden door óf N - n gegeneraliseerde coordinaten, met N-n Lagrange vergelijkingen, óf door N coordinaten, met N - n Lagrange vergelijkingen, en n kinematische relaties.

Dus als we *n* kinematische relatie van de vorm $f_k(q_1, \ldots, q_N)$ hebben, dan kunnen er *n* extra coordinaten, λ_i , worden ingevoerd, wat *n* extra (Lagrange) vergelijkingen oplevert, die ervoor gebruikt kunnen worden om ervoor te zorgen dat er voldaan wordt aan *n* kinematische relaties, i.e. $f_k(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N) = 0$.

Dit kunnen we bereiken door de integraal van (5.21) uit te breiden tot:

$$S[q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N] = \int dt \left(L(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, t) + \lambda_j f_j(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) \right)$$
(5.22)

Vanwege de vorm van deze vergelijking worden de extra coordinaten λ_j ook wel de *multiplicatoren van Lagrange* genoemd. Als we nu eisen dat S niet verandert als we de

HOOFDSTUK 5. VARIATIE REKENING (G2:1-5)

 λ_j (onafhankelijk van de q_i) varieren, dan volgt onmiddelijk dat

$$f_j(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = 0; \quad j = 1, \dots, n.$$
 (5.23)

De vraag is wat er nu gebeurt met de overige Lagrange vergelijkingen. Immers, onder een variatie van q_i zullen nu ook de termen met f_j veranderen. Dit resulteert in een variatie δS die wordt gegeven door:

$$\delta S = \int dt \delta q_i \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda_j \left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right) \right)$$
(5.24)

De eis dat δS gelijk aan nul is voor alle mogelijke δq_i betekent nu dat:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{5.25}$$

$$Q_i = -\lambda_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right)$$
(5.26)

Deze Q_i zijn precies van de vorm van (3.23) en kunnen als gegeneraliseerde krachten worden geïnterpreteerd. In het geval dat f_j niet afhangt van \dot{q}_i , dan komt dit ook precies overeen met (2.22).

Nog eens de slinger

Laten we de Lagrange multiplicatoren illustreren met de al bekende slinger. In dit geval kunnen we de positie van de punt massa beschrijven met behulp van de gegeneraliseerde coordinaten (r, θ) . De Lagrangiaan, inclusief de beperking dat de afstand tot de oorsprong wordt gegeven door de lengte l van de slinger, wordt dan:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^{2} + r^{2}\dot{\theta}^{2}\right) + mgr\left(1 - \cos\theta\right) + \lambda\left(r^{2} - l^{2}\right)$$
(5.27)

De Lagrange vergelijking voor λ is triviaal:

$$r^2 - l^2 = 0 \tag{5.28}$$

De vergelijking voor r en θ zijn:

$$m\ddot{r} - \left(mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + 2\lambda r\right) = 0 \tag{5.29}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^{2}\dot{\theta}\right) - mgr\sin\theta = 0 \qquad (5.30)$$

Als we nu (5.28) gebruiken, dan zien we dat r = l, en dus $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Invullen hiervan levert op:

$$ml\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + 2\lambda l = 0 \tag{5.31}$$

$$ml^2\theta - mgl\sin\theta = 0 \tag{5.32}$$

 $\mathbf{48}$

5.5 Een interpretatie van de Lagrangiaan...

Het volgende stukje komt uit de 'Feynman Lectures on Physics'. Laten we eens bekijken hoe een deeltje beweegt in een (homogeen) zwaartekrachtveld.

Om dit correct te doen, zullen we moeten nadenken over wat er gebeurt met een deeltje in zo'n veld. Eén van de aspecten van de algemene relativiteitstheorie van Einstein is dat een waarnemer geen verschil kan meten tussen een (homogeen) zwaartekracht veld, en een systeem dat versneld wordt. Dus iemand in een raket die met g versnelt, zal precies hetzelfde voelen, en dezelfde bewegingen zien ten opzichte van zijn referentiestelsel als iemand op het oppervlak van de aarde (als we even geen rekening houden met het feit dat de aarde ook nog eens om zijn as draait, en er dus ook nog een Coriolisen centrifugaal kracht zijn).

Wat betekent het nu als een raket versneld? Om dit te beredeneren, kijken we naar twee klokken, één 'bovenin' de raket, en één 'onderin'. Stel nu dat de bovenste klok met een bepaalde frequentie ω_0 lichtflitsen produceert, die naar de onderste klok lopen. Wat is dan de frequentie waarmee deze aankomen bij die klok? Dit zal (natuurlijk) afhangen van de relatieve snelheid tussen de twee klokken: in de tijd die de lichtpuls nodig heeft om bij de onderste klok aan te komen, beweegt deze, vanwege de versnelling, sneller dan toen de bovenste klok zijn signaal uitzond. Als we aannemen dat afstand L tussen de twee klokken niet al te groot is, dan zal dit verschil in snelheid gegeven worden door:

$$\Delta v = a\Delta t \approx a \frac{L}{c} \tag{5.33}$$

waar a de versnelling van de raket is. Nu kunnen we dit invullen in de vergelijking voor het relativistische Doppler effect:

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{1 + v/c}{\sqrt{1 + (v/c)^2}} \right) \tag{5.34}$$

waar ω de frequentie is waarmee de flitsen aankomen bij de onderste klok. Als nu *a* niet te groot is, dan kunnen we dit benaderen voor voor kleine waarden van v/c = La/c:

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \right) = \omega_0 \left(1 + \frac{La}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{La}{c^2}\right)^2 \right)$$
(5.35)

De conclusie is dat voor een waarnemer 'onderin' een raket met lengte L die versneld wordt met a, een klok 'bovenin' sneller zal lopen met een factor La/c^2 .

Volgens de algemene relativiteitstheorie zal hetzelfde gebeuren in een zwaartekrachts veld: hoe hoger boven het aardoppervlak, hoe sneller een klok zal lopen. Dit is inderdaad experimenteel gemeten door twee atoomklokken te nemen, één die op de grond blijft, en één die in een vliegtuig wordt meegenomen en dus een tijd op een aantal kilometers boven de aarde rondvliegt.

HOOFDSTUK 5. VARIATIE REKENING (G2:1-5)

Als we nu (5.35) gebruiken voor een zwaartekrachtsveld, dan zien we dat

$$\omega(\mathbf{r}) \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}{c^2} \right) = \omega_0 \left(1 + \frac{V(\mathbf{r})}{mc^2} \right)$$
(5.36)

Een andere manier om ditzelfde concept te zien is het behoud van energie: als een foton met een gegeven energie 'omlaag' in een zwaartekrachtsput 'valt', dan zal de potentiële energie afnemen, en de kinetische energie toenemen. Omdat we weten dat de frequentie van een foton evenredig is met de energie, zal dus ook de frequentie toenemen. Hetzelfde zal gebeuren voor een foton dat 'omhoog' uit een zwaartekrachtsput moet klimmen: het zal potentiële energie winnen, en de frequentie zal lager worden. Deze conclusies zijn consistent met (5.34)!

Als we nu naar bewegingen kijken, dan moeten we natuurlijk ook rekening houden met het feit dat als een object een snelheid krijgt, we te maken krijgen met het feit dat als een object beweegt ten opzichte van een waarnemer, deze de conclusie trekt dat de klok van het object langzamer zal lopen:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{5.37}$$

Voor snelheden klein ten opzichte van de lichtsnelheid, kunnen we dit benaderen door

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right)$$
(5.38)

Dit effect kunnen we ook schrijven in termen van de kinetische energie:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{T}{mc^2} \right) \tag{5.39}$$

Als we nu beide effecten combineren, dan vinden we dat:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{T}{mc^2} \right) \left(1 + \frac{V}{mc^2} \right) \approx \omega_0 \left(1 - \frac{T - V}{mc^2} \right) = \omega_0 \left(1 - \frac{L}{mc^2} \right)$$
(5.40)

Wat betekent dit nu precies? We hebben gezien dat een bewegingen tussen twee punten dat pad zal kiezen waarvoor de actie S, de integraal van de Lagrangiaan, minimaal is. Vanwege (5.40) kunnen we tot de conclusie komen dat dat pad correspondeert met de maximale tijd die je erover kan doen (in je eigen ruststelsel) om van het ene punt naar het andere te lopen!

Slotopmerking

Opgemerkt kan worden dat aan de hand van de tot nu toe behandelde theorie men zich verschillende voorstellingen kan maken van "hoe de natuur in zijn werk gaat".

Ten eerste is er de krachtwet van Newton. Een voorwerp "meet" de afstanden tot andere voorwerpen die er kracht op uitoefenen (bijvoorbeeld de Coulomb kracht), telt de krachten vectorieel op, kent zijn eigen massa en versnelt overeenkomstig de krachtwet. Vraag is hoe het voorwerp die afstanden bepaalt.

Ten tweede is er de voorstelling van het potentiaalveld. Een voorwerp hoeft slechts het potentiaalveld in zijn onmiddellijke omgeving te "voelen" en zal de snelheid aanpassen in de richting waarin de potentiaal het sterkst afneemt. Dit kan men zich gemakkelijk voorstellen aan de hand van een bal die rolt over een hobbelig oppervlak. Maar wat is de aard van het potentiaalveld? Men zou kunnen zeggen dat de veldkwanta (fotonen, W en Z bosonen, gluonen (indirect) daarin wat meer duidelijkheid hebben gebracht sinds Newton. Gravitonen (of gravitatiegolven) zijn nog niet aangetoond.

Ten derde hebben we nu de voorstelling van de actie-integraal. Het voorwerp kiest geen weg, maar neemt ze allemaal tegelijk. Maar de bijdragen van de meeste wegen tot het eindresultaat doven elkaar uit; alleen die rondom de weg met stationaire waarde van de actie-integraal blijven over. Dat er meerdere wegen bijdragen manifesteert zich pas als de actie-integraal zo klein wordt dat ze met slechts een klein aantal oscillaties van de golf correspondeert, dat wil zeggen vergelijkbaar met de constante van Planck.

Welke van deze drie voorstellingen is nu de ware? Feynman heeft er in verschillende populaire voordrachten in de zestiger jaren op gewezen dat deze vraag zinloos is. Immers de drie voorstellingen zijn wiskundig equivalent. Zou een experiment aantonen dat één ervan niet juist is, dan geldt dat voor alle. Wel kan het zo zijn dat een bepaalde voorstelling zich beter leent tot aanpassing of uitbreiding van de theorie. Zo is het werken met actie-integralen een algemeen uitgangspunt voor theorieën van deeltjes en velden en de meest elegante uitbreiding naar h ongelijk nul.

Hoofdstuk 6

Lagrange en symmetriën (G2:6-7, G7:9)

6.1 Gegeneraliseerde ("canonieke") impulsen

Het is gebleken dat de impuls van een deeltje

$$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}},\tag{6.1}$$

die behalve kinetische informatie, door \dot{r} , ook dynamische informatie bevat via de massa m, een fundamentelere grootheid is dan alleen de snelheid. We zijn gewend de impuls direct op te schrijven door (6.1) toe te passen. Maar in het algemeen kunnen gegeneraliseerde coördinaten q_i heel anders zijn dan de gewone cartesische coördinaten. De impulsen die moeten worden ingevoerd verschillen dan niet altijd slechts een evenredigheidsfactor, massa, van de gegeneraliseerde snelheden \dot{q}_i . Voor een systematische opbouw van de theorie moet er een algemeen geldende definitie van de gegeneraliseerde impulsen komen. Als we kijken naar de vergelijkingen van Lagrange (3.21), dan ligt de definitie

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{6.2}$$

voor de hand. Als namelijk de q_i de gewone cartesische coördinaten zijn, valt deze definitie samen met (6.1). Met deze definitie van de gegeneraliseerde momenta kan de Lagrange vergelijking (3.21) geschreven worden als

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{6.3}$$

Het is onmiddellijk duidelijk dat als een bepaalde gegeneraliseerde coördinaat q_i niet expliciet in L voorkomt, de bijbehorende Lagrange vergelijking erg simpel is: de bijbehorende gegeneraliseerde impuls p_i is een constante van de beweging. In zo'n geval wordt de coördinaat q_i cyclisch genoemd. Ten derde valt op te merken dat, als q_i een hoek is, de bijbehorende p_i de dimensie heeft van een impulsmoment, waarvoor behoudswetten vaak een grote rol spelen.

Twee-dimensionale slinger

Laten we dit formalisme proberen aan de hand van een twee-dimensionale slinger. In dit geval hebben we een massa die beweegt in een potentiaal $V(\mathbf{r}) = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$. De Lagrangiaan is dus gegeven door:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}$$
(6.4)

Verder moet er voldaan worden aan de kinematische relatie $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - l^2 = 0$. Dit laatste suggereert het invoeren van de volgende (pool)-coördinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} l\sin\theta\cos\phi\\ l\sin\theta\sin\phi\\ -l\cos\theta \end{pmatrix}$$
(6.5)

(merk op: de hoek θ is net zo gedefinieerd als voor de één-dimensionale slinger, en is dus anders dan voor de gebuikelijke pool-coördinaten: – het is de hoek met de negatieve z-as, niet met de positieve z-as). In termen hiervan is de Lagrangiaan:

$$L(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \frac{ml^2}{2} \left[\dot{\theta}^2 + \left(\sin \theta \dot{\phi} \right)^2 \right] + mgl \cos \theta$$
(6.6)

Het is duidelijk dat de Lagrangiaan niet van ϕ afhangt, dus de daarbij behorende canonieke impuls, p_{ϕ} , is behouden:

$$p_{\phi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = const = L_z \tag{6.7}$$

Dit is precies de z-component van het impulsmoment! De Lagrange-vergelijking voor θ levert op:

$$\frac{d}{dt}\left(ml^{2}\dot{\theta}\right) - \left(ml^{2}\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^{2} - mgl\sin\theta\right) = 0$$
(6.8)

Als we nu het behoud van L_z gebruiken om $\dot{\phi}$ hieruit te elimineren, dan blijft over:

$$\ddot{\theta} = \frac{L_z^2}{m^2 l^4} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l} \sin\theta \tag{6.9}$$

In het geval dat $L_z = 0$ staat hier gewoon weer de bekende één-dimensionale slinger! In dit geval vinden we dat, vanwege (6.7), de beweging inderdaad tot een vlak met $\phi(t) = \phi_0 = \text{constant beperkt is}$

Een tweede speciale oplossing is het geval dat $\theta(t) = \theta_0$ constant is. In dat geval wordt (6.8):

$$0 = \frac{L_z^2}{m^2 l^4} \frac{\cos \theta_0}{\sin^3 \theta_0} - \frac{g}{l} \sin \theta_0$$
 (6.10)

ofwel, als we weer (6.7) gebruiken:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{l} \frac{1}{\cos \theta_0}.\tag{6.11}$$

Deze oplossing komt dus overeen met een slinger die met een constante verticale uitwijking en een constante hoeksnelheid rondjes draait rondom de verticaal.

6.2 Is een Lagrangiaan uniek?

We hebben gezien dat als we als Lagrangiaan kiezen L = T - V dat dan de vergelijkingen van Lagrange de bewegingswet van Newton opleveren. De vraag is nu of deze eis de Lagrangiaan uniek vastlegt, of dat er nog andere mogelijkheden zijn.

Een observatie is dat de Lagrangevergelijkingen homogeen in L zijn: als we de substitutie $L \rightarrow kL$ maken, dan verandert er niets. Dit wordt anders wanneer de quantummechanica een rol gaat spelen, want de constante van Planck zal hier de schaal zetten (meer hier over in een later hoofdstuk; hint: wat zijn de eenheden van de Lagrangiaan, en wat zijn de eenheden van de constante van Planck?).

De tweede mogelijkheid zijn veranderingen van de Lagrangiaan die niets "nieuws" bijdragen aan de bewegingsvergelijkingen. Dit zou betekenen dat deze bijdragen per definitie aan de Lagrange vergelijkingen zouden moeten voldoen. We zagen al zoiets gebeuren in het stukje over ijk invariantie van het electromagnetische veld. In dat geval was er geen unieke keuze mogelijk voor de Lagrangiaan, maar gelukkig waren de bewegingsvergelijkingen, voor alle equivalente keuzes, hetzelfde. Als we naar een Lagrangiaan van de volgende vorm kijken

$$L = \frac{d\Lambda(q_1, \dots, q_N, t)}{dt}$$
(6.12)

dan zijn de Lagrange vergelijkingen

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\Lambda}{dt} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d\Lambda}{dt} \right) =$$
(6.13)

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) =$$
(6.14)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_i \partial t} =$$
(6.15)

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_i \partial t} = 0$$
(6.16)

Het resultaat is dat het er niet toe doet wat $\Lambda(q_1, \ldots, q_N, t)$ is, want de bijdrage aan de Lagrange vergelijkingen is altijd nul. Dit betekent dat we altijd een term van deze vorm bij een Lagrangiaan kunnen optellen,

$$L \to L + \frac{d\Lambda(q_1, \dots, q_N, t)}{dt}$$
 (6.17)

zonder dat de Lagrangevergelijkingen veranderen. Zoals al eerder genoemd, een voorbeeld van het effect hiervan zijn zogenaamde *ijktransformaties* zoals voor het electromagnetische veld, zoals in sectie (3.2). Dit soort transformaties speelt een belangrijke rol in de moderne veldentheorie: ze vormen de basis voor het formuleren van een quantumveldentheorie. Er is een belangrijke connectie met het principe van Hamilton uit het vorige hoofdstuk, waar we keken naar het afleiden van de Lagrange vergelijkingen uit een minimizatie principe. In dat geval hielden we het begin en eind punt vast. Nu geeft de extra term $d\Lambda/dt$ alleen een bijdrage "aan de rand":

$$S[q,\dot{q}] = \int dt \left(L(q,\dot{q}) + \frac{d\Lambda(q,\dot{q})}{dt} \right)$$
(6.18)

$$= \int dt L(q, \dot{q}) + [\Lambda(q, \dot{q})]. \tag{6.19}$$

Omdat bij het afleiden van de Lagrange vergelijkingen door het vinden van het pad waarvoor (6.19) extreem is de eindpunten vast werden gehouden kan de tweede term in (6.19) dus *per constructie* geen invloed kunnen hebben: deze hangt namelijk alleen maar af van de waarden van Λ op de (vaste!) eindpunten van de beweging.

6.3 Infinitesimale transformaties en Noether's stelling

We hebben al gezien dat als een Lagrangiaan L niet van een gegeneraliseerde coördinaat afhangt dat het daarbij behorende gegeneraliseerde impuls een behouden grootheid is. Omdat behouden grootheden erg handig zijn bij het oplossen van bewegingsvergelijkingen, is het goed om te kijken of we dit iets algemener kunnen maken.

Laten we beginnen met op te merken dat als de Lagrangiaan L niet afhangt van q_i , dat dan natuurlijk L niet verandert onder de transformatie $q_i \rightarrow Q_i = q_i + \epsilon$. Laten we dit nu iets minder strikt maken, en kijken naar infinitesimale transformaties van de vorm:

$$Q_i = q_i + \epsilon s_i(q_1, \dots, q_n, t) \tag{6.20}$$

waar s_i afhangt van k parameters.

Onder deze transformatie verandert de Lagrangiaan als volgt:

$$L(Q_i, \dot{Q}_i) = L(q_i, \dot{q}_i) + \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} s_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{s}_k \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$
(6.21)

dus als de Lagrangiaan *invariant* is onder deze transformatie, dat wil zeggen dat $L(Q_i, \dot{Q}_i, t)$ dezelfde functionele vorm heeft als $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, dan moet wel

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} s_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{s}_k = 0 \tag{6.22}$$

Met behulp van de Lagrange vergelijkingen kunnen we de eerste term herschrijven en vinden we dat

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}s_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{s}_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}s_k\right) = 0$$
(6.23)

We hebben dus de volgende behouden grootheid gevonden:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} s_i = const \tag{6.24}$$

Omdat s_i van een aantal, zeg k, parameters af kan hangen, hebben we k verschillende bewegingsconstanten gevonden! Het feit dat symmetrieën resulteren in behouden grootheden (en visa-versa!) via (6.24) staat bekend als *de stelling van Noether*. Zelfs behouden grootheden als het behoud van elektrische lading zijn uiteindelijk terug te leiden tot een symmetrie, in dit geval de al eerder genoemde ijk-invariantie van het electromagnetische veld. Dit principe speelt een cruciale rol in de moderne natuurkunde.

Een voorbeeld: translaties en rotaties

Neem een systeem van N deeltjes met de Lagrangiaan

$$L = \frac{1}{2}m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 - V\left(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|\right)$$
(6.25)

Omdat de potentiaal alleen afhangt van de verschillen tussen vectoren is deze Lagrangiaan invariant onder een globale translatie van alle deeltjes, $\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i + \epsilon \mathbf{s}$:

$$L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) \to L(\boldsymbol{r}_i + \epsilon \boldsymbol{s}, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t) = L(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i, t)$$
(6.26)

Met behulp van de stelling van Noether kan de bijbehorende behouden grootheid bepaald worden:

$$\sum_{i} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{i}} \cdot \boldsymbol{s} = \sum_{i} \boldsymbol{p}_{i} \cdot \boldsymbol{s} \equiv \boldsymbol{P}_{\text{CM}} \cdot \boldsymbol{s}.$$
(6.27)

Dit is precies de zwaartepunts-impuls in de richting van de vector s. Omdat dit geldt voor elke s, moet $P_{\rm CM}$ behouden zijn. Let erop dat s door drie parameters wordt beschreven, en dat dit (dus) *drie* onafhankelijk behouden grootheden zijn.

Dit systeem heeft nog een symmetrie: de afstanden tussen de deeltjes, en de snelheden veranderen niet onder een rotatie rond een as \hat{n} . Voor een infinitesimale hoek ϵ kan deze transformatie geschreven worden als:

$$\boldsymbol{r}_i \to \boldsymbol{r}_i + \epsilon \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{r}_i$$
 (6.28)

De hierbij horende behouden grootheid is

$$\sum_{i} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_{i}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{r}_{i}) = \sum_{i} \boldsymbol{p}_{i} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{r}_{i}) = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \sum_{i} (\boldsymbol{r}_{i} \wedge \boldsymbol{p}_{i}) = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L}.$$
(6.29)

Dit is de component van het totale impulsmoment in de richting van de vector \hat{n} . Ook hier is het weer zo dat dit als dit geldt voor alle \hat{n} , dat dan dus L zelf behouden is.

6.4 Tijdsevolutie en de Hamiltoniaan

Misschien zijn we iets te strikt geweest tijdens het afleiden van de stelling van Noether. Immers, we hebben gezien dat een Lagrangiaan niet uniek is: er kan altijd een term worden toegevoegd:

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\Lambda(q, t)}{dt}$$
 (6.30)

en toch blijven de bewegingsvergelijkingen hetzelfde. Dat betekent dat we tijdens de afleiding van de stelling van Noether eigenlijk minder streng hadden kunnen zijn, en niet hadden hoeven te eisen dat de Lagrangiaan invariant is, maar dat de Lagrangiaan na de transformatie te schrijven is in de vorm van (6.30). Dat betekent dus dat het voldoende is om (6.22) te vervangen door:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} s_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{s}_k = \frac{d\Lambda}{dt}.$$
(6.31)

Als we nu vanaf hier dezelfde weg volgens als eerder, dan vinden we als behouden grootheid

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} s_i - \Lambda = const \tag{6.32}$$

Het meest voor de hand liggende voorbeeld is de evolutie van een systeem in de tijd:

$$q_i \rightarrow q_i + \epsilon \dot{q}_i.$$
 (6.33)

Als de Lagrangiaan niet expliciet van de tijd afhangt, $\partial L/\partial t = 0$, dan zou het systeem invariant moeten zijn, en transformeert de Lagrangiaan als:

$$L \rightarrow L + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$
 (6.34)

$$= L + \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right)$$
(6.35)

$$= L + \epsilon \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}\right) \tag{6.36}$$

$$= L + \epsilon \frac{dL}{dt} \tag{6.37}$$

Dit betekent dus dat in dit geval de stelling van Noether (6.31) de volgende vergelijking oplevert:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = \frac{d}{dt}\left(p\dot{q} - L\right) = 0 \tag{6.38}$$

waar de definitie van de canonieke impuls gebruikt is. Deze combinatie staat bekend als de Hamiltoniaan h:

$$h = p_i \dot{q}_i - L \tag{6.39}$$

Dat dit een behouden grootheid is kan expliciet gecontroleerd worden:

$$\frac{dh}{dt} = \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$
(6.40)

dus inderdaad voor een Lagrangiaan die niet expliciet van de tijd afhangt, $\partial L/\partial t = 0$, is de Hamiltoniaan een behouden grootheid. In het geval dat de kinetische energie kwadratisch is in \dot{q} , en de potentiële energie niet van \dot{q} afhangt, vinden we dat de Hamiltoniaan gelijk is aan de totale energie:

$$T = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \Leftrightarrow p_i\dot{q}_i = 2T \Leftrightarrow H = T + V = E$$
(6.41)

Ofwel, het behoud van energie is af te leiden uit de eigenschappen van tijdstranslaties! Opmerking

Door herhaling van infinitesimale transformaties kan men eindige transformaties opbouwen. Samen vormen alle door de constanten van de beweging gegenereerde transformaties een (product)groep van transformaties die L invariant laten. Dit heet de symmetriegroep van L. In het laatste voorbeeld de groep van orthogonale transformaties (of van orthogonale matrices wat op hetzelfde neerkomt) in n dimensies, de groep O(n). In de quantummechanica volgen veel eigenschappen van bijvoorbeeld energiespectra van atomen, kernen of hadronen reeds uit de symmetrie-groep van de Hamiltoniaan voor die systemen. De groepentheorie leidt dan tot het toekennen van quantumgetallen aan atomaire of kerntoestanden of aan elementaire deeltjes.

