

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Fisica

L'ATTENUAZIONE DEL RUMORE SISMICO NEL
RIVELATORE DI ONDE GRAVITAZIONALI **VIRGO**

Candidato

Paolo Alberto Ruggi

Relatore

Dott. Stefano Braccini

Marzo 2003

Indice generale

<i>INTRODUZIONE</i>	7
<u>I - LA RIVELAZIONE DELLE ONDE GRAVITAZIONALI</u>	9
I - 1 CENNI DI FISICA DELLE ONDE GRAVITAZIONALI	11
I - 1.1 LA TEORIA DI EINSTEIN DELLA GRAVITAZIONE	11
I - 1.2 LA PROPAGAZIONE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE	14
I - 1.3 L'INTERAZIONE DI UN'ONDA GRAVITAZIONALE CON LA MATERIA	19
I - 1.4 LA GENERAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI	23
I - 1.5 LE SORGENTI DI ONDE GRAVITAZIONALI OSSERVABILI SULLA TERRA	26
<i>I - 1.5(A) Sistemi binari</i>	27
<i>I - 1.5(B) Supernovae</i>	28
<i>I - 1.5(C) Pulsar</i>	28
<i>I - 1.1(D) Fondo stocastico</i>	29
I - 2 RIVELATORI DI ONDE GRAVITAZIONALI	30
I - 2.1 RIVELATORI A BARRE RISONANTI	30
I - 1.2 L'INTERFEROMETRO DI MICHELSON	31
I - 1.3 LA RIVELAZIONE INTERFEROMETRICA DI ONDE GRAVITAZIONALI	35
I - 1.4 ANALISI DEI DATI E SENSIBILITÀ DI UN RIVELATORE	37
I - 3 IL PROGETTO VIRGO	41
I - 3.1 LO SCHEMA OTTICO DELL'ANTENNA INTERFEROMETRICA	41

I - 3.2	LE SORGENTI DI RUMORE	44
	<i>I - 3.2(A) Il rumore sismico</i>	44
	<i>I - 3.2(B) Il rumore newtoniano</i>	45
	<i>I - 3.2(C) Il rumore termico</i>	46
	<i>I - 3.2(D) Rumori connessi alla rivelazione ottica</i>	48
	<i>I - 3.2(E) Rumori di fase</i>	49
I - 3.3	LA SENSIBILITÀ DI VIRGO	50
<u>II - L'ATTENUAZIONE DEL RUMORE SISMICO IN VIRGO</u>		53
II - 1	LA SOSPENSIONE DELLE OTTICHE	55
II - 1.1	ATTENUATORI MECCANICI DELLE VIBRAZIONI	55
	<i>II - 1.1(A) Il sistema adottato in VIRGO: un pendolo multiplo</i>	56
II - 1.2	IL FILTRO STANDARD	59
	<i>II - 1.2(A) Lame triangolari</i>	60
	<i>II - 1.2(B) Antimolle magnetiche</i>	63
II - 1.3	LO STADIO FINALE	65
II - 1.4	LO STADIO DI PRE-ATTENUAZIONE	67
	<i>II - 1.4(A) Il pendolo invertito</i>	68
	<i>II - 1.4(B) Il filtro 0</i>	72
	<i>II - 1.4(C) Il controllo degli spostamenti in bassa frequenza</i>	73
II - 1.5	IL SUPERATTENUATORE	75
II - 1.6	LA PROCEDURA DI ALLINEAMENTO DELL' APPARATO	78
II - 2	LA DINAMICA DEL SUPERATTENUATORE	81
II - 2.1	RAPPRESENTAZIONE SCHEMATICA DEL SISTEMA	81
	<i>II - 2.1(A) Elementi massivi e gradi di libertà</i>	83
	<i>II - 2.1(B) Elementi elastici e reazioni vincolari</i>	84
II - 2.2	GRADI DI LIBERTÀ ACCOPPIATI ED EQUAZIONI DEL MOTO	84
	<i>II - 2.2(A) Le oscillazioni verticali</i>	86
	<i>II - 2.2(B) Le oscillazioni orizzontali</i>	88
	<i>II - 2.2(C) Le oscillazioni torsionali</i>	89

II - 2.3	FATTORI DI QUALITÀ	89
II - 2.4	LE RISONANZE INTERNE	91
II - 2.5	STUDIO SPERIMENTALE DELLE RISONANZE DELLA CATENA	93
	<i>II - 2.5(A) Risonanze collettive in bassa frequenza</i>	93
	<i>II - 2.5(B) Risonanze in alta frequenza</i>	98
II - 2.6	CARATTERIZZAZIONE DEI MODI NORMALI TRAMITE MODELLO DI CALCOLO	99
	<i>II - 2.6(A) Espressione delle costanti elastiche in termini delle dimensioni dei vincoli</i>	99
	<i>II - 2.6(B) Quantificazione dei parametri in ingresso e risultati della simulazione</i>	105
II - 3	LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SUPERATTENUATORE	109
II - 3.1	LE MATRICI D'IMPEDENZA	110
	<i>II - 3.1(A) Sistemi collegati in serie</i>	112
	<i>II - 3.1(B) Sistemi collegati in derivazione</i>	112
	<i>II - 3.1(C) Sistemi collegati in parallelo</i>	112
	<i>II - 3.1(D) Sistemi ad una dimensione</i>	113
	<i>II - 3.1(E) Sistemi a due dimensioni</i>	116
II - 3.2	LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO VERTICALE	122
	<i>II - 3.2(A) Misura della funzione di trasferimento verticale dei filtri standard</i>	123
	<i>II - 3.2(B) Smorzamento delle risonanze in alta frequenza</i>	127
	<i>II - 3.2(C) Misura della funzione di trasferimento verticale del filtro 0</i>	132
	<i>II - 3.2(D) Misura della funzione di trasferimento verticale dello stadio finale</i>	133
	<i>II - 3.2(E) Misura delle funzioni di trasferimento verticali in bassa frequenza</i>	135
	<i>II - 3.2(F) La funzione di trasferimento verticale dell'intera catena</i>	138
II - 3.3	LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO ORIZZONTALE	139
	<i>II - 3.3(A) Misura della funzione di trasferimento orizzontale dei filtri standard</i>	139
	<i>II - 3.3(B) L'effetto della crossbar sul trasferimento orizzontale</i>	144
	<i>II - 3.3(C) Il pendolo invertito</i>	146
	<i>II - 3.3(D) La trasmissione delle vibrazioni orizzontali e angolari lungo la catena</i>	148
	<i>II - 3.3(E) Lo stadio finale</i>	151
	<i>II - 3.3(F) L'attenuazione orizzontale complessiva</i>	154
	<i>II - 3.3(G) Conclusioni: il rumore sismico residuo</i>	157

INTRODUZIONE

Le onde gravitazionali, ipotizzate da Albert Einstein nella Teoria della Relatività Generale, non sono ancora state oggetto di osservazione diretta, nonostante la decennale attività di numerosi rivelatori a barre risonanti criogeniche. Da alcuni anni la ricerca sperimentale ha intrapreso una strada alternativa: sono ormai in fase avanzata di sviluppo numerosi progetti di rivelazione basati sulla misura interferometrica della fluttuazione della distanza, che un'onda gravitazionale dovrebbe generare tra oggetti molto separati (nella fattispecie, gli specchi di un interferometro).

Uno di questi progetti, il Progetto VIRGO, è stato sviluppato dall'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, sezione di Pisa, in collaborazione col Centro Nazionale della Ricerca Scientifica francese. In particolare, è stato sviluppato nei laboratori dell'INFN un apparato, detto SUPERATTENUATORE.

Il superattenuatore ha lo scopo di sospendere le ottiche dell'interferometro in modo da renderle il più possibile isolate dalla consueta vibrazione sismica della crosta terrestre, la cui ampiezza è di molti ordini di grandezza superiore agli spostamenti che possono essere prodotti da un'onda gravitazionale. L'apparato si avvale di alcune soluzioni innovative, volte ad espandere alle basse frequenze la sua efficienza: grazie ad esso la banda di rivelazione attesa per VIRGO si dovrebbe spingere fino a 4 Hz, una frequenza molto bassa rispetto alle iniziali aspettative di altri rivelatori analoghi.

Il candidato ha preso parte alla fase finale del lavoro di ricerca sul superattenuatore, che ha condotto alla costruzione del primo prototipo completo (la cosiddetta 'Catena di R&D'), presso i laboratori di San Piero a Grado. Il lavoro si è articolato nelle seguenti fasi:

- Studio della possibilità di eseguire misure di funzione di trasferimento di una catena di filtri, utilizzando misure intermedie di trasferimento tra stadi consecutivi.
- Montaggio della Catena di R&D.

- Esecuzione delle numerose operazioni di allineamento necessarie per garantire la funzionalità dell'apparato.
- Caratterizzazione dei modi di risonanza della catena, come verifica di qualità del montaggio e dell'allineamento.
- Perfezionamento degli apparati (*dampers*) preposti all'assorbimento delle risonanze in alta frequenza.
- Misura delle funzioni di trasferimento verticali e orizzontali tra ciascuna coppia di stadi consecutivi della catena, come verifica di qualità della prestazione del superattenuatore.
- Estrapolazione della funzione di trasferimento complessiva e del rumore sismico residuo atteso sugli specchi dell'interferometro.

Nella prima parte della tesi è trattata brevemente la fisica delle onde gravitazionali e la problematica della loro rivelazione, con particolare riguardo al rivelatore VIRGO.

La seconda parte ha come argomento specifico il superattenuatore, e con esso la strategia di attenuazione del rumore sismico adottata da VIRGO. Si espone il disegno essenziale dell'apparato e delle sue numerose componenti, descrivendone per ciascuna il principio di funzionamento e lo scopo del suo utilizzo. Sono brevemente trattate anche le componenti dedicate al controllo dell'elemento sensibile – lo specchio – in fase di rivelazione, le quali trovano alloggiamento nello stadio finale del superattenuatore.

Nella parte finale sono esposti i risultati del lavoro sperimentale di caratterizzazione delle risonanze della catena e delle sue proprietà di attenuazione delle vibrazioni, giungendo a produrre una stima della sua funzione di trasferimento che, pur non avendo il valore di una misura diretta, ha buone basi nell'osservazione sperimentale. A supporto dei dati mancanti o lacunosi si utilizza un modello teorico, valido in approssimazione lineare. Le simulazioni prodotte a partire da questo modello, adattate al sistema in esame sulla base dei dati oggettivi, mostrano un ottimo accordo con i risultati sperimentali, e forniscono una verifica di autoconsistenza dello studio nel suo complesso.

PARTE I

LA RIVELAZIONE DELLE ONDE GRAVITAZIONALI

I - 1 CENNI DI FISICA DELLE ONDE GRAVITAZIONALI

I - 1.1 LA TEORIA DI EINSTEIN DELLA GRAVITAZIONE

L'ambito concettuale nel quale prende forma la moderna teoria della gravitazione [1] è quello della meccanica relativistica, introdotta da Albert Einstein con la pubblicazione della *teoria della relatività ristretta*.

L'estensione del *principio di relatività galileiano*¹ ai fenomeni elettrici richiede che la trasformazione delle coordinate, nel passaggio tra due sistemi di riferimento inerziali, lasci invariata la forma delle equazioni che descrivono i campi elettromagnetici (*equazioni di Maxwell*). Le trasformazioni che hanno questa proprietà (*trasformazioni di Lorentz*) trattano la coordinata temporale in modo molto simile alle coordinate spaziali, imponendo così una profonda revisione dei concetti di 'spazio' e 'tempo'.

In particolare, risulta che la distanza spaziale Δl e l'intervallo temporale Δt tra due eventi non possono essere considerate entità 'assolute', ovvero indipendenti dal sistema di riferimento². Ha invece carattere assoluto una nuova grandezza, combinazione delle prime due, detta *intervallo spazio-temporale*:

$$s^2 = \Delta l^2 - c^2 \Delta t^2 \quad (1)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto.

La *teoria della relatività ristretta* non sgombra totalmente il campo dalle idee preconconcette sulla natura dello spazio e del tempo. Resta infatti la necessità dell'adozione di una classe privilegiata di sistemi di riferimento: per l'appunto i già citati sistemi inerziali, implicitamente assunti nella formulazione del principio di relatività.

Si considera inerziale un sistema di riferimento rispetto al quale un corpo non soggetto ad alcuna forza appare in quiete od in moto rettilineo uniforme. Il sistema di

¹ "Le leggi della meccanica sono le stesse qualunque sia il sistema di riferimento inerziale a partire dal quale esse sono formulate". Questo principio sancisce l'equivalenza meccanica dei *sistemi di riferimento inerziali*, ovvero dei sistemi di riferimento nei quali i corpi non soggetti a forze esterne mantengono costante la loro velocità. Il *principio di relatività di Einstein*, sul quale è basata la *teoria della relatività ristretta*, estende l'equivalenza dei sistemi inerziali a tutte le leggi della fisica.

² L'intervallo temporale tra due eventi acquista proprietà del tutto assenti nella visione classica. In meccanica relativistica, esso è soggetto a regole di trasformazione che ne cambiano il valore, ed in certi casi anche il segno, quando si passa da un sistema di riferimento inerziale ad un altro in moto rispetto al primo. Il concetto di 'contemporaneità' tra gli eventi non è più assoluto, e si deve rinunciare all'idea di un 'orologio cosmico' che scandisca il trascorrere del tempo nello stesso modo per tutti i sistemi di riferimento spaziali.

riferimento costituisce una struttura per uno spazio predefinito, che prescinde dalla presenza di materia e da una concezione oggettiva della distanza, perché il corpo che lo definisce deve essere completamente isolato. La struttura può essere traslata o ruotata, ma lo spazio-tempo (vuoto) resta sempre lo stesso.

Il passo definitivo, nella rimozione degli assunti aprioristici che caratterizzano il punto di vista della meccanica classica, si compie con la *Teoria della relatività generale*. Einstein introduce una nuova definizione di sistema di riferimento inerziale, che non necessita più dell'astrazione di un universo vuoto. Invece di partire dalle osservazioni compiute su di un corpo non soggetto a forze esterne, si considera un corpo in moto libero sotto l'attrazione gravitazionale della materia realmente presente. La traiettoria da esso percorsa non dipende da alcuna proprietà intrinseca del corpo: esiste evidenza sperimentale del fatto che essa dipende soltanto dal suo stato meccanico iniziale (posizione e velocità), qualunque sia il corpo in osservazione³.

Da un sistema di riferimento solidale a questa traiettoria (definibile a prescindere dal corpo di prova, ma non dalla materia che determina l'attrazione gravitazionale) il corpo appare ovviamente in quiete. Inoltre, se si esclude la presenza di altre interazioni oltre a quella gravitazionale, e si resta confinati in una regione abbastanza limitata dello spazio-tempo, il moto di qualunque altro corpo appare rettilineo e uniforme. Il riferimento ha dunque le caratteristiche di un sistema inerziale, perché in esso si sperimenta una sostanziale assenza di interazione.

La *teoria della relatività generale* si basa sull'estensione del principio di relatività a questa classe di sistemi di riferimento, ed a quelli che si ottengono applicando ad essi le trasformazioni di Lorentz. Si assume inoltre che, nelle regioni dello spazio-tempo così descritte, la distanza propria tra gli eventi possa essere calcolata per mezzo della relazione metrica espressa in (1).

Nel ragionamento appena esposto, è necessario che la regione di spazio-tempo descritta sia limitata. In un sistema di riferimento che abbracci una regione estesa, diventano evidenti gli effetti della forza di gravità: le traiettorie dei corpi in caduta libera tendono ad incurvarsi, secondo geometrie dipendenti dalla distribuzione delle sorgenti di attrazione. L'utilizzo delle coordinate inerziali e della relazione metrica fondamentale diventano quindi totalmente arbitrari.

³ Questa asserzione costituisce il contenuto del cosiddetto *principio di equivalenza*.

Ricapitolando, l'intervallo spazio-temporale tra due eventi ravvicinati può essere sempre calcolato senza ambiguità con la procedura della relatività ristretta, ma deve essere adottato un sistema di riferimento 'locale'. In un sistema di riferimento 'globale', il sistema di coordinate non consente l'utilizzo della (1), ed i valori degli intervalli devono essere calcolati a partire da una relazione della forma:

$$ds^2 = (d\mathbf{X})^T \cdot \mathbf{g} \cdot d\mathbf{X} \quad (2)$$

dove $d\mathbf{X} = (dt, dx, dy, dz)$ è un vettore infinitesimo nello spazio delle coordinate e \mathbf{g} è una matrice simmetrica 4x4 dipendente dalle coordinate, detta *tensore metrico*.

Rispetto ad un generico sistema di coordinate, l'espressione esplicita dell'intervallo spazio-temporale è dunque una somma di termini come Δx^2 , Δt^2 e $\Delta x \Delta t$, con coefficienti che dipendono dalle quattro coordinate, ovvero variano nello spazio e nel tempo. Se il sistema di coordinate è costruito come estensione di un sistema locale liberamente gravitante, tali coefficienti si riducono a quelli della (2) solo nel punto spaziale occupato dal corpo in caduta libera.

Le operazioni matematiche con le quali si calcolano le distanze proprie, dunque, non sono definite 'a priori', ma possiedono una propria evoluzione temporale, intrecciata con quella della materia. Il punto di vista della relatività generale impone pertanto l'abbandono completo della concezione dello spazio come di un soggetto fisico strutturato in modo semplice e permanente, che funge da sostegno ai corpi materiali e dal quale è possibile ottenere esplicitamente ogni relazione geometrica tra essi.

La determinazione, a partire da un'assegnata distribuzione di materia, del tensore metrico costituisce il punto fondamentale della teoria della gravitazione.

Il problema è formalmente risolto dalle equazioni di Einstein⁴:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (3)$$

Esse legano la densità di massa, attraverso il *tensore energia-impulso* \mathbf{T} , ad un particolare insieme di funzioni non lineari del tensore metrico e delle sue derivate prime e seconde, spaziali e temporali: il *tensore di Riemann* \mathbf{R} . Esso è noto anche come

⁴ Le grandezze che presentano gli indici μ e ν sono elementi di matrici 4x4. La (3) rappresenta dunque 16 equazioni, delle quali solo 10 indipendenti, dal momento che le matrici in gioco sono simmetriche.

tensore di curvatura, perché nelle varietà bidimensionali si riduce ad uno scalare, numericamente uguale, in ogni punto, all'inverso del raggio di curvatura locale. Negli ordinari spazi euclidei, esso è ovunque nullo. Da qui nasce l'immagine suggestiva secondo la quale la presenza di materia determinerebbe un incurvamento dello spazio-tempo.

La costante G è la costante di gravitazione universale di Newton, come si può dedurre dall'analisi dell'equazione nelle condizioni in cui la concezione newtoniana della meccanica torna ad essere valida, ovvero il limite alle basse densità e velocità delle masse in gioco. In questo limite, infatti, si può ottenere dalla (3) l'equazione classica dell'interazione gravitazionale:

$$\Delta\phi = -4\pi G\rho \quad (4)$$

dove ϕ è il potenziale newtoniano e ρ è la densità di massa della sorgente.

Il moto di un corpo in campo gravitazionale è una particolare successione di eventi immersa nello spazio metrico creato da un'assegnata distribuzione di materia. Le traiettorie seguite dai corpi in caduta libera sono curve definite dalle proprietà geometriche dello spazio-tempo: le *geodetiche*, ovvero le curve di minima lunghezza spazio-temporale che congiungono due eventi assegnati.

L'equazione che descrive queste curve è la naturale generalizzazione agli spazi qualsiasi dell'equazione del moto in assenza di forza, cioè la condizione di annullamento dell'accelerazione. Si può dire, adottando nuovamente il punto di vista suggestivo, che i corpi liberamente gravitanti seguono traiettorie curve per assecondare il 'profilo incurvato' dello spazio-tempo.

I - 1.2 LA PROPAGAZIONE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE

Un sistema interagente può essere schematicamente suddiviso in tre soggetti: la sorgente, il ricevitore e l'intermediario, o *campo d'interazione*. Un campo è una funzione dei punti dello spazio-tempo, i cui valori sono fissati dallo stato della sorgente e determinano il comportamento meccanico del ricevitore. In sintesi, un'interazione si realizza attraverso uno scambio d'informazioni tra sorgente e ricevitore, mediato da un campo. Dal momento che l'interazione gravitazionale è la manifestazione delle proprietà geometriche dello spazio-tempo, è naturale l'identificazione del suo intermediario con il tensore metrico.

Lo scambio d'informazioni di cui si è parlato avviene nel rispetto del *principio di causalità*. Esso afferma che gli eventi ai quali vanno incontro i corpi sottoposti ad interazione non possono precedere gli eventi che la causano. In altre parole, i secondi devono appartenere al futuro dei primi.

Com'è noto, affinché la distanza temporale tra due eventi abbia segno definito, e si possa pertanto stabilire quale dei due è avvenuto per primo, l'intervallo spazio-temporale tra essi deve avere segno negativo, vale a dire:

$$\Delta l^2 - c^2 \cdot \Delta t^2 \leq 0 \quad \Delta t \geq \frac{\Delta l}{c} \quad (5)$$

In caso contrario, il segno dell'intervallo temporale dipende dal sistema di riferimento, ed i due eventi non possono essere correlati da una relazione causale.

Dalla (5) si deduce che la distanza temporale minima tra un evento ed un qualsiasi altro appartenente al futuro del primo cresce al crescere della loro distanza spaziale: si può affermare che il futuro di un evento si propaga nello spazio a velocità c . Ne consegue che tutti i campi intermediari di un'interazione, i quali trasmettono nel futuro l'informazione relativa allo stato della sorgente, devono possedere dei meccanismi di propagazione nello spazio a velocità finita, e questa velocità non può essere superiore alla velocità della luce.

Il caso più semplice è rappresentato dalla propagazione del campo elettromagnetico. Essa è descritta dall'equazione di D'Alambert:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (6)$$

dove $A = (\vec{A}, \varphi)$ è il quadrivettore che descrive i potenziali vettore e scalare, da cui derivano rispettivamente il campo magnetico ed il campo elettrico, e $\mathbf{j} = (\vec{j}, c\rho)$ è il quadrivettore che descrive le caratteristiche della sorgente (densità di corrente e di carica elettrica). Le soluzioni causali di quest'equazione si possono scrivere nella forma dei *potenziali ritardati*:

$$A(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{d^3 \vec{x}'}{r} [\mathbf{j}(\vec{x}', t')]_{t-r/c} \quad (7)$$

dove $r = |\vec{x}' - \vec{x}|$ è la distanza tra il punto di osservazione del potenziale e le singole cariche che compongono la sorgente, e il suffisso $t-r/c$ indica che la variabile temporale da cui dipende \mathbf{j} deve essere uguagliata a questo valore. È dunque evidente che lo stato del campo all'istante t dipende dallo stato della sorgente all'istante $t' = t-r/c$, ovvero l'informazione si propaga su un fronte sferico che si espande con velocità c .

Questa caratteristica del campo elettromagnetico si manifesta in maniera molto evidente in presenza di rapide variazioni dello stato di moto delle sorgenti. È noto, infatti, che un sistema di cariche in moto a velocità costante determina nello spazio campi elettrici e magnetici stazionari, la cui intensità decresce come l'inverso del quadrato della distanza dalle sorgenti.

Ad una variazione dello stato di moto delle sorgenti deve succedere una variazione dei campi statici circostanti. L'informazione necessaria a produrre questa variazione è trasportata, sul fronte sferico in espansione degli eventi futuri, da un ulteriore campo elettromagnetico, detto *onda elettromagnetica*. Essa si differenzia dai campi statici perché la sua intensità decresce come l'inverso della distanza dalla sorgente, pertanto si estingue molto più lentamente ed è rilevabile a distanze molto maggiori. La sua produzione coincide con il rilascio, da parte della sorgente, di una certa quantità di energia, che è trasportata dall'onda e può essere riassorbita dalla materia tramite interazione con l'onda stessa.

A differenza dell'equazione di D'Alambert, le equazioni di Einstein (3) sono non lineari e lo spazio che le supporta non è l'ordinario spazio piatto. Questo comporta notevoli complicazioni nella descrizione esatta della propagazione del campo gravitazionale.

Un'importante conferma dell'esistenza di meccanismi di propagazione simili a quelli descritti per il campo elettromagnetico è fornita dallo studio delle equazioni di Einstein in approssimazione di campo debole.

Quest'approssimazione è resa possibile dal fatto che, all'aumentare della distanza dalle sorgenti, la metrica dello spazio-tempo tende ad approssimarsi all'ordinaria metrica piatta. Ha senso pertanto sviluppare le equazioni di Einstein in termini della differenza tra il tensore metrico e il *tensore di Minkowski* η , associato alla metrica dello spazio piatto:

$$\mathbf{h} = \mathbf{g} - \eta \quad \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Supponendo piccola questa grandezza e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ottiene un'equazione lineare analoga nella forma a quella del campo elettromagnetico⁵:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{h} = -\frac{16\pi G}{c^4} \bar{\mathbf{T}} \quad (9)$$

Ne risulta un'espressione esplicita del campo gravitazionale formalmente identica a quella del campo elettromagnetico:

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{d^3 \bar{\mathbf{x}}'}{r} [\bar{\mathbf{T}}(\bar{\mathbf{x}}', t')]_{t-r/c} \quad (10)$$

Come nel caso elettromagnetico, le soluzioni non stazionarie sono caratterizzate da una velocità di propagazione finita, da un'energia trasportata e da una diminuzione d'intensità del campo proporzionale all'inverso della distanza. Queste soluzioni descrivono dunque le entità fisiche note col nome di *onde gravitazionali*.

Nello spazio vuoto e lontano dalla sorgente, le onde gravitazionali soddisfano l'equazione:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{h} = 0 \quad (11)$$

La soluzione più semplice di questa equazione è l'onda piana monocromatica:

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}, t) = h \boldsymbol{\varepsilon}^{TT} e^{i\frac{\omega}{c}(\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{x}} - ct)} \quad (12)$$

⁵ L'equazione che si ottiene con il procedimento di linearizzazione è più generale della (9). Quest'ultima presuppone una restrizione alla scelta del sistema di coordinate (scelta di *gauge*), dunque dà luogo ad un insieme di soluzioni matematiche più limitato. Ciò non comporta alcuna limitazione di carattere fisico, nel senso che, comunque, tutte le soluzioni fisicamente differenti sono rappresentate dalla (9). Va detto, inoltre, che questa restrizione non determina ancora univocamente il sistema di coordinate: esiste ancora una classe di trasformazioni che lasciano invariata la (9), pertanto essa contiene ancora soluzioni ridondanti. Ricordiamo infine che il tensore $\bar{\mathbf{T}}$ non coincide con il tensore \mathbf{T} della (3) perché, nel processo di linearizzazione di quest'ultima, assorbe alcuni termini del secondo ordine non trascurabili, provenienti dal primo membro [2].

In ogni punto dello spazio il campo ad essa associato, definito dalla parte reale della (12), oscilla con frequenza ω e ampiezza massima h ; inoltre l'ampiezza è costante su qualunque piano ortogonale al versore \vec{n} . La quantità:

$$\varphi = \frac{\omega}{c}(\vec{n} \cdot \vec{x} - ct) \quad (13)$$

è detta *fase* dell'onda; essa indica i punti dello spazio e gli istanti di tempo in cui il campo ha ampiezza massima ($\varphi = 0, \varphi = \pi$), nulla ($\varphi = \pi/2$), oppure una qualunque altra ampiezza intermedia. Al trascorrere del tempo, i punti di un piano con fase assegnata traslano in direzione \vec{n} a velocità c , dunque il versore \vec{n} è identificabile come la direzione di propagazione dell'onda.

La quantità ϵ^{TT} , detta *polarizzazione* dell'onda, è una matrice 4x4 a valori complessi. La sua presenza è motivata dal fatto che il campo h ha la stessa struttura del tensore metrico. Sebbene le matrici 4x4 costituiscano uno spazio vettoriale di dimensione 16, le polarizzazioni fisicamente diverse possono essere ottenute a partire da due sole matrici indipendenti. Tutte le altre sono rappresentazioni delle stesse soluzioni in differenti sistemi di coordinate. Il suffisso *TT* indica una particolare scelta del sistema di coordinate, con la quale la polarizzazione è rappresentata da una matrice trasversa (ortogonale alla direzione di propagazione) a traccia nulla. Orientando la terna di assi spaziali del sistema di riferimento *TT* in modo da far coincidere l'asse z con la direzione di propagazione dell'onda, tutte le polarizzazioni si possono esprimere come combinazione a coefficienti complessi delle seguenti matrici:

$$\epsilon_+^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_x^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

I - 1.3 L'INTERAZIONE DI UN'ONDA GRAVITAZIONALE CON LA MATERIA

Per avere un'idea concreta di come può manifestarsi un'onda gravitazionale, è utile scrivere esplicitamente, nel sistema di coordinate *TT*, la distanza propria tra due eventi nel campo di un'onda gravitazionale piana monocromatica che si propaga in direzione z , con polarizzazione ϵ_+^{TT} . Dalle (2), (8), (12) e (14), si ricava la seguente espressione:

$$ds^2 = \left\{ I + h \cos \left[\frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \right\} dx^2 + \left\{ I - h \cos \left[\frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \right\} dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (15)$$

Si consideri una coppia di eventi contemporanei e allineati lungo l'asse x nello spazio TT :

$$X_1 = (t, x, y, z) \quad X_2 = (t, x + L, y, z) \quad (16)$$

Essi localizzano gli estremi di un segmento disposto lungo un asse di polarizzazione del campo gravitazionale. Il vettore infinitesimo orientato lungo questo segmento ha solo la componente x diversa da zero:

$$d\mathbf{X} = (0, dx, 0, 0) \quad (17)$$

Sostituendo le componenti di questo vettore nella (15), si ricava l'espressione dell'elemento infinitesimo di lunghezza propria del segmento. Nell'ipotesi $h \ll I$, questa si scrive:

$$ds = \left\{ I + \frac{h}{2} \cos \left[\frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \right\} dx \quad (18)$$

Integrando la (18) tra gli estremi X_1 e X_2 , si ottiene infine:

$$s_{12} = L + \frac{Lh}{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (19)$$

Si otterrebbe ovviamente un risultato analogo partendo da due eventi contemporanei allineati lungo l'asse y .

In definitiva, si può affermare quanto segue:

la lunghezza propria di un segmento disposto lungo un'asse di polarizzazione (asse x o asse y) oscilla nel tempo con la frequenza dell'onda gravitazionale.

Per comprendere il significato fisico di quello che fin qui potrebbe sembrare un puro esercizio matematico, è necessario un approfondimento sul sistema di coordinate TT .

Risulta dall'equazione della geodetica associata alla (15) che ogni traiettoria di quiete, a partire da una posizione qualsiasi dello spazio-tempo, è una traiettoria geodetica, cioè liberamente gravitante. In altre parole, ogni corpo libero inizialmente in quiete nello spazio TT permane in questo stato anche negli istanti successivi. Lo spazio TT è dunque fisicamente costruibile disponendo a reticolo un insieme di masse libere,

ciascuna delle quali individua univocamente una terna di valori per le coordinate spaziali.

Gli eventi X_1 e X_2 della (16) sono due nodi del reticolo e rappresentano la linea oraria di due masse libere; il segmento che li unisce rappresenta la loro reale separazione. L'effetto di un'onda gravitazionale sulla materia consiste dunque nell'oscillazione della distanza propria tra due masse libere in quiete relativa, secondo la (19).

Per comprendere come possa essere concretamente apprezzato l'effetto appena descritto, conviene cambiare punto di vista, adottando un sistema di riferimento differente. Il punto di vista del sistema TT , dal quale appare che lo stato di quiete di una massa libera non viene modificato dal sopraggiungere di un'onda gravitazionale, può infatti lasciare l'impressione erronea che si abbia a che fare con un effetto non misurabile. Mostriamo che in un sistema di riferimento reale, come quello che può essere adottato in un normale esperimento di laboratorio, l'oscillazione della distanza propria indotta da un'onda gravitazionale si manifesta come il moto effettivo di un corpo nello spazio.

Si consideri la seguente trasformazione di coordinate (il cui significato risulterà chiaro in seguito):

$$\begin{cases} x' = x \left\{ 1 + \frac{h}{2} \cos \left[\frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \right\} \\ y' = y \left\{ 1 - \frac{h}{2} \cos \left[\frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \right\} \end{cases} \quad (20)$$

la quale dà luogo alla nuova espressione della metrica:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz^2 - xHdtdx' + yHdtdy' + xHdx'dz - yHdy'dz \\ H &= h \omega \sin \left[\frac{\omega}{c} (z - ct) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Eseguendo una costruzione analoga a quella illustrata all'inizio del paragrafo, si nota che due eventi contemporanei ($dt = 0$), allineati in direzione ortogonale a quella di propagazione dell'onda ($dz = 0$) e spazialmente immobili (coordinate x' e y' costanti nel tempo) hanno distanza propria costante nel tempo ed equivalente alla loro distanza euclidea:

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2 \quad (22)$$

Da notare che, in assenza dell'onda gravitazionale, il nuovo sistema di coordinate si riconduce a quello di uno spazio euclideo: questo significa che la distanza propria tra i due eventi considerati non è influenzata dal passaggio dell'onda gravitazionale. Si può dunque affermare che i due eventi individuano gli estremi di un regolo rigido, intendendo per 'rigidezza' la proprietà dei vincoli interni tra le particelle del corpo di opporsi ad ogni modificazione della loro distanza propria.

Il sistema di coordinate accentato è dunque quello che adotterebbe un osservatore che volesse misurare lo spostamento di un corpo secondo la maniera più classica, confrontando la sua posizione con quella un regolo rigido.

Il procedimento può essere schematizzato come segue:

1. Si adotta inizialmente il sistema inerziale locale definito da una massa liberamente gravitante nel campo di un'onda gravitazionale piana polarizzata. Questa massa individua l'origine spaziale $\mathbf{O}_t = (t, 0, 0, 0)$ del sistema di riferimento.

2. Si dispone il regolo rigido lungo una direzione di polarizzazione, con un'estremità nell'origine. L'altra estremità individua il punto $\mathbf{X}_L' = (t, L, 0, 0)$. L'asse X' così definito è la costruzione pratica della coordinata alla quale si riferisce la trasformazione introdotta in precedenza (20).

3. Nell'istante $t = 0$, si pone una massa libera in corrispondenza del punto \mathbf{X}_L' , in quiete nel sistema TT . Ad essa si attribuiscono le coordinate TT : $\mathbf{X}_L = (0, L, 0, 0)$. Per quanto detto all'inizio del paragrafo, le sue coordinate spaziali TT restano immutate al trascorrere del tempo.

4. Si costruisce la legge oraria della massa libera nel sistema di coordinate accentato, osservando l'evoluzione temporale della sua posizione rispetto al regolo. Essa non può essere altro che la trasformata di $\mathbf{X}_L(t)$ secondo la (20), la quale definisce appunto le equazioni di trasformazione dal sistema TT al sistema del laboratorio:

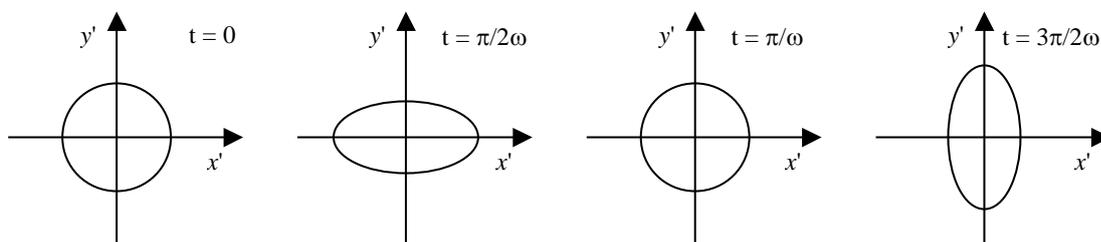
$$\mathbf{X}'_L(t) = \left(t, L \left[1 + \frac{h}{2} \cos(\omega t) \right], 0, 0 \right) \quad (23)$$

Quanto si osserva, è dunque un moto oscillatorio della massa libera rispetto all'estremità del regolo, di frequenza uguale a quella dell'onda gravitazionale e di ampiezza $Lh/2$.

Con procedimento analogo si dimostra che, se la massa libera è disposta sull'asse y , si manifesta un'oscillazione con la stessa frequenza ed ampiezza, ma sfasata di π rispetto alla prima. In pratica, quando la massa disposta lungo l'asse x si allontana dall'origine, quella disposta lungo l'asse y si avvicina.

La Figura 1 mostra come si comporta un anello di masse libere disposto sul piano di polarizzazione di un'onda gravitazionale piana polarizzata ϵ_+^{TT} . Il sistema di riferimento è quello descritto dalla (20) e la sua origine coincide con il centro dell'anello.

Figura 1 Moto di un anello di masse libere nel campo di un'onda gravitazionale polarizzata ϵ_+^{TT}



Nel caso in cui l'onda abbia polarizzazione ϵ_x^{TT} , gli assi di massima oscillazione dell'anello coincidono con le bisettrici dei quadranti: in effetti, le due polarizzazioni si possono ottenere l'una dall'altra per mezzo di una rotazione di 45° del sistema di riferimento intorno all'asse z .

Si può dunque affermare che le onde gravitazionali sono osservabili, in linea di principio, perché possono produrre un movimento effettivo di masse libere rispetto ad un sistema di riferimento rigido⁶. Questo movimento è interpretabile, secondo uno schema totalmente classico, come l'effetto dell'applicazione di una forza reciproca tra le masse, prodotta dal campo dell'onda gravitazionale. Si può anzi affermare, più in generale, che piccole fluttuazioni della distanza propria, riferite ad un sistema rigido, possono essere sempre interpretate in termini di applicazione di una forza.

I moderni rivelatori onde gravitazionali si basano sulla misura interferometrica degli spostamenti. Si noti che l'entità dello spostamento da misurare è proporzionale alla

⁶ La costruzione esposta in questo paragrafo è stata sviluppata unicamente per mettere in evidenza come la fluttuazione della distanza propria tra due masse sia una grandezza osservabile. Nella realtà, una tecnica di rilevazione delle onde gravitazionali basata sull'osservazione dello spostamento di una massa libera rispetto ad un sistema rigido è impraticabile, se non altro perché un regolo di grandissime dimensioni non può mai essere sufficientemente rigido.

distanza L tra due masse di prova, oltre che all'ampiezza h dell'onda gravitazionale; per questo motivo si stanno costruendo rivelatori di grandissime dimensioni.

Resta il fatto che, essendo dell'ordine di 10^{-21} l'ampiezza delle onde gravitazionali più intense attese sulla Terra, anche con rivelatori delle dimensioni di alcuni chilometri gli spostamenti da misurare sono estremamente piccoli (10^{-18} metri). Questo spiega perché fino ad oggi non è stato ancora possibile osservare direttamente un'onda gravitazionale.

I - 1.4 LA GENERAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI

Per avere un'idea del legame tra l'ampiezza di un'onda gravitazionale e le grandezze che caratterizzano lo stato dinamico della sorgente, è utile studiare la soluzione della (9) in un caso semplice.

Un'espressione approssimata per il campo di un'onda gravitazionale emessa da una sorgente non relativistica⁷ si ottiene dalla (10), prendendo l'ordine più basso dello sviluppo dell'integrale in termini del parametro v/c . Le sue componenti spaziali si esprimono come segue:

$$h^{ij}(\vec{x}, t) = \frac{2G}{c^4 r_0} \left[\frac{d^2 I^{ij}}{dt'^2} \right]_{t-r_0/c} \quad I^{ij} = \int d^3 \vec{x}' \rho(\vec{x}', t') (x'^i x'^j - \frac{1}{3} |\vec{x}'|^2 \delta^{ij}) \quad (24)$$

dove r_0 è la distanza tra la sorgente ed il punto in cui si calcola il campo.⁸ Nello sviluppo si suppone che r_0 sia grande rispetto alla lunghezza delle onde irraggiate.

La matrice I^{ij} , detta *momento di quadrupolo*, è una grandezza proporzionale alla massa della sorgente, ma dipende anche dall'asimmetria della sua densità: essa ha componenti diverse da zero soltanto se la distribuzione di massa si discosta dalla simmetria sferica.

L'ampiezza dell'onda gravitazionale dipende dalla derivata seconda del momento di quadrupolo, dunque dalle componenti asimmetriche dell'accelerazione.

Va inoltre segnalata la presenza del fattore costante $G/c^4 = 8.3 \cdot 10^{-45} \text{ s}^2/\text{kg} \cdot \text{m}^3$: esso è responsabile del fatto che l'irraggiamento gravitazionale ha dimensioni estremamente

⁷ Per 'sorgente non relativistica' si intende un corpo o un sistema di corpi in cui le singole parti si muovono a velocità piccola rispetto a quella della luce. Una conseguenza è che la lunghezza delle onde irraggiate è grande rispetto alle dimensioni della sorgente.

⁸ L'ampiezza dell'onda è inversamente proporzionale alla distanza r_0 tra sorgente e punto di osservazione, come tipicamente avviene nei fenomeni di propagazione per onde (vedi par. I - 1.2).

piccole rispetto agli altri fenomeni d'interazione della materia, cosa che rende molto difficile la sua osservazione.

È molto semplice calcolare esplicitamente il campo espresso dalla (24) nel caso di un sistema costituito da due corpi di uguale massa M , di piccole dimensioni rispetto alla loro distanza $2R$ ed in rotazione a velocità v intorno al baricentro. Risulta che il sistema emette onde monocromatiche con frequenza $\Omega = 2v/R$, pari alla frequenza con cui i corpi si scambiano le rispettive posizioni, cioè il doppio della frequenza orbitale. La direzione di massima emissione è l'asse polare della sorgente (la verticale rispetto al piano dell'orbita). In questo caso, l'ampiezza e la polarizzazione dell'onda si scrivono rispettivamente:

$$h = \frac{8GMv^2}{c^4 r_0} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_+^{TT} + i\boldsymbol{\varepsilon}_\times^{TT} \quad (25)$$

Nelle direzioni equatoriali le onde emesse sono invece polarizzate $\boldsymbol{\varepsilon}_+^{TT}$ e l'ampiezza si riduce alla metà rispetto al suo valore massimo.

Il sistema appena descritto non ha interesse soltanto dal punto di vista accademico, perché l'universo è in realtà molto popolato di oggetti simili: i *sistemi binari*. Questi oggetti astronomici sono costituiti da una coppia di stelle in rotazione l'una intorno all'altra, a causa della reciproca attrazione gravitazionale. In molti casi la loro massa e velocità sono tali da renderli buone sorgenti di onde gravitazionali.

Nel caso di masse uguali, orbite circolari e velocità non relativistiche, utilizzando il legame classico tra la velocità ed il raggio dell'orbita per i moti kepleriani, la (25) si può esprimere in una forma molto semplice, che permette di avere un'idea immediata dell'ampiezza del campo gravitazionale in termini delle dimensioni del sistema binario e della distanza del punto di osservazione dalla sorgente:

$$h \approx \frac{R_s^2}{r_0 R} \quad R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (26)$$

È stata introdotta, al posto della massa, la lunghezza R_s , detta *raggio di Schwarzschild*. Il suo ordine di grandezza è qualche chilometro per corpi la cui massa sia paragonabile a quella del Sole.⁹

⁹ Si tratta della dimensione tipica degli oggetti celesti estremamente compatti. Se un corpo di massa M collassa in una sfera di raggio inferiore a R_s , lo spazio-tempo all'interno di quest'ultima acquista una

Un sistema binario comune, le cui dimensioni siano paragonabili a quelle del Sistema Solare ($R_s \approx 10^3 \text{ m}$; $R \approx 10^{12} \text{ m}$), emette un'onda gravitazionale di ampiezza $h \approx 10^{-25}$, misurata su distanze galattiche tipiche (migliaia di anni-luce: $r_0 \approx 10^{19} \text{ m}$), e di frequenza $\Omega \approx 10^{-9} \text{ Hz}$. Se invece il sistema binario è costituito da stelle di neutroni o buchi neri in orbita estremamente ravvicinata ($R \approx 10 \cdot R_s$), l'ampiezza dell'onda gravitazionale diventa $h \approx 10^{-17}$, su distanze galattiche, o $h \approx 10^{-20}$, su distanze intergalattiche (milioni di anni-luce), e la frequenza $\Omega \approx 10^3 \text{ Hz}$. Come vedremo in seguito, la frequenza dell'onda gravitazionale è un parametro tutt'altro che secondario, perché da esso dipende fortemente la sensibilità dei rivelatori. Attualmente non è possibile costruire rivelatori terrestri con buona sensibilità al di sotto di qualche Hertz.

Esistono altri fenomeni astronomici in cui grandissime estensioni di materia subiscono enormi accelerazioni: un esempio è costituito dagli eventi esplosivi ai quali vanno incontro le stelle più massicce nell'ultima fase del loro processo evolutivo (*supernovae*). Una volta cessate le reazioni nucleari, responsabili delle emissioni elettromagnetiche della stella, la forza di gravità non è più bilanciata dalla pressione verso l'esterno generata dalla radiazione, e la materia inizia a cadere verso il centro della stella, sotto l'azione del proprio peso. Nel nucleo centrale della stella, l'estrema compressione della materia determina il crollo della struttura atomica, al decadimento delle coppie protone-elettrone in neutroni, ed all'emissione di radiazione verso l'esterno. A questo punto il collasso gravitazionale termina bruscamente, perché il nucleo stellare raggiunge la sua massima compattezza e si trasforma in una *stella di neutroni*. L'enorme quantità di energia che si libera in quel momento porta all'espansione degli strati esterni e ad un grande incremento della luminosità della stella. Nel caso in cui la stella risieda nella nostra galassia, appare improvvisamente nella volta celeste un nuovo oggetto luminoso, che poi si spegne nel giro di qualche giorno.

Se il fenomeno è molto ben osservabile dal punto di vista elettromagnetico, dal punto di vista dell'emissione di onde gravitazionali la situazione non è altrettanto favorevole, perché il collasso gravitazionale dovrebbe essere caratterizzato da una sostanziale simmetria sferica. In questo caso il momento di quadrupolo è un termine secondario nello sviluppo della distribuzione di materia, la cui entità è legata ad asimmetrie più o

curvatura talmente elevata che perfino le traiettorie della luce vi restano intrappolate: ha così origine un buco nero.

meno casuali e difficili da prevedere, se non attraverso modelli teorici molto complessi ed incerti. Va detto però che, durante il collasso, e soprattutto nel momento del rimbalzo finale, sono in gioco accelerazioni così elevate da far ritenere che l'emissione gravitazionale delle supernovae sia dell'ordine o superiore a quella dei sistemi binari precedentemente descritti.