6.5 Relativistische Mechanica (G7.9)

Soms is de invariantie onder een symmetrie alles wat nodig is om een Lagrangiaan te construeren. Als voorbeeld, neem een vrij bewegend, relativistisch deeltje. Een natuurlijke "invariant" voor zo'n deeltje, is de eigentijd, i.e. de tijd zoals gemeten in het rustsysteem van dat deeltje. Merk op dat deze keuze ook overeenkomt met de discussie van sectie (5.5). Als voor een waarnemer dit deeltje een snelheid \dot{r} heeft, dan zal het tijdens een interval dt een afstand $dr = \dot{r}dt$ afleggen. De bijbehorende eigentijd interval is

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2} dt \tag{6.42}$$

Alle waarnemers zullen het eens zijn over $d\tau$, dus de term voor dt is een ansatz voor een Lagrangiaan. Maar deze term is dimensieloos, terwijl de Lagrangiaan de dimensie van energie heeft, dus er moet nog een term worden gevonden om dit op te lossen. Dit leidt tot de Lagrangiaan:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{c}\right)^2} \tag{6.43}$$

Het canonieke momentum is gedefinieerd als:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{m \dot{\boldsymbol{r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c}\right)^2}} \tag{6.44}$$

Omdat de Lagrangiaan niet expliciet van de tijd afhangt, is de Hamiltoniaan nog steeds een behouden grootheid. Maar omdat de kinetische energie geen kwadratische functie van \dot{r} is, is het à priori niet duidelijk of de Hamiltoniaan wel de energie is:

$$h = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L \tag{6.45}$$

Als we dit uitschrijven dan vinden we dat dit inderdaad de energie van een relativistich deeltje is:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{r}}{c}\right)^2}} \tag{6.46}$$

Het is simpel om na te gaan dat de Einstein relatie $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ inderdaad hieruit volgt.

De Lagrangiaan (6.43) is die van een deeltje dat vrij beweegt. Het introduceren van een potentiaal in dit probleem is niet zo simpel als het lijkt, want deze zal ook invariant moeten zijn onder Lorentz transformaties. Gelukkig is dat het geval voor de Maxwell vergelijkingen, we zouden dus de potentiaal van (3.52) moeten kunnen hergebruiken. Dit betekent dat de volgende Lagrangiaan een relativistisch deeltje in een electro-magnetisch veld zal beschrijven:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c}\right)^2 - e\left(\phi(\boldsymbol{r}) - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)}$$
(6.47)

Het afleiden van de Euler-Lagrange vergelijkingen voor deze Lagrangiaan, en het laten zien dat deze inderdaad Lorentz-invariant zijn is een nuttige exercitie.

Hoofdstuk 7 Bewegingen in een potentiaal (G3)

7.1 Beweging in een één-dimensionale potentiaal

Neem een deeltje, met massa m, dat in één-dimensie beweegt onder de invloed van een kracht F(x). In dat geval hebben we:

$$m\ddot{x} = F(x) \tag{7.1}$$

waar de variabele x(t) de positie van het deeltje op tijdstip t is. Voor dit geval kan de potentiaal expliciet geconstrueerd worden, gegeven de kracht:

$$V(x) = -\int^{x} F(x')dx'$$
(7.2)

Het behoud van energie kan worden gebruikt om de snelheid als functie van de energie en positie te bepalen:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \Leftrightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x)\right)}$$
(7.3)

In dit geval kunnen we x(t) vinden door integratie:

$$dt = \frac{dx}{\dot{x}} = \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}} \Leftrightarrow t - t_0 = \int_{t_0}^t dt' = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x'))}}$$
(7.4)

Deze integraal kan altijd bepaald worden – niet altijd analytisch, maar in die gevallen dan wel numeriek. In principe is dus een één-dimensionele beweging in een gegeven potentiaal altijd oplosbaar.

De slinger...

In het geval van de slinger hadden we:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{7.5}$$

De energie kan geschreven worden als

$$E = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 + mgl\left(1 - \cos\theta\right) \tag{7.6}$$

Oplossen naar $\dot{\theta}$ en integreren hiervan levert dan als oplossing:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{E/(mgl) - 1 + \cos\theta'}}$$
(7.7)

Dit is een elliptische integraal van de eerste soort, en kan exact worden opgelost.

7.2 De faseruimte

Het behoud van energie, in de vorm van vergelijking (7.3), heeft nog een toepassing: als de totale energie E van een beweging bekend is, dan kan voor elke positie x de grootte van het impuls, of de snelheid (op een teken na) bepaald worden. Dat betekent dat het mogelijk is om, gegeven E, een curve te tekenen in het vlak van p versus x (of \dot{x} versus x). Als functie van de tijd zal de beweging over deze curve lopen. Alles wat dus nodig is om de beweging als functie van de tijd vast te leggen zijn

- 1. de energie E (die te bepalen is als voor één gegeven tijd zowel x als p, òf x en \dot{x} bekend zijn),
- 2. de positie op de curve moet gerelateerd worden aan de tijd (door of x, of p, of \dot{x} voor een gegeven tijd te weten).

Deze ruimte van p versus x (of \dot{x} versus x) staat bekend als de faseruimte.

In het algemene geval van N deeltjes zal de faseruimte 6N dimensionaal zijn: er zijn N driedimensionale tweede orde bewegingsvergelijking, en de oplossing wordt dus vastgelegd door 6N integratie constanten, bijvoorbeeld de N posities en N impulsen van de deeltjes (beide elk goed voor 3N parameters) op een gegeven tijd. Gegeven dit begin punt beschrijven de bewegingsvergelijkingen de curve door de faseruimte die de beweging zal volgen. Dit concept is de basis van de beschrijving van de mechanica door Hamilton, en dit is het onderwerp van hoofdstuk 8.

Voorbeeld: De faseruimte van de slinger...

Op dit punt is de gedetailleerde oplossing van de bewegingsvergelijking van de slinger niet relevant, maar wel de kwalitatieve classificatie van de mogelijke oplossingen. Afhankelijk van de (behouden) energie zijn er drie verschillende soorten oplossingen voor deze slinger:

1. E < 2mgl: dit correspondeert met de beweging rondom het minimum van de potentiaal, conform (7.8). De uiterste waarden voor θ , θ_{\pm} , zijn gegeven door $\dot{\theta}_{\pm} = 0$ wat overeenkomt met $\theta_{\pm} = \pm \arccos(1 - E/(mgl))$.

 $\mathbf{61}$

HOOFDSTUK 7. BEWEGINGEN IN EEN POTENTIAAL (G3)

- 2. E > 2mgl: afhankelijk van de begin snelheid, is nu $\dot{\theta}$ altijd òf positief, òf negatief. De slinger draait nu rondjes, en de snelheid is minimaal als $\theta = (1 + 2n)\pi$.
- 3. E = 2mgl: dit is een speciaal geval: als de beweging ergens op deze curve begint, zeg op $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 2\sqrt{g/l})$, dan zal de beweging uiteindelijk uitkomen op het punt $(\pi, 0)$. Op dat punt aangekomen, zijn er twee mogelijkheden: of met positieve "snelheid" $\dot{\theta}$ naar grotere waarden van θ doordraaien, of met negatieve "snelheid" $\dot{\theta}$ terugvallen naar kleinere waarden van θ . Nu is het wel zo dat vanuit een gegeven punt op de curve het oneindig lang duurt voordat de slinger op $(\pi, 0)$ aankomt, maar hetzelfde gebeurt als we als we op, of in de buurt van dit punt, beginnen: een klein verschil in beginvoorwaarden kan een compleet andere beweging veroorzaken – dit is nauw verbonden met het onstaan van chaos: een systeem is *chaotisch* als niet gegarandeert kan worden dat twee punten die "dicht" bij elkaar liggen in de faseruimte dat na een tijdsinterval nog steeds dicht bij elkaar liggen. Een consequentie van deze definitie is dat *lineaire* systemen niet chaotisch zijn: als $x_1(t)$ en $x_2(t)$ oplossingen zijn van de bewegingsvergelijkingen, dan is voor een lineair systeem per definitie elke lineaire combinatie van $x_1(t)$ en $x_2(t)$ een oplossing.

Een aantal verschillende bewegings-krommen die met deze drie gevallen overeenkomen zijn in fig. 7.1 te zien.

Periodieke bewegingen

In het geval dat de potentiaal V(x) een lokaal minimum heeft, zoals bij de slinger, is het mogelijk dat de beweging beperkt wordt door (1.54) tot het gebied rondom dit minimum. De randen van dit gebied, $[x_-, x_+]$, zijn bepaald door de punten waar de kinetische energie verdwijnt, i.e.

$$V(x_{\pm}) = E \tag{7.8}$$

Voor de gegeven energie E zal het deeltje van x_- naar x_+ bewegen, en, omdat de bewegingsvergelijking (7.1) niet veranderd onder $t \to -t$, daarna op precies dezelfde manier terug van x_+ naar x_- (het verschil tussen deze twee bewegingen is precies het \pm teken in (7.3)). Deze beweging is dus *periodiek*, $x(t + \tau) = x(t)$, met een periode τ :

$$\frac{\tau}{2} = \int_{x_{-}}^{x_{+}} \frac{dx}{|\dot{x}|} = \int_{x_{-}}^{x_{+}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - V(x)\right]}}$$
(7.9)

De periode τ zal in het algemeen dus afhangen van de energie E. Merk op dat dit ook elegant geschreven kan worden als

$$\tau = 2\frac{d}{dE} \int_{x_{-}}^{x_{+}} \sqrt{2m \left[E - V(x)\right]} dx = \frac{d}{dE} \oint p(x) dx \tag{7.10}$$

De integraal aan het einde van deze vergelijking staat bekend als de karakteristieke functie van Hamilton, en komt overeen met het oppervlak in de (p, x)-faseruimte die

 $\mathbf{62}$



Figuur 7.1: De potentiaal (boven) en voorbeelden van oplossingen van de bewegingsvergelijking (beneden) voor de starre slinger, gerepresenteerd in de $(\theta, \dot{\theta})$ faseruimte.

door de periodieke beweging wordt ingesloten. Op dit punt is dit niet meer dan een aardige observatie, maar het zal terugkomen in het hoofdstuk over Hamiltoniaanse mechanica.

Beweging in de buurt van het minimum van de potentiaal

De oplossing met de minimale energie komt overeen met het minimum van de potentiaal V(x). Op dit punt is x constant, $x = x_{\min}$. x_{\min} wordt gegeven door:

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=x_{\min}} \equiv V'(x_{\min}) = 0 \tag{7.11}$$

Dit suggereert dat we rond het minimum de potentiale energie prima kunnen benaderen met een kwadratische functie. Immers, een Taylor expansie rondom het minimum levert op:

$$V(x) \approx V(x_{\min}) + (x - x_{\min})V'(x_{\min}) + \frac{1}{2}(x - x_{\min})^2 V''(x_{\min}) + \mathcal{O}\left(x - x_{\min})^3\right)$$
(7.12)

Als we $V(x_{\min})$ gelijk aan nul kiezen, en we ϵ definieren als $\epsilon = x - x_{\min}$, en termen van $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ verwaarlozen (immers, in het geval de energie niet te groot is is de beweging beperkt tot een gebied met numeriek kleine waarden van ϵ) dan vinden we:

$$V(\epsilon) = \frac{1}{2} V''(x_{\min})\epsilon^2.$$
(7.13)

De bijbehorende bewegingsvergelijking in termen van ϵ is dan:

$$m\ddot{\epsilon} = -\epsilon V''(x_{\min}) \tag{7.14}$$

met als oplossing

$$\epsilon(t) = A\sin(\omega t + \phi); \quad \omega = \sqrt{V''(x_{\min})/m}.$$
(7.15)

Merk op dat omdat we termen van $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ hebben verwaarloosd, deze oplossing alleen correct is zolang A niet te groot is. Onder deze omstandigheden is de periode van de beweging onafhankelijk van E, en wordt uniek bepaald door de tweede afgeleide van de potentiaal op de locatie van het minimum.

In het geval van de slinger kunnen we $\epsilon = l\theta$ kiezen, en dus wordt de bewegingsvergelijking $ml\ddot{\theta} = -\theta mg$, de harmonische oscillator met een hoeksnelheid $\omega = \sqrt{g/l}$. Dit komt precies overeen met het resultaat dat je had kunnen krijgen door direct in de bewegingsvergelijking de benadering sin $\theta \approx \theta$ voor kleine waarden van θ in te vullen.

7.3 Centrale krachtvelden

Als we naar twee objecten kijken die alleen onderling met elkaar wisselwerken, dan hebben we gezien dat de beweging van het massa zwaartepunt af splitst van de onderlinge beweging. Het interessante gedeelte van het systeem is de beweging onderling tussen de twee objecten, beschreven door $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. De bewegingsvergelijking voor \mathbf{r} kunnen we schrijven in termen van de bewegingsvergelijkingen van de twee objecten:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_1 - \ddot{\boldsymbol{r}}_2 \tag{7.16}$$

Door nu de bewegingsvergelijkingen voor \boldsymbol{r}_1 en \boldsymbol{r}_2 in te vullen,

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}; \quad m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\boldsymbol{F}, \tag{7.17}$$

waar we de derde wet van Newton hebben gebruikt, vinden we de volgende bewegingsvergelijking voor r:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \boldsymbol{F}.$$
(7.18)

Als nu de gereduceerde massa $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ wordt ingevoerd, dan zien we dat het probleem equivalent is met het volgende één-lichaams probleem:

$$\mu \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \tag{7.19}$$

We kunnen dus dit twee-object probleem schrijven in termen van een een-object probleem. Als we nu ook nog aannemen dat de kracht \mathbf{F} tussen de twee objecten langs \mathbf{r} ligt en alleen van de afstand tussen de twee objecten afhangt, komen we uit op de belangrijke klasse van *centrale krachtvelden*. Voor deze (conservatieve) systemen hangt de potentiaal V alleen af van de afstand $r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$ tussen een object en de oorsprong (strikt genomen: we kunnen een coördinaten systeem kiezen zodanig dat dit het geval is):

$$V(\boldsymbol{r}) = V(r) \tag{7.20}$$

De kracht die bij deze potentiaal hoort is:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\frac{dV(r)}{d\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \frac{\partial \sqrt{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}}}{\partial \boldsymbol{r}} = -V'(r)\hat{\boldsymbol{r}}.$$
(7.21)

en wijst dus altijd langs r – vandaar de naam centraal. In termen van de potentiaal is de bewegingsvergelijking:

$$\mu \ddot{\boldsymbol{r}} = -V'(r)\hat{\boldsymbol{r}} \tag{7.22}$$

Het is natuurlijk ook mogelijk om dit af te leiden met behulp van de bijbehorende Lagrangiaan. In dat geval beginnen we met het opschrijven van de Lagrangiaan voor de twee deeltjes:

$$L = \frac{1}{2} \left(m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 \right) - V(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|).$$
(7.23)

We schrijven nu r_1 en r_2 in termen van het zwaartepunt R_{CM} en de verschilvector $r = r_2 - r_1$. We vinden dan

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\boldsymbol{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(|\boldsymbol{r}|)$$
(7.24)

$$= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}_{CM}^{2} + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^{2} - V(|\boldsymbol{r}|)$$
(7.25)

Het is duidelijk dat de Lagrangiaan in twee onafhankelijke delen splits: één voor de vector \mathbf{R}_{CM} en één voor de verschilvector \mathbf{r} . Verder is de vector \mathbf{R}_{CM} cyclisch is en heeft (dus) triviale bewegingsvergelijkingen:

$$(m_1 + m_2) \,\ddot{R}_{\rm CM} = 0 \tag{7.26}$$

en we kunnen dus inderdaad het hele probleem (ten opzichte van de eenparig rechtlijnige beweging van het onderlinge zwaartepunt) beschrijven in termen van de verschilvector \boldsymbol{r} en de bijbehorende gereduceerde massa μ :

$$L = \frac{1}{2}\mu \dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(|\boldsymbol{r}|).$$
 (7.27)

Behoud van impulsmoment

Omdat in dit geval $\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$ is het impulsmoment een behouden grootheid. Omdat het impulsmoment per definitie loodrecht op de vector \mathbf{r} staat, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0$, zal de beweging in het vlak blijven dat loodrecht op het impulsmoment \mathbf{L} staat. De orientatie van dit vlak wordt bepaald door de beginwaarde $\mathbf{L} = \mathbf{L}(t=0) = \mathbf{r}(t=0) \wedge \mathbf{p}(t=0)$.

Als we nu de z-as kiezen langs L, dan kunnen we de beweging in het z = 0 vlak beschrijven met behulp van de twee coördinaten (r, θ) . In termen van deze twee coördinaten zijn de behoudswetten voor energie en impulsmoment:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^{2} + r^{2}\dot{\theta}^{2}\right) + V(r) = E$$
(7.28)

$$mr^2\theta = L_z \tag{7.29}$$

waar gebruik is gemaakt van het feit dat in dit coördinatensysteeem $|L| = L_z$.

Alternatief kunnen we ook hier de Lagrangiaan gebruiken. Met onze keuze van coordinaten is de Lagrangiaan

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^{2} + r^{2}\dot{\theta}^{2}\right) - V(r)$$
(7.30)

Het is duidelijk dat θ cyclisch is, en we vinden als Lagrange vergelijkingen:

$$\frac{d}{dt}\left(mr^{2}\dot{\theta}\right) = 0 \tag{7.31}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$
(7.32)

De eerste vergelijking is niets anders dan het behoud van het impulsmoment, en als we de tweede vergelijking met \dot{r} vermenigvuldigen en vervolgens integreren vinden we het behoud van energie terug.

7.3. CENTRALE KRACHTVELDEN

Reductie tot een equivalent één-dimensionaal probleem

Een gevolg van het behoud van impulsmoment is dat (7.29) gebruikt kan worden om θ te elimineren uit het behoud van energie (7.28). Het resultaat is de zogenaamde *radiële* energie vergelijking:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r) = E.$$
(7.33)

Voor een gegeven waarde van L is dit een simpele één-dimensionele beweging voor een *effectieve potentiaal*, U(r), die gedefiniëerd wordt door

$$U(r) \equiv \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r).$$
 (7.34)

De bewegingsvergelijking die hierbij hoort is simpelweg te vinden door de radiële energie vergelijking naar de tijd te differentiëren, i.e. het omgekeerde van wat er in (1.43) werd gedaan om behoud van energie te vinden:

$$m\ddot{r} = -U'(r) = -\frac{L_z^2}{mr^3} - V'(r).$$
(7.35)

Het is duidelijk dat de eerste term in de effectieve potentiaal voor een kracht zorgt die probeert om de beweging af te stoten van het centrum. Dit is precies de zogenaamde *centrifugaal kracht*, die is behandeld in sectie (4).

Tweede en derde wet van Kepler

Een andere consequentie van het behoud van impulsmoment is de tweede wet van Kepler, ook wel de perkenwet genoemd. Het oppervlak dA dat "bestreken" wordt door de vector \boldsymbol{r} in een (infinitesimaal) tijds interval dt is

$$dA = \dot{A}dt = \frac{1}{2}r^2d\theta = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt$$
(7.36)

Dit kan met behulp van (7.29) geschreven worden als

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{L_z}{2m} = \text{constant}, \qquad (7.37)$$

ofwel, het "bestreken" oppervlak is constant. In het geval van een periodieke beweging, kunnen we dit integreren over een complete 'omloop', met omlooptijd τ :

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int \frac{dA}{\dot{A}} = \frac{2m}{L_z}A \tag{7.38}$$

waar A het oppervlak is dat door de periodieke beweging wordt omsloten. Het vinden van de omlooptijd τ is nu gereduceert tot het bepalen van dit oppervlak – maar hiervoor moeten we de beweging weten, i.e. r als functie van θ

De baanvergelijking

De radiële energie vergelijking kan precies zoals in (7.4) door middel van integratie worden opgelost om r(t) te vinden. Voor die gevallen dat (7.4) voor de gegeven V(r)niet analytisch op te lossen is, is het soms wel mogelijk $r(\theta)$ analytisch te vinden in plaats van r(t). Dit kan als volgt:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = \pm \frac{mr^2}{L_z}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right)}$$
(7.39)

Dit is de *baanvergelijking*. Integreren van deze vergelijking levert op:

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{L_z}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m \left(E - U(r)\right)}}$$
(7.40)

Om dit verder op te kunnen lossen zullen we de concrete vorm van de potentiaal moeten weten – maar zoals al eerder is opgemerkt, als het gaat om bewegingen in de lokale omgeving van een minimum, hoeven we alleen maar de locatie van het minimum, en de tweede afgeleide op deze locatie te kennen.

Beweging rond het minimum van een centrale potentiaal

Op dit punt kunnen we een kwalitatieve conclusie trekken: zelfs als een centrale potentiaal V(r) strikt attractief is (i.e. geen lokaal minimum heeft, V'(r) < 0 voor alle r), dan is het nog steeds mogelijk dat de effectieve potentiaal U(r) wel een lokaal minimum heeft, en dat de beweging, voor bepaalde waarden van de energie E, beperkt is tot een interval $r \in [r_{-}, r_{+}]$.

Laten we beginnen met de voorwaarde voor het minimum van U(r)

$$U'(r_{\min}) = V'(r_{\min}) - \frac{L_z^2}{mr_{\min}^3} = 0 \Rightarrow V'(r_{\min}) = \frac{L_z^2}{mr_{\min}^3}.$$
 (7.41)

Dit minimum bestaat als $\lim_{r\to 0} r^2 V(r) = 0$, i.e. als voor kleine afstanden de centrifugaal kracht belangrijker is dan de potentiaal. Als we aannemen dat (in de buurt van $r = r_{\min}$) de potentiaal van de vorm $V(\mathbf{r}) = kr^{\alpha}$ is, dan moet dus $\alpha > -2$, anders kan de centrifugaal kracht niet verhinderen dat de beweging uiteindelijk zal uitkomen op r = 0, het centrum van de kracht.

Als we nu aannemen dat de potentiaal inderdaad zodanig is dat er stabiele oplossingen zijn, wat is dan de periode van de oscillaties rondom deze oplossing, en bestaan er periodieke bewegingen? De hoeksnelheid van de cirkel oplossing, ie. $r(t) = r_{\min}$ met $U'(r_{\min}) = 0$, is gegeven door in (7.41) de vergelijking (7.29) voor het behoud van impulsmoment in te vullen:

$$V'(r_{\min}) = \frac{\left(mr_{\min}^2\dot{\theta}\right)^2}{mr_{\min}^3} \Leftrightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{V'(r_{\min})}{mr_{\min}}}$$
(7.42)

Van de sectie over de één-dimensionale beweging in de buurt van een minimum van een potentiaal weten we dat de verstoring rondom deze oplossing een hoek snelheid heeft van

$$\omega_{\rm osc} = \sqrt{\frac{U''(r_{\rm min})}{m}} \tag{7.43}$$

Door $U''(r_{\min})$ te schrijven in termen van $V''(r_{\min})$ dan vinden we, met behulp van (7.34) en (7.41) dat

$$\omega_{\rm osc} = \sqrt{\frac{V''(r_{\rm min}) + 3L_z^2/mr_{\rm min}^4}{m}} = \sqrt{\frac{V''(r_{\rm min}) + 3V'(r_{\rm min})/r_{\rm min}}{m}}$$
(7.44)

De totale beweging is dus de combinatie van een cirkelbeweging die ronddraait met constante hoeksnelheid ω_c , plus een (kleine) verstoring van r rond r_{\min} met een hoeksnelheid ω_{osc} :

$$r(t) = r_{\min} + R\sin(\omega_{osc}t + \alpha) \tag{7.45}$$

$$\theta(t) = \omega_C t + \theta_0 \tag{7.46}$$

Als we deze twee vergelijkingen combineren om de baanvergelijking op te stellen, dan vinden we:

$$r(\theta) = r_{\min} + R\sin(\frac{\omega_{\rm osc}}{\omega_C}\theta + \theta') \tag{7.47}$$

De vraag is nu of deze baan periodiek is – dat hangt af van de ratio $\omega_{\rm osc}/\omega_C$. Als deze rationeel is, dan zal uiteindelijk de baan periodiek zijn – maar dit kan alleen worden bepaald als de vorm van de potentiaal V(r) rond $r_{\rm min}$ bekend is. Stel nu dat deze in de buurt van $r_{\rm min}$ van de vorm $V(r) = kr^{\alpha}$ is. Dan vinden we dat

$$\frac{\omega_{\rm osc}}{\omega_C} = \sqrt{3 + r_{\rm min} \frac{V''(r_{\rm min})}{V'(r_{\rm min})}} = \sqrt{2 + \alpha}$$
(7.48)

Als we dus willen dat de ratio een rationeel getal is, dan zal dus

$$\alpha = n^2 - 2; n \in \mathbb{Q} \cap n > 0 \tag{7.49}$$

De oplossing voor n = 0 valt af vanwege het al eerder afgeleide feit dat de cirkel-oplossing alleen bestaat voor $\alpha > -2$. Voor n = 1 vinden we de bekende r^{-1} potentiaal van het zwaartekracht- en Coulomb- veld terug, en voor n = 2 de harmonische oscillator. Deze twee zullen we in meer detail bespreken.

Beweging in een r^2 potentiaal

Als $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}kr^2$ is, dan is het mogelijk om de baanvergelijking (7.40) op te lossen met $U = \frac{1}{2}kr^2 + L_z^2/2mr^2$. Echter, laten we een stapje terug nemen. In dit geval is de originele bewegingsvergelijking

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + k\boldsymbol{r} = 0 \tag{7.50}$$

Deze is eenvoudiger op te lossen dan de baanvergelijking; de oplossing is namelijk gewoon:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{C}\cos(\omega t) + \boldsymbol{S}\sin(\omega t); \quad \omega = \sqrt{k/m}.$$
 (7.51)

De zes integratie constanten C en S worden bepaald door de beginvoorwaarden: als op t = 0 het deeltje zich op r_0 bevind, en een snelheid v_0 heeft, dan is

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}_0; \quad \boldsymbol{S} = \boldsymbol{v}_0 / \boldsymbol{\omega}. \tag{7.52}$$

Het is duidelijk dat $\mathbf{r}(t)$ altijd in het vlak ligt dat wordt bepaald door \mathbf{r}_0 en \mathbf{v}_0 , dus de richting van het impulsmoment is inderdaad behouden. Het is eenvoudig om te bepalen dat $\mathbf{L} = m\mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{v}_0$, dus ook de grootte van het impulsmoment is inderdaad constant.