I - 1.5 LE SORGENTI DI ONDE GRAVITAZIONALI OSSERVABILI SULLA TERRA

L'universo dovrebbe dunque essere popolato da oggetti in grado di emettere onde gravitazionali di ampiezza e frequenza tali da essere percepite dai moderni rivelatori terrestri. Inoltre, a differenza delle onde elettromagnetiche, le onde gravitazionali potrebbero attraversare la materia interstellare senza essere assorbite, rendendo osservabili eventi astrofisici che altrimenti restano oscurati. La possibilità di osservare queste sorgenti è però legata non soltanto alla loro potenza emissiva ed alla frequenza del segnale emesso, ma anche alla loro numerosità entro una data regione di spazio ed un dato intervallo di tempo. Da questo parametro, infatti, dipende la probabilità che una sorgente si trovi in una regione di spazio abbastanza vicina alla Terra, e sia attiva nel periodo in cui si cerca di osservarla.

La ricerca nel campo dell'astrofisica ha messo a punto modelli teorici in grado di stimare la probabilità che fenomeni gravitazionali importanti siano presenti in questo momento, o si realizzino nei prossimi anni, nella nostra galassia o in quelle limitrofe, in un raggio di alcune centinaia di milioni di anni-luce [3]. Va detto che i modelli hanno un'incertezza piuttosto elevata, per la complessità dei sistemi in oggetto e per la difficoltà a reperire dati sperimentali su di essi.

Proponiamo nel seguito un breve quadro riepilogativo delle sorgenti di onde gravitazionali candidate all'osservazione, sulla base delle attuali conoscenze.

I - 1.5(A) Sistemi binari

Le frequenze orbitali dei sistemi binari sono generalmente troppo basse perché le onde gravitazionali da essi generate siano osservabili con rivelatori costruiti sulla Terra, essendo la sensibilità di questi ultimi molto limitata per frequenze inferiori a qualche Hertz.

Fanno eccezione i sistemi binari costituiti da oggetti molto compatti, come le stelle di neutroni o i buchi neri [4]. La perdita di energia per irraggiamento gravitazionale determina una progressiva diminuzione del raggio dell'orbita e del periodo di

rivoluzione del sistema binario, tanto che alcuni di essi possono giungere alla collisione in tempi relativamente brevi rispetto all'età dell'universo. Nelle ultime ore che precedono lo scontro finale, la frequenza dell'onda entra nella banda di massima sensibilità di un rivelatore come VIRGO (da qualche Hz a qualche kHz), ed aumenta progressivamente fino a raggiungere l'ordine del kHz al momento dell'urto. In questa fase, detta *coalescenza*, il sistema raggiunge accelerazioni di quadrupolo estremamente elevate, e quindi diventa una sorgente di onde gravitazionali di notevole intensità.

La relativa semplicità della dinamica di questi sistemi permette una stima piuttosto precisa della loro evoluzione temporale, e quindi dell'andamento del segnale gravitazionale prodotto su un rivelatore. In questi casi è possibile ottenere una diminuzione del rapporto segnale-rumore attraverso l'applicazione di opportuni filtri, il che ne facilita la rivelazione.

La (26) fornisce una stima approssimativa dell'ampiezza dell'onda gravitazionale emessa da una binaria coalescente¹⁰. Se ipotizziamo che la soglia di rilevabilità per questo tipo di segnale sia dell'ordine di $h \approx 10^{-22}$, la coalescenza di un sistema binario compatto è visibile ad una distanza dell'ordine di 10^8 anni-luce. Le attuali stime prevedono che in questo raggio possano verificarsi alcuni eventi ogni anno.

È doveroso infine osservare che proprio un sistema binario è l'unico oggetto per il quale esista una conferma sperimentale, seppure indiretta, di quanto previsto teoricamente. Si tratta del sistema costituito dalla *Pulsar PSR1913+16* e dal compagno oscuro che le ruota attorno con un periodo di circa 8 ore [5] [6]. L'osservazione prolungata del suo periodo di rivoluzione ha messo in luce una spiralizzazione dell'orbita, riconducibile con esattezza alla perdita di energia per emissione di onde gravitazionali.

I - 1.5(B) Supernovae

L'esplosione di una supernova nella nostra galassia è un evento ben documentato fin dall'antichità; le osservazioni antiche e recenti consentono di stimare che accadano mediamente due/tre eventi per secolo, riferendosi esclusivamente alle supernovae che terminano con la generazione di una stella di neutroni. Per quanto affette da grossa incertezza, le stime teoriche portano a ritenere che le onde gravitazionali associate a

¹⁰ La (26) è valida esattamente solo nel limite non relativistico, ma fornisce un ordine di grandezza attendibile anche nel caso della coalescenza, dove le velocità in gioco sono vicine a quelle della luce.

questi eventi siano alcuni ordini di grandezza al di sopra della sensibilità di un rivelatore interferometrico.

Nell'attesa che accada l'evento fortunato, si può sperare che siano osservabili le onde gravitazionali emesse dalle supernovae delle galassie vicine. L'ammasso Virgo è costituito da centinaia di galassie simili alla nostra, nelle quali complessivamente possono esplodere alcune supernovae ogni anno. Sfortunatamente, la loro distanza dalla Terra ($\approx 3 \cdot 10^7$ anni-luce) è tale che la soglia di rilevabilità potrà essere raggiunta solo dagli eventi con elevata asimmetria. Questo parametro, dal quale dipende l'efficienza dell'emissione gravitazionale, non è prevedibile con sufficiente certezza da consentire una stima accurata del ritmo di occorrenza degli eventi rivelabili.

I - 1.5(C) Pulsar

Le *Pulsar* sono stelle di neutroni in rapida rotazione su sé stesse, visibili come sorgenti di onde radio. La nostra galassia ne contiene alcune migliaia la cui frequenza di rotazione è dell'ordine o superiore a qualche Hertz [7]. Incidono sull'ampiezza dell'onda la frequenza f di rotazione, la distanza r dalla Terra ed un parametro, indicato con ε , legato alla presenza di asimmetrie nella distribuzione di massa. La relazione che segue permette di calcolare il campo h in funzione di questi parametri.

$$h \approx 10^{-23} \varepsilon \left(\frac{f}{10\text{Hz}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{10\text{Kpc}}{r} \right) \quad \varepsilon \approx 10^{-6} ; 10^{-2} \quad (27)$$

Nonostante le ampiezze in gioco, molto basse rispetto alle sorgenti descritte in precedenza, le Pulsar hanno il vantaggio di rimanere osservabili per tempi molto lunghi. Questo fatto aumenta la speranza di rilevabilità delle onde gravitazionali emesse, grazie al fatto che la sensibilità di un rivelatore aumenta al crescere del tempo di osservazione (si veda in proposito il paragrafo I - 2.4).

I - 1.5(D) Fondo stocastico

Citiamo infine un terzo tipo di onde gravitazionali, diverso da quelle periodiche o impulsive: come accade per le onde elettromagnetiche, potrebbe esistere una radiazione di fondo a banda larga, che riempie lo spazio in modo essenzialmente stazionario ed isotropo. A questa radiazione dovrebbe contribuire la totalità emissioni gravitazionali di ogni parte dell'universo, compreso il residuo 'fossile' di quelle risalenti alla sua prima fase evolutiva.

Le stime relative all'intensità ed alla banda principale di frequenza, sebbene estremamente incerte, non escludono la possibilità che i rivelatori interferometrici in fase di costruzione siano in grado di osservare questa radiazione [8].

I - 2 RIVELATORI DI ONDE GRAVITAZIONALI

I - 2.1 RIVELATORI A BARRE RISONANTI

Come è stato già discusso nel par. I - 1.3, l'effetto misurabile del passaggio di un'onda gravitazionale consiste essenzialmente in una fluttuazione della distanza propria di due masse libere, proporzionale alla distanza stessa. In un sistema di riferimento 'quasi classico', come quello descritto nel paragrafo appena citato, questa oscillazione si manifesta come un effettivo spostamento relativo delle due masse. Il campo dell'onda gravitazionale quindi si comporta a tutti gli effetti come una forza applicata reciprocamente tra le masse.

Una maniera per facilitare l'osservazione di una forza di questo tipo consiste nel collegare elasticamente le due masse, in modo da realizzare un oscillatore armonico. Se il segnale gravitazionale ha componenti spettrali vicine alla frequenza propria dell'oscillatore, lo spostamento indotto sulle masse risulta amplificato, grazie al fenomeno della risonanza. È questo il principio in base al quale sono stati concepiti, all'inizio degli anni '60, i primi rivelatori di onde gravitazionali: le cosiddette *barre risonanti* [9] [10].

I rivelatori di questo tipo sono costituiti essenzialmente da un cilindro metallico di lunghezza circa un metro e di massa circa una tonnellata. L'elasticità propria del metallo rende il cilindro un sistema risonante in diversi modi ed a diverse frequenze: in particolare, il primo modo associato alla compressione e dilatazione lungo il suo asse ha frequenza propria intorno a 1 kHz. Sono dunque osservabili, in linea di principio, gli eventi impulsivi quali l'esplosione di supernovae e la coalescenza di binarie compatte, le cui frequenze tipiche possono appunto raggiungere questo ordine di grandezza.

Il sistema di trasduzione è costituito da un piccolo oscillatore, applicato ad un'estremità del cilindro e accordato sulla frequenza propria della barra. I due oscillatori interferiscono dando luogo ad un *battimento*: la vibrazione trasmessa alla barra dalla perturbazione gravitazionale si trasferisce gradualmente al piccolo oscillatore, con un fattore di amplificazione α , pari alla radice del rapporto delle loro rispettive masse. La vibrazione è convertita in segnale elettrico sfruttando la variabilità con la distanza dell'accoppiamento capacitivo od induttivo tra cilindro e massa di prova.

Il valore del fattore di amplificazione α è cruciale per l'ottimizzazione della sensibilità dall'apparato. Da una parte è conveniente che questo sia molto grande, per assicurare che la debolissima vibrazione indotta dai fenomeni gravitazionali sia percepibile dal trasduttore. Purtroppo un altro fenomeno agisce in direzione contraria: proporzionalmente al fattore α cresce anche il tempo necessario al trasferimento della vibrazione dalla barra alla massa di prova. L'osservazione deve quindi protrarsi per un tempo più lungo della durata dell'evento, con la conseguenza di rendere più rilevanti i disturbi meccanici che possono mascherare il segnale ricercato.

Tra questi citiamo il *rumore sismico* ed il *rumore termico*. Più avanti, parlando dei rumori che interessano i rivelatori interferometrici, questi fenomeni saranno descritti con maggiore dettaglio (par. I - 3.2).

Il rumore sismico è il disturbo che interessa il sistema per effetto delle vibrazioni naturali della crosta terrestre, alla quale la barra deve ovviamente rimanere vincolata. Il collegamento è realizzato attraverso una speciale sospensione, in modo da attenuare efficacemente la vibrazione sismica nelle sue componenti alle frequenze prossime alla risonanza della barra.

Il rumore termico è il disturbo che interessa il sistema per effetto dell'agitazione degli atomi che compongono la barra. Tale agitazione è quantificabile in termini della loro energia cinetica media, che a sua volta è proporzionale alla temperatura assoluta del sistema. Per questo la barra deve essere mantenuta a temperature molto prossime allo zero assoluto. Con le moderne tecnologie si riescono a raggiungere temperature dell'ordine dei milliKelvin.

I - 2.2 L'INTERFEROMETRO DI MICHELSON

In alternativa al principio della risonanza, è possibile utilizzare un altro meccanismo di amplificazione di una perturbazione gravitazionale: basta ricordare che la distanza propria tra due masse libere (19) oscilla con ampiezza proporzionale alla distanza stessa. Si può dunque immaginare un rivelatore in cui l'elemento sensibile è costituito da due masse reciprocamente svincolate ed estremamente distanti tra loro. È però necessario un trasduttore che permetta di misurare gli spostamenti relativi dei due corpi con alta precisione assoluta, indipendentemente dalla loro distanza.

Misure di questo genere sono possibili, in linea di principio, con tecniche basate sull'interferenza dei *raggi laser*. Si stanno pertanto sviluppando da alcuni anni numerosi

progetti, tra cui il Progetto VIRGO, che porteranno alla costruzione di rivelatori di nuova concezione: i cosiddetti *rivelatori interferometrici* [11].

Il disegno base è quello dell'interferometro di Michelson: una sorgente laser che invia un fascio luminoso collimato verso uno specchio semitrasparente (*beam splitter*) in posizione centrale; due specchi piani posti al termine di due percorsi ortogonali a partire dallo specchio centrale; un misuratore d'intensità luminosa (*fotodiodo*) disposto in modo da completare una croce insieme agli altri quattro elementi ottici.

Il raggio laser incide con un angolo di 45° sullo specchio semitrasparente e viene separato in due componenti uguali e coerenti; queste percorrono i rispettivi bracci delimitati dagli specchi piani e vengono riflesse verso il punto di partenza, dove avviene un'ulteriore suddivisione. I raggi che emergono nella direzione del fotodiodo hanno accumulato a questo punto una differenza di fase ϕ_0 , che dipende dalla differenza ΔL di lunghezza dei due bracci e dalla lunghezza d'onda λ della luce laser impiegata:

$$\phi_0 = 2\pi \frac{2\Delta L}{\lambda} \quad (28)$$

Lo sfasamento delle componenti che emergono nella direzione della sorgente contiene in più un termine, pari a π radianti, dovuto al fatto che un raggio ha subito due riflessioni sullo specchio semitrasparente, contro nessuna riflessione dell'altro.

Se la differenza di cammino è un multiplo esatto della lunghezza d'onda, i raggi diretti verso il fotodiodo interferiscono in fase e ricostruiscono interamente il raggio di partenza, mentre quelli diretti verso la sorgente interferiscono in controfase e si elidono a vicenda.

Nel caso più generale, la differenza di fase determina invece una ricombinazione parziale dei raggi in entrambe le direzioni. La potenza incidente sul fotodiodo si scrive:

$$P_{out} = P_{in} \left(\frac{1 + \cos(\phi_0)}{2} \right) \quad (29)$$

Nel caso in cui la potenza incidente e lo sfasamento dipendano dal tempo, per piccole fluttuazioni $\delta P_{in}(t)$ e $\varphi(t)$ di queste grandezze si può scrivere:

$$\delta P_{out}(t) = \frac{1}{2} P_{in} \sin(\phi_0) \varphi(t) + P_{out} \frac{\delta P_{in}(t)}{P_{in}} \quad (30)$$

Lo strumento è sensibile agli spostamenti relativi degli specchi, dovuti sia al segnale gravitazionale sia ai cosiddetti *rumori di spostamento*, perché la variazione $\delta l(t)$ della grandezza ΔL determina, in base alla (28), la seguente variazione di sfasamento:

$$\varphi_L(t) = \frac{4\pi\delta l(t)}{\lambda} \quad (31)$$

Altre possibili variazioni dello sfasamento, non legate ad un movimento degli specchi, sono chiamate *rumori di fase* e saranno complessivamente indicate con $\delta\phi(t)$. Per esempio, il cammino ottico dipende dall'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga la luce. Se nei due bracci dell'interferometro si trova aria a pressione atmosferica, le fluttuazioni dell'indice di rifrazione lungo i due percorsi generano uno sfasamento al fotodiodo, non riconducibile ad alcuno spostamento effettivo degli specchi.

Con l'introduzione delle grandezze $\delta l(t)$ e $\delta\phi(t)$, la (30) si può scrivere nella forma:

$$\delta P_{out}(t) = \frac{1}{2} P_{in} \text{sen}(\phi_0) \frac{4\pi\delta l(t)}{\lambda} + \frac{1}{2} P_{in} \text{sen}(\phi_0) \delta\phi(t) + P_{out} \frac{\delta P_{in}(t)}{P_{in}} \quad (32)$$

Nella condizione di massima sensibilità ($\phi_0 = \pi/2$; $P_{out} = P_{in}/2$), supponendo che siano completamente eliminati i rumori di fase e l'instabilità in potenza, la relazione che lega lo spostamento degli specchi alla fluttuazione di potenza al fotodiodo si scrive:

$$\delta l = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\delta P_{out}}{P_{out}} \quad (33)$$

La possibilità di misurare uno spostamento relativo degli specchi è dunque legata alla precisione relativa nella misura delle fluttuazioni di illuminamento al fotodiodo.

Data la natura corpuscolare della luce, la potenza irradiata subisce inevitabilmente fluttuazioni di tipo *poissoniano*, note col nome di *shot noise*. Dal momento che l'ampiezza relativa di tali fluttuazioni scala come $1/\sqrt{P_{out}}$, questa può essere ridotta con l'aumento della potenza impiegata.

Oltre un certo limite, però, la riduzione dello *shot noise* è inefficace, per la crescente incidenza di un disturbo complementare al primo: la pressione esercitata sugli specchi dal flusso stocastico di fotoni. Questa determina lo spostamento casuale degli specchi, che a sua volta produce un segnale spurio al fotodiodo. Si tratta, in ultima analisi, di una

limitazione di natura quantistica alla possibilità di determinare la posizione degli specchi, in accordo con il *principio di indeterminazione di Heisenberg*.

La condizione di lavoro ottimale, per la riduzione al minimo del rumore dovuto alla natura corpuscolare della luce (limite quantistico), è quella per cui i due rumori associati sono uguali¹¹. Le attuali tecnologie non consentono di lavorare in questo regime: la pressione di radiazione resta di fatto influente, rispetto allo shot noise.

Come abbiamo detto, la condizione di interferenza $\phi_0 = \pi/2$ determina la massima sensibilità dell'apparato agli spostamenti degli specchi, purché siano influenti i rumori di fase e la fluttuazione della potenza emessa dal laser. Di fatto, dal momento che la riduzione dello shot noise impone l'impiego di un laser possibilmente molto potente, la sua stabilità costituisce un problema tecnico rilevante.

Per questo motivo si preferisce fare in modo che l'interferometro lavori in condizione di interferenza distruttiva al fotodiode, o, come si dice in gergo, 'sulla frangia scura'. Tale condizione si ottiene controllando la posizione degli specchi in modo tale da mantenere costantemente $\phi = \pi$, ovvero $P_{out} = 0$.

Le fluttuazioni di potenza in ingresso diventano praticamente influenti, perché il terzo termine della (32) si annulla. Contemporaneamente si ha però anche l'annullamento del primo termine, con conseguente caduta della sensibilità agli spostamenti degli specchi.

Si utilizza allora una tecnica di rivelazione nota come *heterodyne detection*. Essa consiste nell'introdurre in ciascun braccio dell'interferometro, subito dopo il *beam splitter*, un elemento ottico detto *pockels cell*. Questo dispositivo, alimentato con un opportuno segnale in tensione, genera una modulazione sinusoidale della fase nel raggio da cui è attraversato, di ampiezza δ e pulsazione Ω .

Se le modulazioni sui due bracci sono regolate in antifase reciproca, esse non producono segnale al fotodiode. Quando però la fase è soggetta ad un'ulteriore perturbazione, dovuta per esempio ad un movimento degli specchi, appare al fotodiode un segnale modulato in ampiezza dal segnale aggiuntivo. In particolare, se un

¹¹ Va precisato che l'uguaglianza non può mai essere realizzata esattamente, perché i due rumori hanno profili spettrali differenti: lo shot noise è indipendente dalla frequenza, mentre la pressione di radiazione scala come $1/f^2$. La condizione di lavoro deve essere regolata in modo che il limite quantistico sia raggiunto ad una frequenza centrale nella banda di rivelazione. Nei rivelatori più avanzati la frequenza per la quale i due rumori sono uguali è comunque al di sotto della banda di rivelazione.

movimento in antifase degli specchi introduce su ciascun raggio una modulazione di fase di ampiezza φ e pulsazione ω , la potenza al fotodiodo si scrive come segue:

$$P_{out}(t) \approx 2P_{in} \delta \sin \Omega t \cdot \varphi \sin \omega t = P_{in} \delta \varphi [\cos(\Omega - \omega)t - \cos(\Omega + \omega)t] \quad (34)$$

valida nell'ipotesi che le ampiezze di modulazione δ e φ siano molto inferiori a 1 rad, e che l'interferometro lavori sulla frangia scura.

Compaiono pertanto due bande laterali, la cui separazione dalla frequenza principale è pari alla frequenza di oscillazione degli specchi, e la cui ampiezza è proporzionale all'ampiezza della stessa oscillazione.

I - 2.3 LA RIVELAZIONE INTERFEROMETRICA DI ONDE GRAVITAZIONALI

Si immagini un interferometro a bracci uguali di lunghezza L , disposti parallelamente agli assi di polarizzazione di un'onda gravitazionale piana di ampiezza h e pulsazione ω , con gli specchi liberamente gravitanti nel campo dell'onda. Le lunghezze proprie dei bracci oscillano in controfase secondo la (19), e la loro differenza all'istante t vale:

$$\Delta s = Lh \cos(\omega t) \quad (35)$$

Questo non permette di affermare in assoluto che gli specchi si muovano; abbiamo discusso nel par. I - 1.3 come essi possano apparire in quiete o meno, dipendentemente dal sistema di riferimento adottato. Per valutare la risposta dell'interferometro è dunque necessario comprendere bene in che modo la luce percorre le distanze nel campo gravitazionale.

Dal momento che la luce si muove a velocità finita, la distanza percorsa durante il volo in un braccio dell'interferometro non può essere espressa fissando un valore del tempo nella (19). Sottolineiamo che ciò che varia nel tempo non è tanto la posizione delle estremità dei bracci, quanto la lunghezza propria di ogni tratto che le collega, la quale oscilla con la frequenza f dell'onda gravitazionale. Questa grandezza deve essere integrata per tutto il tempo di volo - $\tau \approx 2L/c$ - per ottenere il cammino totale di ciascuno dei due raggi. Se il tempo di volo si avvicina al periodo $T = 1/f$ dell'onda gravitazionale, la lunghezza propria nei due bracci compie un'oscillazione quasi completa, ed entrambi i percorsi complessivi tendono ad approssimarsi al valor medio $2L$: la risposta dell'interferometro, proporzionale alla differenza di cammino nei due bracci, tende dunque a ridursi a zero.

La cosa è più facilmente quantificabile, oltre che meglio comprensibile a livello intuitivo, se si adotta il punto di vista del sistema di coordinate TT .

In questo sistema di riferimento, le coordinate spaziali degli specchi, e dunque le lunghezze spaziali dei due bracci, sono costanti nel tempo. Sono invece differenti le velocità con cui i raggi si muovono nelle due diverse direzioni. Ponendo $ds = 0$ (la condizione che definisce le traiettorie della luce) nella (15), si ricavano le velocità nelle rispettive direzioni di polarizzazione, sul piano $z = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = c \cdot \left[1 - \frac{h}{2} \cos(2\pi ft) \right] \quad \frac{dy}{dt} = c \cdot \left[1 + \frac{h}{2} \cos(2\pi ft) \right] \quad (36)$$

Se i tempi di volo sono piccoli rispetto al periodo dell'onda, le variazioni del termine $\cos(2\pi ft)$ durante l'intero tragitto possono essere trascurate. Essendo $2L$ la lunghezza di entrambi i bracci, i due tempi di volo si scrivono come segue:

$$\tau_x \approx \frac{2L}{c} \cdot \left[1 + \frac{h}{2} \cos(2\pi ft) \right] \quad \tau_y \approx \frac{2L}{c} \cdot \left[1 - \frac{h}{2} \cos(2\pi ft) \right] \quad (37)$$

da cui si ricava la differenza di fase accumulata dai due raggi:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi c \Delta\tau}{\lambda} \approx \frac{4\pi L h}{\lambda} \cos(2\pi ft) = \frac{4\pi \Delta s}{\lambda} \quad (38)$$

D'altra parte, per tempi di volo che si avvicinano al periodo dell'onda, le velocità dei raggi cambiano in modo rilevante durante il loro tragitto. Dal momento che entrambe fluttuano intorno allo stesso valore c , risulta che le rispettive velocità medie ed i conseguenti tempi di volo differiscono sempre meno; in questo modo la sensibilità del rivelatore risulta compromessa. Da questo si deduce che, per una data lunghezza dei bracci dell'interferometro, esiste una frequenza limite dell'onda gravitazionale, oltre la quale il rivelatore comincia a perdere la sua efficacia:

$$f_{lim} \approx \frac{c}{2L} \quad (39)$$

Per onde gravitazionali a frequenze ben inferiori alla frequenza limite, la risposta del rivelatore è la stessa; si ha dunque a che fare con un rivelatore a banda larga.

I - 2.4 ANALISI DEI DATI E SENSIBILITÀ DI UN RIVELATORE

Abbiamo visto alcuni meccanismi che permettono di riprodurre con un segnale elettrico l'andamento temporale dell'ampiezza di un'onda gravitazionale. Abbiamo anche visto come qualunque apparato costruito a questo scopo produca inevitabilmente un ulteriore segnale, risultato di disturbi indesiderati ed indipendente dal fenomeno in esame. Questa componente del segnale complessivo è detta *rumore*.

L'entità e le caratteristiche del rumore, oltre a costituire un limite alla precisione di una misura, determinano la *sensibilità* del rivelatore, ovvero l'ampiezza minima che deve avere il segnale generato dal fenomeno in osservazione perché possa essere apprezzata la sua presenza. La conoscenza di questa grandezza è fondamentale quando si progetta un rivelatore di onde gravitazionali, in quanto è necessario sapere, per giustificare l'investimento economico, se l'apparato in oggetto ha qualche speranza di rivelare i debolissimi segnali che sono attesi sulla Terra.

Il rumore è una grandezza variabile nel tempo in maniera casuale, dunque non esiste una legge oraria che lo caratterizzi esattamente. Una sua determinazione numerica n_t ad un istante di tempo t fissato deve pertanto essere descritta da una *variabile aleatoria*. Si tratta di una variabile a cui è associato un insieme statistico di possibili sue determinazioni, ciascuna delle quali ha una certa probabilità $p[n_t]$ di verificarsi. Essa sarà inoltre caratterizzata da una media $\langle n_t \rangle$ e da una varianza $\sigma_t^2 = \langle (n_t - \langle n_t \rangle)^2 \rangle$. In molti casi si ha a che fare con variabili a media nulla, varianza indipendente dal tempo e distribuzione *gaussiana*. Si parla in questo caso di *rumore stazionario gaussiano*.

Nel suo complesso, il rumore è descrivibile come una serie $n(t)$ di variabili casuali reali indicizzate dalla variabile tempo, della cui caratterizzazione ci limiteremo a fornire solo alcuni cenni.

Nel caso in cui si abbia a che fare con rumore stazionario gaussiano a media nulla, si assume che sia nulla anche la media temporale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(t) dt = 0 \quad (40)$$

e che la varianza sia determinabile attraverso la seguente relazione:

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n^2(t) dt \right] \quad (41)$$

Le diverse variabili che compongono la serie temporale non sono, in generale, reciprocamente indipendenti, ma presentano una certa correlazione, che dipende dall'andamento temporale dei fenomeni che generano il rumore.

Per fare un esempio, consideriamo un corpo libero immerso in un fluido. A causa dei continui urti che il corpo riceve dalle particelle del fluido in agitazione termica, la sua velocità v non può essere costante, ma fluttua in modo casuale. Nel tempo che intercorre tra un urto e il successivo, però, essa certamente non cambia. Detto τ_c l'intervallo medio tra due urti, le variabili v_t e $v_{t+\tau}$ sono scorrelate quando $\tau \gg \tau_c$, mentre sono uguali per $\tau < \tau_c$. Se invece il corpo è legato elasticamente in modo da costituire un oscillatore armonico di periodo T , alla fluttuazione casuale si sovrappone la risposta sinusoidale del sistema, perciò il valore della velocità tende a ripetersi per $\tau \approx T$ o suoi multipli.

La grandezza che esprime in quale misura due variabili associate ad istanti diversi sono reciprocamente correlate è detta *autocorrelazione*, e si scrive formalmente:

$$c(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n(t)n(t+\tau) dt \quad (42)$$

La sua trasformata di Fourier, detta *densità spettrale di potenza* o *potenza spettrale*:

$$\tilde{n}^2(f) = \int c(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (43)$$

permette di caratterizzare il rumore in termini del suo contenuto energetico alle diverse frequenze. Infatti, detto $n_{\Delta f}(t)$ il rumore che si ottiene annullando con opportuno filtro le sue componenti spettrali al di fuori della banda $\Delta f = f_{max} - f_{min}$, vale la seguente relazione:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} n_{\Delta f}^2(t) dt \right] = \int_{f_{min}}^{f_{max}} \tilde{n}_{\Delta f}^2(f) df \quad (44)$$

La radice quadrata di questa grandezza è detta *rms* (*rout mean square*); essa dà indicazione dell'ampiezza media del rumore all'interno di una banda prefissata.

Si può inoltre affermare che la potenza spettrale di un rumore generato dalla sovrapposizione di due cause indipendenti, e dunque prive di correlazione, è la somma delle singole potenze spettrali.

Si consideri il segnale $s_T(t)$ acquisito da un rivelatore per la durata complessiva T della misura. Si può affermare che è stato osservato un certo fenomeno sotto indagine se il segnale ha, in qualche sua parte, ampiezza significativamente superiore al rumore medio corrispondente, atteso per quell'apparato di misura.

Il confronto si esegue tenendo conto delle proprietà statistiche del rumore, sulla base delle quali è stabilito se esiste una probabilità non trascurabile che un eventuale incremento del segnale sia stato generato dalla fluttuazione naturale del rumore. L'indicatore statistico con il quale è parametrizzata questa probabilità è detto *rapporto segnale-rumore*.

Nel caso in cui sia effettuata l'analisi di uno spezzone di durata τ del segnale acquisito, il rapporto segnale-rumore si scrive come segue:

$$SNR = \sqrt{\frac{\int_{t_0}^{t_0+\tau} s_T^2(t) dt}{\int_{t_0}^{t_0+\tau} n^2(t) dt}} \quad (45)$$

Se al posto dello sviluppo temporale del segnale si utilizza la sua trasformata di Fourier $\hat{s}_T(f)$, e si tiene conto soltanto della componente spettrale del segnale in una piccola banda Δf intorno alla frequenza f_0 , il rapporto segnale-rumore si scrive:

$$SNR(f_0) = \sqrt{\frac{\int_{f_0-\Delta f/2}^{f_0+\Delta f/2} \hat{s}_T^2(f) df}{\int_{f_0-\Delta f/2}^{f_0+\Delta f/2} \tilde{n}^2(f) df}} \approx \sqrt{\frac{\hat{s}_T^2(f_0)\Delta f}{\tilde{n}^2(f_0)\Delta f}} = \frac{\hat{s}_T(f_0)}{\sqrt{\tilde{n}^2(f_0)}} \quad (46)$$

La grandezza $\tilde{n} = \sqrt{\tilde{n}^2(f)}$, detta *densità spettrale lineare*, è dunque un indice della sensibilità del rivelatore. Quest'ultimo è in grado di rivelare con maggiore facilità quei fenomeni il cui contenuto energetico è concentrato alle frequenze dove la potenza spettrale del rumore è più bassa.

Per quanto riguarda i fenomeni di durata tale per cui non sia ipotizzabile la loro osservazione completa, il rapporto segnale-rumore dipende dal tempo di misura. Se, per esempio, si tratta di un fenomeno periodico di frequenza f_0 , la trasformata di Fourier del segnale ad esso correlato ha un picco intorno ad f_0 , la cui larghezza è inversamente proporzionale alla durata della misura. Dal momento che il contenuto energetico medio

del segnale, espresso dall'integrale al numeratore della (46), è costante nel tempo di misura, si deduce che $\hat{s}_T(f_0) \propto \sqrt{T}$, come pure il rapporto segnale-rumore.

Quanto appena descritto ha notevole importanza in merito all'osservabilità delle Pulsar. Nella migliore delle ipotesi, le onde gravitazionali emesse da queste sorgenti possono raggiungere sulla Terra ampiezze di 10^{-24} . Un rivelatore interferometrico può raggiungere, alle frequenze tipiche delle Pulsar, una sensibilità $\tilde{n}(f_0) = 10^{-21} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$. Questo significa che è necessario, per avere un rapporto segnale-rumore abbastanza grande, un tempo di osservazione di almeno 10^6 secondi, pari a diversi giorni. Si tratta di tempi di osservazione che richiedono pazienza, ma che sono certamente alla portata dei rivelatori attualmente in fase di progettazione.

I - 3 IL PROGETTO VIRGO

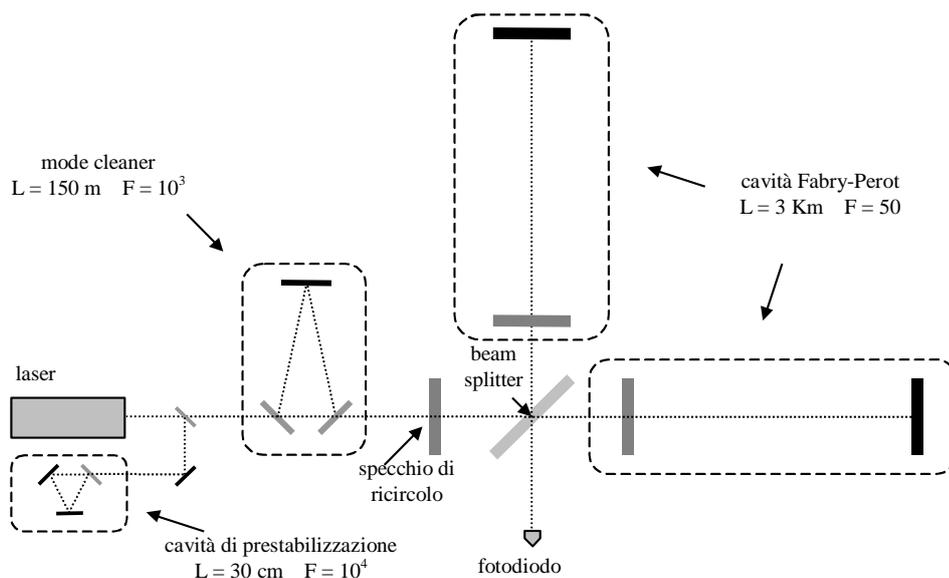
I - 3.1 LO SCHEMA OTTICO DELL'ANTENNA INTERFEROMETRICA

L'antenna interferometrica adottata nel Progetto Virgo [11] si presenta esternamente come un complesso di nove campane che contengono i vari elementi ottici dell'interferometro. Sei di queste sono raggruppate in una struttura centrale, mentre le tre rimanenti sono collocate a grande distanza rispetto a questa struttura e sono collegate ad essa per mezzo di lunghe tubazioni. Le campane e le tubazioni sono necessarie per il mantenimento sotto vuoto dell'ambiente in cui si propaga il fascio di luce, durante il suo cammino dalla sorgente laser al fotodiodo.

Nonostante le piccole dimensioni degli elementi ottici di un interferometro, le campane adottate per contenerle sono alte circa 10 metri. Questo perché ciascun elemento è sospeso ad un complesso apparato, la cui funzione è quella di ridurre gli spostamenti casuali dovuti all'attività sismica della crosta terrestre. Questo apparato, detto *superattenuatore*, costituisce l'argomento centrale di questa tesi.

Lo stadio iniziale è costituito da una sorgente laser di tipo Nd:Yag, con lunghezza d'onda $\lambda = 1064 \text{ nm}$ e di potenza $P_0 = 20 \text{ W}$, da una cavità per la stabilizzazione della frequenza e della potenza e da una cavità, detta *mode cleaner*, per la selezione di un singolo modo di propagazione del fascio: il TEM_{00} .

Figura 2 Rappresentazione schematica dell'interferometro VIRGO



L'antenna vera e propria inizia con uno specchio semitrasparente (riflettività: $r = 0.5$), inclinato a 45° rispetto alla direzione di provenienza del fascio. Esso, come nello schema classico, ha la funzione di separare il fascio in due componenti uguali e coerenti, che si propagano in direzioni mutuamente ortogonali verso i bracci dell'interferometro. Questi ultimi, però, non sono costituiti semplicemente da due specchi terminali, come nel caso dell'interferometro di Michelson descritto in precedenza, ma da due cavità di tipo *Fabry-Perot*.

Ciascuna di esse si compone di due specchi, la cui distanza reciproca è $L = 3 \text{ km}$: il primo in parte riflette ed in parte trasmette il fascio incidente ($r_1 = 0.88$); il secondo invece lo riflette completamente ($r_2 > 0.9999$). Al successivo impatto col primo specchio, il fascio subisce una riflessione parziale verso l'interno della cavità, mentre la componente trasmessa si ricombina con la luce riflessa al primo impatto.

Un singolo fotone può percorrere molte volte avanti e indietro la cavità prima di uscirne. In questo modo esso accumula più volte lo sfasamento descritto dalla (28), dunque diventa molto più sensibile alle variazioni δL della lunghezza del braccio. Resta ovviamente valido l'argomento secondo il quale, nel caso di spostamenti prodotti da un'onda gravitazionale, si ha perdita di sensibilità quando il tempo totale di volo del fotone si avvicina al periodo dell'onda.

Affinché si manifesti l'effetto di 'intrappolamento' della luce nella cavità è necessario che quest'ultima si trovi in *condizione di risonanza*, ovvero che la distanza L tra gli specchi sia multipla di $\lambda/2$. In questa condizione, lo sfasamento dei raggi emergenti dalle due cavità, prodotto da un'onda gravitazionale di ampiezza h e frequenza f , si scrive:

$$\varphi_h(f) = \frac{4\pi}{\lambda} \frac{2F}{\pi} Lh \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2FL}{\pi} \frac{2\pi f}{c}\right)^2}} \quad (47)$$

dove F è la *finezza* della cavità Fabry-Perot, un parametro caratteristico legato alla riflettività degli specchi.

Alle basse frequenze, la (47) si approssima alla (38), che descrive la stessa grandezza nel caso dell'interferometro classico, a patto che la lunghezza L dei bracci venga sostituita dalla seguente grandezza:

$$L_{opt} = \frac{2F}{\pi} L \quad (48)$$

La risposta alla perturbazione gravitazionale da parte di un interferometro a cavità Fabry-Perot è dunque aumentata, rispetto ad un interferometro classico delle stesse dimensioni, di un fattore $2F/\pi$.

D'altra parte, di un fattore identico risulta ridotta la banda di sensibilità del rivelatore: il valore del frequenza limite (39) si ottiene infatti con la stessa sostituzione $L \rightarrow L_{opt}$. Se la frequenza f dell'onda gravitazionale è pari a f_{lim} , lo sfasamento si riduce approssimativamente di un fattore 3 e continua a scendere proporzionalmente a $1/f$ per frequenze superiori.

Nel caso di VIRGO, la lunghezza effettiva è pari a circa 100 km e la banda in cui la sensibilità è costante si estende fino a frequenze dell'ordine di 1 kHz.

Come abbiamo visto nel par. I – 2.2, l'interferometro viene forzato a lavorare in condizioni di interferenza distruttiva al fotodiodo, dunque il fascio si ricombina interamente nella direzione della sorgente. In questa condizione di lavoro, c'è la possibilità di riutilizzare il fascio con la tecnica del *ricircolo della luce*. Essa consiste nel porre all'ingresso dell'interferometro, prima del *beam splitter*, uno specchio di alta riflettività ($r_{rec} = 0.98$), detto *specchio di ricircolo*. Si viene in questo modo a costituire una cavità simile alle Fabry-Perot descritte precedentemente. Mantenendo quest'ultima in risonanza, la potenza del fascio che va ad incidere sul *beam splitter* risulta amplificata (circa 1 kW). Si ottiene in questo modo una riduzione dello *shot noise*.

Il bloccaggio dell'interferometro sulla frangia scura ed il mantenimento della condizione di risonanza per le varie cavità richiede un sistema di controllo sulla posizione degli specchi, detto *locking*. Si utilizzano attuatori magnetici, con i quali vengono applicate delle forze tra ciascuno specchio ed una massa di riferimento sospesa vicino ad esso. Il segnale che regola la forza impiegata agisce in *feedback*, ovvero è ottenuto da sensori che percepiscono gli spostamenti del sistema dalla posizione di lavoro che deve essere mantenuta. Per il bloccaggio dell'interferometro sulla frangia scura, il *feedback* è realizzato attraverso il fotodiodo di rivelazione. Ciò che viene direttamente rivelato non è pertanto lo spostamento degli specchi, ma la forza necessaria per impedire questo spostamento.

I - 3.2 LE SORGENTI DI RUMORE

Nel par. I - 2.2 sono state introdotte in modo qualitativo le cause di rumore che condizionano la sensibilità di un rivelatore interferometrico. Abbiamo visto che queste si possono distinguere genericamente in tre classi:

- rumore di spostamento;
- rumore di fase;
- rumore legato alla rivelazione ottica.

Nei prossimi paragrafi saranno fornite indicazioni quantitative circa i rumori più rilevanti per VIRGO, ed alcune specifiche dei sistemi di attenuazione adottati per la loro limitazione.

Come vedremo in seguito, i rumori più critici sono, oltre allo *shot noise*, alcuni rumori di spostamento, quali il *rumore sismico*, il *rumore newtoniano* ed il *rumore termico*.

A proposito di questi ultimi è opportuno osservare che, con l'impiego delle cavità Fabry-Perot, lo sfasamento prodotto dagli spostamenti non è quello espresso nella (38), ma risulta amplificato di un fattore $2F/\pi$, lo stesso che incrementa la distanza effettivamente percorsa dalla luce:

$$\varphi_{L_{opt}} = \frac{2F}{\pi} \frac{4\pi\delta l}{\lambda} \quad (49)$$

Si capisce che, qualora i rumori di spostamento siano dominanti rispetto al segnale atteso, l'aumento della finezza delle cavità Fabry-Perot non ha alcun beneficio, perché il rumore viene amplificato esattamente come il segnale.

Una volta messi in opera tutti gli accorgimenti necessari per contenere i rumori di questo tipo, l'unica ulteriore soluzione consiste nell'amplificare il segnale di spostamento gravitazionale aumentando la lunghezza reale dei bracci.

Viceversa, l'entità dello *shot noise*, in termini di sfasamento, è indipendente dal fatto che siano impiegate o meno le cavità Fabry-Perot. L'utilizzo delle cavità è dunque efficace nella banda in cui la sensibilità del rivelatore è limitata dallo *shot noise*.

I - 3.2(A) Il rumore sismico

La superficie terrestre è soggetta a continue vibrazioni, pressoché isotrope, dovute all'attività geologica della crosta, ai fenomeni atmosferici e all'attività umana. I dati

sperimentali, raccolti in diverse parti del mondo, forniscono densità spettrali lineari generalmente ben approssimate, almeno a partire da qualche Hertz, dalla seguente formula empirica:

$$\tilde{x}_s(f) = \frac{\delta}{f^2} \quad (50)$$

con δ una costante che assume valori dell'ordine di $10^{-7} \text{ m}\cdot\text{Hz}^{3/2}$, ma anche molto più alti, a seconda dell'intensità e della vicinanza delle attività umane [13].

Ciò significa uno spostamento quadratico medio (rms) dell'ordine di 1 micron per frequenze dell'ordine di 1 Hertz, ovvero molti ordini di grandezza al di sopra degli spostamenti che si intendono rivelare in VIRGO.

Le ottiche dell'interferometro devono pertanto essere isolate da queste vibrazioni attraverso sistema di attenuazione meccanica ad altissime prestazioni. L'apparato adottato in VIRGO, il *superattenuatore*, è un pendolo a molti stadi, con frequenze di risonanza contenute entro 2.5 Hz su tutti i gradi di libertà. L'attenuazione fornita da questo apparato è dell'ordine di 10^{11} alla frequenza di 4 Hz, e dell'ordine di 10^{15} alla frequenza di 10 Hz. Per ulteriori dettagli sull'attenuazione del rumore sismico, rimandiamo alla seconda parte del lavoro, interamente dedicato a questo argomento.

I - 3.2(B) *Il rumore newtoniano*

La forza di gravità agente sulle ottiche dell'interferometro non è una grandezza statica, ma è soggetta a fluttuazioni legate alla variabilità della distribuzione locale di materia. Questa variabilità è dovuta alle deformazioni prodotte dalle onde sismiche.

La risposta a queste sollecitazioni da parte delle ottiche è influenzata dal fatto che esse sono sospese ai superattenuatori. Alle basse frequenze l'oscillazione della forza di gravità è compensata dalle sospensioni, mentre alle frequenze di risonanza della catena essa risulta amplificata. A frequenze superiori agisce liberamente sugli specchi, grazie all'effetto di isolamento provocato dalle sospensioni. In questa banda, che è quella interessante per la rivelazione, la densità spettrale lineare si scrive:

$$\tilde{x}_G(f) = \frac{2G\rho}{3\sqrt{\pi}} \frac{\tilde{x}_s(f)}{f^2} \quad (51)$$

dove G è la costante di gravitazione, ρ è la densità locale e $\tilde{x}_s(f)$ è la potenza spettrale lineare del rumore sismico [17] [18] [19].

Il rumore newtoniano è un effetto del rumore sismico non eliminabile con sistemi di attenuazione, perché agisce direttamente sugli specchi, senza attraversare le sospensioni. In presenza di un rumore sismico elevato, sarebbe proprio questo effetto collaterale a creare i maggiori problemi alla sensibilità del rivelatore (vedi par. I - 3.3).

I - 3.2(C) *Il rumore termico*

L'agitazione termica delle molecole che compongono gli specchi ed i corpi in contatto con essi (gli apparati di sospensione ed il gas residuo all'interno delle campane) genera una fluttuazione casuale della posizione delle superfici riflettenti, detta *rumore termico* [16].

Dal *teorema di fluttuazione e dissipazione* discende che la potenza spettrale dello spostamento generato con questo meccanismo ha la seguente espressione, applicabile a qualunque oggetto macroscopico:

$$\tilde{x}_T^2(f) = \frac{k_B T \sigma(f)}{\pi^2 f^2} \quad (52)$$

dove k_B è la *costante di Boltzmann*, T è la temperatura del sistema e $\sigma(f)$ è detta *ammittanza meccanica*.

Nella grandezza $\sigma(f)$ è racchiuso il legame tra le fluttuazioni termiche dello spostamento e l'entità delle forze dissipative a cui il corpo è soggetto nei suoi movimenti macroscopici. Essa si ottiene confrontando una forza esterna al sistema con la velocità che il corpo assume quando è soggetto a questa forza, nell'ipotesi che tra le due grandezze sussista una relazione lineare: più precisamente, $\sigma(f)$ è definita come la parte reale del rapporto tra le trasformate di Fourier rispettivamente della velocità e della forza.

Prendere la parte reale di questo rapporto significa considerare solo la componente della velocità in fase con la forza applicata, assumendo che quest'ultima abbia andamento sinusoidale. Tale componente è generata dalle reazioni dissipative che agiscono sul sistema: è infatti noto che, in assenza di dissipazione, la forza è in fase o in controfase con l'accelerazione, e quindi in quadratura con la velocità.

Nel caso dell'oscillatore armonico smorzato, consistente in un corpo vincolato da una forza elastica $F = -k\Delta x$, e soggetto anche a forze di tipo dissipativo, l'espressione esplicita dell'ammittanza meccanica è la seguente:

$$\sigma(f) = \frac{2\pi f \phi(f) / k}{(1 - f^2 / f_0^2)^2 + \phi^2(f)} \quad (53)$$

dove f_0 è la *frequenza di risonanza* dell'oscillatore.