Als we een assenstelsel kiezen zodat de z-as loodrecht staat op het vlak van C en S, en de x-as in de richting van C kiezen, dan is het duidelijk dat de beweging een ellips is:

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{S^2} = 1, \quad z = 0.$$
(7.53)

Als we ϵ definieren als $C^2 = r_0^2(1-\epsilon)$; $S^2 = r_0^2(1+\epsilon)$, i.e. ϵ is de afwijking van een cirkel met straal r_0 (ook wel de *eccentriciteit* van de ellips genoemd), dan is makkelijk te bepalen dat de beweging in r inderdaad twee keer per omwenteling om de cirkel oscilleert:

$$r^2 \left(1 + \epsilon \cos 2\theta\right) = r_0^2. \tag{7.54}$$

De beweging komt dus inderdaad overeen met wat in de vorige sectie is afgeleid voor het geval $\alpha = 2$: gesloten banen, met twee minima en maxima per omwenteling.

Beweging in een r^{-1} potentiaal

Zowel de zwaartekracht als de Coulomb kracht zijn centrale krachtvelden met dezelfde exponent. Daarom kiezen we nu de potentiaal $V(\mathbf{r}) = kr^{-1}$, wat leidt tot:

$$U(r) = \frac{k}{r} + \frac{L_z^2}{2mr^2}$$
(7.55)

Gegeven de energie E en het impulsmoment L_z kunnen we de uiterste van de beweging in r bepalen door de vergelijking $U(r_{\pm}) - E = 0$ op te lossen. Omdat dit een kwadratische vergelijking in 1/r is, kan direct $1/r_{\pm}$ worden gevonden:

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{-km}{L_z^2} \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{mk^2}} \right)$$
(7.56)

Er zijn nu twee kwalitatief verschillende gevallen: k < 0 (aantrekkend) en k > 0 (afstotend).

k > 0: De effectieve potentiaal U(r) is monotoon dalend van +∞ op r = 0 naar 0 op r = ∞. Aangezien de functie dus geen minimum heeft, is periodieke beweging onmogelijk. Voor elke positieve waarde van E is er een unieke minimale waarde van r_{min} = r₋. Een voorbeeld is het verstrooien van een positron aan een kern. Als we beginnen, ver weg van de kern, dan is er alleen een bijdrage van de kinetische energie, E = ½mv₀². Als we nu de impact parameter b invoeren, waar b de afstand is tussen de kern en het positron als het positron langs een rechte lijn langs v₀ zou bewegen, dan kunnen we het impulsmoment schrijven als L_z = mv₀b. Als we dit invullen, dan kan de minimale afstand tot de kern worden geschreven als

$$r_{\min} = a \left(1 + \sqrt{1 + (b/a)^2} \right) \quad \text{met}a = qq'/(4\pi\epsilon_0 m v_0^2).$$
 (7.57)

In dit geval is het duidelijk dat de lengteschaal waarop de (interne) structuur van een kern kan worden bestudeerd gaat als 1/E.

- k < 0: Voor deze situatie zijn er drie kwalitatief verschillende baantypes mogelijk:
 - 1. $E = -\frac{mk^2}{2L_z^2}$: dit is het minimum van U(r), dus $r_{\min} = r_+ = r_-$, en $\dot{r} = 0$, De baan is een cirkel met straal $r_{\min} = k/2E = -L_z^2/mk$. Omdat de straal constant is, geeft behoud van impulsmoment onmiddellijk dat de hoeksnelheid ook constant is, $\omega \equiv \dot{\theta} = L_z/mr^2$.
 - 2. $-\frac{mk^2}{2L_z^2} < E < 0$: de baan heeft een minimum r_{\min} en een maximum r_{\max} . Het minimum heeft de naam *perihelium* (eng: perihelion) en het maximum staat bekend als het *aphelion* (eng: apohelion)
 - 3. $E \ge 0$: Bij E = 0 is precies $1/r_+ = 0$, i.e. $r_+ = \infty$, dus voor deze energie zal de baan asymptotisch naar ∞ ontsnappen. Voor E > 0 komt de beweging vanuit ∞ , beweegt naar r_- , en verdwijnt weer naar ∞ .

We kunnen vergelijking (7.4) voor dit geval niet analytisch oplossen, maar (7.40) wel. Substitutie van $u = r^{-1}$ levert op:

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{\frac{2mE}{L_z^2} + \frac{2m^2}{kL_z^2}u' - u'^2}}$$
(7.58)

Met behulp van integratie tabellen, of Mathematica, is dit exact op te lossen, want

$$\int \frac{du'}{\sqrt{a+bu'+cu'^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos\left(-\frac{1+2uc/b}{\sqrt{1-4ac/b^2}}\right).$$
(7.59)

Wat saaie algebra levert, na het terug invullen van u = 1/r, tenslotte op dat

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{L_z^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta_K) \right)$$
(7.60)

Het is goed om te controleren dat we het eerdere resultaat (7.56) terugvinden uit (7.60) voor het geval dat $\cos(\theta - \theta_K) = \pm 1$. Deze vergelijking kan wat opgeruimd worden door de coëfficiënt voor de cos te definieren als de *eccentriciteit* ϵ :

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{mk^2}}.$$
(7.61)

Voor $\epsilon = 0$ is de oplossing een cirkel, voor $0 < \epsilon < 1$ een ellips met één van de brandpunten in de oorsprong. Voor de elliptische oplossingen is de eccentriciteit precies (zoals te verwachten) de ratio van de twee assen van de ellips. Zoals afgeleid in de vorige sectie komen het maximum en minimum één keer per omloop voor, op $\theta = \theta_K$ en $\theta = \theta_K + \pi$ respectievelijk. Tenslotte is er het geval dat $\epsilon = 1$, het geval dat E = 0, dat overeenkomt met een parabool, en voor $\epsilon > 1$ is de oplossing een hyperbool. In de laatste twee gevallen komt het minimum overeen met $\theta = \theta_K$.

Het is duidelijk dat een object dat een hyperbool baan volgt wordt afgebogen. Om de hoek te vinden waarover dit object wordt gebogen kijken we naar de waarden van θ waar 1/r = 0. Dit levert op (we kiezen voor het gemak, zonder verlies van algemeenheid $\theta_K = 0$):

$$0 = \frac{1}{r} = 1 + \epsilon \cos \theta \Rightarrow \cos \theta_{\infty} = -\frac{1}{\epsilon}$$
(7.62)

De verstrooings is van $-\theta_{\infty}$ naar $+\theta_{\infty}$, en de verstrooingshoek Θ is dus:

$$\Theta = \pi - 2\arccos\frac{1}{\epsilon} = \pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{mk^2}}}.$$
(7.63)

Meestal is handiger om dit schrijven in termen van de impactparameter b en de snelheid v_0 voor $r \to \infty$:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 L_z = mv_0b$$
 $\} \Rightarrow \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + m^2 v_0^4 b^2}}$ (7.64)

Runge-Lenz vector

Voor het geval dat $V(\mathbf{r}) = kr^{-1}$ is er *nog* een behouden grootheid. Als we beginnen met de bewegings vergelijking, $m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}/r^3$, en het vector-product met het impulsmoment \mathbf{L} nemen, dan vinden we:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L} = -\frac{k}{m} \frac{\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{L}}{r^3} = -k \frac{\boldsymbol{r} \wedge (\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}})}{r^3} = -k \left(\boldsymbol{r} \frac{\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}}{r^3} - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{r} \right)$$
(7.65)

Omdat voor een centrale potentiaal $\dot{L} = 0$, kan dit geschreven worden als:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\boldsymbol{L}\right) = k\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r},\tag{7.66}$$

Als we nu de Runge-Lenz vector definiëren als

$$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L} - k \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{7.67}$$
dan is duidelijk dat dit een behouden grootheid is, $\dot{A} = 0$. Dit brengt het aantal behouden grootheden voor een deeltje dat beweegt in een r^{-1} potentiaal op zeven: de energie E, de drie componenten van het impulsmoment L, en de drie componenten van de Runge-Lenz vector A. Echter, er kunnen hooguit vijf *onafhankelijke* behouden grootheden zijn: de beweging wordt beschreven door een curve in een zes-dimensionale faseruimte, en elke behouden grootheid beschrijft een vijf-dimensionaal vlak in deze ruimte; een alternatieve manier om dit te zien is om op te merken dat voor elke behouden grootheid één van de zes parameters kan worden vervangen door een combinatie van de overige vijf. Er kunnen dus niet meer dan zes min één is vijf onafhankelijke behouden grootheden zijn: er moet immers één parameter overblijven om de positie langs de baan te beschrijven. Dus in dit geval moeten er (ten minste) twee relaties zijn tussen de Runge-Lenz vector en de andere behouden grootheden.

Het eerste dat opvalt is dat per constructie A loodrecht op L staat, en dus in het vlak van de baan ligt. Hierdoor kunnen de eerste term in (7.67) schrijven als:

$$\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L} = \left(r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta} + \dot{r} \hat{\boldsymbol{e}}_{r} \right) \wedge L_{z} \hat{\boldsymbol{e}}_{z} = r \dot{\theta} L_{z} \left(\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{z} \right) + \dot{r} L_{z} \left(\hat{\boldsymbol{e}}_{r} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{z} \right)$$
(7.68)

Dit kan gebruikt worden om A te schrijven als:

$$\boldsymbol{A} = \left(r\dot{\theta}L_z - k\right)\hat{\boldsymbol{e}}_r - \dot{r}L_z\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{7.69}$$

Niet alleen reduceert dit het aantal parameters van A van drie naar twee, want nu hebben we dat $A_z = 0$, maar het betekent ook dat de lengte, A, van A kan worden geschreven als:

$$A^{2} \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \left(r\dot{\theta}L_{z} - k \right)^{2} + \left(\dot{r}L_{z} \right)^{2} = k^{2} \left(1 + \frac{2EL_{z}^{2}}{mk^{2}} \right).$$
(7.70)

De lengte is dus gerelateerd aan E en L_z . Het is aardig om op te merken dat de lengte A van A bijna gelijk is aan de eccentriciteit ϵ :

$$\epsilon = A/k. \tag{7.71}$$

Al met al is er nu nog maar één parameter van \boldsymbol{A} over: de richting van \boldsymbol{A} in het vlak van de baan. Als we het product van \boldsymbol{r} met \boldsymbol{A} nemen, en de hoek tussen \boldsymbol{r} en \boldsymbol{A} als $\theta - \theta_A$ schrijven dan vinden we per definitie:

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A} \equiv rA\cos(\theta - \theta_A) \tag{7.72}$$

Maar we kunnen dit ook expliciet uitrekenen:

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{r} \cdot (\dot{\boldsymbol{r}} \wedge \boldsymbol{L}) + kr = \boldsymbol{L} \cdot (\boldsymbol{r} \wedge \dot{\boldsymbol{r}}) + kr = \frac{L_z^2}{m} + kr.$$
(7.73)

Als we nu (7.72) gelijk stellen aan (7.73), dan vinden we:

$$r = \frac{L_z^2}{mk} \frac{1}{1 + \frac{A}{k}\cos(\theta - \theta_A)}.$$
 (7.74)

Uit deze vergelijking is duidelijk dat de richting van de Runge-Lenz vector overeenkomt met de locatie van het perihelion, en dat de lengte inderdaad de eccentriciteit is. Deze vergelijking bepaalt de baan helemaal in termen van de enige overgebleven dynamische variabele θ , zonder ooit een differentiaal vergelijking te hebben opgelost!

Rutherford verstrooiing

In het eerste hoofdstuk hebben we al gekeken naar de relatie tussen de verstrooiings hoek en de fractie van de energie die overblijft. Wat we toen *niet* hebben gedaan is een voorspelling maken van die verstrooiingshoek. Maar nu we weten wat de baan van een deeltje in een gegeven potentiaal is, kan dit wel. Immers, (7.64), is precies de verstrooiings hoek, afgeleid voor een r^{-1} potentiaal!

Met deze kennis kunnen we gaan kijken naar de verstrooiing van bijvoorbeeld electronen door atoomkernen. In dat soort experimenten wordt typisch een bundel electronen op een atoomkernen geschoten, en vervolgens wordt het aantal electronen dat onder een bepaalde hoek wordt verstrooid gemeten. Het is duidelijk dat het aantal gemeten electronen afhangt van de hoeveelheid electronen in de bundel, en van hoelang de bundel op het doel wordt geschoten – we zullen hier rekening mee moeten houden. Dit kunnen beschrijven door de *flux* van deeltjes: dit is niets anders dan de hoeveelheid deeltjes dat door een oppervlak per tijdseenheid loopt. Aangezien de verstrooiingshoek een functie is van de impact parameter b, en deze symmetrisch rond de as van de bundel (we nemen aan dat de bundel correct op het doel gericht is!), ligt het voor de hand dit oppervlak te parameterizeren met de impact parameter b, en de hoek ϕ rondom de symmetrie as van het probleem, zie Figuur (7.2).

De hoeveelheid inkomende deeltjes per tijdseenheid, de flux f, is evenredig met dit oppervlak en de *intensiteit*, I, van de bundel:

$$f = I \ b d\phi \ db \tag{7.75}$$

Wat we in het algemeen willen meten is hoeveel deeltjes er in een soortgelijk oppervlak met de verstrooiings hoek Θ weer uitkomen. Als we het (infinitesimale) oppervlak dA parameteriseren als een stukje van een bol, met een straal L die groot is ten opzichte van de afmeting van de bundel, dan kunnen we ons afvragen hoeveel uitgaane deeltjes door het volgende oppervlak komen:

$$dA = Ld\theta \ L\sin\theta d\phi \tag{7.76}$$

Het is duidelijk dat als L groter wordt, we een groter oppervlak moeten beslaan om dezelfde fractie van het totale oppervlak te hebben. Laten we dit effect alvast in rekening brengen in naar de zogenaamde *ruimtehoek* $d\Omega$ te kijken, in plaats van dA:

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \tag{7.77}$$

Dit is het equivalent van de definitie van *radialen* voor een cirkel: in dat geval is het de lengte langs een circel met lengte één dat de hoek definieerd, hier is het het oppervlak



Figuur 7.2: De definitie van parameters in een verstrooiingsproces.

op een bol dat de ruimtehoek definieerd. Merk op: de totale ruimtehoek is niets anders dan het oppervlak van een bol met straal één:

$$\int \int d\Omega = \frac{1}{L^2} \int \int dA = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$$
(7.78)

De vraag is nu hoe groot de uitgaande flux is in een gebied $d\Omega$ rondom de hoek Ω . Nu weten we, in het geval van een r^{-1} potentiaal hoe de verstrooiingshoek Θ afhangt van de impact parameter b, zie (7.64) We kunnen dit omdraaien, en bepalen hoe b van Θ afhangt:

$$b = \frac{|k|}{2E_0} \frac{1}{\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)} \tag{7.79}$$

waar $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Door te differentiëren vinden we:

$$db = -\frac{|k|}{4E_0} \frac{1}{\sin^2(\frac{\Theta}{2})} d\Theta \tag{7.80}$$

Hiermee kunnen we de uitgaande flux in termen de inkomende flux schrijven:

$$d\sigma \equiv bd\phi|db| = \frac{k^2}{8E_0^2} \frac{\cos\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\Theta}{2}\right)} d\Theta d\phi$$
(7.81)

Als we dit normalizeren op de ruimtehoek $d\Omega$, i.e. (7.77), dan vinden we voor de r^{-1} potentiaal:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^2}{16E_0^2} \frac{1}{\sin^4\left(\Theta/2\right)} \tag{7.82}$$

Dit is de befaamde Rutherford verstrooiings formule voor het verstrooien van geladen deeltjes door een Coulomb potentiaal. Deze werkzame doorsnede hangt sterk af van de energie van de inkomende deeltjes, en de verstrooiingshoek. De metingen van Rutherford, die lieten zien dat tot extreem kleine afstanden de verstrooiing beschreven wordt door (7.82) leidde tot de conclusie dat de (positieve) lading van atomen *niet* over het volume van hele atoom is uitgespreid, maar geconcentreerd zit in een extreem kleine kern.

Schaal Transformaties

Als we voor potentialen van de vorm

$$V(\boldsymbol{r}) = kr^{-\alpha} \tag{7.83}$$

een schaal transformatie uit voeren op de positie vector \boldsymbol{r} ,

$$\boldsymbol{r} \to \lambda \boldsymbol{r},$$
 (7.84)

dan wordt de bewegingsvergelijking:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \alpha k r^{-\alpha-1} \hat{\boldsymbol{r}} \to m\lambda \ddot{\boldsymbol{r}} = \alpha k\lambda^{-\alpha-1} r^{-\alpha-1} \hat{\boldsymbol{r}}.$$
(7.85)

Als we nu ook de tijd schalen als:

$$t \to \mu t$$
 (7.86)

dan vinden we uiteindelijk voor de gecombineerde transformatie

$$m\mu^{-2}\ddot{\boldsymbol{r}} = \alpha k\lambda^{-\alpha-2}r^{-\alpha-1}\hat{\boldsymbol{r}}.$$
(7.87)

Ofwel, als we μ kiezen zodat $\mu^2 = \lambda^{\alpha+2}$ dan is er niets veranderd; dus als $\mathbf{r}(t)$ een oplossing is van de bewegingsvergelijkingen, dan is $\lambda \mathbf{r}(\lambda^{1+\alpha/2}t)$ dat ook.

Voor het geval $\alpha = 1$ is dit precies de *derde wet van Kepler*: *het kwadraat van de omlooptijd van een planeet is evenredig met de derde macht van de semimajor as van de baan-ellips*. In deze context is het interessant dat in 1665 Newton de conclusie trok¹ dat uit de derde wet van Kepler volgde dat de sterkte van de zwaartekracht tussen twee lichamen omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand. Newton kwam tot deze conclusie door de geometrische eigenschappen van een ellips te bestuderen.

Merk op dat er nog een interessante variant is: als $\alpha = -2$, wat overeenkomt met de potentiaal voor de harmonische oscillator, hangt de tijd niet af van de (ruimtelijke) schaal, en alle gesloten banen hebben dus dezelfde periode.

¹The Principia, eerste boek, propositie XI, Probleem VI

Hoofdstuk 8 Mechanica van Hamilton (G8)

Een andere manier om de klassieke mechanica te beschrijven is ontwikkeld door Hamilton rond 1830. In de beschrijving van Lagrange hebben we een Lagrangiaan $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, die een functie is van een aantal, n, canonieke coördinaten q_i . De bewegingsvergelijkingen voor deze coördinaten q_i zijn de n 2^e orde differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \cdots, n;$$
(8.1)

Om een probleem op te lossen moeten we de oplossingen van deze differentiaalvergelijkingen vinden, samen met 2n beginvoorwaarden, bijvoorbeeld $q_i(t = 0)$ en $\dot{q}_i(t = 0)$. Een alternatief voor deze n $2^{\rm e}$ orde vergelijkingen zouden 2n $1^{\rm e}$ orde vergelijkingen kunnen zijn. Dit maakt in de praktijk in het algemeen niet veel uit voor het oplossen van problemen, maar conceptueel is dit soms wel erg handig. Een eerste stap ligt in het feit dat als we de canonieke momenta $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ invoeren, we (8.1) kunnen schrijven als een eerste orde vergelijking voor p_i :

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.\tag{8.2}$$

We zouden de vraag kunnen stellen of een systeem niet beter en/of eleganter in termen van (q_i, p_i) kunnen beschrijven dan in termen van (q_i, \dot{q}_i) . Om dit te doen zullen we dus \dot{q}_i op de één of andere manier moeten vervangen door p_i . Het is te verwachten dat de evolutie van (q_i, p_i) beschreven zal worden door een functie die equivalent is aan $L(q_i, \dot{q}_i)$, maar natuurlijk een functie van (q_i, p_i) zal zijn en niet van (q_i, \dot{q}_i) . De vraag is hoe we deze functie kunnen construeren. Voor een geometrische constructie zie Figuur (8.1).

8.1 Legendre Transformaties

Een handige methode om systematisch coördinaten transformaties uit te voeren is de Legendre transformatie. Om deze te vinden, beginnen we met een functie f(x, y). De



Figuur 8.1: Geometrische interpretatie van de $x \to u = \frac{\partial f}{\partial x}$ transformatie: Neem een functie f(x), en definieer u = f'(x). Om dezelfde curve f(x) te beschrijven als een functie van u, dan moet natuurlijk x als functie van u te schrijven zijn, i.e. f'(x) moet inverteerbaar zijn. Maar dit is niet voldoende, want alle functies f(x) + C leveren de zelfde relatie tussen x en u op. De minimale extra informatie die moet worden toegevoegd is het punt waar de tangent aan (x, f(x)) de verticale as snijdt, zeg b; dit bepaalt de functie f wel uniek. We kunnen, voor elke gegeven waarde van x (en de bijbehorende waarde van u, u = f'(x), de waarde van b bepalen door de volgende vergelijking op te lossen: f(x) = b + xf'(x), ofwel b(u) = f(x) - xu waar we x moeten schrijven als functie van u, x = x(u) door middel van het inverteren van u = f'(x). Als we nu b(u) kennen, dan kunnen we dus f(x) weer reconstrueren – we kunnen dus stellen dat b(u) het equivalent is van f(x). Een alternatieve afleiding begint met de relatie f(x) + b(u) = xu. Differentiëren naar x levert op dat $\frac{\partial f}{\partial x} = u$, zoals gewenst. Inverteren van deze relatie levert u = u(x), en invullen levert de definitie van b(u) op. Het is duidelijk uit deze afleiding dat het probleem symmetrisch is tussen f(x), x en b(u), u, i.e. de transformatie is inverteerbeer. De transformatie van $f(x) \rightarrow b(u)$ is een voorbeeld van een Legendre transformatie.

totale afgeleide van de functie is

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{8.3}$$

We willen nu x vervangen door een variable u. Om dit te doen beginnen we met het definieren van een functie g, van de drie variabelen, als:

$$g(x, y, u) = ux - f(x, y)$$
 (8.4)

In dat geval hebben we dat de totale afgeleide van g gegeven is door:

$$dg = d(ux)) - df = xdu + udx - \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)$$
(8.5)

Als we nu willen dat dg geen term evenredig met dx meer heeft (i.e. g is geen functie van x), dan zullen we u dus moeten kiezen als de volgende functie van x en y:

$$u(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}.$$
(8.6)

Want als we dit invullen in (8.5), dan vinden we:

$$dg = xdu - \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{8.7}$$

ofwel, g is nu inderdaad, per constructie, een functie van alleen u en y: g = g(u, y). Maar hoe ziet g er nu uit? Om dat te vinden moeten we eerst (8.6) inverteren om x = x(u, y) te vinden, en vervolgens dit in vullen in de definitie van g, i.e.

$$g(u, y) = ux(u, y) - f(x(u, y), y)$$
(8.8)

We hebben nu een functie g(u, y) geconstrueerd, i.e. we hebben x vervangen door u. Deze constructie is een voorbeeld van een Legendre transformatie.

8.2 Vergelijkingen van Hamilton

We kunnen nu een Legendre transformatie toepassen op de Lagrangiaan $L(q, \dot{q}, t)$ om de \dot{q}_i te vervangen door p_i . In termen van de vorige sectie moeten we dus $f = L(q, \dot{q}, t)$, $u = p_i, x = \dot{q}_i$ en $y = q_i$ invullen. In dat geval vinden we dat

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_j, \dot{q}_j, t) \tag{8.9}$$

overeenkomt met (8.6) als we de volgende functie nemen:

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t).$$
(8.10)

Laten we dit expliciet controleren door naar de totale afgeleide van H kijken, vinden we:

$$dH = (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt\right)$$
(8.11)

$$= \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$
(8.12)

$$= \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$
(8.13)

waar we zowel de definitie $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ en de Lagrange vergelijking $\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ hebben gebruikt. Merk op dat het feit dat in (8.11) de tweede en vierde term tegen elkaar weg vallen niet toevallig is: H is zo gekozen dat dit door (8.9) per constructie gebeurt! Het is duidelijk dat H dus inderdaad, per constructie, niet van \dot{q} afhangt. Nu moet per definitie gelden dat dH geschreven kan worden als

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$
(8.14)

Als we dit gelijk willen stellen met (8.13) dan vinden we tenslotte:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{8.15}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{8.16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{8.17}$$

De vergelijkingen (8.15) en (8.16) zijn bewegingsvergelijkingen. Het zijn de vergelijkingen van Hamilton. Ze bevatten dezelfde informatie over de beweging als de vergelijkingen van Lagrange. Een verschil is, dat die van Lagrange tweede orde differentiaalvergelijkingen zijn, n in aantal, terwijl de Hamilton vergelijkingen inderdaad van de eerste orde zijn, 2n in aantal. De vergelijking (8.17) is een bijkomende eigenschap van de functies H en L, die direct volgt uit hun verband (8.10), maar deze bevat geen informatie over de beweging.

Merk op dat de Hamiltoniaan H(p,q) op dezelfde manier geconstrueerd wordt als de energie functie $h(q, \dot{q})$, en numeriek dezelfde waarde zal opleveren, maar het verschil is dat H een functie is van p en q, terwijl h een functie van q en \dot{q} . De complete procedure voor het bepalen van een Hamiltoniaan H is dus de volgende:

- 1. kies een set coördinaten q_i .
- 2. construeer de Lagrangiaan $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T V$.
- 3. bepaal de canonieke impuls $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

8.2. VERGELIJKINGEN VAN HAMILTON

- 4. inverteer de canonieke impuls om \dot{q}_i te kunnen schrijven als functie van p_i en q_i .
- 5. construeer de Hamiltoniaan $H(p_i, q_i, t) = p_i \dot{q}_i(p_1, \dots, p_n) L(q, \dot{q}(p_1, \dots, p_n), t).$

Het is dus *niet* zo dat over het algemeen het voldoende is om de energie van een systeem te schrijven in termen van p en q en vervolgens te claimen dat dit de Hamiltoniaan is – dit werkt alleen als de Lagrangiaan een kwadratische functie van \dot{q} is. Het is ook *niet* voldoende is om te zeggen dat de Hamiltoniaan gegeven wordt $p\dot{q} - L$, want H is een functie van p en q, en *niet* van \dot{q} .

Laten we één en ander aan de hand van een aantal voorbeelden illustreren:

Voorbeeld: kinetische energie is een kwadratische functie

Gelukkig is het meestal het geval dat de kinetische energie een kwadratische functie is van de gegeneraliseerde snelheden. Voor deze, in de praktijk vaak voorkomende, klasse van problemen, kunnen we de stappen 2, 3 en 4 in het algemeen uitvoeren. Voor systemen met twee vrijheidsgraden x en y hebben we dan:

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = T(x, \dot{x}, y, \dot{y}) - V(x, y)$$
(8.18)

waarbij T geschreven kan worden als:

$$T(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{\alpha}{2} \dot{x}^2 + \beta \dot{x} \dot{y} + \frac{\gamma}{2} \dot{y}^2$$
(8.19)

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$
(8.20)

$$\equiv \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}^T \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{r}}, \qquad (8.21)$$

waar $\dot{\boldsymbol{r}}^T = (\dot{x}, \dot{y})$ en de massa matrix \boldsymbol{M} gegeven is door

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$
(8.22)

waar mogelijk de coefficienten α , β en γ functies kunnen zijn van x en (of) y. In deze gevallen is het canonieke momentum p dan

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{M} \dot{\boldsymbol{r}}$$
(8.23)

ofwel

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$
(8.24)

De volgende stap is het bepalen van de gegeneraliseerde snelheden in termen van de canonieke momenta, ofwel het inverteren van de bovenstaande vergelijking:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{p} \tag{8.25}$$

 dus

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\gamma - \beta^2} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$$
(8.26)

Met behulp hiervan kan de kinetische energie kan nu geschreven worden als:

$$T(x, p_x, y, p_y) = \frac{1}{2} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{p}$$
(8.27)

en de Hamiltoniaan is dus:

$$H = \boldsymbol{p}^{T} \left(\boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{p} \right) - \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{p}^{T} \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{p} - V \right)$$
(8.28)

$$= \frac{1}{2} \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{M}^{-1} \boldsymbol{p} + V \tag{8.29}$$

Merk op dat de Legendre transformatie dus alleen werkt als de massa matrix M inverteerbaar is! De uitbreiding naar meerdere vrijheidsgraden is hopelijk onmiddelijk duidelijk.

Voorbeeld: beweging in een potentiaal

Neem een deeltje dat in drie dimensies beweegt, onder invloed van een potentiaal. De Lagrangiaan is simpelweg

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - V(\boldsymbol{r})$$
(8.30)

De eerste stap is het bepalen van het canonieke impuls die bijr hoort:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m \dot{\boldsymbol{r}} \tag{8.31}$$

wat in dit geval overeenkomt met de 'gewone' impuls. Dit kunnen we inderdaad inverteren om \dot{r} te schrijven als functie van p:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{m} \boldsymbol{p} \tag{8.32}$$

Volgende stap is het construeren van de Hamiltoniaan, en deze schrijven in termen van r en p:

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - L \tag{8.33}$$

$$= \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} - \left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - V(\boldsymbol{r})\right)$$
(8.34)

$$= \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) \tag{8.35}$$

 $\mathbf{82}$

In dit geval komt dit inderdaad overeen met de totale energie. De vergelijkingen van Hamilton zijn nu:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}$$
(8.36)

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}$$
(8.37)

De eerste komt inderdaad overeen met de definitie van het momentum p in termen van de snelheid, en de tweede is de vergelijking van Newton voor een deeltje in een potentiaal $V(\mathbf{r})$.

Voorbeeld: Eén-dimensionale slinger

Neem de Lagrangiaan van een één-dimensionale slinger met als coördinaat de hoek θ :

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$
(8.38)

De canonieke impuls die bij θ hoort is:

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \tag{8.39}$$

en de Hamiltoniaan:

$$H(\theta, p_{\theta}) = p_{\theta} \dot{\theta} - L \tag{8.40}$$

$$= p_{\theta} \frac{p_{\theta}}{ml^2} - \left(\frac{p_{\theta}^2}{2ml^2} + mgl\cos\theta\right)$$
(8.41)

$$= \frac{p_{\theta}^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta \tag{8.42}$$

De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_{\theta}} = \frac{p_{\theta}}{ml^2};$$
(8.43)

$$\dot{p}_{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$
 (8.44)

Omdat in dit formalisme θ en p_{θ} compleet onafhankelijke variabelen zijn, zijn deze vergelijkingen makkelijk te visualiseren als een vectorveld in de faseruimte: op elk punt (θ, p_{θ}) kunnen we de vector $(\dot{\theta}, \dot{p}_{\theta})$ bepalen en weergeven. De tijdsevolutie is dan niets anders dan de "stroming" van dit vectorveld te volgen. Dit laat zien dat dit formalisme een natuurlijke beschrijving geeft van hoe systemen evolueren als functie van de tijd in de faseruimte.

voorbeeld: beweging in een centrale potentiaal

We hebben al gezien dat in een centrale potentiaal, door het behoud van impulsmoment, de beweging beperkt is tot een vlak. Als we de z-as loodrecht op dit vlak kiezen, en het systeem in termen van de cylindercoördinaten (r, ϕ) beschrijven hebben we als Lagrangiaan:

$$L(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi}) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - V(r)$$
(8.45)

De eerste stap is weer het bepalen van de momenta:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \qquad (8.46)$$

$$p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}. \tag{8.47}$$

en dan de Hamiltoniaan te construeren:

$$H(r,\phi,p_r,p_{\phi}) = p_r \dot{r} + p_{\phi} \dot{\phi} - L$$
(8.48)

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_{\phi}^2}{mr^2} - \left(\frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_{\phi}^2}{m^2r^2}\right) - V(r)\right)$$
(8.49)

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_{\phi}^2}{2mr^2} + V(r).$$
(8.50)

Tenslotte kunnen we de bewegingsvergelijkingen opstellen:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \tag{8.51}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} = \frac{p_{\phi}}{mr^2} \tag{8.52}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_{\phi}^2}{2mr^2} + V(r) \right)$$
(8.53)

$$\dot{p}_{\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \tag{8.54}$$

Het is duidelijk dat ϕ een cyclische coördinaat is (H hangt niet af van ϕ) en dat dus het canonieke momentum dat bij ϕ hoort, p_{ϕ} behouden is. Zoals al eerder gezien komt deze overeen met de z-component van het impulsmoment, $p_{\phi} = L_z$ – dit is precies (8.52). Tenslotte is (8.53) inderdaad de al bekende radiale bewegingsvergelijking voor een effectieve potentiaal $U(r) = \frac{L_z^2}{2mr^2} + V(r)$. Ook hier kunnen we duidelijk in de (r, ϕ, p_r, p_{ϕ}) faseruimte aangeven hoe een gegeven punt zal evolueren in de tijd. Het (ϕ, p_{ϕ}) gedeelte van de faseruimte is erg simpel: het bestaat uit horizontale vectoren, waarvan de lengte en richting afhangt van de positie langs de verticale as. In het (r, p_r) gedeelte van de faseruimte kunnen we, als we de potentiaal V(r) kennen, ook onmiddelijk aangeven hoe de "stroming" eruit ziet voor een bepaalde waarde van p_{ϕ} .

8.2. VERGELIJKINGEN VAN HAMILTON

Voorbeeld: beweging in een electromagnetisch veld

De Lagrangiaan voor een deeltje met lading e in een electromagnetisch veld is

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\left(\Phi - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}\right)$$
(8.55)

De canonieke impuls die hoort bij de positie vector \boldsymbol{r} hoort is

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$$
(8.56)

Dit kunnen we inverteren om de snelheid \dot{r} te schrijven als functie van p:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{m} \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \tag{8.57}$$

En de Hamiltoniaan wordt dus:

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - \left(\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\left(\Phi - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}\right)\right)$$
(8.58)

$$= \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^{2} + e\Phi \qquad (8.59)$$

$$= \frac{1}{m} \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \cdot \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) - \frac{1}{2m} \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \cdot \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) + e \Phi \left(8.60 \right)$$
$$\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right)^{2}$$

$$= \frac{\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^{2}}{2m} + e\Phi \tag{8.61}$$

Tenslotte zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial p_i} \right) = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)$$
(8.62)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = \frac{1}{m} \left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c} \boldsymbol{A} \right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial r_i} \right) + e \frac{\partial \Phi}{\partial r_i}$$
(8.63)

Als we nu het geval nemen van een uniform magneetveld in de z richting, met als vectorpotentiaal bijvoorbeeld $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$, dan vinden we voor een deeltje met massa m en lading e dat in het x - y vlak beweegt de Hamiltoniaan:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{eB}{c} y \right)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2$$
(8.64)

De vier bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\dot{p}_x = 0 \tag{8.65}$$

$$\dot{p}_y = -\frac{eB}{mc} \left(p_x + \frac{eB}{c} y \right) \tag{8.66}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \left(p_x + \frac{eB}{c} y \right) \tag{8.67}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{m} p_y \tag{8.68}$$

Het is duidelijk uit (8.65) dat p_x een behouden grootheid is, dus dat

$$p_x \equiv m\dot{x} - \frac{eB}{c}y = C_x \tag{8.69}$$

met C_x een integratie constante. Verder kunnen we (8.67) met $\frac{eB}{c}$ vermenigvuldigen vervolgens optellen bij (8.66). Dat levert op:

$$\frac{eB}{c}\dot{x} + \dot{p}_y = 0 \tag{8.70}$$

wat meteen te schrijven is als:

$$\frac{eB}{c}x + p_y = C_y = \frac{eB}{c}x + m\dot{y} \tag{8.71}$$

met de integratie constante C_y . Vergelijkingen (8.69) en (8.71) zijn makkelijk op te lossen:

$$x(t) = C_x \frac{\omega}{m} + R \sin\left(\omega \left(t - t_0\right)\right)$$
(8.72)

$$y(t) = -C_y \frac{\omega}{m} + R \cos\left(\omega \left(t - t_0\right)\right)$$
(8.73)

met $\omega = \frac{eB}{mc}$ de al bekende Larmor frequentie, en R en t_0 als nog twee integratie constanten.

8.3 Principe van Hamilton in de (q, p)-faseruimte

De Hamiltoniaan is nu geïntroduceerd als functie van de variabelen q_i en p_i . Gebleken is dat de beweging van het systeem volledig wordt bepaald door de vergelijkingen van Hamilton (8.15) en (8.16), zonder dat nog een verwijzing naar een Lagrangiaan nodig is. Het ligt nu voor de hand een stap verder te gaan en de coördinaten en impulsen als volkomen onafhankelijke variabelen op te vatten. Weliswaar waren de impulsen door (8.9) met behulp van de Lagrangiaan gedefiniëerd, maar als we eenmaal de Hamiltoniaan kennen doet dat voor het oplossen van de bewegingsvergelijkingen van Hamilton niet meer ter zake. Wat nog wel ter zake doet en wat een grote rol zal spelen, is dat iedere impuls canoniek is toegvoegd aan één bepaalde coördinaat, waarmee hij samen in de Hamiltonvergelijkingen voorkomt. Afgezien van een minteken spelen coördinaten en impulsen daarin trouwens een gelijkwaardige rol.

Het ligt dus voor de hand het Hamilton formalisme te beschouwen als gedefiniëerd binnen een 2n-dimensionale ruimte (de *faseruimte*), waarin de q_i en p_i onafhankelijke variabelen zijn. Dat betekent dat variaties van de bewegingskromme in die faseruimte aan te geven zijn als:

$$q_i(t) = q_i^0(t) + \delta q_i(t)$$
$$p_i(t) = p_i^0(t) + \delta p_i(t)$$

8.4. POISSON HAAKJES

waarin $q_i^0(t)$ en $p_i^0(t)$ de werkelijk gevolgde kromme aangeven, en waar $\delta q_i(t)$ en $\delta p_i(t)$ 2n volstrekt willekeurige en onafhankelijk van elkaar te kiezen functies zijn.

Binnen dit conceptuele kader kan nu weer een variatieprincipe worden geformuleerd, dat tot de juiste bewegingsvergelijkingen leidt; n.l. tot de vergelijkingen van Hamilton. Dat variatieprincipe luidt, dat bij vaste eindpunten voor de coördinaten, dus $\delta q_i(t_1) = 0$ en $\delta q_i(t_2) = 0$, (maar niet noodzakelijk voor de impulsen), de actie-integraal

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) \right) dt$$
(8.74)

extremaal is voor de werkelijk doorlopen bewegingskromme. Uitwerken van deze voorwaarde voor een variatie $(q_i, p_i) \rightarrow (q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i)$ levert op:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \tag{8.75}$$

De stokterm is weer nul en de overblijvende integraal kan alleen nul zijn voor iedere keuze van de functies δq_i en δp_i als aan de vergelijkingen van Hamilton (8.15) en (8.16) is voldaan. Deze vergelijkingen zijn dus equivalent met een variatieprincipe in de faseruimte uitgaande van de vorm (8.74) voor de actie-integraal.

8.4 Poisson Haakjes

In het algemeen zijn we geïnteresseerd hoe functies van p en q zich gedragen. Laten we een functie F(q, p) volgen in de tijd. We hebben natuurlijk:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}.$$
(8.76)

Als we nu de vergelijkingen van Hamilton invullen voor \dot{p} en \dot{q} dan vinden we dat dit kunnen schrijven als

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}.$$
(8.77)

Omdat we de combinatie van de eerste twee termen aan de rechterkant vaker zullen tegenkomen, introduceren we de volgende notatie, het zogenaamde *Poisson haakje* van F en H:

$$\{F,H\} \equiv \sum_{i} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$
(8.78)

Met deze notatie vinden we:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}.$$
(8.79)

Als nu $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, i.e. F hangt niet expliciet van de tijd af, dan vinden we dus dat F een behouden grootheid is als:

$$\{F, H\} = 0. \tag{8.80}$$

Laten we de eigenschappen van deze Poisson haakjes eens op een rijtje zetten:

- 1. antisymmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$
- 2. lineariteit: $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$ en $\{\alpha f, g\} = \alpha \{f, g\}$ voor $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 3. Leibnitz: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$
- 4. Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f, \}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$

Het bewijs van de Jacobi identiteit is een kwestie van geduldig alle termen uitschrijven, en vervolgens zien dat ze allemaal tegen elkaar wegvallen. Deze eigenschappen komen overeen met die van de commutator [f, g] uit de quantummechanica (dit is zeker niet toevallig!). De relatie met de quantummechanica wordt misschien nog suggestiever als we als functies gewoon de q en p zelf nemen:

$$\{q_i, q_j\} = 0;$$
 (8.81)

$$p_i, p_j\} = 0;$$
 (8.82)

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. \tag{8.83}$$

We zullen hier later op terug komen.

Merk op dat met behulp van de eigenschappen van de Poisson haakjes we een tweetal interessante eigenschappen simpel kunnen bewijzen:

1. als H niet expliciet van de tijd afhangt is H een behouden grootheid:

{

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t}$$
(8.84)

waar we gebruikt hebben dat het Poisson haakje anti-symmetrisch is, en dat dus voor elke functie G het Poisson haakje met zichzelf moet verdwijnen, $\{G, G\} = 0$.

2. als f en g behouden grootheden zijn , dan is $\{f, g\}$ dat ook. Het bewijs is een kwestie van het toepassen van de Jacobi identiteit:

$$\frac{d\{f,g\}}{dt} = \{\{f,g\},H\} + \frac{\partial\{f,g\}}{\partial t}$$

$$(8.85)$$

$$= -\{\{g, H\}, f\} - \{\{H, f\}, g\} + \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$$
(8.86)

$$= -\{\{g,H\} + \frac{\partial g}{\partial t}, f\} + \{\{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}, g\}$$
(8.87)

$$= -\{\frac{dg}{dt}, f\} + \{\frac{df}{dt}, g\}$$
(8.88)

$$= 0$$
 (8.89)

Een andere bijkomende eigenschap is dat we met deze notatie de Hamilton vergelijkingen op een elegante, en symmetrische manier kunnen schrijven:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\},$$
 (8.90)

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\},$$

 $\dot{p}_i = \{p_i, H\}.$
(8.90)

(8.91)

voorbeeld: nog eens een centrale potentiaal

Laten we terug komen op de Hamiltoniaan voor een beweging in een centrale potentiaal (8.50):

$$H(r, \phi, p_r, p_{\phi}) = p_r \dot{r} + p_{\phi} \dot{\phi} - L$$
(8.92)

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_{\phi}^2}{2mr^2} + V(r).$$
 (8.93)

De bewegingsvergelijkingen (8.51-8.54) kunnen geschreven worden als:

$$\dot{r} = \{r, H\}$$

$$(8.94)$$

$$= \frac{\partial r}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial r}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial \phi}\frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} - \frac{\partial r}{\partial p_{\phi}}\frac{\partial H}{\partial \phi}$$
(8.95)

$$= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \tag{8.96}$$

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} \tag{8.97}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial \phi}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} - \frac{\partial \phi}{\partial p_{\phi}} \frac{\partial H}{\partial \phi}$$
(8.98)

$$= \frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} = \frac{p_{\phi}}{mr^2} \tag{8.99}$$

$$\dot{p}_r = \{p_r, H\}$$
(8.100)

$$= \frac{\partial p_r}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial p_r}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial p_r}{\partial \phi}\frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} - \frac{\partial p_r}{\partial p_{\phi}}\frac{\partial H}{\partial \phi}$$
(8.101)

$$= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_{\phi}^2}{2mr^2} + V(r) \right)$$
(8.102)

$$\dot{p}_{\phi} = \{p_{\phi}, H\}$$
(8.103)

$$= \frac{\partial p_{\phi}}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial p_{\phi}}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial p_{\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial H}{\partial p_{\phi}} - \frac{\partial p_{\phi}}{\partial p_{\phi}} \frac{\partial H}{\partial \phi}$$
(8.104)

$$= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \tag{8.105}$$

Het is ook hier duidelijk dat p_{ϕ} een behouden grootheid is. Het is ook makkelijk om te laten zien dat:

$$\{\phi, p_{\phi}\} = \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial p_{\phi}}{\partial p_{\phi}} - \frac{\partial \phi}{\partial p_{\phi}} \frac{\partial p_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial p_{\phi}}{\partial p_{r}} - \frac{\partial \phi}{\partial p_{r}} \frac{\partial p_{\phi}}{\partial r}$$
(8.106)

$$= 1$$

$$\{r, p_{\phi}\} = \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial p_{\phi}}{\partial r} - \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial p_{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial p_{\phi}}{\partial r} - \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial p_{\phi}}{\partial r}$$

$$(8.107)$$

$$(8.108)$$

$$\begin{array}{cccc} \partial \phi \, \partial p_{\phi} & \partial p_{\phi} \, \partial \phi & \partial r \, \partial p_{r} & \partial p_{r} \, \partial r \\ = & 0 \end{array}$$

$$(8.109)$$

$$\{\phi, p_r\} = \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \frac{\partial p_r}{\partial p_{\phi}} - \frac{\partial \phi}{\partial p_{\phi}} \frac{\partial p_r}{\partial \phi} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial p_r}{\partial p_r} - \frac{\partial \phi}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial r}$$
(8.110)

$$= 0$$

$$\{r, p_r\} = \frac{\partial r}{\partial \phi} \frac{\partial p_r}{\partial p_{\phi}} - \frac{\partial r}{\partial p_{\phi}} \frac{\partial p_r}{\partial \phi} + \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial p_r}{\partial p_r} - \frac{\partial r}{\partial p_r} \frac{\partial p_r}{\partial r}$$

$$(8.111)$$

$$(8.112)$$

Het feit dat $\{p_r, p_r\} = \{p_{\phi}, p_{\phi}\} = \{p_r, p_{\phi}\} = \{r, r\} = \{\phi, \phi\} = \{\phi, r\} = 0$ is duidelijk, want alle termen hebben een term waarbij óf een coördinaat naar een impuls, óf een impuls naar een cördinaat wordt gedifferentieerd, en, omdat coördinaten en impulsen bij constructie onafhankelijk zijn is dus elke term evenredig met nul, en dus de som is nul.

Interpretatie Poisson haakjes

We hebben al gezien dat we Hamilton vergelijkingen kunnen schrijven als

= 1

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\},$$
 (8.115)

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}.$$
 (8.116)

en we hebben de volgende relaties:

$$\{q_i, q_j\} = 0; (8.117)$$

$$\{p_i, p_j\} = 0;$$
 (8.118)

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}. (8.119)$$

Kunnen we hier een interpretatie aan geven? Laten we beginnen door eens te kijken naar de evolutie in de tijd. De verandering van q en p is gegeven door (8.116), en kan ook geschreven worden als:

$$q(t + \delta t) = q(t) + \dot{q}\delta t = q(t) + \{q, H\}\delta t$$
 (8.120)

$$p(t + \delta t) = p(t) + \dot{p}\delta t = p(t) + \{p, H\}\delta t$$
 (8.121)

We kunnen stellen dat de variatie van q en p als functie van de tijd gegenereerd wordt door het Poisson haakje met H. Op een soortgelijke manier kunnen we ook tegen relaties (8.119) aan kijken. De vraag is *wat* er gegeneerd wordt. Als we in plaats van de Hamiltoniaan het momentum in de x richting, p_x , invullen, dan vinden we (met $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$ en $(p_1, p_2, p_3) = (p_x, p_y, p_z)$:

$$x + \delta x = x + \{x, p_x\}\epsilon \quad \Rightarrow \delta x = \epsilon \tag{8.122}$$

$$y + \delta y = y + \{y, p_x\}\epsilon \quad \Rightarrow \delta y = 0 \tag{8.123}$$

$$z + \delta z = z + \{z, p_x\}\epsilon \quad \Rightarrow \delta z = 0 \tag{8.124}$$

$$z + \delta z = 2 + \{z, p_x\}\epsilon \implies \delta z = 0$$

$$p_x + \delta p_x = p_x + \{p_x, p_x\}\epsilon \implies \delta p_x = 0$$

$$p_y + \delta p_y = p_y + \{p_y, p_x\}\epsilon \implies \delta p_y = 0$$

$$(8.124)$$

$$(8.125)$$

$$(8.126)$$

$$p_y + \delta p_y = p_y + \{p_y, p_x\}\epsilon \implies \delta p_y = 0$$
(8.126)

$$p_z + \delta p_z = p_z + \{p_z, p_x\}\epsilon \Rightarrow \delta p_z = 0$$
(8.127)

Dit komt precies overeen met een (infinitesimale) translatie in de x richting. We kunnen dus concluderen dat p_x een translatie genereert. In het algemeen is het effect van een translatie in de richting d op een grootheid F niets anders dan het Poisson haakje $\{F, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{d}\}$. In het geval van positie en impuls is dit:

$$\delta \boldsymbol{r} = \{ \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{d} \} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{d}$$
(8.128)

$$\delta \boldsymbol{p} = \{ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{d} \} \boldsymbol{\epsilon} = 0 \tag{8.129}$$

Het impulsmoment $L = r \wedge p$, kan in carthesische coördinaten geschreven worden als:

$$L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2; \quad L_2 = r_3 p_1 - r_1 p_3; \quad L_3 = r_1 p_2 - r_2 p_1.$$
 (8.130)

ofwel

$$L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k \tag{8.131}$$

De Poisson haakjes van L_3 met de coördinaten $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)$ zijn bijvoorbeeld:

$$\{r_1, L_3\} = \{r_1, r_1 p_2 - r_2 p_1\}$$
(8.132)

$$= r_1\{r_1, p_2\} - r_2\{r_2, p_1\}$$
(8.133)

$$= -r_2$$
(8.134)
= $\{r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_n\}$ (8.135)

$$\{r_2, L_3\} = \{r_2, r_1 p_2 - r_2 p_1\}$$

$$= r_1 \{r_2, p_2\} - r_2 \{r_2, p_1\}$$

$$(8.135)$$

$$(8.136)$$

$$= r_1 \{r_2, p_2\} - r_2\{r_2, p_1\}$$
(8.130)
$$= r_1$$
(8.137)

$$\{r_3, L_3\} = \{r_3, r_1p_2 - r_2p_1\}$$
(8.138)

$$= r_1\{r_3, p_2\} - r_2\{r_3, p_1\}$$
(8.139)

$$= 0$$
 (8.140)

(8.141)

Dit is precies een infinitesimale rotatie rondom de z-as. Voor zo'n rotatie, met een hoek $\delta\phi$, kunnen we dus schrijven:

$$\delta \boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{r}, L_3\}\delta\phi \tag{8.142}$$

In het algemene geval hebben we:

$$\{r_i, L_j\} = \{r_i, \epsilon_{jkl} r_k p_l\}$$
(8.143)

$$= \epsilon_{jkl} r_k \{r_i, p_l\} \tag{8.144}$$

$$= \epsilon_{jkl} r_k \delta_{il} \tag{8.145}$$

$$= \epsilon_{ijk} r_k \tag{8.146}$$

en met behulp hiervan is het niet moeilijk om aan te tonen dat een infinitesimale rotatie om een as $\hat{\boldsymbol{n}}$ met hoek $\delta \phi$ geschreven kan worden als:

$$\delta \boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\} \delta \phi = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{L}\} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \delta \phi = \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{r} \delta \phi \qquad (8.147)$$

Nu zou onder zo een rotatie ook het momentum op precies dezelfde manier moeten veranderen. Dit blijkt inderdaad zo te zijn:

$$\delta \boldsymbol{p} = \{ \boldsymbol{p}, \boldsymbol{L} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \} \delta \phi = \hat{\boldsymbol{n}} \wedge \boldsymbol{p} \delta \phi$$
(8.148)

Wat is nu het effect van het Poisson haakje van een impulsmoment met zichzelf? Omdat het impulsmoment ook een vector is, verwachten we dat L zich op dezelfde manier gedraagt als r en p. Om dit af te leiden beginnen we met het Poisson haakje van L_1 en L_2 :

$$\{L_1, L_2\} = \{r_2 p_3 - r_3 p_2, r_3 p_1 - r_1 p_3\}$$
(8.149)

$$= \{r_2p_3, r_3p_1\} - \{r_2p_3, r_1p_3\} - \{r_3p_2, r_3p_1\} + \{r_3p_2, r_1p_3\} \quad (8.150)$$

$$= -r_2p_1 - 0 - 0 + r_1p_2 \tag{8.151}$$

$$= L_3 \tag{8.152}$$

Het algemene bewijs is een kwestie van wat handige manipulaties met ϵ_{ijk} en δ_{ij} :

$$\{L_i, L_j\} = \{\epsilon_{ikl}r_kp_l, \epsilon_{jmn}r_mp_n\}$$
(8.153)

$$= \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\{r_kp_l, r_mp_n\}$$
(8.154)

$$= \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} (r_k \{p_l, r_m\}p_n + r_m \{r_k, p_n\}p_l)$$

$$= \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} (r_k \{p_l, r_m\}p_n + r_m \{r_k, p_n\}p_l)$$

$$= \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn} (-\delta_{ij} r_{ij} r_{j} + \delta_{ij} r_{j} r_{j})$$

$$(8.155)$$

$$(8.156)$$

$$= \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\left(-\delta_{lm}r_kp_n + \delta_{kn}r_mp_l\right) \tag{8.156}$$

$$= (\epsilon_{lik}\epsilon_{ljn} - \epsilon_{min}\epsilon_{mjk})r_kp_n \qquad (8.157)$$

$$= (\delta_{ij}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kn} + \delta_{ik}\delta_{jn})r_kp_n$$
(8.158)

$$= (\delta_{ik}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jk})r_kp_n \tag{8.159}$$

$$= \epsilon_{ijl}\epsilon_{lkn}r_kp_n \tag{8.160}$$

$$= \epsilon_{ijk} L_k \tag{8.161}$$

waarbij naast de eigenschappen van het Poisson haakje en de definitie van L in termen van \boldsymbol{r} en \boldsymbol{p} alleen nog de identiteit $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$ gebruikt is. Een alternatieve manier om dit te bewijzen is om (8.152) voor alle zes niet-triviale combinaties uit te voeren. De conclusie is dat inderdaad L zich als een vector gedraagt.