La grandezza $\phi(f)$ sintetizza in un unico termine i diversi effetti dissipativi legati alla reazione vincolare, che possono essere dovuti ad attriti viscosi oppure a smorzamenti di altra natura. Essa viene introdotta nell'equazione dell'oscillatore armonico in trasformata di Fourier, esprimendo la costante elastica nella forma $k(1+i\phi)$. L'inverso di questa grandezza, calcolato alla frequenza di risonanza, è il *fattore di qualità* (Q), proporzionale al rapporto tra l'energia immagazzinata dall'oscillatore e l'energia da esso dissipata in un ciclo.

Le deformazioni elastiche dei metalli sono generalmente accompagnate da dissipazioni interne per le quali ϕ è indipendente dalla frequenza. Le forze dissipative caratteristiche del moto in mezzo viscoso, della forma $F = -\gamma v$, determinano invece, nell'oscillatore armonico, un termine di fase $\phi(f) = 2\pi f \gamma / k$.

Alle frequenze abbastanza lontane da quella di risonanza, per le quali è possibile trascurare il termine $\phi^2(f)$ al denominatore della (53), la potenza spettrale del rumore termico è proporzionale al fattore di fase, dunque decresce con l'entità delle forze dissipative. È opportuno inoltre osservare che, se queste sono di tipo interno, la potenza spettrale del rumore termico decresce, al crescere della frequenza, più rapidamente rispetto al caso in cui prevalgano le forze di tipo viscoso: nel primo caso l'andamento in funzione della frequenza è di tipo $1/f^{5/2}$; nel secondo caso di tipo $1/f^2$.

Gli specchi di VIRGO, ed i superattenuatori a cui sono sospesi, costituiscono sistemi a molti stadi ed innumerevoli risonanze, per i quali l'analisi del rumore termico è assai più complessa rispetto al caso dell'oscillatore armonico.

Restano comunque valide alcune considerazioni generali, emerse nella precedente discussione, le quali evidenziano l'opportunità di ridurre al minimo le azioni dissipative nel sistema di sospensione, ed in particolare di evitare meccanismi di dissipazione viscosa.

La bassissima densità del gas residuo nel quale si muovono gli specchi rende ininfluenza lo smorzamento viscoso ad esso collegato, rispetto alle dissipazioni che hanno luogo negli elementi elastici sottoposti alle maggiori sollecitazioni.

Non deve essere sottovalutato l'effetto dei cavi che alimentano i numerosi apparati elettronici disseminati lungo le sospensioni. È opportuno fare in modo che essi oppongano la minima resistenza ai movimenti della sospensione, ed evitare la presenza di contatti che implicino frizioni tra parti in moto. Nel corso dell'allestimento del superattenuatore oggetto di questa tesi, si è notato che una cattiva disposizione dei cavi può indurre un notevole abbassamento dei fattori di qualità di alcune risonanze.

L'analisi del rumore termico in VIRGO si semplifica notevolmente quando si considera una banda spettrale sufficientemente al di sopra delle frequenze di risonanza della sospensione. In questo caso, il rumore termico generato dagli stadi più alti della catena è filtrato dagli stadi successivi, come avviene per le vibrazioni di origine sismica (par. I - 3.2(A)). Più precisamente, si può affermare che l'ammittanza meccanica del sistema, alle alte frequenze, tende ad approssimarsi a quella dello stadio finale.

Il contributo fondamentale al rumore termico complessivo proviene dunque dai fili di sospensione degli specchi, e la sua potenza spettrale è legata all'entità delle dissipazioni che avvengono al loro interno. Inoltre, l'ammittanza meccanica del sistema risente del fatto che i fili sono dotati di una propria massa, e gli specchi di una propria elasticità. Questo determina ulteriori modi di risonanza, a partire da frequenze dell'ordine di 100 Hz per i fili, e dell'ordine di 3 kHz per gli specchi. A queste frequenze l'ammittanza, e con essa il rumore termico, presenta dei picchi di notevole ampiezza.

I - 3.2(D) Rumori connessi alla rivelazione ottica

Nel paragrafo I - 2.2 è stato trattato questo argomento e si è concluso che lo *shot noise* costituisce il limite fondamentale della rivelazione ottica, una volta presi tutti i provvedimenti necessari per limitare i problemi legati all'instabilità in potenza dell'emissione laser.

A livello quantitativo, lo *shot noise* determina un segnale equivalente a quello prodotto da uno sfasamento caratterizzato dalla seguente densità spettrale lineare, costante in frequenza:

$$\tilde{\varphi}_{sn}(f) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar c}{\eta\lambda P_{in}}} \quad (54)$$

dove η è l'efficienza quantica del fotodiode, λ la lunghezza d'onda della luce laser e P_{in} la potenza incidente sul *beam splitter*, notevolmente amplificata rispetto alla potenza del laser grazie alla tecnica del ricircolo (par. I - 3.1).

Ricordiamo di nuovo che la natura corpuscolare della luce determina un rumore di spostamento complementare allo *shot noise*, indotto dalle fluttuazioni casuali della pressione di radiazione. La sua densità spettrale lineare si scrive:

$$\tilde{x}_{RP}(f) = \frac{2F}{\pi} \frac{1}{mf^2} \sqrt{\frac{\hbar P_{in}}{2\pi^3 c \lambda}} \quad (55)$$

con m la massa dello specchio. Il fattore $2F/\pi$ è lo stesso che determina l'incremento del percorso effettivo dei fotoni nella cavità Fabry-Perot (48). Il rumore di spostamento prodotto dalla pressione di radiazione è proporzionale a questo fattore, perché esso corrisponde al numero di volte che i fotoni incidono sugli specchi della cavità.

Esprimendo il rumore di radiazione in termini di uno sfasamento equivalente, ed uguagliando quest'ultimo allo *shot noise* (54), si ottiene la relazione che definisce la condizione di lavoro corrispondente al limite quantistico della rivelazione ottica:

$$P_{in} = \left(\frac{\pi}{2F} \right)^2 \pi m c \lambda f^2 \quad (56)$$

I - 3.2(E) Rumori di fase

Citiamo i rumori di fase che maggiormente interessano l'interferometro VIRGO, ed alcune specifiche dei sistemi di attenuazione che li rendono di fatto ininfluenti sulla sensibilità del rivelatore.

1. **L'instabilità in frequenza** della sorgente laser genera rumore nel caso in cui le due cavità Fabry-Perot non abbiano esattamente la stessa lunghezza ottica, ma differiscano di una quantità ΔL_{opt} . Se la lunghezza d'onda fluttua con densità spettrale lineare $\tilde{\delta}(f)$, lo sfasamento corrispondente si scrive come segue:

$$\tilde{\varphi}_{\delta}(f) = \frac{4\pi\Delta L_{opt}}{\lambda} \frac{\tilde{\delta}(f)}{\lambda} \quad (57)$$

Le inevitabili differenze di riflettività degli specchi, e dunque di finezza delle cavità, possono generare un'asimmetria dei cammini ottici $\Delta L_{opt}/L_{opt} \approx 1\%$. In queste condizioni, è ammessa una fluttuazione della lunghezza d'onda $\tilde{\delta}(f) = 10^{-5} \text{ Hz} / \sqrt{\text{Hz}}$. La fluttuazione in frequenza dei laser è generalmente molto più alta, pertanto si rende necessaria una cavità di stabilizzazione [20].

2. **La fluttuazione di densità dell'aria** nei due bracci introduce differenze nell'indice di rifrazione lungo i due percorsi, dunque differenze di cammino ottico. Per ovviare al problema è necessario tenere sotto vuoto spinto l'intero apparato [21]. Per VIRGO è prevista una pressione residua di 10^{-9} mbar, che dovrebbe permettere di mantenere l'errore di fase associato ben al di sotto dello *shot noise*.

3. **La luce diffusa** dall'aria residua, riflettendo contro le pareti dei condotti può rientrare nel fascio, portando uno sfasamento modulato dalle vibrazioni sismiche [22] [23]. Si introducono lungo il condotto appositi schermi (*baffles*) che assorbono la luce diffusa.

4. **La presenza nel fascio di differenti modi di propagazione** determina l'impossibilità di fissare, nelle cavità Fabry-Perot, la stessa condizione di risonanza per tutti i fotoni del fascio. È necessario introdurre un apparato ottico, detto *mode cleaner*, che selezioni un solo modo [24].

I- 3.3 LA SENSIBILITÀ DI VIRGO

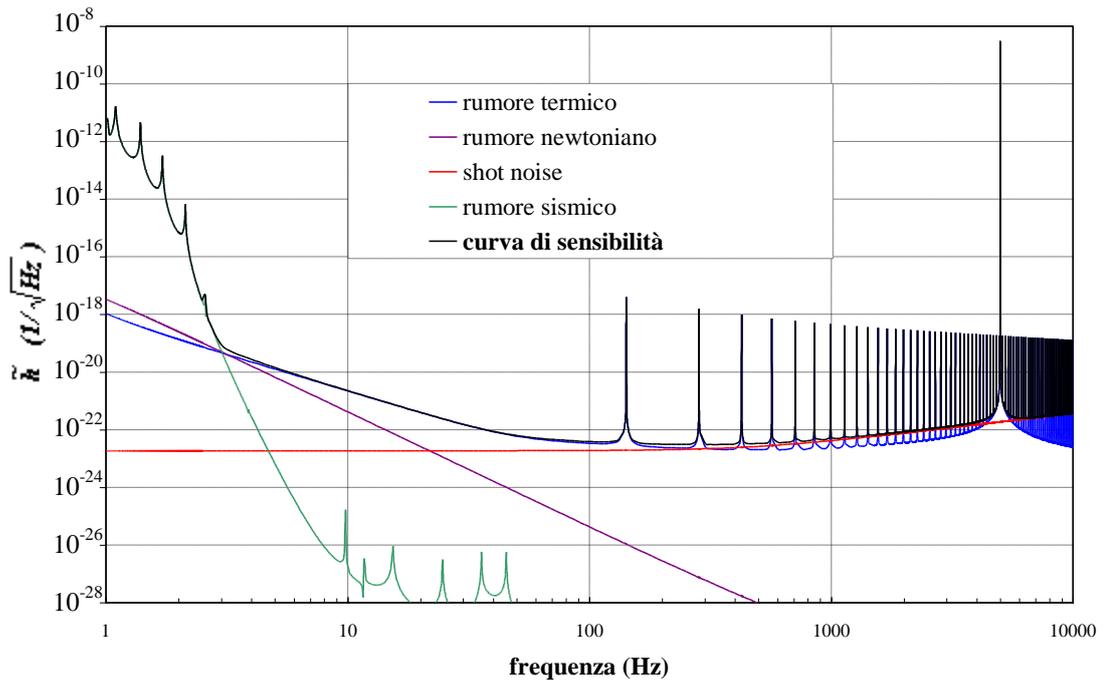
Per calcolare la potenza spettrale di rumore complessiva, come somma delle potenze spettrali delle singole identificabili cause di rumore, è necessario che queste siano espresse in termini della stessa grandezza.

È utile, a questo proposito, introdurre, per ciascuna sorgente di rumore come per il rumore complessivo, un campo gravitazionale fittizio che produca sul rivelatore un segnale caratterizzato dalla stessa potenza spettrale (Figura 3)¹². Per i rumori espressi in termini di sfasamento, è sufficiente ricavare h dalla (47), dopo aver sostituito a φ la densità spettrale lineare del rumore. Per i rumori espressi in termini di spostamento, deve prima essere effettuata la conversione in sfasamento utilizzando la (49).

La densità spettrale lineare $\tilde{h}_n(f)$ del campo gravitazionale equivalente al rumore complessivo è detta *curva di sensibilità*. L'apparato non è in grado di rilevare un campo gravitazionale la cui trasformata di Fourier sia ovunque inferiore a questa curva.

¹² Il rumore termico è stato stimato in modo abbastanza approssimativo, senza tenere conto di tutta la complessità delle sospensioni e della differenza in massa tra gli specchi *input* e *end* delle cavità Fabry-Perot. Si è inoltre considerato un valore $Q = 10^6$ per i fattori di qualità delle varie risonanze degli specchi. In particolare, per il modo fondamentale di pendolo ($f \approx 0.6$ Hz), il valore effettivo di Q potrebbe risultare più basso.

Figura 3 Densità spettrale lineare, in termini del campo equivalente, dei principali rumori in VIRGO



- **Rumore sismico:** È dominante alle basse frequenze, fino alla banda dove si collocano le risonanze di pendolo del superattenuatore (0.03 – 2.5 Hz). Per frequenze più elevate diventa rapidamente trascurabile, in quanto decresce circa come $1/f^6$. Alla frequenza di circa 3 Hz è atteso l'incrocio col rumore termico ed il rumore newtoniano ($\tilde{h}_{sism} \approx \tilde{h}_T \approx \tilde{h}_G \approx 5 \cdot 10^{-20} \cdot 1/\sqrt{\text{Hz}}$). A partire da 10 Hz il rumore sismico risale, a causa delle risonanze strutturali delle singole parti dell'apparato di attenuazione. In ogni caso, la sua densità spettrale lineare è sempre molto al di sotto dello *shot noise*.
- **Rumore termico:** È la sorgente principale di rumore tra 3 Hz e 150 Hz. Nella banda compresa tra 150 e 400 Hz è dello stesso ordine dello *shot noise* ($\tilde{h}_T \approx \tilde{h}_{shot} \approx 2 \cdot 10^{-23} \cdot 1/\sqrt{\text{Hz}}$). Nella prima parte dello spettro il contributo dominante al rumore termico è dato dai fili di sospensione degli specchi, e l'andamento in frequenza è circa $1/f^{5/2}$. A partire da circa 50 Hz prevale il contributo della fluttuazione termica dello specchio, con andamento in frequenza $1/f^{d/2}$. In corrispondenza di tutti i multipli di una determinata frequenza, compresa tra 100 e 200 Hz, sono presenti picchi molto stretti ed intensi di rumore. Essi corrispondono alle risonanze trasversali dei fili che sospendono gli specchi (*modi di violino*; si veda

in proposito il paragrafo II - 2.4). Si distingue inoltre un picco più elevato, alla frequenza di circa 5 KHz, dovuto alla prima risonanza interna dello specchio.

- **Rumore newtoniano:** Al di sotto di 3 Hz è inferiore al rumore sismico, mentre al di sopra di questa frequenza è inferiore al rumore termico, perché decresce all'aumentare della frequenza come $1/f^4$. In conclusione, questo rumore ha effetto sulla sensibilità del rivelatore solo presso il limite inferiore della banda di rivelazione, dove è comparabile con i due rumori di spostamento principali. Tutto questo è vero se il parametro δ della formula empirica che quantifica il rumore sismico (50) è assunto uguale a $10^{-7} \text{ m}\cdot\text{Hz}^{3/2}$. Se invece il rumore sismico fosse più alto ($\delta = 10^{-6} \text{ m}\cdot\text{Hz}^{3/2}$), il rumore newtoniano diventerebbe la sorgente principale di rumore tra 3 e 15 Hz.
- **Shot noise:** È dominante alle alte frequenze, ad eccezione delle frequenze esatte a cui si collocano i picchi di rumore termico, precedentemente descritti. Pur essendo un rumore indipendente dalla frequenza, la sua densità spettrale lineare, espressa in termini del campo gravitazionale equivalente, mostra una lieve tendenza a crescere a partire da circa 500 Hz. L'effetto non è propriamente dovuto allo *shot noise*, ma alla perdita di sensibilità del rivelatore, quando il tempo di volo dei fotoni raggiunge l'ordine di grandezza del periodo dell'onda gravitazionale. A 10 KHz l'incremento della densità spettrale lineare è superiore ad un ordine di grandezza ($\tilde{h}_{shot} \approx 4 \cdot 10^{-22} \cdot 1/\sqrt{\text{Hz}}$).

PARTE II

L'ATTENUAZIONE DEL RUMORE SISMICO IN VIRGO

II - 1 LA SOSPENSIONE DELLE OTTICHE

II - 1.1 ATTENUATORI MECCANICI DELLE VIBRAZIONI

Il movimento naturale della crosta terrestre (vedi par. I - 3.2(A)) rappresenta la principale limitazione alla sensibilità in bassa frequenza di un rivelatore di onde gravitazionali installato a terra. La presenza della forza di gravità rende necessario l'utilizzo di supporti elastici per sostenere in maniera duratura le ottiche di un interferometro, ma attraverso questi le sollecitazioni dovute al movimento sismico si trasmettono alle ottiche.

In generale, la trasmissione di una vibrazione ad un corpo di massa m , attraverso un vincolo elastico di costante elastica k , avviene in misura dipendente dalla frequenza della vibrazione, secondo tre diversi regimi:

1. Alle basse frequenze prevale la rigidità del vincolo, il quale subisce deformazioni trascurabili e trasmette quasi integralmente al corpo sospeso lo spostamento in ingresso.

2. Alle alte frequenze prevale l'inerzia del corpo sospeso. Il vincolo si deforma sotto l'azione della forza applicata, così che lo spostamento indotto sul corpo è solo una piccola frazione dello spostamento del punto di sospensione, ed il vincolo si comporta come un filtro meccanico delle vibrazioni. L'ampiezza a_{out} dell'accelerazione trasmessa al corpo dipende solo dall'entità della deformazione del vincolo, circa uguale allo spostamento x_{in} in ingresso, da cui: $a_{out} \approx -(k/m) \cdot x_{in}$. Tenendo presente la relazione tra spostamento e accelerazione nel dominio delle frequenze: $\hat{a}(f) = -(2\pi f)^2 \hat{x}(f)$, ne consegue che lo spostamento trasmesso al corpo decresce come l'inverso del quadrato della frequenza, secondo la relazione:

$$\left| \frac{\hat{x}_{out}(f)}{\hat{x}_{in}(f)} \right| \cong \frac{k}{m} \frac{1}{(2\pi)^2 f^2} = \left(\frac{f_0}{f} \right)^2 \quad \text{per } f \gg f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (58)$$

3. La grandezza f_0 , introdotta nell'equazione precedente, è la frequenza del modo di oscillazione propria del sistema. Se la frequenza della sollecitazione esterna coincide con essa, la forza applicata dal vincolo si accorda con il movimento del corpo sospeso, determinando su di esso un trasferimento continuo di energia dall'esterno. Lo spostamento del corpo è pertanto maggiore dello spostamento in ingresso al sistema. Il

fattore di amplificazione è dato dal fattore di qualità $Q = 1/\phi$ dell'oscillatore, dove ϕ è il termine di fase della costante elastica, introdotto nel par. I - 3.2(C).

L'espressione esatta, nel dominio delle frequenze, del rapporto tra lo spostamento di un corpo sospeso elasticamente e lo spostamento in ingresso al vincolo è la seguente:

$$\left| \frac{\hat{x}_{out}(f)}{\hat{x}_{in}(f)} \right| = \frac{\sqrt{1 + \phi^2}}{\sqrt{(1 - f^2 / f_0^2)^2 + \phi^2}} \quad (59)$$

Essa conferma quanto detto in precedenza: la frequenza di risonanza f_0 discrimina la zona dello spettro in cui il sisma è trasmesso integralmente da quella in cui questo viene attenuato. Se vale $\phi \ll 1$ a tutte le frequenze, come accade in assenza di dissipazione viscosa, quando la frequenza f dell'oscillazione in ingresso è molto maggiore della frequenza di risonanza la funzione di trasferimento si approssima alla (58).

Per limitare il più possibile la trasmissione delle vibrazioni sismiche ad un corpo vincolato a terra è quindi necessario tenere bassa la frequenza di risonanza dell'oscillatore, costituito dal vincolo e dal corpo sospeso. Questo si ottiene minimizzando la costante elastica del vincolo.

Un sistema di attenuazione ancora più efficace si può realizzare connettendo in serie un insieme di N oscillatori. Il sistema è dotato di N modi propri di oscillazione, con frequenze di risonanza f_i . Trascurando il contributo dei fattori di fase ϕ_i dei vari vincoli, e supponendo che la frequenza f sia sufficientemente maggiore della più alta frequenza di risonanza, il rapporto tra lo spostamento della massa finale e lo spostamento del punto di ingresso del primo oscillatore si scrive come segue:

$$\left| \frac{\hat{x}_{out}(f)}{\hat{x}_{in}(f)} \right| \approx \prod_{i=1}^N \frac{1}{1 - (f / f_i)^2} \approx \left(\frac{\bar{f}}{f} \right)^{2N} \quad \bar{f} = \frac{1}{2\pi} \sqrt[2N]{\frac{k_1 \cdot k_2 \cdots k_N}{m_1 \cdot m_2 \cdots m_N}} \quad (60)$$

La proprietà fondamentale di questo tipo di filtri è che, al crescere della frequenza, il trasferimento delle vibrazioni diminuisce tanto più rapidamente quanti più oscillatori in cascata si utilizzano. Si possono quindi ottenere attenuazioni considerevoli anche a frequenze appena al di sopra della banda in cui si trovano le risonanze.

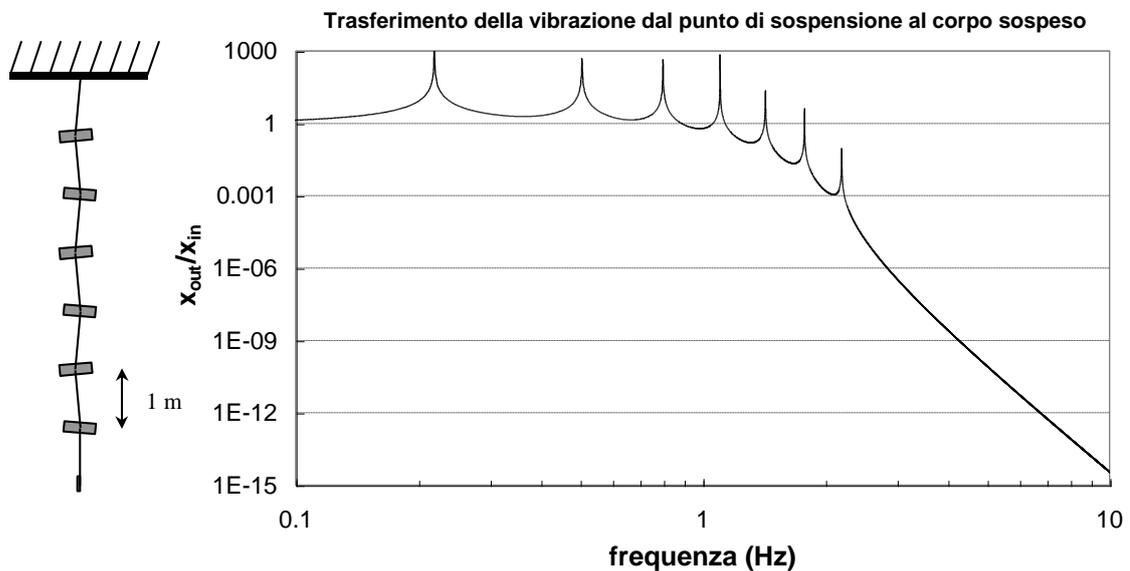
II - 1.1(A) *Il sistema adottato in VIRGO: un pendolo multiplo*

In un rivelatore interferometrico si è interessati ad ottenere piccolissimi spostamenti assoluti degli specchi nella direzione del loro asse ottico. Una maniera concettualmente

semplice per raggiungere questo risultato consiste nel sospendere lo specchio tramite un pendolo a molti stadi. In questo modo si realizza un insieme di oscillatori orizzontali del tipo descritto dalla (60).

Nel suo schema essenziale, il sistema di attenuazione adottato in VIRGO consiste in una serie di 7 pendoli di lunghezza pari a 1 metro circa, applicati uno di seguito all'altro. Il singolo stadio, se fatto funzionare separatamente dal resto della catena, ha una frequenza propria pari a circa 0.5 Hz, mentre le frequenze di risonanza collettive della catena completa sono comprese tra 0.2 Hz e 2 Hz [25] [26].

Figura 4 Pendolo multiplo come sistema di attenuazione delle vibrazioni

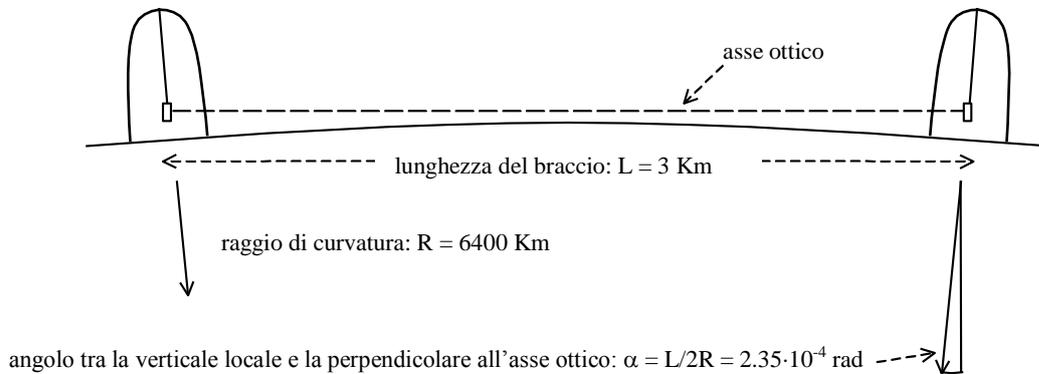


Teoricamente un sistema del genere sarebbe in grado di attenuare la vibrazione orizzontale in ingresso di un fattore pari a circa 10^9 a 4 Hz, il che porterebbe la densità spettrale lineare del rumore sismico ad un valore $\tilde{h}_{sism} \approx 10^{-20} \cdot 1/\sqrt{Hz}$ a quella frequenza. Sfortunatamente questo non accade, a meno che il sistema non si comporti come un filtro dalle analoghe prestazioni anche lungo tutti gli altri gradi di libertà, oltre quelli orizzontali.

È particolarmente importante l'attenuazione del sisma nella direzione verticale. A causa della curvatura terrestre, l'asse ottico non è esattamente ortogonale alla verticale locale nei due punti estremi del braccio; una vibrazione verticale si proietta dunque sulla direzione dell'asse ottico con un coefficiente pari al suo angolo di inclinazione rispetto alla vera perpendicolare (Figura 5). L'effetto può essere ingigantito da ulteriori

accoppiamenti di tipo meccanico tra il movimento verticale e quello orizzontale, che possono presentarsi in punti intermedi dell'apparato di attenuazione.

Figura 5 Incidenza della curvatura terrestre sulla trasmissione del rumore sismico



Non può essere tralasciata nemmeno la trasmissione attraverso i gradi di libertà angolari. In un pendolo reale questi sono infatti direttamente accoppiati con le traslazioni orizzontali, a causa della rigidità del filo di sospensione.

Si conclude che un buon filtro meccanico per l'attenuazione delle vibrazioni sismiche in un'antenna interferometrica deve presentare vincoli deboli, ovvero basse frequenze di risonanza, su tutti i gradi di libertà.

La cosa risulta particolarmente complicata per quanto riguarda la direzione verticale, ovvero la direzione lungo la quale i vincoli devono compensare la forza di gravità. Si rende in questo caso necessaria una conciliazione tra 'robustezza' e 'morbidezza' del vincolo.

Per questa ragione ogni stadio della catena di pendoli è rimpiazzato da uno speciale dispositivo meccanico, detto *filtro standard*, frutto di un lungo lavoro di ricerca effettuato in questi anni nei laboratori dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare di Pisa.

Questo dispositivo, come vedremo più dettagliatamente nel prossimo paragrafo, è in grado di sostenere carichi fino a diverse centinaia di chilogrammi, esibendo al contempo un basso valore della costante elastica in direzione verticale. Vedremo inoltre come il sistema sia anche in grado di ridurre la trasmissione delle vibrazioni attraverso i gradi di libertà angolari.

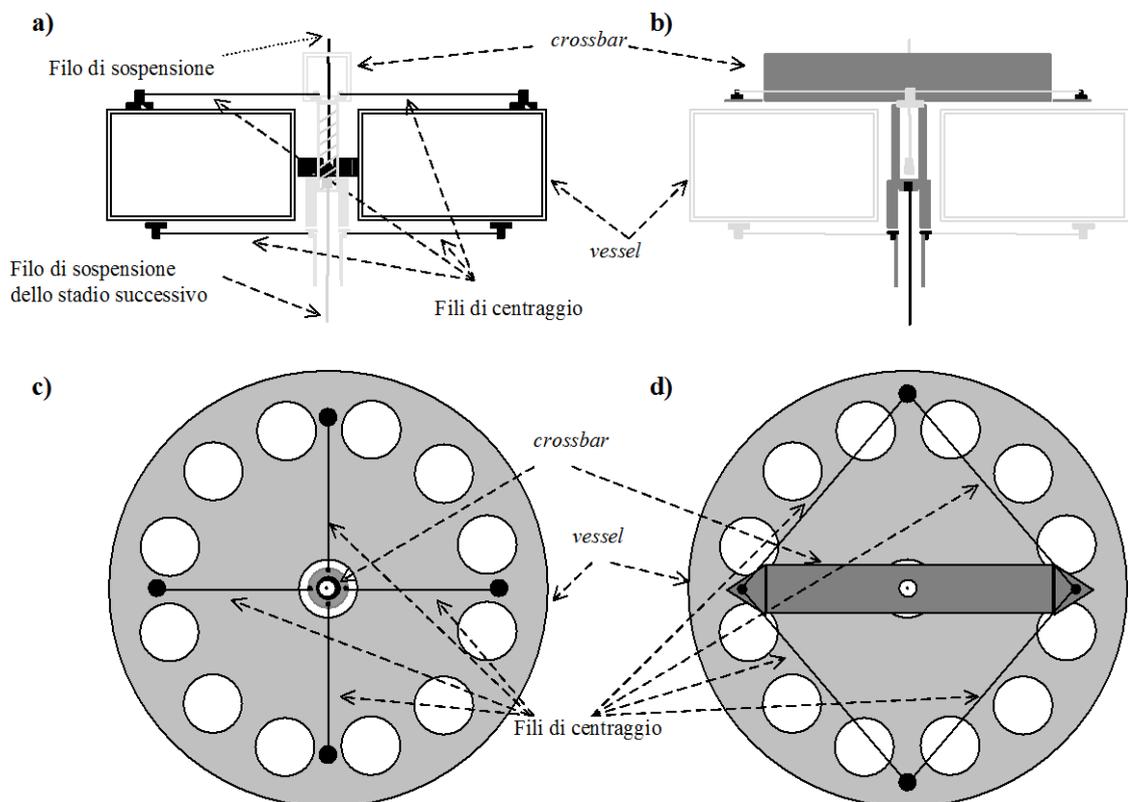
II - 1.2 IL FILTRO STANDARD

Il filtro standard [27] è costituito da due strutture metalliche, tenute insieme da un complesso sistema di vincoli (Figura 6). La prima struttura, detta *vessel*, ha la forma di un tamburo, del diametro di 70 cm e di altezza 18.5 cm, con un foro al centro del diametro di 10 cm. La seconda, detta *crossbar*, è costituita da una colonna cilindrica abbastanza stretta e lunga da poter attraversare il foro del *vessel*, e da una barra cava di sezione quadrata, applicata all'estremità superiore della colonna in modo da formare una croce.

Il *vessel* è collegato tramite un filo di acciaio allo stadio superiore della catena. Il filo è agganciato presso il baricentro del filtro, ad una barretta che attraversa il foro centrale in senso trasversale.

La *crossbar* attraversa il *vessel* da parte a parte senza toccarlo, e la sua barra trasversale emerge sulla faccia superiore del filtro. Un altro filo di acciaio, agganciato alla colonna centrale in un punto immediatamente sottostante a quello presso cui è agganciato il filo di sospensione, collega la *crossbar* allo stadio inferiore della catena.

Figura 6 Filtro standard - a), b): sezioni laterali; c): vista inferiore; d): vista superiore



Le due parti del sistema sono reciprocamente collegate da una serie di fili di acciaio, posti sulle due facce del *vessel* e tesi tra questo e la *crossbar*, il cui compito è quello di garantire la centratura della seconda rispetto al primo. Si tratta di un vincolo molto rigido sul piano orizzontale e molto debole in direzione verticale: in questo modo è imposta alla *crossbar* una direzione privilegiata di scorrimento rispetto al *vessel*.

Così configurata, la struttura determina una sconnessione in senso verticale tra stadi successivi di pendolo, ma non è in grado di sostenere il peso parte sottostante della catena. Per questo motivo si introduce un ulteriore vincolo tra *vessel* e *crossbar*, costituito da un sistema di *molle a lama*, di cui parleremo dettagliatamente nel prossimo paragrafo (II - 1.2(A)). È grazie a questo vincolo che il filtro riesce ad esercitare la sua funzione, ovvero sostenere un grosso carico statico pur esibendo una bassa costante di richiamo elastico (*stiffness*) rispetto agli spostamenti dal punto di equilibrio.

La barra trasversale emergente sulla faccia superiore del *vessel* ospita una parte di un ulteriore dispositivo, detto *antimolla magnetica* (par. II - 1.2(B)), la cui funzione è quella di abbassare ulteriormente la *stiffness* verticale del sistema.

La distanza ravvicinata tra i punti di aggancio ai fili di sospensione, ed il fatto che entrambi sono prossimi al baricentro del filtro, garantisce un basso richiamo torsionale dei vincoli a cui esso è soggetto. La sua forma molto allargata fornisce alla struttura un grande momento d'inerzia rispetto a tutti e tre gli assi principali di rotazione. Questi accorgimenti fanno in modo che il filtro presenti frequenze di risonanza rotazionali inferiori a 1 Hz.

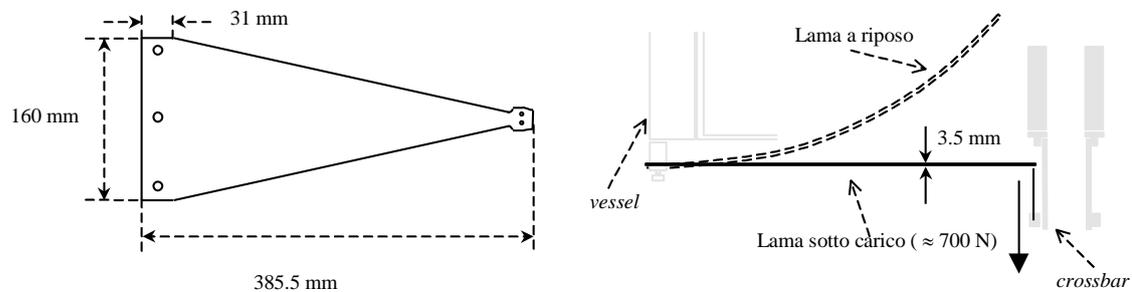
Tutte le parti metalliche destinate a sostenere il carico sottostante sono realizzate in *maraging*, un acciaio speciale poco soggetto al fenomeno del *creep*. Si tratta di un processo discontinuo ed anelastico di scorrimento all'interno di una struttura cristallina sotto carico, che se non viene contenuto introdurrebbe un continuo abbassamento dello specchio. Inoltre, questo meccanismo introdurrebbe uno *shot noise* meccanico nella banda di rivelazione, dovuto alla natura discontinua del processo. Nel *maraging*, a differenza di altri acciai, il fenomeno si presenta solo per un breve periodo successivo alla messa sotto carico dell'elemento, dopo di che si attenua drasticamente [28].

II - 1.2(A) *Lame triangolari*

L'elemento costitutivo del vincolo verticale tra le due parti del filtro standard è una lama di acciaio di forma triangolare, di spessore 3.5 mm e di lunghezza circa 385 mm. Attraverso un opportuno trattamento, ad essa viene imposta in modo permanente una

curvatura uniforme in senso longitudinale, il cui raggio è circa 460 mm. Questa conformazione geometrica è tale per cui un opportuno carico applicato sulla punta la riporta in posizione planare [29] [30].

Figura 7 Lama triangolare precurvata



Un'opportuna serie di lame è disposta sulla faccia inferiore del *vessel*, in una configurazione concentrica: le basi sono ancorate presso la sua circonferenza esterna, mentre le punte sono vincolate alla parte inferiore della *crossbar*. Quando il filtro occupa la sua posizione nel superattenuatore, esse si dispongono in assetto planare e compensano in questo modo il peso di tutta la parte sottostante della catena.

L'aggancio della punta delle lame alla *crossbar* è realizzato con dei fili di acciaio lunghi circa 5 cm disposti in direzione verticale. Con questa configurazione, l'ulteriore vincolo orizzontale che si introduce tra *vessel* e *crossbar* risulta molto debole rispetto al vincolo principale, costituito dai fili di centraggio. In questo modo la centratura della colonna, effettuata a lame scariche durante il montaggio del filtro, non viene compromessa quando le lame assumono la loro posizione di lavoro.

Il numero o la larghezza delle lame utilizzate in un filtro aumenta salendo lungo la catena, per far fronte ai carichi sempre maggiori sostenuti dai vari stadi. Si passa da quattro lame, la cui base ancorata al *vessel* è larga 11 cm, per l'ultimo filtro, a dodici lame, la cui base è larga 18 cm, per il primo filtro.

La prerogativa importante del sistema appena descritto è costituita dal fatto che, a fronte della capacità di sopportare grossi carichi, il vincolo verticale tra due stadi successivi ha bassa *stiffness*. Da questo discende che un carico compatto di massa opportuna, agganciato alla *crossbar*, costituisce un oscillatore armonico a bassa frequenza di risonanza, ovvero il filtro standard si comporta come un buon attenuatore delle vibrazioni in direzione verticale (vedi (59)).

La *stiffness* di una lama di lunghezza, spessore e raggio di curvatura definiti, o di un sistema di lame con le stesse caratteristiche, utilizzate in parallelo, è proporzionale al carico complessivo che il sistema è in grado di sostenere. Di conseguenza, la frequenza di risonanza di ciascun filtro è sempre la stessa. Con un dimensionamento delle lame come quello descritto all'inizio del paragrafo, si ottiene un valore pari a circa 1.25 Hz.

Alla *stiffness* verticale del vincolo *vessel-crossbar* contribuiscono leggermente anche i fili di centraggio, i quali devono pertanto devono essere tesi non più del necessario per conseguire l'allineamento verticale dei fili di sospensione.¹³

Con questo ulteriore contributo, la frequenza di risonanza verticale del generico filtro diventa circa 1.5 Hz. Questa frequenza è sensibilmente più alta di quella che il sistema esibisce sui gradi di libertà orizzontali (0.5 Hz), e per questo non è ancora sufficientemente bassa da consentire il massimo sfruttamento delle prerogative dell'apparato, per quanto riguarda l'attenuazione delle vibrazioni orizzontali. In questa configurazione, la massima frequenza di risonanza dei modi collettivi verticali vale infatti circa 6 Hz, e la trasmissione del sisma verticale resta la causa dominante del rumore di spostamento orizzontale dello specchio.

La frequenza propria della lama può essere ridotta aumentando la sua lunghezza o diminuendo il suo spessore. Per ottenere il valore di 0.5 Hz la lama dovrebbe essere molto più lunga (~ 90 cm), oppure molto più sottile (~ 0.5 mm).

Oltre agli inconvenienti di carattere ingegneristico che si presenterebbero volendo realizzare filtri con queste caratteristiche¹⁴, il motivo per cui è opportuno che le lame abbiano le dimensioni descritte riguarda direttamente la loro capacità di attenuare le vibrazioni. Va infatti tenuto presente che la (59), fin qui adottata per descrivere l'attenuazione associata ad un oscillatore armonico, è applicabile ai casi reali solo in un intervallo limitato di frequenze. Un vincolo reale infatti, in conseguenza del fatto che ha una massa, presenta al suo interno modi propri di oscillazione (vedi par. II - 2.4), la cui attivazione facilita la trasmissione delle vibrazioni attraverso il vincolo.

¹³ Un ottimo indicatore della tensione dei fili di centraggio è costituito dalle frequenze di risonanza dei loro modi di violino. Si è potuto verificare che, nelle idonee condizioni di montaggio, le frequenze dei modi fondamentali non dovrebbero superare i 200 Hz.

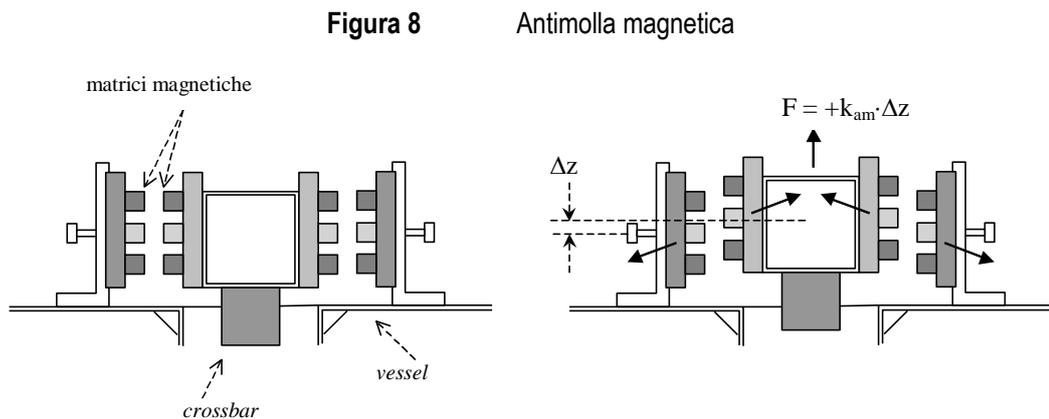
¹⁴ L'aumento della lunghezza delle lame richiederebbe filtri di dimensioni molto grandi. La riduzione dello spessore comporterebbe una notevole diminuzione del carico da esse sopportabile compatibilmente con il limite elastico del materiale: una lama da 0.5 mm, incurvata fino a descrivere una circonferenza completa, reggerebbe un carico di circa 1.5 Kg. Per sostenere il peso della catena (solo lo stadio finale pesa 180 Kg) servirebbero quindi molti strati sovrapposti di lame.

Nei dintorni delle frequenze di risonanza associate a questi modi, l'attenuazione offerta dal sistema è certamente più bassa rispetto a quella dell'oscillatore ideale. In particolare nel caso delle lame, la cui massa è piuttosto alta, l'effetto comincia a manifestarsi a frequenze assai più basse rispetto a quelle delle risonanze interne.

La prima risonanza interna (detta 'flessionale') delle lame adottate in VIRGO si presenta alla frequenza di circa 100 Hz. Anche questo parametro dipende dalla lunghezza e dallo spessore della lama, ma con un fattore di scala pari al quadrato di quello che incide sulla sua frequenza fondamentale. Da questo segue che riducendo quest'ultima al valore richiesto, la prima risonanza flessionale si presenterebbe intorno a 17 Hz, e la prestazione complessiva della lama peggiorerebbe notevolmente.

II - 1.2(B) Antimolle magnetiche

Per ottenere la riduzione della frequenza di risonanza fondamentale fino ad un valore al di sotto di 0.5 Hz, si è preferito utilizzare un accorgimento di tipo diverso, consistente nell'introduzione di un vincolo repulsivo tra *vessel* e *crossbar*.



Come mostrato in Figura 8, la parte della *crossbar* che emerge dalla faccia superiore del filtro supporta ai suoi lati due matrici piane di magneti permanenti. Altre due matrici, identiche alle prime, sono fissate al *vessel*, in modo da rimanere affacciate alle prime in configurazione repulsiva.

Quando la *crossbar* si trova nella sua posizione di equilibrio, la forza complessiva esercitata dai magneti è nulla. Se invece la *crossbar* subisce uno spostamento lungo la direzione verticale, la repulsione dei magneti fa comparire una forza orientata nella stessa direzione dello spostamento: il dispositivo agisce dunque in senso contrario a quello di una normale molla (da qui il nome 'antimolla'). La forza da esso prodotta contrasta il richiamo elastico delle lame, riducendo la *stiffness* effettiva del sistema.

Agendo sulla distanza tra le piastre magnetiche, è possibile regolare l'entità della forza repulsiva in modo da compensare quasi esattamente l'azione di richiamo delle lame. Si riesce così ad ottenere una notevole riduzione della *stiffness*, ed a raggiungere con una certa facilità una frequenza di risonanza intorno a 0.4 Hz.

La forza generata dalle antimolle magnetiche è tanto meno lineare quanto più è accentuato il disallineamento verticale delle piastre. Per questo è necessario che il filtro sia dotato della possibilità di regolare la posizione di equilibrio verticale della *crossbar*. A questo proposito, sono stati predisposti due diversi meccanismi: il primo, più grossolano ed esclusivamente manuale, consiste nella possibilità di variare l'inclinazione alcune lame, dette *lame mobili*, agendo sui particolari supporti a cui esse sono ancorate; il secondo, più fine ed a controllo remoto tramite motorino elettrico 'passo-passo', consiste in un'ulteriore piccola lama di inclinazione variabile, fissata sulla faccia superiore del *vessel* e agganciata tramite un filo alla *crossbar*. Per la particolare funzione a cui essa è adibita, viene detta *canna da pesca*.

La regolazione del punto di lavoro delle antimolle viene effettuata all'inizio una volta per tutte; durante l'acquisizione dati i motori delle canne da pesca restano spenti. Ogni filtro è dotato di un sensore LVDT, fissato tra il *vessel* e la *crossbar*, il cui scopo è quello di monitorare costantemente la posizione verticale delle antimolle e segnalare eventuali disallineamenti che potrebbero intercorrere nel tempo. Le possibili cause di spostamento verticale del punto di lavoro dei magneti sono due: eventuali cedimenti anelastici delle lame (*creep*), oppure variazioni della temperatura.

Quest'ultimo parametro incide sulla posizione verticale delle antimolle magnetiche, a causa della forte dipendenza dalla temperatura della loro magnetizzazione e, di conseguenza, della forza con cui esse si respingono. Questa forza presenta inevitabilmente una componente verticale, anche quando il sistema si trova nella posizione di equilibrio. Una variazione di temperatura determina quindi la variazione del carico complessivo sulle lame, con conseguente perdita dell'allineamento.

Uno studio specifico [13] ha evidenziato che quando la temperatura s'innalza di 1 °C la posizione verticale della parte mobile del filtro si abbassa di circa 0.3 mm, mentre la frequenza di risonanza verticale cresce approssimativamente di 15 mHz. Per eliminare questi inconvenienti si rende necessaria la termoregolazione dell'ambiente in cui operano i superattenuatori. In VIRGO è previsto un controllo della temperatura con fluttuazioni inferiori a 0.1 °C [31] [32].

II - 1.3 LO STADIO FINALE

L'ultimo elemento della catena di oscillatori è un'ottica dell'interferometro. A seconda che si tratti di uno dei quattro specchi delimitanti le cavità Fabry-Perot, oppure del *beam splitter* o dello specchio di ricircolo, l'ottica ha forma e peso differenti. Oltre ad avere qualità ottiche estremamente sofisticate, lo specchio ha un'importante proprietà meccanica, caratteristica del materiale di cui è costituito: il fattore di qualità delle sue risonanze strutturali è estremamente alto. Questa proprietà è fondamentale per la minimizzazione del rumore termico ed il conseguimento della sensibilità richiesta.