Merk op dat (8.152) en (8.161) nog een gevolg hebben: vanwege de Jacobi identiteit weten we dat zodra twee componenten van L behouden zijn, de derde dat ook moet zijn! Op een soortgelijke manier kan bewezen worden dat

$$\{L^2, L_i\} = \{L_j L_j, L_i\}$$
(8.162)

$$= L_j \{L_j, L_i\} + \{L_j, L_i\} L_j$$
(8.163)

$$= 2\epsilon_{jik}L_jL_k = 0 \tag{8.164}$$

Dit zou geen verrassing mogen zijn: dit is niets anders dan het feit dat de lengte van een vector niet verandert onder rotaties.

voorbeeld: de Runge-Lenz vector

Als we nu naar een r^{-1} potentiaal kijken, dan zagen we al dat er nog een behouden grootheid is, namelijk de Runge-Lenz vector:

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{m} \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{L} - \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$
(8.165)

Met wat saai werk kunnen we de Poisson haakjes van K met L vinden:

$$\{L_i, K_j\} = \epsilon_{ijk} K_k; \quad \{K_i, K_j\} = -\frac{2}{m} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{1}{r}\right) \epsilon_{ijk} L_k \tag{8.166}$$

Het eerste is te verwachten, want K is een vector. Het laatste suggereert dat voor de Hamiltoniaan $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{1}{r}$ er iets speciaals aan de hand is. Namelijk omdat we hebben dat:

$$\{K_i, K_j\} = -\frac{2H}{m}\epsilon_{ijk}L_k \tag{8.167}$$

94 HOOFDSTUK 8. MECHANICA VAN HAMILTON (G8)

is het makkelijk om aan te tonen dat, als \boldsymbol{L} een behouden grootheid is, dat voor deze Hamiltoniaan \boldsymbol{K} dat ook is:

$$\{K_i, H\} = 0 \tag{8.168}$$

en dat dus inderdaad \boldsymbol{K} een behouden grootheid is.

8.5 Integratie van infinitesimale transformaties

We hebben uitvoerig gezien wat het effect van infinitesimale transformaties is, maar kunnen we dit gebruiken om problemen op te lossen? Het antwoord is dat dit formeel inderdaad het geval – maar het zal blijken dat in de praktijk dit meestal niet de eenvoudige oplossing zal zijn. Laten we beginnen met het effect van een infinitesimale transformatie gegenereerd door een functie F, op een coördinaat (of andere functie) u:

$$\delta u = \{u, F\}\delta\lambda \tag{8.169}$$

Dit kunnen we ook schrijven als:

$$\frac{du}{d\lambda} = \{u, F\} \tag{8.170}$$

Als we nu op zoek zijn naar $u(\lambda)$ voor eindige (i.e. niet-infinitesimale) λ , dan kunnen we dat doen door de Taylor serie voor u op te schrijven:

$$u(\lambda) = u(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0) \left. \frac{du}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} + \left. \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2!} \frac{d^2 u}{d^2 \lambda} \right|_{\lambda_0} + \frac{(\lambda - \lambda_0)^3}{3!} \frac{d^3 u}{d^3 \lambda} \right|_{\lambda_0} + \cdots$$
(8.171)

Als het verschil tussen λ en λ_0 inderdaad klein is, dan is de tweede term inderdaad de daarbij behorende δu , en kunnen de andere termen verwaarloosd worden. Maar als dit verschil *niet* klein is, dan zullen we meer termen mee moeten nemen... Maar we kunnen gelukkig (8.170) meer dan eens toepassen. In dat geval vinden we:

$$\frac{d^{2}u}{d^{2}\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\{u, F\}
= \{\{u, F\}, F\}
\frac{d^{3}u}{d^{3}\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\{\{u, F\}, F\}
= \{\{\{u, F\}, F\}, F\}
\frac{d^{4}u}{d^{4}\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\{\{\{u, F\}, F\}, F\}
= \{\{\{\{u, F\}, F\}, F\}, F\}$$
(8.172)

Als we dit invullen in (8.171) dan vinden we de volgende (formele) oplossing:

$$u(\lambda) = u(\lambda_{0}) + (\lambda - \lambda_{0}) \{u, F\} + \frac{(\lambda - \lambda_{0})^{2}}{2!} \{\{u, F\}, F\} + \frac{(\lambda - \lambda_{0})^{3}}{3!} \{\{\{u, F\}, F\}, F\} + \cdots$$
(8.173)

voorbeeld: rotaties

Laten we een rotatie om de z as nemen. In dit geval is dus $F = L_z = xp_y - yp_x$. De variatie van x als een functie van ϕ is dan:

$$x(\phi) = x(0) + \phi\{x, L_z, \} + \frac{1}{2}\phi^2\{\{x, L_z\}, L_z\} + \frac{1}{6}\phi^3\{\{\{x, L_z\}, L_z\}, L_z\} + \cdots$$
(8.174)

Als we de Poisson haakjes uitschrijven, dan vinden we:

$$\{x, L_z\} = -y \{\{x, L_z\}, L_z\} = \{-y, L_z\} = -x \{\{\{x, L_z\}, L_z\}, L_z\} = \{-x, L_z\} = y \{\{\{x, L_z\}, L_z\}, L_z\} = \{y, L_z\} = x$$

$$\{8.175)$$

Het is duidelijk dat na vier keer dit zich zal herhalen. Het resultaat voor x is dus:

$$\begin{aligned} x(\phi) &= x_0 - \phi y_0 - \frac{1}{2!} \phi^2 x_0 + \frac{1}{3!} \phi^3 y_0 + \frac{1}{4!} \phi^4 x_0 + \cdots \\ &= x_0 \left(1 - \frac{1}{2!} \phi^2 + \frac{1}{4!} \phi^4 - \cdots \right) - y_0 \left(\phi - \frac{1}{3!} \phi^3 + \frac{1}{5!} \phi^5 - \cdots \right) \\ &= x_0 \cos \phi - y_0 \sin \phi \end{aligned}$$
(8.176)

en voor y vinden we eensgelijks:

$$y(\phi) = y_0 + \phi x_0 - \frac{1}{2!} \phi^2 y_0 - \frac{1}{3!} \phi^3 x_0 + \frac{1}{4!} \phi^4 y_0 + \cdots$$

= $y_0 \left(1 - \frac{1}{2!} \phi^2 + \frac{1}{4!} \phi^4 - \cdots \right) + x_0 \left(\phi - \frac{1}{3!} \phi^3 + \frac{1}{5!} \phi^5 - \cdots \right)$
= $y_0 \cos \phi + x_0 \sin \phi$ (8.177)

voorbeeld: vrije val

Neem een voorwerp met massa m dat onder invloed van de zwaartekracht beweegt. De Hamiltoniaan is

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} \tag{8.178}$$

Als we de bewegingsvergelijking voor \boldsymbol{r} integreren vinden we:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + (t - t_0)\{\boldsymbol{r}, H\} + \frac{(t - t_0)^2}{2!}\{\{\boldsymbol{r}, H\}, H\} + \frac{(t - t_0)^3}{3!}\{\{\{\boldsymbol{r}, H\}, H\}, H\}, H\} + \cdots$$
(8.179)

De eerste term levert op:

$$\{\boldsymbol{r},H\} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \tag{8.180}$$

De tweede term is:

$$\{\{\boldsymbol{r},H\},H\} = \{\frac{\boldsymbol{p}}{m},H\} = \{\frac{\boldsymbol{p}}{m},-m\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}\} = +\boldsymbol{g}$$
(8.181)

De derde term is:

$$\{\{\{\boldsymbol{r}, H\}, H\}, H\} = \{\boldsymbol{g}, H\} = 0$$
(8.182)

En het is duidelijk dat ook de vierde en hogere termen nul opleveren. Als we nu alles invullen, dat vinden we tenslotte:

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) + (t - t_0)\frac{\boldsymbol{p}(t_0)}{m} + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 \boldsymbol{g}.$$
(8.183)

Het is duidelijk dat deze methode een oplossing oplevert, maar het is in het algemeen niet de snelste manier om het antwoord te vinden.

8.6 Nog een keer symmetrieën en behouden grootheden

We hadden al gezien in (6.3) dat er een relatie is tussen symmetrieën en behouden grootheden. Met behulp van de Poisson haakjes is dit eenvoudig om te laten zien. Laten we beginnen met een functie F die *niet expliciet* van de tijd afhangt. Volgens (8.79) is dan de tijdsafgeleide van F niets anders dan:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F, H\}.$$
(8.184)

waar we gebruikt hebben dat F geen expliciete functie van t is. Maar omdat het Poisson haakje anti-symmetrisch is, kunnen we dit ook schrijven als:

$$\frac{dF}{dt} = -\{H, F\}.$$
 (8.185)

De rechterkant van deze vergelijking kunnen we, op het minteken na, interpreteren in de verandering van H onder de transformatie gegenereerd door F:

$$\delta H = \{H, F\}\delta\lambda. \tag{8.186}$$

Als nu *H* invariant is onder deze transformatie, dan is dus $\delta H = 0$, en dan is dus onmiddellijk duidelijk dat:

$$\frac{dF}{dt} = -\{H, F\} = -\delta H = 0.$$
(8.187)

De stelling van Noether is dus eigenlijk gereduceerd tot het toepassen van het feit dat Poisson haakjes anti-symmetrisch zijn, en dit op een handige manier te interpreteren voor het geval dat één van de twee functies de Hamiltoniaan H is.

voorbeeld: nog eens de centrale potentiaal

Voor de centrale potentiaal hebben we de Hamiltoniaan (8.50):

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + V\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$
(8.188)

We verwachten dat H invariant is onder rotaties in het x - y vlak. Die worden gegenereerd door $L_z = xp_y - yp_x$. De variatie van H onder deze transformatie is:

$$\delta H = \{H, L_z\}\delta\phi \tag{8.189}$$

$$= \left(\frac{\{p_x^2 + p_y^2, xp_y - yp_x\}}{2m} + \{V(x, y), xp_y - yp_x\}\right)\delta\phi$$
(8.190)

$$= \left(\frac{\{p_x^2, x\}p_y - \{p_y^2, y\}p_x}{2m} + x\{V(x, y), p_y\} - y\{V(x, y), p_x\}\right)\delta\phi \quad (8.191)$$

$$= \left(\frac{2p_x p_y - 2p_y p_x}{2m} + (2xy - 2yx) V'(\sqrt{x^2 + y^2})\right) \delta\phi$$
(8.192)

$$= 0.$$
 (8.193)

Ofwel, de Hamiltoniaan is inderdaad invariant onder de transformatie gegenereerd door L_z . Tenslotte, met behulp van (8.79) zien we dat inderdaad:

$$\frac{dL_z}{dt} = \{L_z, H\} + \frac{\partial L_z}{\partial t}$$
(8.194)

$$= \{L_z, H\}$$
 (8.195)

$$= -\{H, L_z\} = 0. \tag{8.196}$$

8.7 De stelling van Liouville

_

We hebben gezien dat het formalisme van Hamilton een natuurlijke interpretatie heeft in termen van *stroming* in de faseruimte: voor elke tijdstip t kunnen we voor elk punt $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ in de faseruimte, met behulp van de bewegingsvergelijkingen, bepalen in welke richting dit punt zal bewegen:

$$q_i(t) \rightarrow q_i(t+\delta t) = q_i(t) + \delta t \dot{q}_i = q_i(t) + \delta t \{q_i, H\}$$

$$(8.197)$$

$$p_i(t) \rightarrow p_i(t+\delta t) = p_i(t) + \delta t \dot{p}_i = p_i(t) + \delta t \{p_i, H\}$$

$$(8.198)$$

In het algemeen is de stroming in de faseruimte niet simpel op te lossen. Maar als we naar een klein volume element kijken, dan kunnen we wel voorspellen wat er met dit volume gebeurt: de stroming die door (8.198) wordt gegenereerd heeft namelijk een belangrijke eigenschap. Laten we beginnen door elk punt in de faseruimte als vector op te schrijven: $\boldsymbol{x} = (q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$. Dan is de stroming van (8.198) niets anders dan het (lokaal) volgen van het vectorveld

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_N, \dot{p}_1, \cdots, \dot{p}_N) = (\frac{\partial H}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_N}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \cdots, -\frac{\partial H}{\partial q_N}).$$
(8.199)

Maar de *divergentie* van dit vector veld is nul:

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial \dot{q}_N}{\partial q_N} + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial \dot{p}_N}{\partial p_N}$$
$$= \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial q_N \partial p_N} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} - \dots - \frac{\partial^2 H}{\partial p_N \partial q_N}$$
$$= 0 \tag{8.200}$$

Dit leidt tot de stelling van Liouville: de stroming in de faseruimte gegenereerd door de Hamiltoniaan behoudt het volume.

Een andere afleiding is de volgende: een volume element in de faseruimte wordt gegeven door

$$V = dq_1 \cdots dq_N dp_1 \cdots dp_N \tag{8.201}$$

Na een infinitesimale tijd dt hebben we:

$$q_i \rightarrow \tilde{q}_i = q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt$$

$$p_i \rightarrow \tilde{p}_i = p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt$$
(8.202)

Ofwel, het volume verandert als:

$$V \to \tilde{V} = d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_N d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_N = (\det \mathcal{J})V$$
(8.203)

waar de
t ${\mathcal J}$ de Jacobiaan van de transformatie is, gedefinieer
d als de determinant van de volgende $2N\times 2N$ matrix:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_j} & \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$
(8.204)

Laten we dit expliciet doen voor N = 1. In dat geval hebben we:

$$\det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial^2 p} dt \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial^2 q} dt & 1 - \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} dt \end{pmatrix} = 1$$
(8.205)

Ofwel,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\det\mathcal{J}}{dt} = 0 \tag{8.206}$$

Als we dit voor $N \neq 1$ doen, dan vinden we:

$$\det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} \delta_{ij} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} dt & \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} dt \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} dt & \delta_{ij} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j} dt \end{pmatrix} = 1$$
(8.207)

Om de determinant uit te rekenen kunnen we de volgende relatie gebruiken: det $(1 + \epsilon M) = 1 + \epsilon \sum_{i} M_{ii} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ voor elke matrix M, en een kleine ϵ . Met behulp hiervan vinden we:

$$\det \mathcal{J} = 1 + \sum \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} \right) dt + \mathcal{O}(dt^2) = 1 + \mathcal{O}(dt^2).$$
(8.208)

We hebben dus weer bewezen dat de stroming in de faseruimte die door de Hamiltoniaan wordt gegenereerd het volume behoudt.

Interpretatie van de stelling van Liouville

Wat is de interpretatie van een volume in de faseruimte? We kunnen een collectie systemen voorstellen met een dichtheid $\rho(p, q, t)$. Dit kunnen we op twee manieren doen:

• we hebben één enkel systeem, maar we weten niet wat de precieze beginvoorwaarden zijn. In dat geval interpreteren we $\rho(p, q, t)$ als de waarschijnlijkheid dat het systeem zich op t op positie (q, p) in de faseruimte bevindt. In dit geval:

$$\int \rho(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N, t) dq_1 \cdots dq_N dp_1 \cdots dp_N = 1$$
(8.209)

we hebben een groot aantal identieke systemen die niet met elkaar reageren, e.g. 10²⁸ gas moleculen, en we zijn alleen geïnteresseerd in het gemiddelde gedrag. In dat geval:

$$\int \rho(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N, t) dq_1 \cdots dq_N dp_1 \cdots dp_N = N$$
(8.210)

In het beide gevallen weten we dat het aantal "systemen" behouden is. En omdat volgens de stelling van Liouville het volume van de stroming in de faseruimte behouden is, weten we dat $d\rho/dt = 0$, ofwel

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = \{H, \rho\}$$
(8.211)

De laatste vergelijking staat bekend als de Liouville vergelijking.

Een voorbeeld van de stelling van Liouville is wat er gebeurt met een ideaal gas onder (langzame, adiabatische) compressie: omdat het ruimtelijke volume $dq_1 \cdots dq_N$ afneemt, maar het volume $dq_1 \cdots dq_N dp_1 \cdots dp_N$ in de faseruimte gelijk zal blijven zullen de gas moleculen dus een groter volume $dp_1 \cdots dp_N$ moeten innemen. Als gevolg hiervan zal de gemiddelde impuls toenemen, ofwel het gas wordt heter. Dit is de basis voor de tweede wet van de thermodynamica.

Merk op dat het idee achter de stelling van Liouville lijkt op het Heisenberg onzekerheidsprincipe in de quantum mechanica: als we een systeem van deeltjes hebben in een volume $\Delta p \Delta q$ in de faseruimte, en we dit systeem laten evolueren door een Hamiltoniaan, dan zal ruimtelijke compressie van de deeltjes alleen kunnen als ze een grotere spreiding aan impulsen krijgen. Maar merk ook op dat dit fundamenteel anders is dan het Heisenberg onzekerheidsprincipe. In het klassieke geval is ρ de oorzaak van het gebrek aan kennis van de positie van alle deeltjes in de faseruimte. Het "echte" systeem bestaat niet uit een continue verdeling ρ maar uit een som over discrete punten. Dit betekent dat we in principe de discrete punten wel degelijk dichter naar elkaar toe kunnen brengen, zolang we de ruimte tussen de punten systematisch weg duwen en ergens anders laten expanderen! Dat dit in de praktijk werkt blijkt uit de zogenaamde stochastische koeling van deeljes in een deeltjes versneller. Hier willen we bundels van deeltjes zo goed mogelijk focusseren, om ze op een zo klein mogelijk oppervlak op elkaar te botsen, en op hetzelfde moment willen we ook dat alle deeltjes zo veel mogelijk dezelfde impuls hebben. In 1984 kreeg Simon van der Meer de Nobel prijs voor het in de praktijk brengen van dit idee.

Hoofdstuk 9 Canonieke transformaties (G9)

We hebben al gezien dat de Lagrange vergelijkingen invariant zijn onder transformaties van het type $q_i \rightarrow Q_i(q_1, \ldots, q_N)$ (zolang de transformatie *inverteerbaar* is). Nu we canonieke impulsen en coördinaten op gelijk voet behandelen, is de vraag of we nu ook algemenere transformaties kunnen toelaten, e.g. transformaties die impulsen en coördinaten combineren:

$$\begin{array}{rcl}
q_i & \to & Q_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \\
p_i & \to & P_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N).
\end{array} \tag{9.1}$$

Waarom zou dit handig of interessant zijn? Er is tweërlei reden om transformaties van variabelen te bestuderen. Eén belangrijke reden is, dat de beweging van het representatieve punt langs de bewegingskromme in verband kan worden gebracht met een continue verandering van canonieke variabelen. De andere reden is dat het toepassen van een geschikte transformatie van variabelen het probleem kan vereenvoudigen. Denk maar aan problemen die eenvoudiger zijn in poolcoördinaten dan in cartesische coördinaten of aan het overgaan op zwaartepunts- en relatieve coördinaten. Binnen het kader van het Hamilton formalisme denken we in de eerste plaats aan transformaties waardoor de vorm van de Hamiltoniaan na transformatie een kleiner aantal (getransformeerde) coördinaten of impulsen bevat. Zodra immers een bepaalde getransformeerde coördinaat niet meer in H voorkomt, is de bijbehorende canonieke impuls een constante van de beweging. Zou het tenslotte gelukken zodanig te transformeren dat de Hamiltoniaan van geen enkele getransformeerde coördinaat Q_i meer afhangt, dan zijn de getransformeerde impulsen P_i alle constanten van de beweging: $P_i = \alpha_i$. De getransformeerde Hamiltoniaan, die we aangeven met K, is dan alleen een functie van constanten, zodat de tijdafgeleiden van de Q_i ook constanten zijn:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{\partial K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}{\partial \alpha_i} = \omega_i$$
(9.2)

en de verdere oplossing is triviaal!

Bij deze redenering is er wel van uitgegaan, dat ook na de transformatie nog steeds de vergelijkingen van Hamilton gelden:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, t)}{\partial P_i}$$
(9.3)

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, t)}{\partial Q_i} .$$
(9.4)

Omdat bij transformatie deze canonieke vorm van de bewegingsvergelijkingen behouden moet blijven, spreken we van een *canonieke transformatie*.

Hoe kunnen we nu garanderen dat de transformaties (9.1) canoniek zijn, dus dat (9.3) en (9.4) gelden? Daarop geven we hier twee antwoorden. Ten eerste door de transformatie te construeren met behulp van een genererende functie (paragraaf 9.2). Of, als we de transformaties (9.1) al beschikbaar hebben, door na te gaan of deze wel voldoen aan de eisen in paragraaf 9.1.

9.1 Canonieke transformaties en Poisson haakjes

De vraag is dus of nieuwe variabelen $(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$ voldoen aan de Hamilton vergelijkingen. Aangezien de nieuwe variabelen Q_i en P_i gewoon functies zijn van de oude $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$, weten we al onmiddellijk wat hun tijdsafhankelijkheid is. Immers voor elke functie F (die niet expliciet van de tijd afhangt) hebben we dat $\dot{F} = \{F, H\}$. In dit geval is dat dus:

$$Q_{i} = \{Q_{i}, H\}_{q,p}$$

$$\dot{P}_{i} = \{P_{i}, H\}_{q,p}$$
(9.5)

waar we voor de duidelijkheid indices q, p aan de Poisson haakjes hebben gegeven om aan te geven dat we in de Poisson haakjes naar q en p moeten differentiëren. Als we nu (9.5) als de Hamilton vergelijkingen willen identificieren, dan zal de rechterkant gelijk moeten zijn aan de Poisson haakjes in termen van Q en P in plaats van q en p, i.e.

$$\{Q_i, H\}_{q,p} = \{Q_i, K\}_{Q,P} \{P_i, H\}_{q,p} = \{P_i, K\}_{Q,P}.$$

$$(9.6)$$

waar $K(Q_1, \dots, Q_N, P_1, \dots, P_N)$ de getransformeerde Hamiltoniaan is, i.e.

$$K(Q_1, \cdots, Q_N, P_1, \cdots, P_N) = H(q_1(Q_1, \cdots, Q_N, P_1, \cdots, P_N), \cdots, q_N(Q_1, \cdots, Q_N, P_1, \cdots, P_N), p_1(Q_1, \cdots, Q_N, P_1, \cdots, P_N), \cdots, p_1(Q_1, \cdots, Q_N, P_1, \cdots, P_N))$$

Dat betekent dat we naar transformaties zoeken die in het algemeen de eigenschap hebben dat het *Poisson haakje invariant is*, i.e.:

$$\{F,G\}_{q,p} = \{F,G\}_{Q,P}.$$
(9.7)

Omdat de Q_i en de P_i gewoon functies van de q_i en de p_i zijn, kunnen we de kettingregel aan de linkerkant van (9.7) gebruiken. We vinden dan het volgende:

$$\{F,G\}_{q,p} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_i}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right)$$

$$- \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial G}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} \right)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial P_k} \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \left(\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} - \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial Q_k} \left\{ Q_j, Q_k \right\}_{q,p}$$

$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \frac{\partial G}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_k} \frac{\partial G}{\partial Q_j} \right) \{Q_j, P_k\}_{q,p}$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial P_j} \frac{\partial G}{\partial P_k} \{P_j, P_k\}_{q,p}$$

$$(9.8)$$

We hebben dus een soort kettingregel voor Poisson haakjes afgeleid. Als we nu eisen dat (9.7) geldt, dan moet dus aan de volgende voorwaarden worden voldaan:

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0; \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij}; \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0.$$
 (9.9)

Want als we dit invullen in (9.8), dan vinden we:

$$\{F,G\}_{q,p} = \{F,G\}_{Q,P} \tag{9.10}$$

wat weer betekent dat:

$$\dot{Q} = \{Q, H\}_{q,p} = \{Q, H\}_{Q,P}
\dot{P} = \{P, H\}_{q,p} = \{P, H\}_{Q,P}$$
(9.11)

Ofwel, we hebben nu bewezen dat *een transformatie canoniek is als Poisson haakjes invariant zijn*. We kunnen dus controleren of een set coördinaten (Q, P) te verkrijgen is

uit een set (q, p) (waarvan we weten dat deze voldoen aan de Hamilton vergelijkingen) met behulp van een canonieke transformatie door de Poisson haakjes van de nieuwe variabelen in termen van de oude variabelen uit te rekenen. Als deze inderdaad voldoen aan (9.9) dan is de transformatie canoniek.