La sospensione dello specchio deve essere realizzata in modo da permettere un controllo attivo della sua posizione di lavoro. L'ultima parte della catena, oltre a costituire un ulteriore stadio di attenuazione, è progettata per ospitare questo sistema di controllo. Come spiegato nei capitoli riguardanti la rivelazione interferometrica, è infatti necessario, che le cavità ottiche presenti nei bracci siano mantenute strettamente in risonanza, entro piccole frazioni della lunghezza d'onda del *laser*. Inoltre, la condizione di lavoro ottimale per la riduzione del rumore legato alla rivelazione ottica è l'interferenza distruttiva alla ricombinazione dei raggi. Per questi motivi, è necessario predisporre un sistema di attuatori, pilotati dai segnali di un sistema di fotodiodi, che agiscano sulla posizione degli specchi contrastando le azioni esterne ed il rumore ottico, in modo da mantenere l'interferometro bloccato nel punto di lavoro. Le correnti necessarie a questo scopo si interpretano come la risposta del rivelatore.

Lo specchio è sostenuto da un oggetto a forma di croce disposta in orizzontale, detto marionetta, tramite due filtri che lo circondano lungo la semicirconferenza inferiore. A sua volta, la marionetta è sospesa ad un filtro particolare, detto filtro 7 [12] (nel progetto originario la catena era formata da sette filtri).

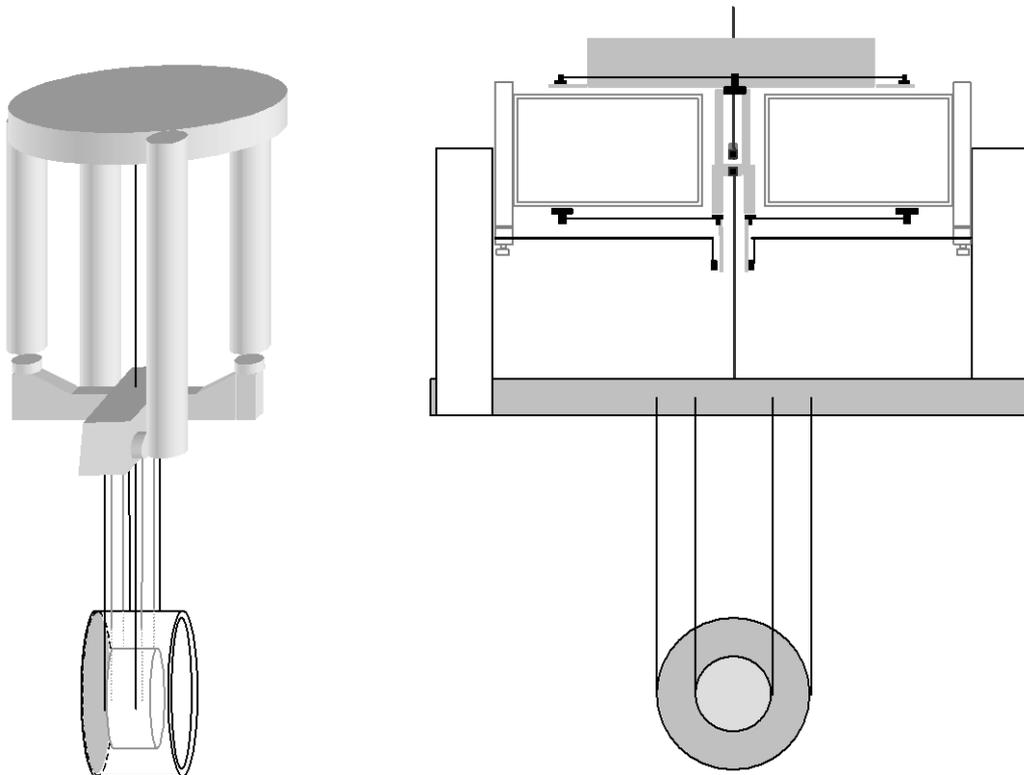
La principale differenza tra questo filtro ed un filtro standard è rappresentata dalle quattro colonne fissate alla faccia inferiore, lunghe circa 1 metro. Le estremità delle colonne supportano quattro bobine, le quali sono affacciate, a distanza di alcuni millimetri, ad altrettanti magneti permanenti, agganciati alla marionetta in corrispondenza delle punte della croce.

La geometria del sistema di attuatori è tale per cui, fornendo opportune combinazioni di corrente alle bobine del filtro 7, è possibile pilotare lo spostamento della marionetta lungo la direzione dell'asse ottico, e le sue rotazioni intorno agli assi ad esso ortogonali. In questo modo si può attuare un controllo della posizione dello specchio, rispetto agli

spostamenti che possono generare un segnale sull'interferometro. Utilizzando questo segnale per pilotare in *feedback* gli attuatori si realizza il *locking* nella banda 0.1 – 1 Hz.

Insieme allo specchio, è sospeso alla marionetta un altro corpo, detto *massa di riferimento*. Essa fornisce una base di appoggio per un ulteriore sistema di attuatori, simili per concezione ed impiego a quelli descritti in precedenza, con i quali è realizzato il *locking* dell'interferometro alle frequenze superiori a 1 Hz [15].

Figura 9 Stadio finale della sospensione (filtro 7 – marionetta – specchio)



Il filtro 7 differisce dal filtro standard anche per la possibilità di ruotare rispetto ad entrambi i punti di aggancio con la catena. La rotazione del filo che sorregge la marionetta consente l'allineamento dello specchio rispetto all'asse ottico dell'interferometro. La rotazione del filtro 7 rispetto al proprio filo di sospensione permette il posizionamento delle colonne negli appositi spazi attraverso la *piastra di conduttanza* (vedi par. II - 1.5). Per la stessa ragione, e per minimizzare la proiezione del sisma verticale lungo la direzione dell'asse ottico, è regolabile anche l'inclinazione del filtro rispetto alla direzione verticale. Tale regolazione si ottiene spostando due contrappesi posti sulla faccia superiore del tamburo. Tutti i movimenti di cui sopra sono controllabili per via elettrica tramite motorini 'passo-passo'. Il rumore generato da questi meccanismi rende impossibile il loro utilizzo durante l'acquisizione dei dati.

II - 1.4 LO STADIO DI PRE-ATTENUAZIONE

Come si è detto, una catena di pendoli realizzata con una serie di filtri standard è in grado di attenuare il rumore sismico di un fattore superiore a 10^9 a partire da 4 Hz. A frequenze inferiori però il trasferimento sale rapidamente, e si arriva addirittura ad un'amplificazione del sisma presso le frequenze di risonanza più basse della catena.

Tenuto conto degli alti fattori di qualità delle risonanze, e visti i valori elevati della densità spettrale lineare del rumore sismico al di sotto di 1 Hz, è prevedibile un *rms* orizzontale complessivo degli specchi di decine di micron.

Questo fatto, oltre a rendere inattuabile la rivelazione delle onde gravitazionali in bassa frequenza, crea dei problemi al funzionamento generale dell'apparato. In particolare, l'apparato preposto al *locking* dell'interferometro non può funzionare se lo spostamento sismico residuo dello specchio lungo l'asse ottico è superiore a $1 \mu\text{m}$, a partire da frequenze molto basse rispetto alla banda di rivelazione.

La riduzione dello spostamento dello specchio entro le specifiche richieste si può ottenere introducendo un ulteriore sistema di controllo, detto *inertial dampig* [34], il cui scopo è lo smorzamento attivo delle risonanze. Per la sua realizzazione sono necessari una serie di sensori di accelerazione ed una serie di attuatori, applicati in un punto della catena in cui le risonanze da smorzare si manifestano in modo abbastanza consistente. Il segnale prodotto dagli accelerometri viene inviato in *feedback* agli attuatori, in modo da indurre sul punto controllato un'azione contraria all'accelerazione rilevata. Così facendo si riduce la fluttuazione dello spostamento di questo punto, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

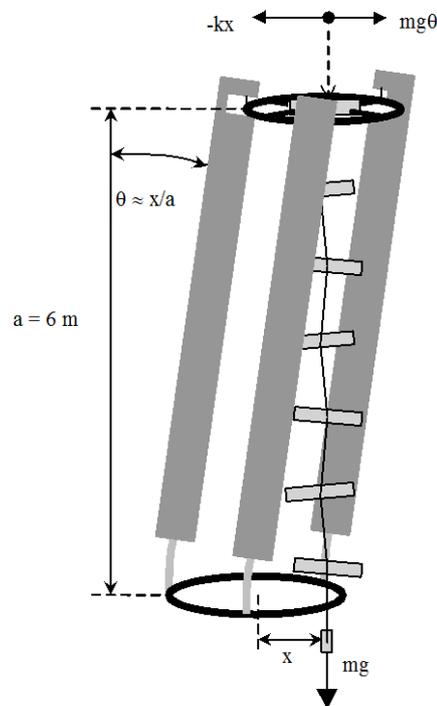
Per una serie di ragioni tecniche, di cui daremo maggiori ragguagli nel prossimo paragrafo, si è ritenuto vantaggioso realizzare l'*inertial damping* introducendo un apparato molto particolare come primo stadio della catena. Esso è composto da uno stadio di attenuazione orizzontale, detto *pendolo invertito* [15] [35], e da uno stadio di attenuazione verticale, detto *filtro 0* [36]. Il primo consiste in tre lunghe colonne che si appoggiano al suolo su altrettanti giunti flessibili, e che raggiungono l'altezza del punto di sospensione della catena; il secondo è un apparato analogo al filtro standard appoggiato sulla sommità delle colonne, e sorregge l'intera catena di pendoli. Grazie a questi dispositivi, lo smorzamento attivo delle risonanze in bassa frequenza è realizzato controllando l'accelerazione del punto di sospensione della catena.

II - 1.4(A) *Il pendolo invertito*

Il pendolo invertito è costituito da tre colonne di alluminio di lunghezza pari a 6 m, che sorreggono il filtro 0 e tutto il resto della catena. L'estremità inferiore di ciascuna colonna è ancorata ad una piattaforma di base attraverso un sottile cilindro di acciaio, lungo circa 200 mm e largo circa 25 mm, che ha la funzione di giunto flessibile, mentre l'estremità superiore è ancorata al filtro 0 tramite un filo lungo circa 30 mm e largo circa 3 mm.

Una traslazione orizzontale del filtro 0 comporta la flessione dei giunti di ancoraggio alla piattaforma di base, mentre le colonne, che sono più rigide, si flettono molto meno, e si inclinano di un angolo θ rispetto alla verticale, pari al rapporto tra lo spostamento orizzontale x e l'altezza a delle colonne stesse. Il momento di richiamo esercitato sulle colonne dai giunti, proporzionale all'angolo θ , si traduce in una pura forza orizzontale sul filtro 0, perché i fili di sospensione sono molto sottili e non trasmettono momento. A questa reazione, diretta in senso contrario allo spostamento del filtro 0, si aggiunge la reazione alla forza di gravità, la cui componente orizzontale è proporzionale all'angolo θ e diretta nello stesso senso dello spostamento.

Figura 10 Rappresentazione schematica del pendolo invertito



Per piccoli angoli di inclinazione, la reazione complessiva esercitata dal pendolo invertito sul filtro 0 si scrive:

$$F = \left(-k + \frac{mg}{a} \right) x \quad (61)$$

dove ka^2 è la costante di richiamo torsionale dei giunti flessibili e m è la massa sostenuta dal pendolo invertito.

Se i giunti sono troppo elastici, il sistema tende a collassare per effetto della gravità. Se invece sono abbastanza rigidi, ovvero se vale la condizione $k > mg/a$, la posizione verticale diventa di equilibrio stabile ed il sistema oscilla alla frequenza:

$$f_{IP} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} \quad k_{eff} = k - \frac{mg}{a} \quad (62)$$

dove la costante elastica k_{eff} , relativa agli spostamenti orizzontali, si ricava dalla (61).

Questo valore può essere scelto arbitrariamente vicino a zero: basta dimensionare opportunamente i giunti flessibili, ed eventualmente aggiungere o togliere massa all'anello superiore. È comunque necessario assicurare che il valore di k_{eff} non sia mai negativo, perché questo determinerebbe il collasso del sistema. Le sue fluttuazioni naturali ed incontrollabili, per esempio a causa della dipendenza di k dalla temperatura, impongono un margine di sicurezza nella scelta della frequenza a cui operare. È stata sperimentalmente verificata la possibilità di portare senza problemi il valore della frequenza di risonanza a 30 mHz.

Oltre alla traslazione, anche la rotazione del filtro 0 intorno all'asse verticale determina la flessione dei giunti ed un conseguente richiamo elastico, parzialmente compensato dall'effetto della gravità. La risonanza associata a questo grado di libertà è attesa alla frequenza di circa 300 mHz. È però molto difficile che si tratti di una risonanza puramente angolare: bastano infatti piccole differenze di elasticità dei giunti a determinare un consistente coinvolgimento delle traslazioni in questo modo normale.

Per quanto riguarda le proprietà del pendolo invertito in termini di attenuazione delle vibrazioni, questo grado di libertà è poco rilevante. Hanno invece effetti non trascurabili i gradi di libertà di rotazione intorno agli assi orizzontali.

La (59), che esprime la funzione di trasferimento di un oscillatore unidimensionale, è applicabile al pendolo invertito soltanto nel caso in cui si possa trascurare il momento di

inerzia dell'intero sistema rispetto a questi assi, ovvero il caso in cui un pendolo invertito privo di massa sostenga un carico puntiforme. In questo caso, si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\left| \frac{\hat{x}_{out}(f)}{\hat{x}_{in}(f)} \right| = \frac{I}{I - \frac{f^2}{f_{IP}^2}} \quad \left| \frac{\hat{x}_{out}(f)}{\hat{\alpha}_{in}(f)} \right| = \frac{ka}{k_{eff}} \frac{I}{I - \frac{f^2}{f_{IP}^2}} \quad (63)$$

dove x_{in} è la traslazione lungo un asse orizzontale, α_{in} è la rotazione della piattaforma di base intorno ad un asse orizzontale ortogonale alla traslazione, e x_{out} è la traslazione orizzontale della massa sospesa.

Già si nota una differenza importante rispetto ad un oscillatore unidimensionale: il sistema trasforma le vibrazioni angolari della piattaforma di base in traslazioni orizzontali del punto di sospensione. L'efficacia del pendolo invertito nell'isolare il sistema dai movimenti del terreno dipende quindi dall'entità del rumore sismico angolare rispetto a quello orizzontale.

Alle frequenze per le quali interessano le prestazioni del pendolo invertito (al massimo 10 Hz), la lunghezza d'onda delle onde sismiche è superiore a 50 metri (anche prendendo un valore molto basso della velocità di propagazione, tipo 500 m/s [15]). La piattaforma su cui poggia il pendolo invertito può dunque essere considerata puntiforme. Quando essa è investita da un'onda sismica di superficie con polarizzazione verticale, la sua inclinazione varia come la derivata del profilo dell'onda, quindi oscilla con ampiezza pari a $2\pi z/\lambda$, dove z è l'ampiezza di oscillazione verticale e λ è la sua lunghezza d'onda.

È ragionevole supporre che, per la presenza del fattore $1/\lambda$, oltre una certa frequenza il canale di trasmissione $\alpha_{in} \rightarrow x_{out}$ diventi predominante sul canale $x_{in} \rightarrow x_{out}$. Essendo il sisma orizzontale e quello verticale dello stesso ordine di grandezza, si può dire che i due canali diventano comparabili quando $\lambda \approx ka/k_{eff} \approx 250 \text{ m}$. Questo avviene a frequenze dell'ordine di 1 Hz. È pertanto possibile che l'attenuazione del pendolo invertito, anche considerato come vincolo ideale, possa essere peggiore di quella espressa dalla prima delle (63), sia nella banda delle risonanze della catena, sia soprattutto nella banda di rivelazione.

Una trattazione più approfondita, che tiene conto del momento di inerzia del sistema, evidenzia un altro effetto legato alla presenza del grado di libertà angolare.

Risulta che il punto per il quale è valida la prima delle (63) non è il punto di sospensione del carico, ma il *centro di percussione*. Si tratta del punto che rimane inizialmente fermo quando un corpo rigido viene sollecitato in modo impulsivo lungo una direttrice non passante per il baricentro. Tutti gli altri punti si muovono invece con una velocità iniziale proporzionale alla distanza da questo punto. Ne consegue che la funzione di trasferimento del pendolo invertito alle alte frequenze, dove il sistema si comporta essenzialmente come un corpo libero, tende ad appiattirsi al valore del rapporto tra le rispettive distanze del punto di sospensione e della piattaforma di base dal centro di percussione.

Nel nostro caso, la posizione del centro di percussione è molto legata alla distribuzione di massa nelle colonne: essa infatti incide più della massa del filtro 0 sul momento angolare del sistema, perché, pur essendo inferiore, è mediamente molto più distante dal baricentro. Nella configurazione di base, la distanza del punto di percussione dal punto di sospensione della catena è circa 7.5 cm, da cui risulta che l'attenuazione raggiunge al massimo un fattore 80.

Per ottenere attenuazioni migliori è necessario far coincidere il punto di sospensione ed il centro di percussione. È possibile ottenere il risultato in due maniere:

1. abbassare il punto di sospensione della catena;
2. aggiungere un contrappeso alle colonne del pendolo invertito, al di sotto del punto di contatto con la piattaforma di sostegno. Massa e posizione del contrappeso devono essere calcolati con cura, tenendo conto della reale distribuzione di massa del pendolo invertito.

È stata preferita la seconda soluzione, in quanto permette di realizzare un dispositivo regolabile a posteriori, qualora se ne riscontri la necessità.

Ulteriori dettagli sulla funzione di trasferimento del pendolo invertito verranno forniti nel par. II - 3.3(C). In quella sede vedremo che altri meccanismi di trasmissione, ancora legati alla massa delle colonne, possono ridurre l'effettivo contributo del pendolo invertito in termini di attenuazione del rumore sismico, rispetto a quanto farebbe prevedere un'analisi troppo elementare della sua dinamica. Alla luce di questo fatto, si scopre che l'introduzione del contrappeso per modificare la posizione del centro di percussione porta vantaggi piuttosto limitati.

In ogni caso, la ragione principale che porta ad introdurre il pendolo invertito non è tanto quella di realizzare una grande attenuazione passiva del rumore sismico, quanto

piuttosto quella di 'ammorbidire' il vincolo orizzontale tra il punto di sospensione della catena ed il suolo, in modo da rendere più agevole lo smorzamento attivo delle risonanze e le eventuali correzioni alla posizione di lavoro del punto di sospensione.

II - 1.4(B) Il filtro 0

Come abbiamo già detto, l'estremità superiore del pendolo invertito è costituita da un filtro speciale, detto *filtro 0*, che realizza una pre-attenuazione delle vibrazioni sismiche verticali ed ospita gli apparati per lo smorzamento attivo delle risonanze verticali della catena. Esso differisce da un filtro standard essenzialmente per alcune modifiche apportate alla *crossbar*:

- su di essa sono montate matrici magnetiche molto grandi, in modo da ottenere un più efficace abbassamento della frequenza di risonanza propria del sistema di lame (fino a 150 mHz in ambiente termostabilizzato);
- presenta dei prolungamenti nel senso della sua lunghezza, sui quali sono applicati gli avvolgimenti di due attuatori di tipo bobina-magnete, utilizzati per lo smorzamento attivo delle risonanze verticali;
- ospita due accelerometri verticali ad altissima sensibilità, anch'essi impiegati nell'*inertial damping* delle risonanze verticali;
- è dotata di un dispositivo motorizzato a vite senza fine, applicato al punto di sospensione della catena di pendoli, con il quale è possibile variare la posizione verticale dello specchio senza modificare l'allineamento delle antimolle magnetiche.

Tutti questi accessori rendono la parte mobile del filtro 0 particolarmente pesante (circa 45 kg, contro 10÷20 kg per gli altri filtri), e ne aumentano molto il momento di inerzia, con la conseguenza che si abbassano le frequenze di risonanza ad essa associate. In particolare, durante il lavoro sperimentale svolto sulla catena di R&D, oggetto di questa tesi, si è evidenziata una risonanza alla frequenza di 12 Hz, associata alla rotazione intorno all'asse orizzontale ortogonale alla *crossbar*.

In ogni caso, come vedremo in seguito, il suo effetto sulle proprietà di attenuazione del filtro 0 è irrilevante: le sue prestazioni sono del tutto analoghe a quelle di un filtro standard. Peraltro, l'introduzione del filtro 0 fornisce al vincolo verticale dello stadio di pre-attenuazione le stesse prerogative di 'morbidezza' esibite dal pendolo invertito, permettendo così un più agevole controllo anche di questo grado di libertà.

Grazie allo stadio di pre-attenuazione, il punto di sospensione della catena di filtri è soggetto a vincoli molto deboli su quattro dei sei gradi di libertà.¹⁵ Il primo stadio della catena si comporta dunque come un filtro dotato di frequenze di taglio molto basse.

In particolare, il pendolo invertito è caratterizzato da due modi di risonanza alla frequenza di circa 30 mHz ed uno alla frequenza di circa 300 mHz, l'ultimo dei quali riguarda soprattutto la rotazione intorno all'asse verticale. Esso è dunque in grado di attenuare considerevolmente lo spostamento orizzontale trasmesso allo specchio già a partire da 0.3 Hz, dove cominciano le risonanze orizzontali della catena di pendoli.

Un effetto analogo, anche se meno accentuato, si ottiene sulle risonanze verticali grazie all'introduzione del filtro 0, la cui frequenza propria è circa 150 mHz.

Questo fatto, di per sé, non risolve il problema della fluttuazione di posizione dello specchio: semplicemente si sposta verso il basso la frequenza alla quale si manifesta la maggior parte dello spostamento quadratico medio. Quest'ultimo resta alto perché, sebbene si riduca la larghezza della banda nella quale deve essere integrato il rumore sismico, la sua potenza spettrale è più alta. Resta quindi necessario lo smorzamento attivo delle risonanze.

L'introduzione dello stadio di pre-attenuazione rende però molto più semplice ed efficiente l'utilizzo di questa tecnica. Più precisamente, si possono elencare i seguenti vantaggi di questa configurazione, rispetto a quella in cui la catena di pendoli è semplicemente appesa ad un 'soffitto' rigido:

1. Un numero minore di modi di risonanza incide in maniera rilevante sullo spostamento dello specchio. Il controllo può essere specializzato a questi modi.
2. La maggior parte dello spostamento dello specchio è solidale con lo spostamento del punto di sospensione della catena. Per questo motivo, buona parte delle azioni necessarie per il controllo dello specchio possono essere applicate nel punto di sospensione. In questo modo, il rumore introdotto in banda di rivelazione dagli apparati che esercitano queste azioni interessa lo specchio solo dopo aver attraversato molti stadi di attenuazione, dunque non porta aggravio al rumore complessivo.

¹⁵ Le rotazioni del punto di sospensione intorno agli assi orizzontali generano elevate reazioni vincolari provenienti dal suolo, esercitate rispettivamente sulla *crossbar* e sul *vessel* del filtro 0 attraverso i fili di centraggio ed il pendolo invertito. Lo smorzamento attivo delle risonanze non richiede comunque un controllo su questi gradi di libertà.

3. I vincoli elastici a cui è soggetto il punto di sospensione della catena sono molto deboli, dunque lo sono anche le forze con le quali si effettua lo smorzamento attivo. Questo permette di utilizzare attuatori di tipo bobina-magnete con impiego di basse correnti, col vantaggio di avere scarso riscaldamento e di introdurre poco rumore.

4. I numerosi e voluminosi apparati necessari per il controllo possono trovare collocazione nello spazio disponibile sulla sommità dello stadio di pre-attenuazione.

Come abbiamo detto, l'*inertial damping* consiste nell'azione, applicata sul punto di sospensione della catena, di una serie di attuatori di tipo bobina-magnete, pilotati in *feedback* dai segnali rilevati da una serie di sensori.