9.2 Genereren van canonieke transformaties

We hebben al gezien dat de Lagrange vergelijkingen invariant zijn onder transformaties van het type $q_i \rightarrow Q_i(q_1, \ldots, q_N)$ (zolang de transformatie *inverteerbaar* is). We hebben nu ook gezien dat de Hamiltonvergelijkingen invariant zijn onder transformaties die zowel impulsen als coördinaten combineren

$$\begin{array}{rcl}
q_i & \to & Q_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \\
p_i & \to & P_i(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N).
\end{array} \tag{9.12}$$

zolang deze de fundamentele Poisson haakjes respecteren. De vraag is nu of we een recept kunnen geven om dit soort transformaties te genereren. We hebben gezien dat we de Hamiltonvergelijkingen kunnen afleiden uit een variatie principe. Het is voldoende om te eisen dat:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt p_i \dot{q}_i - H(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N) = 0$$
(9.13)

Als we nu willen dat de nieuwe coördinaten en impulsen aan hun Hamilton vergelijkingen voldoen, betekent dat natuurlijk dat:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt P_i \dot{Q}_i - K(Q_1, \cdots, Q_N, P_1, \cdots, P_N) = 0$$
(9.14)

Als we willen dat beide eisen hetzelfde opleveren, dan zal dus:

$$P_i \dot{Q}_i - K(Q_1, \cdots, Q_N, P_1, \cdots, P_N) = p_i \dot{q}_i - H(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N)$$
(9.15)

moeten zijn – maar omdat alleen variaties die "op de rand" verdwijnen zijn toegestaan is dit niet het hele verhaal: zoals al eerder gezien kunnen we altijd een term toestaan die alleen op de rand van het integratie domein iets doet. Dit betekent dat we kunnen eisen dat het verschil een (totale) afgeleide van de tijd is:

$$(p_i \dot{q}_i - H(q_1, \cdots, q_N, p_1, \cdots, p_N)) - \left(P_i \dot{Q}_i - K(Q_1, \cdots, Q_N, P_1, \cdots, P_N)\right) = \frac{dF}{dt}$$
(9.16)

waar F in principe van Q, P, q en p kan afhangen, maar let op: van deze 4N variabelen zijn er maar 2N onafhankelijk! We kunnen dus voor F elke functie van 2N verschillende variabelen uit de set van Q, q, P, p kiezen. Laten we twee combinaties nader uit werken, namelijk het geval dat F een functie is van $(q_1, \dots, q_N, Q_1, \dots, Q_N)$ en het geval van $(q_1, \dots, q_N, P_1, \dots, P_N)$. $F = F_1(q_1, \cdots, q_N, Q_1, \cdots, Q_N, t)$

Laten we eerst het geval beschouwen dat F afhangt van q en Q, en eventueel van t: $F = F_1(q_1, \dots, q_N, Q_1, \dots, Q_N, t)$. Dit betekent dat:

$$p_{i}\dot{q}_{i} - H = P_{i}\dot{Q}_{i} - K + \frac{dF_{1}}{dt}$$

$$= P_{i}\dot{Q}_{i} - K + \frac{\partial F_{1}}{\partial q_{i}}\dot{q}_{i} + \frac{\partial F_{1}}{\partial Q_{i}}\dot{Q}_{i} + \frac{\partial F_{1}}{\partial t}$$
(9.17)

Omdat de coördinaten q_i en Q_i elk onafhankelijk zijn, betekent dit dat in ieder geval de coëfficiënten van van \dot{q}_i en \dot{Q}_i nul zullen moeten zijn:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \tag{9.18}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}.$$
(9.19)

Als we dit gebruiken, dan blijft er van (9.17) het volgende over:

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \tag{9.20}$$

Laten we als voorbeeld de functie $F_1(q, Q, t) = q_j Q_j$ kiezen. In dat geval vinden we

$$p_{i} = \frac{\partial q_{j}Q_{j}}{\partial q_{i}} = Q_{i}$$

$$P_{i} = -\frac{\partial q_{j}Q_{j}}{\partial Q_{i}} = -q_{i}$$
(9.21)

Ofwel, op een - teken na, wisselen de coördinaten en impulsen. Dat we na deze transformatie weer de Hamilton vergelijkingen terugvinden is eenvoudig na te gaan:

$$\dot{Q}_i = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$
$$\dot{P}_i = -\dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}.$$
(9.22)

 $F(q_1,\cdots,q_N,P_1,\cdots,P_N,t)$

In dit geval is F een functie van de N nieuwe impulsen en N oude coördinaten. We zullen moeten kijken wat in dit geval het equivalent van (9.17) is:

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$$
$$= -\dot{P}_i Q_i + \frac{d(P_i Q_i)}{dt} - K + \frac{dF}{dt}$$
(9.23)

$$= -\dot{P}_i Q_i - K + \frac{dF_2}{dt} \tag{9.24}$$

$$= -\dot{P}_i Q_i - K + \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$
(9.25)

waar we $F_2 = F + Q_i P_i$ hebben gedefinieerd. Dit leidt tot:

$$p_{i} = \frac{\partial F_{2}}{\partial q_{i}}$$

$$Q_{i} = \frac{\partial F_{2}}{\partial P_{i}}.$$
(9.26)

samen met:

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{9.27}$$

Als voorbeeld van deze transformatie kiezen we $F_2 = q_j P_j$. In dat geval vinden we:

$$p_{i} = \frac{\partial q_{j}P_{j}}{\partial q_{i}} = P_{i}$$

$$Q_{i} = \frac{\partial q_{j}P_{j}}{\partial P_{i}} = q_{i}$$
(9.28)

Dit is nog eens een triviale transformatie – er gebeurt eigenlijk namelijk niets.

voorbeeld: harmonische oscillator

Laten we eens kijken naar een voorbeeld van het nut van deze transformaties. Laten we beginnen met de bekende Hamiltoniaan voor de harmonische oscillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2m} \left(p^2 + m^2 \omega^2 q^2 \right)$$
(9.29)

Omdat de Hamiltoniaan de som van twee kwadraten is zouden we graag als variabelen de "lengte" en de "richting" willen hebben – omdat in dat geval de Hamiltoniaan niet van de richting zal afhangen. We willen dus een Hamiltoniaan van de vorm:

$$H = \frac{f^2(P)}{2m} \left(\cos^2 Q + \sin^2 Q \right) = \frac{f^2(P)}{2m}$$
(9.30)

Dit kan als we als de nieuwe coordinaten Q en P definieren als:

$$p = f(P)\cos Q \tag{9.31}$$

$$q = \frac{1}{m\omega} f(P) \sin Q \tag{9.32}$$

De genererende functie F_1 die hier bij hoort, vinden we door op te merken dat

$$p = m\omega q \cot Q. \tag{9.33}$$

Uit (9.18) volgt dan

$$F_1 = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q. \tag{9.34}$$

Nu levert (9.19) op:

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{1}{2}m\omega \frac{q^2}{\sin^2 Q}$$
(9.35)

waaruit volgt

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q. \tag{9.36}$$

De functie f(P) is dus

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P} \tag{9.37}$$

Laten we controleren of deze transformatie inderdaad de fundamentele Poisson haakjes behouden. Het makkelijkste is om dit in de andere volgorde te doen, i.e.

$$\{q, p\}_{Q,P} = \{\sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \sqrt{2Pm\omega} \cos Q\}_{Q,P}$$

= $2\{\sqrt{P} \sin Q, \sqrt{P} \cos Q\}_{Q,P} = 1$ (9.38)

De transformatie is dus inderdaad canoniek. Tenslotte kunnen we de Hamiltoniaan bepalen:

$$H(Q, P, t) = \omega P. \tag{9.39}$$

In dit geval hangt de Hamiltoniaan inderdaad niet van Q af, en de bewegingsvergelijkingen voor P en Q zijn inderdaad triviaal:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$$
(9.40)

Dit is makkelijk op te lossen als:

$$Q(t) = \omega t + \phi_0$$

$$P(t) = \alpha; \qquad (9.41)$$

In termen van de originele coördinaten vinden we dus:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$p(t) = \sqrt{2m\omega} \cos(\omega t + \phi_0).$$
(9.42)

We kunnen nu (9.39) gebruiken om α in termen van de energie te schrijven, $\alpha = E/\omega$ om als uiteindelijke oplossing te vinden:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi_0).$$
(9.43)

Als we kijken naar de oplossing in termen van q en p dan bestaat de stroming in de faseruimte uit de al bekende ellipsen, maar in termen van de nieuwe variabelen Q en P zien we dat deze stroming nu simpelweg rechte lijnen zijn geworden! De nieuwe coördinaten Q en P zijn een voorbeeld van zogenaamde *hoek/actie variabelen* (eng: *action-angle variables*).

108
Hoofdstuk 10 Harmonische Oscillatoren (G6)

In een hoop gevallen zal het interessant zijn om de beweging in de buurt van een minimum van de potentiële energie te bekijken. In de buurt van een gegeven punt (q_1^0, \ldots, q_n^0) kunnen de potentiaal altijd benaderen door een Taylor expansie rond dit punt:

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(q_1^0, \dots, q_n^0)$$
 (10.1)

$$+ \sum_{i} \left(q_i - q_i^0 \right) \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i = q_i^0} \tag{10.2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(q_i - q_i^0 \right) \left(q_j - q_j^0 \right) \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i = q_i^0, q_j = q_j^0}$$
(10.3)

+
$$\mathcal{O}(q-q^0)^3$$
 (10.4)

Nu kunnen we het nulpunt van een potentiaal altijd kiezen dus de eerste, constante, term kunnen we schrappen; Als het punt (q_1^0, \ldots, q_n^0) een minimum is, zullen bij constructie de eerste-orde afgeleiden nul zijn, en verdwijnt de tweede, lineare, term dus. Tenslotte, als we in de buurt van het minimum blijven, dan kunnen we de vierde term verwaarlozen; merk op: de eis dat deze term te verwaarlozen is bepaalt hoe groot het gebied rond het minimum is waarvoor deze benadering goed genoeg is. Dit is de reden dat de harmonische oscillator zo vaak voorkomt in de praktijk – in de buurt van een minimum van een potentiaal kunnen we altijd het systeem zo schrijven dat de potentiaal van de vorm

$$V(q_1, \dots, q_n) = \frac{1}{2} V_{ij} \left(q_i - q_i^0 \right) \left(q_j - q_j^0 \right) \equiv \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$$
(10.5)

waar we η_i hebben gedefinieerd als $\eta_i=q_i-q_i^0$ en

$$V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_i = q_i^0, q_j = q_j^0} \tag{10.6}$$

Als we nu terug gaan de kinetische energie T, dan zullen we ook deze in de termen van η_i moeten schrijven, maar leten we beginnen met aan te nemen dat de kinetische energie geschreven kan worden als:

$$T = \sum_{i} \frac{1}{2} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \tag{10.7}$$

$$= \sum_{i} \frac{1}{2} m_{i} \left(\sum_{j} \frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial q_{j}} \dot{q}_{j} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_{i}}{\partial t} \right)^{2}$$
(10.8)

$$= T_0 + \sum_j T_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$
(10.9)

 met

$$T_0 = \sum_k \frac{1}{2} m_k \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\right)^2; \qquad (10.10)$$

$$T_i = \sum_k m_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}; \qquad (10.11)$$

$$T_{ij} = \sum_{k} m_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j}$$
(10.12)

Dus als de kinetische energie niet *expliciet* van de tijd afhangt, dan zijn $T_0 = T_i = 0$, en wordt de kinetische energie:

$$T(q_1, \cdots, q_N) = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$
 (10.13)

Omdat in termen van η we hebben dat $\dot{\eta}_i = \frac{d}{dt}(q_i^0 + q_i) = \dot{q}_i$, kan T geschreven worden als:

$$T(\eta_1, \cdots, \eta_N) = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$
 (10.14)

kan de Lagrangiaan in de buurt van een minimum van de potentiaal altijd worden geschreven als:

$$L(\eta_{1}, \cdots, \eta_{N}, \dot{\eta}_{1}, \cdots, \dot{\eta}_{N}) = \frac{1}{2} (T_{ij} \dot{\eta}_{i} \dot{\eta}_{j} - V_{ij} \eta_{i} \eta_{j})$$
(10.15)

De bewegingsvergelijkingen die hierbij horen zijn:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0 \Leftrightarrow T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0$$
(10.16)

Laten we deze vergelijking eens bestuderen voor het geval N = 1. In dat geval is deze van de vorm:

$$\ddot{\eta} = \lambda \eta \tag{10.17}$$

Afhankelijk van het teken van λ zijn er twee mogelijke scenarios:

• $\lambda < 0$: in dit geval zal een kleine afwijking van η weg van $\eta = 0$ terug naar $\eta = 0$ worden geduwd, en hebben we een stabiele situatie. De oplossing is

$$\eta(t) = A\cos\left(\omega(t - t_0)\right) \tag{10.18}$$

waar A en t_0 integratie constanten zijn, en de frequentie ω wordt gegeven door $\omega^2 = -\lambda = \frac{V''(q_0)}{m}$.

• $\lambda > 0$: in dit geval zal een kleine afwijking van $\eta = 0$ verder weg van $\eta = 0$ worden geduwd, en is de oplossing:

$$\eta(t) = Ae^{\sqrt{\lambda}t} + Be^{-\sqrt{\lambda}t} \tag{10.19}$$

met A en B integratie constanten, en $\lambda = \frac{V''(q_0)}{m}$. In het algemeen zal η snel groeien, en de benadering dat η klein is faalt. Het resultaat is een onstabiel systeem.

Merk op dat we in beide gevallen de oplossing kunnen schrijven als:

$$\eta(t) = Re\left(Ae^{-i\omega t} + Be^{i\omega t}\right) \tag{10.20}$$

waar A en B complexe integratie constanten zijn; in het eerste geval is ω reëel, en vinden we een oscillerende oplossing, terwijl in het laatste geval ω imaginair is, en we een exponentiële oplossing hebben.

Laten we weer terug komen op het N-dimensionale systeem. We hebben als bewegingsvergelijking

$$T_{ij}\ddot{\eta}_j + V_{ij}\eta_j = 0 \tag{10.21}$$

Als we de volgende vector en matrices definieren:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix}; \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{N1} & \cdots & T_{NN} \end{pmatrix} \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{N1} & \cdots & V_{NN} \end{pmatrix}$$
(10.22)

dan kunnen de bewegingsvergelijkingen geschreven worden als:

$$T\ddot{\eta} + V\eta = 0 \tag{10.23}$$

Merk op dat, vanwege (10.12) en (10.6), zowel \boldsymbol{T} als \boldsymbol{V} symmetrisch zijn, i.e. $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T$ en $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^T$ of, in termen van de compomenten, $T_{ij} = T_{ji}$ en $V_{ij} = V_{ji}$.

De dubbele slinger

Laten we, voordat we beginnen met het zoeken naar de oplossing van (10.23), een en ander illustreren aan de hand van een voorbeeld, namelijk de dubbele slinger.



In dit geval hebben we dat posities van de twee massa's gegeven worden door

$$\boldsymbol{r}_{1} = l_{1} \begin{pmatrix} \sin \theta_{1} \\ -\cos \theta_{1} \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{r}_{2} = \boldsymbol{r}_{1} + l_{2} \begin{pmatrix} \sin \theta_{2} \\ -\cos \theta_{2} \end{pmatrix}$$
(10.24)

De potentiële energie is dan

$$V(\theta_1, \theta_2) = (m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2) \cdot \boldsymbol{g} = g m_1 l_1 \cos \theta_1 + g m_2 (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2).$$
(10.25)

De (stabiele) evenwichts positie is $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Ontwikkelen van de potentiaal rond deze configuratie levert op:

$$V(\theta_1, \theta_2) \approx gm_1 l_1 \left(1 - \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) + gm_2 \left(l_1 \left(1 - \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) + l_2 \left(1 - \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) \right).$$
(10.26)

Als we de constante termen hieruit weggooien, dan houden we over:

$$V(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(m_1 + m_2)l_1 & 0 \\ 0 & gm_2l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$
(10.27)

Eensgelijks kunnen we de snelheid van de twee massa's in termen van $\dot{\theta}_1$ en $\dot{\theta}_2$ schrijven:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{1} = l_{1} \begin{pmatrix} \cos \theta_{1} \dot{\theta}_{1} \\ -\sin \theta_{1} \dot{\theta}_{1} \end{pmatrix}; \quad \dot{\boldsymbol{r}}_{2} = \dot{\boldsymbol{r}}_{1} + l_{2} \begin{pmatrix} \cos \theta_{2} \dot{\theta}_{2} \\ -\sin \theta_{2} \dot{\theta}_{2} \end{pmatrix}$$
(10.28)

De kinetische energie wordt dus:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2 \right)$$
(10.29)

$$= \frac{m_1 l_1 \theta_1^2}{2} + \frac{m_2}{2} \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right)$$
(10.30)

Ontwikkelen rond $\theta_1 = \theta_2 = 0$ levert op:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$
(10.31)

10.1. OPLOSSING DOOR MIDDEL VAN EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN113

De bewegingsvergelijkingen (10.23) zijn in dit geval dus:

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2\\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(m_1+m_2)l_1 & 0\\ 0 & gm_2l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1\\ \theta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (10.32)$$

10.1 Oplossing door middel van eigenwaarden en eigenvectoren

Als we, geïnspireerd door het feit dat zowel (10.18) als (10.19) in termen van complexe exponenten geschreven kunnen worden (10.20), een oplossing proberen van de vorm

$$\boldsymbol{\eta} = C\boldsymbol{a}e^{-i\omega t} \tag{10.33}$$

waar we (impliciet) alleen naar het reële deel zullen kijken. Als we dit invullen, dan vinden we:

$$\left(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{T}\right) \boldsymbol{a} = 0 \tag{10.34}$$

Deze vectorvergelijking is op te lossen als de volgende determinant nul is:

$$det\left(\mathbf{V}-\omega^{2}\mathbf{T}\right)=0\tag{10.35}$$

Dit is een N-de orde polynoom in ω^2 , en er zullen dus N oplossingen voor ω_i^2 zijn (merk op: niet alle N oplossingen hoeven verschillend te zijn). In het geval dat alle ω_i^2 positief zijn hebben we een stabiele oplossing. Is er een negatieve ω_i^2 , dan zal in het algemeen (tenzij we zeer speciale beginvoorwaarden hebben) het systeem niet stabiel zijn. Bij elk van deze N zogenaamde eigenwaarden ω_i^2 zal een eigenvector \mathbf{a}_i horen die de oplossing is van de vergelijking:

$$(\boldsymbol{V} - \omega_i^2 \boldsymbol{T}) \boldsymbol{a}_i = 0.$$
 geen sommatie! (10.36)

Omdat V en T symmetrische matrices zijn, en omdat T positief definiet is (omdat de kinetische energie nooit negatief kan zijn), kan bewezen worden dat

1. de eigenwaarden ω_i^2 zijn reëel, en niet-negatief. Als we beginnen met

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{a} = \omega^2 \boldsymbol{T}\boldsymbol{a} \tag{10.37}$$

dan vinden we, omdat T en V reëel en symmetrisch zijn, voor de hermitische geconjugeerde vergelijking (i.e. neem de complex geconjugeerde, en transponeer de matrices):

$$\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{V} = \left(\omega^{2}\right)^{*}\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{T} \tag{10.38}$$

Vermenigvuldig deze van rechts met \boldsymbol{a} , vermenigvuldig (10.37) met \boldsymbol{a}^{\dagger} van links, en neem het verschil:

$$\left(\left(\omega^{2}\right)^{*}-\omega^{2}\right)\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}=0$$
(10.39)

Als we nu \boldsymbol{a} schrijven als $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}$ met $\boldsymbol{\alpha}$ en $\boldsymbol{\beta}$ reëel, dan vinden we dat:

$$a^{\dagger}Ta = (\alpha^{T} - i\beta^{T})T(\alpha + i\beta) = \alpha^{T}T\alpha + \beta^{T}T\beta$$
 (10.40)

Maar omdat $T = 1/2\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \boldsymbol{T} \dot{\boldsymbol{\eta}} > 0$ voor iedere $\dot{\boldsymbol{\eta}} \neq 0$ zal dus

$$\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{T}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}^{T}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^{T}\boldsymbol{T}\boldsymbol{\beta} > 0 \Rightarrow (\omega^{2})^{*} - \omega^{2} = 0 \Leftrightarrow Im(\omega^{2}) = 0.$$
(10.41)

2. de eigenvectoren kunnen reëel genomen worden. We hebben al gezien dat de ω^2 reëel zijn. Dus zullen de reële en imaginiare componenten α en β aan dezelfe eigenwaarde vergelijking moeten voldoen. Immers:

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta} = \omega^2 \boldsymbol{T}\boldsymbol{\alpha} + i\omega^2 \boldsymbol{T}\boldsymbol{\beta}.$$
 (10.42)

Dit betekent dat α en β even redig met elkaar moeten zijn, dus kunnen we a schrijven als:

$$\boldsymbol{a} = \alpha + i\beta = \gamma \boldsymbol{\alpha} \tag{10.43}$$

waar γ een complex getal is. We kunnen nu **a** reëel maken als we γ absorberen in de constante C in $\eta_i = C \mathbf{a}_i e^{-i\omega t}$.

3. de eigenvectoren kunnen zodanig gekozen worden dat $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{T} \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$

Nog eens de dubbele slinger

Laten we dit weer illustreren aan de hand van de dubbele slinger, maar voor het gemak nemen we aan dat $l_1 = l_2 = l$, en introduceren we $M = m_1 + m_2$ en $m_2 = \mu M$. In dat geval hebben we nu:

$$\boldsymbol{T} = Ml^2 \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{V} = gMl \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$
(10.44)

De eis voor de determinant is nu:

$$det \begin{pmatrix} Mgl - \omega^2 Ml^2 & -\omega^2 \mu Ml^2 \\ -\omega^2 \mu Ml^2 & \mu Mgl - \omega^2 \mu Ml^2 \end{pmatrix} =$$
(10.45)

$$\mu^{2} M^{2} l^{4} det \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \left(g/l - \omega^{2} \right) & -\omega^{2} \\ -\omega^{2} & g/l - \omega^{2} \end{pmatrix} = 0$$
(10.46)

Dit levert op:

$$\left(\frac{1}{\mu}-1\right)\omega^4 - \frac{2}{\mu}\frac{g}{l}\omega^2 + \frac{1}{\mu}\left(\frac{g}{l}\right)^2 = 0$$
(10.47)

De eigenwaarden zijn dus:

$$\omega_{\pm}^{2} = \frac{g}{l} \frac{1 \pm \sqrt{\mu}}{\mu - 1} = \frac{g}{l} \frac{1}{1 \mp \sqrt{\mu}}$$
(10.48)

Deze twee waarden zijn inderdaad reëel. De bijbehorende eigenvectoren volgen uit:

$$\begin{pmatrix} Mgl - \omega_{\pm}^2 Ml^2 & -\omega_{\pm}^2 \mu Ml^2 \\ -\omega_{\pm}^2 \mu Ml^2 & \mu Mgl - \omega_{\pm}^2 \mu Ml^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_{\pm} = 0$$
(10.49)

Uitschrijven levert op:

$$\omega_{\pm}^{2} \mu M l^{2} \begin{pmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{\mu}} & -1\\ -1 & \mp \sqrt{\mu} \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_{\pm} = 0$$
(10.50)

met als genormaliseerde oplossingen:

$$\boldsymbol{a}_{+} = \frac{\omega_{+}^{2}}{2\mu Mgl} \left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu} \\ -1 \end{array}\right); \quad \boldsymbol{a}_{-} = \frac{\omega_{-}^{2}}{2\mu Mgl} \left(\begin{array}{c} \sqrt{\mu} \\ 1 \end{array}\right). \tag{10.51}$$

Het is simpel na te gaan dat deze oplossing voldoen aan:

$$a_{+}^{T}Ta_{+} = 1; a_{-}^{T}Ta_{-} = 1; a_{-}^{T}Ta_{+} = 0$$
 (10.52)

en

$$a_{+}^{T} V a_{+} = \omega_{+}^{2}; \quad a_{-}^{T} V a_{-} = \omega_{-}^{2}; \quad a_{-}^{T} V a_{+} = 0$$
 (10.53)

Dit betekent dat voor deze dubbele slinger de oplossing geschreven kan worden als:

$$\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} = C_+ \boldsymbol{a}_+ e^{-i\omega_+ t} + C_- \boldsymbol{a}_- e^{-i\omega_- t}$$
(10.54)

In het geval van a_+ (i.e. als $C_- = 0$), zien we dat de twee deeltjes tegen elkaar in oscilleren, terwijl voor a_- (i.e. als $C_+ = 0$) ze met elkaar mee oscilleren. De frequentie voor de eerste combinatie is groter dan voor de laatste, en is dus moeilijker aan te slaan.

10.2 Eigenmodes en coördinaat transformaties

We hebben gezien dat de oplossingen van de vorm $ae^{-i\omega t}$ zijn, met N onafhankelijke vectoren a_i , die elk een bijbehorende eigenfrequentie ω_i hebben. De algemene oplossing zal dus een superpositie hiervan zijn:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{i} C_{i} \boldsymbol{a}_{i} e^{-i\omega_{i}t}.$$
(10.55)

waar impliciet het reële deel genomen moet worden. We hebben gezien dat de N vectoren a_i voldoen aan

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{a}_j = \omega_j^2 \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}_j \tag{10.56}$$

Als we nu deze vergelijking van links met \boldsymbol{a}_i^T vermenigvuldigen, dan vinden we:

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{a}_j = \omega_i^2 \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{T} \boldsymbol{a}_j \tag{10.57}$$

Maar als we nu eerst (10.56) transponeren en de substitutie $j \rightarrow i$ uitvoeren, en dan van rechts met a_j vermenigvuldigen dan vinden we:

$$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{a}_j = \omega_j^2 \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{T} \boldsymbol{a}_j \tag{10.58}$$

Ofwel, als we nu het verschil nemen:

$$0 = \left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right) \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{T} \boldsymbol{a}_j \tag{10.59}$$

Dit betekent dat:

$$\boldsymbol{a}_{i}^{T}\boldsymbol{T}\boldsymbol{a}_{j} = \delta_{ij}; \quad \boldsymbol{a}_{i}^{T}\boldsymbol{V}\boldsymbol{a}_{j} = \omega_{i}^{2}\delta_{ij}$$
 (10.60)

Als we nu de matrix \boldsymbol{A} definieren als

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{pmatrix}$$
(10.61)

dan hebben we dus:

$$\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \omega_{1}^{2} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \omega_{N}^{2} \end{pmatrix}$$
(10.62)

Als we tenslotte nieuwe coördinaten definieren door middel van:

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{\eta} \tag{10.63}$$

dan kan de Lagrangiaan (10.15) kan geschreven worden als

$$L\left(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}\right) = \frac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{\xi}}^{T} \boldsymbol{A}^{T} \boldsymbol{T} \boldsymbol{A} \dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}^{T} \boldsymbol{A}^{T} \boldsymbol{V} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi} \right)$$
(10.64)

$$= \frac{1}{2} \left(\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \dot{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}^T \begin{pmatrix} \omega_1^T & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} \right)$$
(10.65)

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} \left(\dot{\xi}_{i}^{2} - \omega_{i}^{2} \xi_{i}^{2} \right)$$
(10.66)

Ofwel, in termen van de componenten van $\boldsymbol{\xi}$, de ξ_i , hebben we te maken met *onafhankelijke* harmonische oscillatoren.

Lineair tri-atomair molecuul

Laten we een CO_2 nemen, en aannemen dat we dit kunnen beschrijven door 3 (voor het gemak gelijke) massa's, die alleen langs de x-as kunnen bewegen. Als we de potentiaal ontwikkelen rondom de evenwichts positie, dan vinden we:

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2 \right) - \frac{k}{2} \left(\eta_2 - \eta_1 \right)^2 - \frac{k}{2} \left(\eta_3 - \eta_2 \right)^2$$
(10.67)

$$= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^{T} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^{T} \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta}$$
(10.68)

Om de eigenfrequenties te bepalen lossen we op:

$$det \begin{pmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0\\ -k & 2k - \omega^2 m & -k\\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{pmatrix} = \omega^2 \left(k - \omega^2 m\right) \left(3k - \omega^2 m\right) = 0 \quad (10.69)$$

met als oplossingen:

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{10.70}$$

De bijbehorende eigenvectoren blijken te zijn:

$$\boldsymbol{a}_{1} = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{a}_{2} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{a}_{3} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{pmatrix} 1\\-2\\1 \end{pmatrix}$$
(10.71)

Merk op dat ω_1 niet strict positief is. Als we naar de bijbehorende eigenvector a_1 kijken, dan zien we dat de bijbehorende beweging niets anders is dan een translatie van het hele molecuul. Als we nu a_1 , a_2 en a_3 combineren, dan vinden we:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -2\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{A}^{-1} = \sqrt{\frac{m}{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3}\\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
(10.72)

Dus zijn de eigen coördinaten:

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{m}{3}} \left(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3\right); \xi_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\eta_1 - \eta_3\right); \xi_3 = \sqrt{\frac{m}{6}} \left(\eta_1 - 2\eta_2 + \eta_3\right).$$
(10.73)

In termen van deze coördinaten is de Langrangiaan:

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2 \right) - \frac{k}{2m} \left(\xi_2^2 + 3\xi_3^2 \right).$$
(10.74)

Inderdaad hangt deze Lagrangiaan niet af van ξ_1 , en is dus het bijbehorende canonieke momentum $\dot{\xi}_1$ een behouden grootheid. Deze correspondeert inderdaad met het zwaartepuntsmomentum van het molecuul.

Externe krachten en wrijving

Laten we aannemen dat er een kracht F_j op de coördinaten $q_j = q_j^0 + \eta_j$ werkt. In termen van de eigen coördinaten vinden we een gegeneraliseerde kracht

$$Q_i = F_j \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_i} = F_j A_{ji} \tag{10.75}$$

of in vectornotatie

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{F} \tag{10.76}$$

We weten dat zonder deze extra kracht, ξ_i de oplossing is van

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi = 0. \tag{10.77}$$

(merk op: geen sommatie!) Door deze kracht wordt deze vergelijking

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi = Q_i \tag{10.78}$$

Laten we aannemen dat de kracht F_j is gegeven door $F_j(t) = Re(F_j e^{-i\omega t})$. In dat geval hebben we $Q_i(t) = Q_i e^{-i\omega t} = F_j A_{ji} e^{-i\omega t}$, en is de bewegingsvergelijking dus:

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi = Q_i e^{-i\omega t}.$$
(10.79)

De oplossing hiervan is de som van één specifieke oplossing, plus de oplossing van de homogene vergelijking (10.77). In dit geval is dat:

$$\xi_{i} = \frac{Q_{i}}{\omega_{i}^{2} - \omega^{2}} e^{-i\omega t} + C_{i} e^{-i\omega_{i} t}.$$
(10.80)

Het is duidelijk dat als ω dichter in de buurt komt van een eigenfrequentie ω_i de amplitude groter wordt. Het is zelfs zo dat de amplitude $\rightarrow \infty$ gaat als $\omega \rightarrow \omega_i$. Dit komt omdat er in dit systeem geen wrijving (of demping, of energieverlies) aanwezig is. We kunnen een snelheidsafhankelijke wrijving introduceren door een kracht $F_i = -\mathcal{F}_{ij}\dot{\eta}_j$. Met deze extra kracht worden de Lagrange vergelijkingen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\mathcal{F}_{ij} \dot{q}_j \tag{10.81}$$

Als we teruggaan naar het hoofdstuk waar de Lagrange vergelijkingen zijn afgeleid, dan zien we dat deze extra kracht overeen komt met een extra arbeid

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{10.82}$$

Deze extra arbeid \mathcal{F} heet de *Rayleigh dissipatie*. Met behulp hiervan kunnen we de Lagrange vergelijkingen schrijven op een manier die invariant is onder coördinaten transformaties:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0$$
(10.83)

Merk op dat dit een ad-hoc modificatie is – dit is terug te leiden tot het feit dat dissipatieve krachten niet fundamenteel zijn, maar het gevolg van een incomplete beschrijving van het systeem. Als we dit nu toe passen, dan vinden we als bewegingsvergelijkingen:

$$\ddot{\xi}_i + \mathcal{F}_{ij}\dot{\xi}_j + \omega_i^2\xi_i = 0 \tag{10.84}$$

In het algemeen zal \mathcal{F}_{ij} niet diagonaal zijn, maar laten we aannemen dat dat *wel* het geval is, $\mathcal{F}_{ij} = \Gamma_i \delta_{ij}$. Als we nu de oplossing van het originele probleem invullen, $\xi_i = C_i e^{-i\omega t}$, dan vinden we:

$$-\omega^2 - i\omega\Gamma_i + \omega_i^2 = 0 \tag{10.85}$$

De oplossing hiervan is:

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\Gamma_i^2}{4}} - i\frac{\Gamma_i}{2} \tag{10.86}$$

Als we dit invullen in $\xi_i = C_i e^{-i\omega t}$, dan zien we dat de imaginaire term voor een exponentieel afnemende amplitude zorgt:

$$\xi_i(t) = C_i e^{\pm i \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\Gamma_i^2}{4}t}} e^{-\frac{\Gamma_i}{2}t}, \qquad (10.87)$$

Nog een keer het lineaire tri-atomair molecuul

Laten we aannemen dat we alleen de eigenmode die overeenkomt met ξ_3 aanslaan door middel van een externe kracht (bijvoorbeeld een extern electrisch veld met sterkte E_0 , en frequentie ω), en dat we een demping hebben van zoals beschreven in de vorige sectie. In dat geval is de bewegingsvergelijking voor ξ_3 :

$$\ddot{\xi}_3 + \Gamma \dot{\xi}_3 + \omega_3^2 \xi_3 = \sqrt{\frac{6}{m}} e E_0 e^{-i\omega t}$$
(10.88)

Als we weer beginnen met de ansatz

$$\xi_3 = C e^{-i\omega t} \tag{10.89}$$

dan vinden we

$$\left(-\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_3^2\right)C = \sqrt{\frac{6}{m}}eE_0 \tag{10.90}$$

ofwel,

$$\xi_{3}(t) = \sqrt{\frac{6}{m}} \frac{eE_{0}}{-\omega^{2} - i\omega\Gamma + \omega_{3}^{2}} e^{-i\omega t}$$
(10.91)

We zien dat er weer een resonantie is bij $\omega = \omega_3$, maar deze keer gaat de amplitude niet $\rightarrow \infty$, maar hangt af van de zogenaamde *kwaliteits factor* $Q \equiv \frac{\omega_3}{\Gamma}$.

Hoofdstuk 11

Klassieke Veldentheorie (G13)

11.1 Lagrangiaan voor continue systemen

Een grote collectie oscillatoren

Een ééndimensionaal elastische snaar kan worden beschouwd als een limiet van een verzameling puntmassa's m, verbonden door veren met veerconstante k en lengte (in rust) d = D/(N+1). Dit is geschetst in Figuur (11.1). We bekijken eerst het discrete sys-



Figuur 11.1:

teem. De uitwijking van de j-de massa uit de evenwichtspositie is η_j , met de beperking dat $\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$. De Lagrangiaan wordt dus

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \left(m \dot{\eta}_j^2 - k (\eta_{j+1} - \eta_j)^2 \right)$$
(11.1)

De bewegingsvergelijkingen van Lagrange worden

$$m\ddot{\eta}_j + k\left(\eta_j - \eta_{j+1}\right) - k\left(\eta_{j-1} - \eta_j\right) = 0.$$
(11.2)

of, als we het schrijven zoals in het vorige hoofdstuk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_N \end{pmatrix} + \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix} = 0.$$
(11.3)

Als we weer de oplossing $\eta_j = a_j e^{i\omega t}$ proberen, dan krijgen we de eigenwaarden vergelijking voor ω :

$$det \begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 & \dots & 0 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{pmatrix} = 0$$
(11.4)

Dit is een n^{e} orde polynoom in ω^{2} . Voor kleine waarden van n is dit direct op te lossen zoals we in het vorige hoofdstuk hebben gedaan, maar voor grote n is dit niet praktisch. Ter herinnering, we hebben (11.4) gekregen door de volgende poging in te vullen in de bewegingsvergelijking:

$$\eta_j = Re(a_j e^{i\omega t}) \tag{11.5}$$

Laten we nu een stap verder gaan, en de volgende uitdrukking voor a_j te proberen:

$$a_j = \alpha e^{i(j\gamma - \delta)} \tag{11.6}$$

of wel, in termen van η_i :

$$\eta_j = Re(\alpha e^{i(j\gamma - \delta)} e^{i\omega t}) \tag{11.7}$$

waar we impliciet alleen naar het reëele deel nemen (η_j moet immers reëel zijn), en op zoek gaan naar waarden van γ en δ die voldoen aan de bewegingsvergelijkingen. Substitutie in (11.2) levert op:

$$-\omega^2 e^{i(j\gamma-\delta)} + \omega_0^2 \left(e^{i((j)\gamma-\delta)} - e^{i((j+1)\gamma-\delta)} \right) - \omega_0^2 \left(e^{i((j-1)\gamma-\delta)} - e^{i((j)\gamma-\delta)} \right) = 0$$
(11.8)

Wat simpele algebra kan dit geschreven worden als

$$\omega^{2} = 2(1 - \cos\gamma)\omega_{0}^{2} = 4\omega_{0}^{2}\sin^{2}\frac{\gamma}{2}$$
(11.9)

Omdat we weten dat er N oplossing moeten zijn voor ω , maken we hier van:

$$\omega_k = 2\omega_0 \sin \frac{\gamma_k}{2}; \ k = 1, 2, 3, \dots, N$$
 (11.10)

Al met al hebben we k mogelijke oplossingen gevonden, die elk met de daarbij behorende ω_k oscilleren,

$$a_{jk} = \alpha_k e^{i(j\gamma_k - \delta_k)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots, N.$$
 (11.11)

en, omdat alleen het reële deel willen,

$$a_{jk} = \alpha_k \cos(j\gamma_k - \delta_k); \quad k = 1, 2, 3, \dots, N.$$
 (11.12)

Wat nu nog overblijft is het vinden van α_k , γ_k en δ_k die aan de randvoorwaarden voldoen. Omdat $\eta_0(t) = 0$ voor alle t, zal $\delta_k = \pi/2$ moeten zijn, ofwel

$$a_{jk} = \alpha_k \cos\left(j\gamma_k - \pi/2\right) = \alpha_k \sin\left(j\gamma_k\right) \tag{11.13}$$

De volgende stap is om ervoor te zorgen dat $\eta_{N+1}(t) = 0$ voor alle t, ofwel:

$$\alpha_k \sin\left((N+1)\gamma_k\right) = 0 \Rightarrow \gamma_k = \frac{s\pi}{N+1}; \quad s = 1, 2, \dots$$
(11.14)

Als we nu gebruiken dat er maar N oplossingen zijn, dan kunnen we s door k vervangen, en vinden we tenslotte:

$$a_{jk} = \alpha_k \sin\left(j\frac{k\pi}{N+1}\right); \ k = 1, 2, 3, \dots, N.$$
 (11.15)

met als volledige oplossing voor $\eta_j(t)$:

$$\eta_j(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \sin\left(j\frac{k\pi}{N+1}\right) e^{i\omega_k t}; \ \ \omega_k = 2\omega_0 \sin\frac{k\pi}{2(N+1)};$$
(11.16)

De continuum limiet

Om hier een continue systeem van te maken zullen we de limiet nemen voor d naar nul waarbij de massa per eenheid van lengte constant blijft: $\mu = m/d$. De veerconstante kwordt in deze limiet vervangen door de elasticiteitsmodulus Y = kd.

In de continuum limiet, $N \to \infty$, kunnen we de Lagrangiaan

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i} d \left(\mu \dot{\eta}_{i}^{2} - Y \left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_{i}}{d} \right)^{2} \right).$$
(11.17)

In de continuum limiet, $N \to \infty$, wordt de discrete index *i* vervangen door de continue "index" *x*; dus de verplaatsing η wordt een functie van *x* en natuurlijk ook nog steeds van de tijd *t*:

$$\eta_x(t) \equiv \eta(x, t). \tag{11.18}$$

Zo'n variabele die van een continue coördinaat afhangt noemt men een **veld**. De limietovergang impliceert ook

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{d} = \frac{\eta(x+d) - \eta(x)}{d} \longrightarrow \frac{d\eta}{dx} \equiv \eta'$$
(11.19)

en

$$\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{d^2}\right) - \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{d^2}\right) \longrightarrow \frac{d^2\eta}{dx^2} \equiv \eta''.$$
(11.20)

De sommatie over i wordt een integraal over x:

$$L = \int \mathcal{L}dx = \frac{1}{2} \int \left(\mu \dot{\eta}^2 - Y \eta'^2\right) dx \qquad (11.21)$$

en de bewegingsvergelijking:

$$\mu \frac{d^2 \eta}{dt^2} - Y \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0. \tag{11.22}$$

Dit is de bekende vergelijking voor een golf in één dimensie met golfsnelheid

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}.$$
(11.23)

Het is niet moeilijk om door substitutie te laten zien dat, voor elke functie f,

$$\eta(x,t) = f(x-ct)$$
 (11.24)

een oplossing is van (11.22). Deze oplossing laat zien hoe een "golf" met snelheid c als functie van t naar grotere waarden van x loopt: de vorm van η op een tijdstip t is hetzelfde als op t = 0, maar verschoven naar rechts over een afstand ct. Omdat (11.22) invariant is onder $t \to -t$, zal ook

$$\eta(x,t) = g(x+ct) \tag{11.25}$$

een oplossing zijn. De algemene oplossing van dit probleem is dus:

$$\eta(x,t) = g(x+ct) + f(x-ct)$$
(11.26)

Als we nu een snaar met eindige lengte l nemen, en als randvoorwaarden opleggen dat de uiteinden niet bewegen, i.e. $\eta(0,t) = \eta(D,t) = 0$. De voorwaarde $\eta(0,t) = 0$ betekent dat f(ct) = -g(-ct), dus dat:

$$\eta(x,t) = g(ct+x) - g(ct-x)$$
(11.27)

De tweede voorwaarde, $\eta(D, t) = 0$ impliceert nu dat g(ct + D) = g(ct - D), ofwel g is een periodieke functie met periode $\tau = 2D$. Dit betekent dat we deze functie kunnen schrijven als een *Fourier serie*:

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\pi x/D}$$
(11.28)

ofwel,

$$\eta(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \left(e^{ik\pi(ct+x)/D} - e^{ik\pi(ct-x)/D} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{ik\pi ct/D} \sin\left(\frac{k\pi x}{D}\right) \quad (11.29)$$

en, omdat $\eta(x,t)$ reëel moet zijn, en dus $g_{-k} = g_k^*$,

$$\eta(x,t) = 2Re\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{ik\pi ct/D} \sin\left(\frac{k\pi x}{D}\right)$$
(11.30)

Het is informatief om dit te vergelijken met de discrete oplossing. Als we in (11.16) gebruiken dat N + 1 = D/d, en dan de limit $N \to \infty$ erop los laten, dan krijgen we:

$$\eta_j(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi jd}{D}\right) e^{i\omega_k t} \to \eta(x,t) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi x}{D}\right) e^{i\omega_k t}; \quad (11.31)$$

Gelukkig is dit precies hetzelfde, immers,

$$\lim_{N \to \infty} \omega_j = \lim_{N \to \infty} 2\omega_0 \sin \frac{j\pi}{2(N+1)}$$
(11.32)

$$= \lim_{N \to \infty} \omega_0 \frac{j\pi}{N+1} \tag{11.33}$$

$$= \lim_{d \to 0} \sqrt{\frac{k}{m} \frac{j\pi d}{D}}$$
(11.34)

$$= \lim_{d \to 0} \sqrt{\frac{kd}{m/d}} \frac{j\pi}{D}$$
(11.35)

$$= \sqrt{\frac{Y}{\mu}\frac{j\pi}{D}} = \frac{j\pi c}{D} \tag{11.36}$$

Als we dus niets van Fourier transformaties hadden geweten, dan hadden we die op dit moment dus uitgevonden.

11.2 Het principe van Hamilton voor velden

Het principe van Hamilton leent zich ook bij uitstek voor toepassing in de (klassieke zowel als quantummechanische) theorie van velden. Voert men een Lagrangiaandichtheid \mathcal{L} in, dan staat er in het geval van de snaar dat de variatie

$$\delta \int \int dt dx \mathcal{L}(\eta(x,t),t) = 0 \tag{11.37}$$

Als we nu de afleiding aan het begin van het hoofdstuk herhalen, dan is het niet onverwacht dat we als bewegingsvergelijking de volgende evolutie zien: in plaats van:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \frac{\partial q}{\partial t}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{11.38}$$

krijgen we nu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0$$
(11.39)

Invullen van (11.21) in (11.39) levert inderdaad de golfvergelijking (11.22) op als bewegingsvergelijking! Rechtstreekse generalisatie naar het drie-dimensionale geval leert dat als we de Lagrangiaan schrijven als een integraal over een Lagrangiaan dichtheid

$$L = \iiint \mathcal{L}\left(\eta, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{dy}, \frac{d\eta}{dz}\right) dxdydz$$
(11.40)

dan moeten de bewegingsvergelijkingen blijkbaar van de vorm zijn:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial x}} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial y}} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial z}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0.$$
(11.41)

De uitbreiding naar een vier-dimensionale ruimte-tijd is nu recht toe recht aan: in dat geval zal de variatie van een integraal over een vier-volume moeten verdwijnen:

$$\delta \int_{1}^{2} \mathcal{L} dx dy dz dt = 0.$$

Omdat het vier-volumeelement dxdydzdt invariant is bij Lorentz transformatie zullen de bewegingsvergelijkingen ook vorminvariant zijn (covariant) bij Lorentz transformatie, mits \mathcal{L} een scalaire dichtheid is. De theorie voor continue systemen en velden vindt men uitgewerkt in het laatste hoofdstuk van Goldstein, o.a. voor het electromagnetische veld. De bewegingsvergelijkingen worden dan bij geschikt gekozen \mathcal{L} de vergelijkingen van Maxwell.

In de volgende paragraaf passen we dit toe om de vergelijkingen van Maxwell af te leiden uit een Lagrangiaandichtheid.

11.3 Lagrangiaan voor het elektromagnetische veld

Uit de theorie van het elektromagnetisme (we zullen de notatie van Griffiths aanhouden) kennen we een aantal grootheden die op welbepaalde wijze tranformeren bij Lorentz transformatie. Zoals de viervector voor de ladings- en stroomdichtheid

$$J^{\mu} = (c\rho, J_x, J_y, J_z) \qquad J_{\mu} = (-c\rho, J_x, J_y, J_z), \tag{11.42}$$

waarbij de bovenindex een contravariante grootheid aangeeft die transformeert als $x^{\mu} \equiv (ct, x, y, z)$ en de onderindex een covariante grootheid die transformeert als

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}).$$

In het geval van de Lorentztransformaties scheelt de boven- of onderindex alleen een minteken in het eerste element (of bij een andere conventie in de laatste drie elementen). Dus $x_{\mu} = (-ct, x, y, z)$. We kennen ook de viervector-potentiaal en de veldtensor:

$$A^{\mu} = \left(\frac{V}{c}, A_x, A_y, A_z\right); \qquad F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}.$$
 (11.43)

Voor de Lagrangiaandichtheid hebben we scalaire grootheden nodig met de dimensie van een energiedichtheid. Met het bovenstaande zijn er maar een paar mogelijkheden. Toepassing van de Euler-Lagrange vergelijkingen moet de vergelijkingen van Maxwell opleveren. Zoals gemakkelijk is na te gaan moeten we dan kiezen

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_{\mu} A^{\mu}, \qquad (11.44)$$

waarbij, zoals gebruikelijk, over herhaalde indices gesommeerd wordt. Als Euler-Lagrange vergelijkingen vinden we dan inderdaad de inhomogene Maxwellvergelijkingen

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\mu}, \qquad (11.45)$$

terwijl de homogene vergelijkingen al volgen uit het gebruik van de potentialen.

Opmerking

Een zeer interessante toepassing van de actie-integraal vindt men ook in de formulering van de quantummechanica met padintegralen zoals door Feynman is ontwikkeld. Hierbij wordt aangetoond dat de Schrödingervergelijking voor een systeem kan worden afgeleid door de actie-integraal te gebruiken als fase van een (golf)functie. Net als bij het principe van Huvgens voor de voortplanting van golven beweegt het systeem zich langs alle mogelijke paden van de toestand (punt in de faseruimte) op tijdstip t_1 naar die op tijdstip t_2 . Voor wegen in de buurt van de extremale waarde van de actie-integraal zijn de faseverschillen in eerste orde nul; deze golven versterken elkaar. Voor andere wegen geldt dat niet; hun bijdragen doven elkaar uit door interferentie. De constante van Planck is een maat hoe snel de fase verandert met de grootte van de actie-integraal. Gaat die constante h naar nul. dan blijven alleen de bijdragen vlakbij de extremale weg over. De klassieke mechanica blijkt dan expliciet het limietgeval te zijn van de quantummechanica als de constante van Planck naar nul gaat. De geïnteresseerde student(e) zij verwezen naar het boek van R.P. Feynman en A.R. Hibbs: "Quantum Mechanics and Path Integrals". Deze pad-integraalformulering van de Quantum Mechanica wordt gebruikt in vrijwel alle moderne leerboeken over Quantumveldentheorie.

Bijlage A

Constanten

1. Physical constants 1

1. PHYSICAL CONSTANTS

Table 1.1. Reviewed 2004 by P.J. Mohr and B.N. Taylor (NIST). Based mainly on the "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2002" by P.J. Mohr and B.N. Taylor, to be published in 2004. The last group of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. The figures in parentheses after the values give the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the corresponding fractional uncertainties in parts per 10⁹ (ppb) are given in the last column. This set of constants (aside from the last group) is recommended for international use by CODATA (the Committee on Data for Science and Technology). The full 2002 CODATA set of constants may be found at http://physics.nist.gov/constants

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum Planck constant Planck constant, reduced electron charge magnitude	c h $h \equiv h/2\pi$ e h	299 792 458 m s ⁻¹ 6.626 0693(11)×10 ⁻³⁴ J s 1.054 571 68(18)×10 ⁻³⁴ J s = 6.582 119 15(56)×10 ⁻²² MeV 1.602 176 53(14)×10 ⁻¹⁹ C = 4.80 107 236 068(17) MeV fex	exact* 170 170 85 33 204 41(41)×10 ⁻¹⁰ esu 85, 85 or
conversion constant	$(\hbar c)^2$	$0.389\ 379\ 323(67)\ {\rm GeV}^2\ {\rm mbarn}$	170
electron mass proton mass	$m_e m_p$	0.510 998 918(44) MeV/ c^2 = 9.10 938.272 029(80) MeV/ c^2 = 1.672 = 1.007 276 466 88(13) u = 183 1875 612 89(16) MeV/ c^2	$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr$
unified atomic mass unit (u)	$(\text{mass}\ ^{12}\text{C atom})/12 = (1 \text{ g})/(N_A \text{ mol})$	$931.494\ 043(80)\ \mathrm{MeV}/c^2 = 1.660$	$538\ 86(28) \times 10^{-27} \text{ kg}$ 86, 170
permittivity of free space permeability of free space	$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 1/\mu_0 c^2 \\ \mu_0 \end{aligned}$	$\begin{array}{c} 8.854 \ 187 \ 817 \ \dots \ \times 10^{-12} \ \mathrm{F \ m^{-1}} \\ 4\pi \times 10^{-7} \ \mathrm{N \ A^{-2}} = 12.566 \ 370 \ \mathrm{e} \end{array}$	$14 \dots \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \qquad \text{exact} \\ \text{exact}$
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	7.297 352 568(24) $\times 10^{-3} = 1/137$	$.035\ 999\ 11(46)^{\dagger}$ 3.3, 3.3
classical electron radius $(e^{-} \text{ Compton wavelength})/2\pi$ Bohr radius $(m_{\text{nucleus}} = \infty)$ wavelength of 1 eV/c particle Rydberg energy Theorem error exercise	$ \begin{array}{l} r_{e} = e^{2}/4\pi\epsilon_{0}m_{e}c^{2} \\ \lambda_{e} = h/m_{e}c = r_{e}\alpha^{-1} \\ a_{\infty} = 4\pi\epsilon_{0}b^{2}/m_{e}c^{2} = r_{e}\alpha^{-2} \\ hc/(1 \ {\rm eV}) \\ hcR_{\infty} = m_{e}e^{4}/2(4\pi\epsilon_{0})^{2}h^{2} = m_{e}c^{2}\alpha^{2}/2 \\ \pi_{e} = 8\pi\epsilon_{e}^{2}/2(4\pi\epsilon_{0})^{2}h^{2} = m_{e}c^{2}\alpha^{2}/2 \end{array} $	$\begin{array}{l} 2.817 \ 940 \ 325(28) \times 10^{-15} \ \mathrm{m} \\ 3.861 \ 592 \ 678(26) \times 10^{-13} \ \mathrm{m} \\ 0.529 \ 177 \ 2108(18) \times 10^{-10} \ \mathrm{m} \\ 1.239 \ 841 \ 91(11) \times 10^{-6} \ \mathrm{m} \\ 13.605 \ 6923(12) \ \mathrm{eV} \\ 0.665 \ 244 \ 872(12) \ \mathrm{hom} \end{array}$	10 6.7 3.3 85 85
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788 381 804(39)×10 ⁻¹¹ MeV T	-1 6.7
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\ 451\ 259(21) \times 10^{-14}\ MeV\ T$	-1 6.7
electron cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}^e/B = e/m_e$	$1.758\ 820\ 12(15) \times 10^{11}\ rad\ s^{-1}\ T$	-1 86
proton cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}^{r}/B = e/m_p$	9.578 833 76(82)×10' rad s ⁻¹ T	-1 86
gravitational constant ^{\ddagger}	G_N	$ \begin{array}{l} 6.6742(10) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ = 6.7087(10) \times 10^{-39} \ hc \ (\text{GeV}/c) \end{array} $	$(1.5 \times 10^5)^{-2}$ $(1.5 \times 10^5)^{-2}$
standard gravitational accel.	g_n	$9.806~65~{ m m~s^{-2}}$	exact
Avogadro constant Boltzmann constant	${N_A\atop k}$	$\begin{array}{l} 6.022 \ 1415(10) \times 10^{23} \ \mathrm{mol}^{-1} \\ 1.380 \ 6505(24) \times 10^{-23} \ \mathrm{J} \ \mathrm{K}^{-1} \\ = 8.617 \ 343(15) \times 10^{-5} \ \mathrm{eV} \ \mathrm{K}^{-1} \end{array}$	170 1800 1800
molar volume, ideal gas at STP Wien displacement law constant Stefan-Boltzmann constant	$N_A k(273.15 \text{ K})/(101 \ 325 \text{ Pa})$ $b = \lambda_{\max} T$ $\sigma = \pi^2 k^4 / 60 h^3 c^2$	22.413 996(39) $\times 10^{-3}$ m ³ mol ⁻¹ 2.897 7685(51) $\times 10^{-3}$ m K 5.670 400(40) $\times 10^{-8}$ W m ⁻² K ⁻⁴	1700 1700 7000
Fermi coupling constant ^{**}	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166~37(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$	9000
weak-mixing angle W^{\pm} boson mass Z^0 boson mass strong coupling constant	$m_W = m_Z m_Z m_Z$ $m_Z = m_Z m_Z$	$\begin{array}{c} 0.23120(15)^{\dagger\dagger}\\ 80.425(38) \ {\rm GeV}/c^2\\ 91.1876(21) \ {\rm GeV}/c^2\\ 0.1187(20) \end{array}$	$\begin{array}{c} 6.5\times 10^{5}\\ 4.8\times 10^{5}\\ 2.3\times 10^{4}\\ 1.7\times 10^{7}\end{array}$
$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 5$	$89\ 793\ 238 \qquad e = 2.7\overline{18}\ 281\ 828$	$\gamma = 0.57$	7 215 664 901 532 861
$1 \text{ in } \equiv 0.0254 \text{ m} \qquad 1 \text{ G} \equiv 10^{-4} \text{ T} \qquad 1 \text{ eV} = 1.602 \text{ 176 } 53(14) \times 10^{-19} \text{ J} \qquad kT \text{ at } 300 \text{ K} = [38.681 \ 684(68)]^{-1} \text{ eV}$			
$1 \text{ A} \equiv 0.1 \text{ nm}$ $1 \text{ dyne} \equiv 1$	0^{-3} N $1 \text{ eV}/c^2 = 1.782$ 6	$361 \ 81(15) \times 10^{-30} \text{ kg}$	$0 \text{ °C} \equiv 273.15 \text{ K}$
$1 \text{ barn} \equiv 10^{-20} \text{ m}^2$ $1 \text{ erg} \equiv 1$	0^{-1} J 2.997 924 58 × 10 ⁹ esu = 1 C	$1 \text{ atmosphere} \equiv$	$100 \text{ Torr} \equiv 101 325 \text{ Pa}$

* The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second. † At $Q^2 = 0$. At $Q^2 \approx m_W^2$ the value is ~ 1/128.

[‡] Absolute lab measurements of G_N have been made only on scales of about 1 cm to 1 m. ** See the discussion in Sec. 10. "Electroweak model and constraints on new physics"

** See the discussion in Sec. 10, "Electroweak model and constraints on new physics." ^{††} The corresponding $\sin^2 \theta$ for the effective angle is 0.23149(15).

Bijlage B Vector Calculus

B.1 coördinaten en coördinatentransformaties

Een positie kan beschreven worden met behulp van een coördinatensysteem door een vector van de oorsprong naar de gewenste positie. Laten we deze vector aangeven als x. Deze vector kan beschreven worden door zijn projecties op de assen van een coördinatensysteem, gedefinieerd door drie orthonormale (i.e. loodrecht op elkaar, en met lengte 1) basis vectoren $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2$ en $\hat{\boldsymbol{e}}_3$:

$$\boldsymbol{x} = (\hat{\boldsymbol{e}}_1 \cdot \boldsymbol{x}) \, \hat{\boldsymbol{e}}_1 \tag{B.1}$$

$$+ (\hat{\boldsymbol{e}}_2 \cdot \boldsymbol{x}) \, \hat{\boldsymbol{e}}_2 \tag{B.2}$$

$$+ (\hat{\boldsymbol{e}}_{2} \cdot \boldsymbol{x}) \hat{\boldsymbol{e}}_{2}$$

$$+ (\hat{\boldsymbol{e}}_{3} \cdot \boldsymbol{x}) \hat{\boldsymbol{e}}_{3}$$

$$- x_{1} \hat{\boldsymbol{e}}_{1} + x_{2} \hat{\boldsymbol{e}}_{2} + x_{3} \hat{\boldsymbol{e}}_{3}$$
(B.3)
(B.4)

$$= x_1 \hat{\boldsymbol{e}}_1 + x_2 \hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_3 \hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{B.4}$$

$$\equiv x_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{B.5}$$

Hier hebben we de definitie $x_i \equiv \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{x}$ gebruikt voor de projecties op de basisvectoren, en, in de laatste vergelijking, de sommatie conventie waarbij (impliciet) gesommeerd wordt over een index die twee keer voor komt. We kunnen dus, gegeven een basis, de vector \boldsymbol{x} noteren als:

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

Merk op dat, *per constructie* de waarden x_i afhangen van de keuze van het coördinatensysteem \hat{e}_i . Maar merk ook op dat de vector x zelf niet afhangt van de keuze van de basisvectoren $\hat{e}_i!$

Dit leidt onmiddelijk tot de vraag wat er gebeurt met (B.6) als we een alternatief coördinatensysteem kiezen. In dat geval kunnen de basisvectoren \hat{e}'_i van dit nieuwe coördinatensysteem in termen van het oorspronkelijke systeem worden geschreven precies zoals elke vector in termen van een basis geschreven kan worden:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{i}^{\prime} = \left(\hat{\boldsymbol{e}}_{j} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_{j}^{\prime}\right) \hat{\boldsymbol{e}}_{j} \tag{B.7}$$

$$= \lambda_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_j. \tag{B.8}$$

waar weer de sommatie conventie (in dit geval voor de index j) impliciet gebruikt is (hier zal vanaf nu niet meer expliciet op gewezen worden!). Met behulp hiervan kunnen we aangeven hoe een positie \boldsymbol{x} in beide coördinatensystemen kan worden beschreven:

$$\boldsymbol{x} = x_i \hat{\boldsymbol{e}}_i = x_i' \hat{\boldsymbol{e}}_i' = x_i' \lambda_{ij} \hat{\boldsymbol{e}}_j. \tag{B.9}$$

Merk op dat het punt waar \boldsymbol{x} naar wijst hier niet veranderd is: het enige wat hier gebeurd is een alternatieve keuze van het coördinatensysteem. We kunnen dus nu aangeven hoe de componenten x_i transformeren:

$$x_i \hookrightarrow x_i' = \lambda_{ji} x_j \tag{B.10}$$

Als we de notatie van (B.6) gebruiken, dan krijgen we:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{i1}x_i \\ \lambda_{i2}x_i \\ \lambda_{i3}x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \lambda_{31}x_3 \\ \lambda_{12}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \lambda_{32}x_3 \\ \lambda_{13}x_1 + \lambda_{23}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{pmatrix}$$
(B.11)
$$= \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{13}x_1 + \lambda_{23}x_2 + \lambda_{33}x_3 \end{pmatrix}$$
(B.12)

$$\equiv \begin{pmatrix} \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
(B.12)

We hebben dus laten zien dat onder een verandering van de onderliggende basis, de *componenten* van een vector transformeren door de matrixvermenigvuldiging (B.12), maar let op de transpose! De reden hiervoor zal zometeen duidelijk worden...

De eis dat basisvectoren orthonormaal zijn kan geschreven worden als

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \begin{cases} 0, \text{ if } i \neq j \\ 1, \text{ if } i = j \end{cases}$$
(B.13)

Als we nu het Kronecker delta symbool δ_{ij} definieeren als:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ if } i \neq j \\ 1, \text{ if } i = j \end{cases}$$
(B.14)

dan kan de orthonormaliteit (B.13) geschreven worden als:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij} \tag{B.15}$$

Omdat dit geldt voor zowel $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ als wel voor $\hat{\boldsymbol{e}}'_i$, kunnen we de volgende relatie voor λ_{ij} afleiden door (B.7) en (B.8) in te vullen in (B.15):

$$\delta_{ij} = \hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}'_j = (\hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_k) \hat{\boldsymbol{e}}_k \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}'_j \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_l) \hat{\boldsymbol{e}}_l$$
(B.16)

$$= \lambda_{ki}\lambda_{lj}\delta_{kl} = \lambda_{ki}\lambda_{kj} \tag{B.17}$$

waar, volgens de sommatie conventie, over de indices k en l gesommeerd wordt.

B.2 niet-Carthesische coordinaten systemen

Als we naar snelheden (en versnellingen) van objecten kijken, dan is het belangrijk om een positie naar de tijd te kunnen differentiëren:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \equiv = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{B.18}$$

Gegeven de definitie (B.5), vinden we:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt} \left(x_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \right) = \dot{x}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i + x_i \dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_i \tag{B.19}$$

Vaak is het zo dat de basisvectoren niet van de tijd afhangen, en dan verdwijnen de termen $\dot{\hat{e}}_i$, maar dit is niet altijd het geval. In bekend voorbeeld zijn niet-Carthesische coördinatensystemen zoals pool- en cylinder-coördinaten. In het algemeen schrijven we bijvoorbeeld poolcoördinaten (r, θ) , in termen van de Carthesische basisvectoren, als:

$$\boldsymbol{r} = r\cos\theta \,\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + r\sin\theta \,\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 \tag{B.20}$$

of als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$
 (B.21)

Omdat dit geen lineare transformatie is, kan dit niet in de vorm van (B.10) worden geschreven. De beste manier om dit op (B.10) te laten lijken is om het probleem rond een gegeven waarde van r en θ (of x en y) te benaderen door een lineare transformatie. Dit betekent dat voor elk gegeven punt we wel een transformatie hebben, maar dat verschillende punten verschillende transformaties hebben – ofwel, de definitie van de basisvectoren, $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ en $\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}$ hangt af van de vector die we willen beschrijven!

In het algemeen is de radiële eenheidsvector $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ gedefineerd als de vector die naar het gegeven punt wijst, genormaliseerd zodanig dat deze vector lengte één heeft. Om nu een orthonormaal systeem te krijgen, is nu ook $\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}$ bepaald, zie Figuur (B.1. In Figuur (B.1) beweegt een deeltje als functie van de tijd. De positie wordt beschreven door $\boldsymbol{r}(t)$. In een interval $dt = t_2 - t_1$ gaat het deeltje van $\boldsymbol{r}(t_1)$ naar $\boldsymbol{r}(t_2) = \boldsymbol{r}(t_1 + dt)$. Dit betekent dat de orthonormale vectoren $\hat{\boldsymbol{e}}_r^{(1)}$ en $\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}^{(1)}$ roteren naar $\hat{\boldsymbol{e}}_r^{(2)}$ en $\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}^{(2)}$. De verandering van $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ is dus

$$d\hat{\boldsymbol{e}}_{r} = \hat{\boldsymbol{e}}_{r}^{(2)} - \hat{\boldsymbol{e}}_{r}^{(1)} \tag{B.22}$$

en staat loodrecht op $\hat{\boldsymbol{e}}_r$, en dus parallel aan $\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}$. Omdat de rotatie over de hoek $d\theta$ is, vinden we dus:

$$d\hat{\boldsymbol{e}}_r = d\theta \; \hat{\boldsymbol{e}}_\theta. \tag{B.23}$$

Voor $\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}$ vinden we:

$$d\hat{\boldsymbol{e}}_{\theta} = \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}^{(2)} - \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta}^{(1)} \tag{B.24}$$

$$= -d\theta \,\hat{\boldsymbol{e}}_r. \tag{B.25}$$



Figuur B.1: voorbeeld poolcoördinaten.

Als we nu deze vergelijkingen door dt delen, dan vinden we:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{e}}_{\theta};$$
 (B.26)

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_{\theta} = -\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_r.$$
 (B.27)

Dit kunnen we nu invullen in (B.19):

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt} \left(r \hat{\boldsymbol{e}}_r \right) = \dot{r} \hat{\boldsymbol{e}}_r + r \dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = \dot{r} \hat{\boldsymbol{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{B.28}$$

waar we onmiddelijk de onbinding van de snelheid in een *radiële* component, \dot{r} , evenredig met \hat{e}_{r} , en een *hoek* component, $r\dot{\theta}$, evenredig met \hat{e}_{θ} , zien.

B.3 scalaire en vector grootheden

We kunnen nu scalars en vectoren definieren met behulp van hun gedrag onder een coördinaten transformatie gespecificeerd door λ_{ij} . Als een triplet objecten (A_1, A_2, A_3) transformeert als

$$A_i \hookrightarrow A'_i = \lambda_{ij} A_j \tag{B.29}$$

onder de keuze van een nieuwe basis, dan is $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ een *vector*. Een grootheid ϕ die *niet* verandert onder een coördinaten transformatie is een *scalar*. Een voorbeeld hiervan is het scalar product (ook wel in product of dot product genoemd) van twee vectoren:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (A_i \hat{\boldsymbol{e}}_i) \cdot (B_j \hat{\boldsymbol{e}}_j) \tag{B.30}$$

$$= A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i \tag{B.31}$$

Onder een coördinaten transformatie vinden we:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A'_i \hat{\boldsymbol{e}}'_i \cdot B'_j \hat{\boldsymbol{e}}'_j \tag{B.32}$$

$$= A_i' B_j' \delta_{ij} \tag{B.33}$$

$$= \lambda_{ik} A_k \lambda_{jl} B_l \delta_{ij} \tag{B.34}$$

$$= A_k B_l \lambda_{ik} \lambda_{il} \tag{B.35}$$

$$= A_k B_l \delta_{kl} \tag{B.36}$$

$$= A_k B_k \tag{B.37}$$

i.e. het scalar product is inderdaad zoals de naam suggereert een scalaire grootheid. Merk op dat de lengte A van een vector A gegeven wordt door:

$$A \equiv |\mathbf{A}| \equiv \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \equiv \sqrt{A_i A_i}$$
 (B.38)

Omdat dit geschreven kan worden als een functie van het scalar product van een vector met zichzelf:

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \tag{B.39}$$

is de lengte van een vector, zoals te verwachten, een scalaire grootheid.

B.4 vector product en het Levi-Civita symbool

Het is ook mogelijk om, gegeven twee vectoren, een product te definieren van een vector oplevert. Dit product staat bekend als het vector product, en ook wel als uitproduct en kruisproduct:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \tag{B.40}$$

In termen van de componenten van de vectoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ en \boldsymbol{c} hebben we:

$$c_i = \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{c} \tag{B.41}$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \tag{B.42}$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_{i} \cdot \left(\sum_{j} a_{j} \hat{\boldsymbol{e}}_{j} \wedge \sum_{k} b_{k} \hat{\boldsymbol{e}}_{k} \right)$$
(B.43)

$$= \sum_{j,k} \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_j \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_k) a_j b_k \tag{B.44}$$

De vraag is nu hoe we $\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_j \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_k)$ definieren. Het meest voor de hand liggend is om gegeven twee vectoren hun vector product te kiezen als loodrecht op het vlak van de twee. Dan zijn er nog twee keuzes voor de richting, en deze kunnen we vast leggen door de volgende keuze:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_{i} \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_{j} \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_{k}) = \epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} +1, \text{ als } (i, j, k) \text{ een } even \text{ permutatie } \text{van } (1, 2, 3) \text{ is} \\ -1, \text{ als } (i, j, k) \text{ een } oneven \text{ permutatie } \text{van } (1, 2, 3) \text{ is} \\ 0, \text{ alle overige gevallen, i.e. } \text{ als } i = j, \text{ of } j = k, \text{ of } i = k \\ (B.45) \end{cases}$$

Dat dit precies doet wat we willen is eenvoudig in te zien: omdat de basisvectoren \hat{e}_i een orthonormale basis vormen is het duidelijk dat het uit-product van twee van deze vectoren gelijk is óf aan de derde, óf aan minus de derde. Dit leidt tot de onmiddelijke conclusie dat als er van het triplet (i, j, k) twee getallen het zelfde zijn, ϵ_{ijk} gelijk aan nul moet zijn, en als alledrie de getallen verschillend zijn, ϵ_{ijk} gelijk aan óf +1, óf -1 moet zijn. Verder moet onder verwisseling van j en k het teken veranderen, want $a \wedge b = -b \wedge a$. De enige niet-nul elementen van ϵ_{ijk} zijn dus:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1;$$
 (B.46)

$$\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1.$$
 (B.47)

Expliciet betekent dit:

$$c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{B.48}$$

ofwel:

$$c_1 = \epsilon_{1jk} a_j b_k = a_2 b_3 - a_3 b_2; \tag{B.49}$$

$$c_2 = \epsilon_{2jk} a_j b_k = a_3 b_1 - a_1 b_3; \tag{B.50}$$

$$c_3 = \epsilon_{3jk} a_j b_k = a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{B.51}$$

Merk op dat

$$\boldsymbol{c} = c_i \hat{\boldsymbol{e}}_i = \epsilon_{ijk} \hat{\boldsymbol{e}}_i a_j b_k = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
(B.52)

B.5 Combinaties van scalar en vector producten

Als referentie geven we hier nog een tweetal veel voorkomende combinaties van scalar en vector producten:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = a_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot (b_j \hat{\boldsymbol{e}}_j \wedge c_k \hat{\boldsymbol{e}}_k) \tag{B.53}$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_j \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_k) a_i b_j c_k \tag{B.54}$$

$$= \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k \tag{B.55}$$

$$= \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) \tag{B.56}$$

$$= \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \tag{B.57}$$

$$(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{d}) = (\hat{\boldsymbol{e}}_i \epsilon_{ijk} a_j b_k) \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_l \epsilon_{lmn} c_m d_n)$$
(B.58)

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_l \left(\epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{lmn} c_m d_n \right) \tag{B.59}$$

$$= \delta_{il} \left(\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} a_j b_k c_m d_n \right) \tag{B.60}$$

$$= \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn}a_jb_kc_md_n \tag{B.61}$$

$$= (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}) a_j b_k c_m d_n \tag{B.62}$$

$$= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d}) (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$
(B.63)

B.6. DIFFERENTIËREN VAN VELDEN

B.6 Differentiëren van velden

In een groot aantal toepassing komen grootheden voor die functies zijn van de positie in de ruimte. Deze grootheden heten in het algemeen *velden*. In het geval van eg. de temperatuur hebben we te maken met een getal voor elke positie. Dit kan beschreven worden met een *scalair* veld, bijvoorbeeld $\phi(x, y, z)$. Een andere mogelijkheid is een *vector* veld, bijvoorbeeld $\mathbf{A}(x, y, z)$: voor elke gegeven positie, is er een vector. Een voorbeeld is de snelheid van een stromende vloeistof. Deze kan worden beschreven door een vectorveld $\mathbf{v}(x, y, z)$. In het algemeen zullen we deze noteren als $\phi(\mathbf{r})$ en $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Vaak zijn we geïnteresseerd hoe velden veranderen als functie van de positie.

$$d\phi(\mathbf{r}) \equiv \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})$$
 (B.64)

$$= \frac{\partial \phi}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial \phi}{\partial r_2} dr_2 + \frac{\partial \phi}{\partial r_3} dr_3 \tag{B.65}$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial r_i}\hat{\boldsymbol{e}}_i\right) \cdot \left(\sum_j \hat{\boldsymbol{e}}_j dr_j\right)$$
(B.66)

$$= \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \tag{B.67}$$

Merk op dat $\nabla \phi$ een vector is. Dit kan expliciet worden gemaakt door te schrijven:

$$\boldsymbol{\nabla} = \sum_{i} \hat{\boldsymbol{e}}_{i} \frac{\partial}{\partial x_{i}} \tag{B.68}$$

of, in het algemeen:

$$\frac{d\phi(\boldsymbol{r})}{d\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\nabla}\phi; \tag{B.69}$$

Het komt vaak voor dat we de waarde van een scalair veld ϕ willen bepalen op de positie van een bewegend deeltje, $\phi(\mathbf{r}(t))$. De verandering van ϕ langs de curve $\mathbf{r}(t)$ is dan een kwestie van de kettingregel gebruiken:

$$\frac{d\phi\left(\boldsymbol{r}(t)\right)}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi \tag{B.70}$$

Als we te maken hebben met een vectorveld, dan kunnen we zowel het scalaire als het vectorproduct met ∇ (een vector!) nemen. In het eerste geval vinden we dan de div (van divergentie) operator:

$$div(\boldsymbol{A}) \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (A_j \hat{\boldsymbol{e}}_j)$$
(B.71)

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \tag{B.72}$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \tag{B.73}$$

Het resultaat van deze operator is een scalar. De andere mogelijkheid is het vectorproduct, in dit geval is dat de rot (van rotatie) operator:

$$rot(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{\nabla} \wedge \mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge (A_j \hat{\mathbf{e}}_j)$$
 (B.74)

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_i \wedge \hat{\boldsymbol{e}}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \tag{B.75}$$

$$= \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \hat{\boldsymbol{e}}_k \tag{B.76}$$

en het resultaat is een vector.

Bijlage C Literatuur

- T.W.B. Kibble, F.H. Berkshire. Classical Mechanics. Fifth Edition (Imperial College Press, 2004) ISBN 1860944353 (paperback). Goed leesbaar, modern boek dat begon als diktaat voor het college klassieke mechanica van Imperial College. Komt zeer goed overeen met de inhoud van dit college.
- H. Goldstein, C. Poole, J. Safko. Classical Mechanics Third Edition (Addison Wesley, 2002) ISBN 0-201-65702-3. Dit is een nieuwe druk van het klassieke leerboek op dit gebied: H. Goldstein, Classical Mechanics (Addison Wesley, 1980)

Het leerboek bevat goed leesbaar alle basisstof en daarnaast nog veel meer (o.a. tolbeweging, Hamilton-Jacobi theorie, kleine trillingen en continue media; velden). In de nieuwste druk is een hoofdstuk opgenomen over "Chaos". Voor de stof die wij behandelen is er vrijwel geen verschil met de oudere drukken.

 J.V. José, E.J. Saletan. Classical Dynamics. (Cambridge Univ. Press, 1998) ISBN 0 521 63636 1 (paperback)

Uitvoerig en modern leerboek, pittig niveau. Moderne wiskundige behandeling van niet-lineaire dynamica en "chaos".

4. L.N. Hand, J.D. Finch. Analytical Mechanics. (Cambridge Univ. Press, 1998) ISBN 0 521 57572 9 (paperback)

Als het voorgaande, maar eenvoudiger niveau. Minder uitvoerig over niet-lineaire dynamica.

5. F. Scheck, Mechanics (Springer Verlag, 2e druk, 1990)

Modern leerboek met o.a. behandeling van "chaotische"systemen. Gebruikt moderne wiskundige formulering. Vrij pittig niveau. ISBN 0-387-52715

6. C. Lanczos, The variational principles of mechanics (University of Toronto 1949) Geeft een goed gevoel voor de groei van het vakgebied in de ontstaansperiode.