Il movimento di un corpo su un piano orizzontale coinvolge tre gradi di libertà (le due traslazioni e la rotazione intorno all'asse verticale), dunque il suo controllo necessita di tre sensori e tre attuatori. Nel nostro caso i sei dispositivi sono distribuiti lungo l'anello che circonda il filtro 0, ed agiscono ognuno in una propria direzione, tangenziale all'anello. Non esiste dunque una corrispondenza biunivoca tra sensori e attuatori, ovvero l'azione di ciascun attuatore determina uno spostamento che ha componenti non nulle su ciascuna delle direzioni controllate dai tre sensori.

Per realizzare il circuito di controllo in *feedback* della posizione del punto di sospensione, è necessario combinare opportunamente le uscite dei sensori, oppure gli ingressi degli attuatori, in modo che questi ultimi siano pilotati ciascuno da un segnale dipendente solo dallo spostamento lungo la sua retta di azione.

Essendo lo spostamento da tenere sotto controllo prodotto principalmente dai tre modi normali del pendolo invertito, si preferisce fare riferimento alla terna di vettori ad essi associata. Si tratta cioè di ricombinare sia i sensori che gli attuatori, in modo da ottenere sensori e attuatori virtuali che agiscano selettivamente sulle singole risonanze. Si realizza quindi un circuito di controllo per ciascun modo normale, pilotando il relativo attuatore virtuale con il segnale in uscita del relativo sensore virtuale, opportunamente amplificato e filtrato in frequenza.

Questa tecnica permette di ridurre anche di un fattore 100 la trasmissione del rumore sismico in corrispondenza delle risonanze del pendolo invertito, e di contenere entro 1 μm lo spostamento quadratico medio dello specchio, integrato a partire da 30 mHz [15]. Questa specifica è necessaria affinché le forze da applicare allo specchio per la realizzazione del *locking* siano abbastanza basse, e dunque tali da non introdurre rumore aggiuntivo in banda di rivelazione.

II - 1.5 IL SUPERATTENUATORE

Il complesso meccanico adottato in Virgo per isolare dal rumore sismico gli elementi ottici dell'interferometro prende il nome di *superattenuatore*. Esso è costituito dal pendolo invertito, dal filtro 0, da quattro filtri standard, dal filtro 7 e dalla marionetta, collegati in catena uno di seguito all'altro; la massa di riferimento e lo specchio sono appesi in parallelo alla marionetta.

Ogni stadio sostiene il successivo tramite un filo di acciaio di lunghezza circa 1150 mm, tranne il primo stadio, lungo 2150 mm. La catena ha una lunghezza complessiva di 8663 mm. I fili sono di spessore variabile, da 4 mm del primo a 1.85 mm del filo che sostiene la marionetta. Ciascun filo è costituito da tre spezzoni, uniti insieme da giunzioni di titanio abbastanza piccole e leggere. Si tratta di un accorgimento introdotto per semplificare l'eventuale rimozione di un filtro dalla catena, qualora ciò si renda necessario a causa di qualche inconveniente.

Dal momento che il superattenuatore è dotato di numerosi dispositivi a controllo remoto, si rende necessaria una complessa rete di cavi per il trasporto dei segnali elettrici. È richiesta una cura estrema nella scelta del materiale di rivestimento e nella disposizione spaziale dei cavi elettrici, onde evitare che questi diventino un veicolo di trasmissione del rumore sismico.

La strategia adottata consiste nel far percorrere ad ogni cavo tutta la catena a monte del punto di utilizzo, ancorandolo solidamente ad ogni stadio di attenuazione. In questo modo, le vibrazioni trasportate dal cavo si scaricano ogni volta nella posizione di aggancio e vengono a quel punto assoggettate all'attenuazione della catena. Se i cavi sono molto leggeri, elastici e assolutamente non tesi, il trasferimento di rumore lungo di essi è trascurabile rispetto al canale principale, costituito dal filo di sospensione. A tale scopo, tra due agganci successivi ogni cavo percorre un'ampia ansa.

Nell'effettuare il cablaggio, si deve evitare accuratamente che i cavi si tocchino, perché le frizioni interne sono causa di rumore aggiuntivo. La cosa è tutt'altro che semplice da ottenere, visto l'alto numero di cavi necessari ed il notevole ingombro che ciascuno di essi offre a causa della particolare disposizione geometrica.

Una struttura di sicurezza, costituita da tre colonne di acciaio unite insieme da anelli, circonda il superattenuatore. Essa sorregge alcune mensole circolari poste pochi centimetri al sotto di ciascun filtro. La sua funzione primaria è quella di fornire un appoggio immediato al sistema, qualora si verifici un imprevisto cedimento strutturale,

come la rottura di un filo di sospensione o il collasso del pendolo invertito. Essa fornisce inoltre un indispensabile supporto in fase di montaggio, di *tuning* e di esecuzione dei test di qualità della catena (vedi par. II - 1.6).

Il superattenuatore e la struttura di sicurezza sono contenuti in una grossa camera a vuoto cilindrica, all'interno della quale viene mantenuta una pressione di 10^{-6} mbar ed una temperatura intorno a 25 °C, con termostabilizzazione di ± 0.1 °C.

Il livello di pressione che si riesce ad ottenere è molto più alto di quello richiesto per i tubi percorsi dal fascio ottico (10^{-9} mbar). Alcuni degli elementi accessori di cui necessita il superattenuatore sono infatti realizzati con materiali il cui ritmo di emissione gassosa non è compatibile con livelli di vuoto così elevati. È pertanto necessario interporre un setto di separazione tra il filtro 7 e la marionetta, forato al centro per permettere il passaggio del filo di sospensione della marionetta e dei cavi che alimentano le componenti elettriche dello stadio finale.

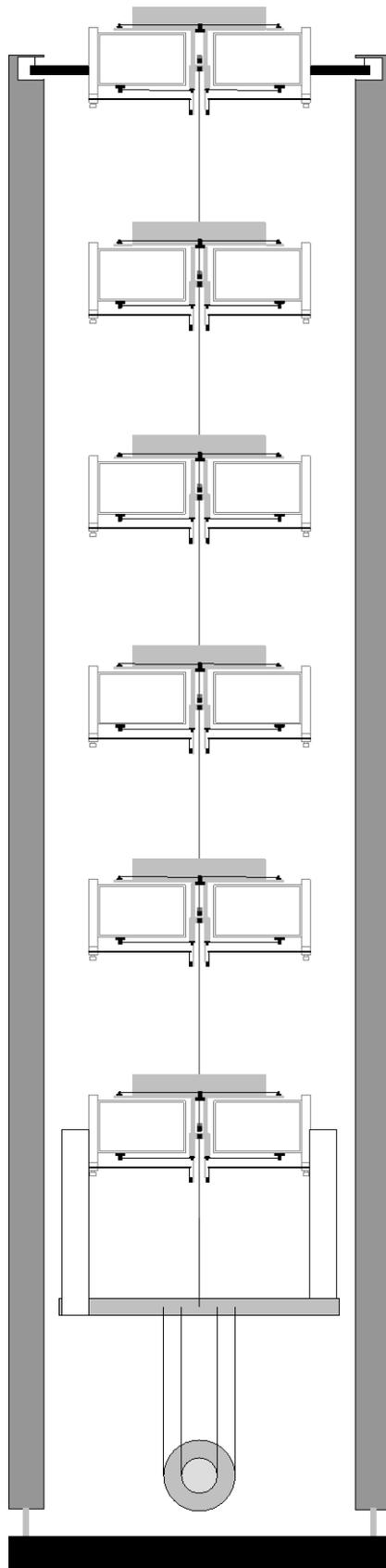
Un sistema di pompaggio continuo mantiene al livello richiesto la differenza di pressione tra le aree separate dal setto. Per ridurre il flusso di gas tra le due zone, il foro centrale deve avere dimensioni molto ridotte (15 mm), il che rende necessaria, in fase di predisposizione dell'apparato, una grande accuratezza nella centratura del punto di sospensione della catena nell'allineamento del filtro 7.

Quella che è stata adesso descritta viene correntemente definita 'catena lunga'. Sei di queste vengono impiegate per sostenere i quattro specchi delimitanti le cavità Fabry-Perot, il *beam splitter* e lo specchio di ricircolo.

È altresì previsto l'impiego di tre 'catene corte', per la sospensione degli elementi ottici che si trovano al di fuori dei bracci dell'interferometro. Esse sono composte soltanto dallo stadio di pre-attenuazione e dallo stadio finale, ovvero non sono presenti i quattro filtri standard, dal momento che, per gli elementi ottici in questione, non è richiesta una particolare attenuazione del rumore sismico. In effetti, il movimento di questi elementi agisce sul raggio ottico nel suo insieme, prima che venga separato dal *beam splitter*, quindi non provoca alcuno sfasamento tra i raggi che corrono separati nelle due direzioni ortogonali del rivelatore.

Molte considerazioni relative al dimensionamento meccanico, alla strategia di controllo ed alle specifiche di vuoto delle catene lunghe non sono direttamente trasferibili alle catene corte: per queste è necessaria una trattazione specifica.

Figura 11 Il superattenuatore



II - 1.6 LA PROCEDURA DI ALLINEAMENTO DELL'APPARATO

Il superattenuatore, una volta installato, non è immediatamente in grado di funzionare secondo le sue specifiche. Per svolgere il lavoro di caratterizzazione della catena di R&D, oggetto di questa tesi, è stato necessario equilibrare i filtri, allineare le antimolle, eseguire correttamente il cablaggio, e tutte le altre operazioni necessarie a garantire e verificare il buon funzionamento dell'intero sistema. L'esperienza acquisita in questa fase, ha permesso di stabilire un protocollo operativo per il montaggio e la messa a punto dei superattenuatori sul sito di Cascina.

Senza entrare nei dettagli relativi all'intallazione, diamo adesso un elenco dei problemi che possono presentarsi nella fase di messa a punto dell'apparato:

- ❑ La posizione di equilibrio del pendolo invertito è tale per cui le colonne restano troppo vicine alla struttura di sicurezza. Gli attuatori bobina-magnete ed i sensori LVDT non sono allineati.
- ❑ La frequenza di oscillazione del pendolo invertito è troppo alta.
- ❑ I filtri non sono ben equilibrati, nel senso che il piano definito dai fili di centraggio è troppo obliquo rispetto al piano orizzontale, o, equivalentemente, la direzione di moto della *crossbar* non è ben allineata con la direzione verticale.
- ❑ Le coppie di matrici magnetiche che formano le antimolle sono disallineate nel senso verticale, ovvero le lame non sono in equilibrio nella loro posizione planare, a causa di un eccessivo o insufficiente carico.
- ❑ Il sistema ha frequenze di risonanza verticali troppo alte.
- ❑ L'asse ottico dello specchio non ha la giusta direzione.
- ❑ Le colonne del filtro 7 non sono allineate rispetto alla marionetta ed gli attuatori bobina-magnete non sono centrati.
- ❑ I cavi di alimentazione dei vari dispositivi elettrici disseminati lungo il sistema si toccano in qualche punto, o si appoggiano sulla struttura di sicurezza.

Ognuno di questi problemi può essere eliminato agendo sui vari dispositivi a controllo manuale o remoto, descritti nei paragrafi precedenti, od aggiungendo piccole masse lungo la catena per l'equilibratura del sistema.

L'esperienza fatta sul prototipo ha mostrato che la procedura di messa a punto del superattenuatore risulta meno laboriosa se le diverse regolazioni sono effettuate nel seguente ordine:

1. Allineamento del filtro 7 rispetto alla marionetta, agendo manualmente sul cuscinetto inferiore del filtro 7.
2. Orientazione dell'asse ottico dello specchio sospeso, agendo manualmente sul cuscinetto superiore del filtro 7.
3. Primo grossolano allineamento verticale delle *crossbar*, tramite aggiunta od eliminazione di massa dai filtri, qualora gli eccessi o difetti di carico siano troppo grandi per essere compensabili con piccole variazioni di assetto delle lame mobili.
4. Cablaggio, evitando il contatto dei cavi. L'operazione modifica gli allineamenti di cui ai punti 1, 2 e 3.
5. Equilibratura dell'inclinazione dei filtri, compreso il filtro 7 e la marionetta per il centraggio degli attuatori, tramite aggiunta o spostamento di piccole masse. L'operazione modifica l'allineamento di cui al punto 3.
6. Regolazione della posizione di equilibrio del pendolo invertito, agendo manualmente sugli appositi dispositivi (*slitte*), e della sua frequenza di oscillazione, aggiungendo massa al *top ring*. Allineamento degli attuatori e degli LVDT.
7. Secondo allineamento verticale agendo sull'inclinazione delle lame mobili.
8. Ripetizione degli allineamenti dello stadio finale (punti 1 e 2) e contemporaneo aggiustamento dei cavi, i quali probabilmente, essendo variato l'assetto del sistema, presenteranno contatti indesiderati.
9. Controllo della frequenza di risonanza verticale dei singoli filtri, con eventuale allineamento fine delle antimolle, sia nel senso verticale (lame mobili o canna da pesca), sia per quanto riguarda la distanza delle matrici magnetiche. L'operazione deve essere effettuata su ciascun filtro, bloccando il movimento verticale di tutti gli altri con uno spessore inserito tra *vessel* e barra trasversale. Bisogna però aver cura di utilizzare spessori molto leggeri, in modo che la loro rimozione, con conseguente variazione di carico a valle del filtro in esame, non modifichi l'equilibrio verticale appena regolato.

A questo punto il superattenuatore è funzionante e la torre può essere chiusa. Ulteriori aggiustamenti fini potranno essere eseguiti agendo sui dispositivi a controllo remoto.

Nel punto 9 della procedura di allineamento è necessario l'impiego, per ogni filtro, di un sensore in grado di rilevarne lo spostamento verticale. A tale scopo, sono utilizzabili gli LVDT inseriti tra il *vessel* e la *crossbar*.

Nel nostro caso, invece degli LVDT, sono stati utilizzati quattro accelerometri piezoelettrici PCB, mod. 393B12, ancorati per mezzo di un grano filettato in punti opportuni della catena. Per l'analisi dei segnali è stato utilizzato un analizzatore di spettro ONO SOKKI a quattro canali. Prevedendo di dover spostare gli accelerometri lungo la catena, ed avendo questi una massa non trascurabile (circa 200 grammi), sono stati preventivamente stabiliti i siti destinati ad accogliere un accelerometro, ed in ognuno di questi è stata collocata una massa equivalente, rimovibile all'occorrenza.

L'uso di trasduttori spostabili a piacimento permette di estendere il controllo delle frequenze di risonanza ai gradi di libertà orizzontali ed angolari. È possibile, inoltre, raccogliere informazioni sulla geometria dei diversi modi normali, ovvero sulle relazioni di ampiezza e fase che legano i gradi di libertà coinvolti nelle oscillazioni.

Uno studio di questo tipo ha molteplici applicazioni:

- La misura delle frequenze di risonanza fornisce un controllo del corretto dimensionamento del sistema.
- La geometria dei modi normali fornisce utili indicazioni per la strategia di controllo.
- I risultati possono essere confrontati con le simulazioni, fornendo così una verifica alle basse frequenze della loro attendibilità. Si possono inoltre dedurre alcuni dati necessari per la simulazione, la cui stima diretta risulta particolarmente incerta.
- Il controllo dei tempi di smorzamento permette di individuare eventuali dissipazioni anomale oppure sfregamenti, per esempio dovuti al contatto tra i cavi elettrici.

L'indagine può essere estesa alle alte frequenze. Si riescono così ad individuare le principali risonanze interne alla struttura dei singoli filtri o di altre parti elementari. Come per le basse frequenze, è possibile riconoscere vibrazioni previste dai modelli teorici, o individuare vibrazioni anomale, eventualmente derivanti da un cattivo montaggio o da cedimenti strutturali. Per esempio, il controllo delle risonanze di violino dei fili di centraggio può evidenziare un eventuale cedimento nel meccanismo di allineamento orizzontale della *crossbar*.

Il prossimo capitolo è interamente dedicato alla classificazione delle risonanze del superattenuatore, per mezzo di un modello meccanico piuttosto semplice e schematico, che però fornisce una descrizione abbastanza completa delle piccole oscillazioni del sistema. Sono inoltre esposti alcuni risultati sperimentali, che confermano pienamente la validità del modello.

II - 2 LA DINAMICA DEL SUPERATTENUATORE

II - 2.1 RAPPRESENTAZIONE SCHEMATICA DEL SISTEMA

In questo capitolo il superattenuatore sarà rappresentato come un insieme di corpi rigidi, connessi tra loro attraverso vincoli elastici di massa trascurabile. Un modello di questo tipo permette di ottenere una descrizione abbastanza realistica del suo comportamento dinamico, nel regime delle piccole oscillazioni (in assenza di forze esterne o in condizione di risonanza con deboli sollecitazioni periodiche).

Il sistema è costituito da quindici corpi rigidi:

- *Vessel* dei sei filtri (filtro 0, filtro 7 e quattro filtri standard).
- *Crossbar* dei sei filtri.
- Marionetta.
- Massa di riferimento.
- Specchio.

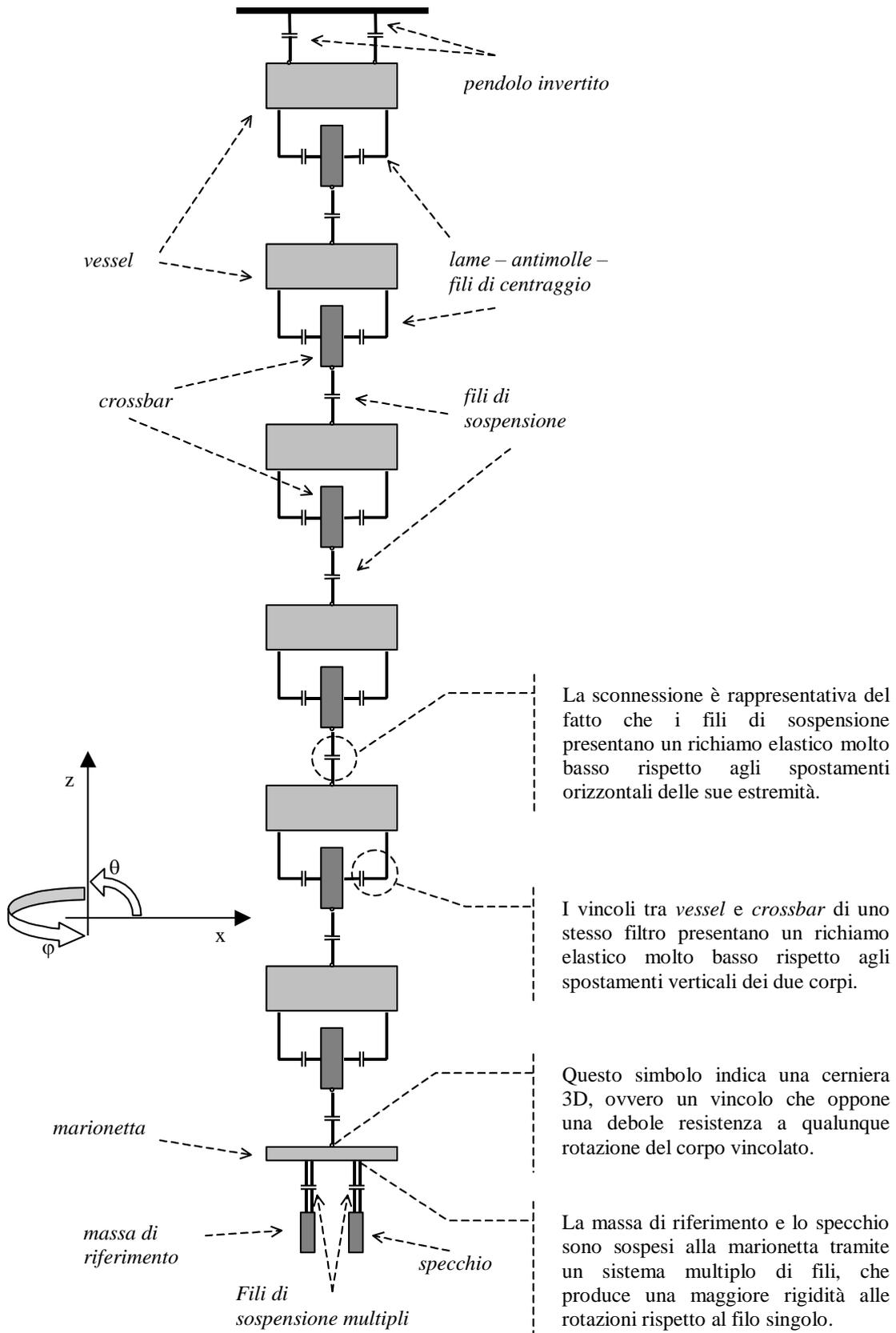
Si individuano inoltre quindici elementi elastici, alcuni dei quali sono in realtà strutture composite:

- Giunti flessibili e colonne del pendolo invertito. Connettono il *vessel* del filtro 0 alla piattaforma di base.
- Sistemi compositi costituiti da lame, antimolle magnetiche e fili di centraggio. Connettono il *vessel* e la *crossbar* di uno stesso filtro.
- Fili di sospensione semplici. Connettono i filtri tra loro (la *crossbar* del filtro a monte con il *vessel* del filtro a valle). Un filo dello stesso tipo connette la marionetta al filtro 7.
- Fili di sospensione multipli. Sospendono la massa di riferimento e lo specchio.

I corpi rigidi sono agganciati uno di seguito all'altro per mezzo degli elementi elastici, a formare una catena. L'ultimo stadio è formato da due corpi – la massa di riferimento e lo specchio – legati in parallelo alla marionetta, e svincolati tra loro.

La comprensione del modello è agevolata dalla Figura 12: ogni elemento è rappresentato da un simbolo grafico che ne esprime sinteticamente alcune proprietà meccaniche. Saranno in seguito definite e quantificate le grandezze caratteristiche dei vari elementi (coordinate, masse, momenti d'inerzia e costanti elastiche).

Figura 12 Rappresentazione schematica del superattenuatore



II - 2.1(A) Elementi massivi e gradi di libertà

Ciascun corpo sarà identificato da un suffisso, che indichiamo genericamente con j . I valori $j = 0, \dots, j = 5$ indicheranno i corrispondenti filtri (per il filtro 7: $j = 5$). La marionetta, la massa di riferimento e lo specchio saranno identificati rispettivamente dai valori: $j = 6, j = 7$ e $j = 8$. Per riferirsi ai *vessel* dei filtri da 0 a 5, si utilizzeranno rispettivamente i valori: $j = V0, \dots, j = V5$; per le *crossbar* i corrispondenti valori saranno: $j = C0, \dots, j = C5$.

Ogni elemento massivo è dotato di sei gradi di libertà: servono dunque sei coordinate per descrivere completamente la sua posizione.

Indicheremo con le lettere x, y e z , accompagnate dal suffisso j , le coordinate di traslazione del baricentro del j -esimo corpo lungo i suoi assi principali di inerzia. Con z indicheremo l'asse verticale, che è un asse principale per tutti i corpi in questione; con x indicheremo l'asse ottico. Quest'ultimo non sarebbe necessariamente un asse principale per le *crossbar*: dipende da come si dispone il sistema, una volta montato e allineato. Per semplificare, faremo l'ipotesi che l'asse x coincida sempre con la direzione della lunghezza delle *crossbar*.

Indicheremo nell'ordine con le lettere ψ, θ e φ , accompagnate dal suffisso j , gli angoli di rotazione del j -esimo corpo rigido intorno agli assi x, y e z .

Le proprietà meccaniche di un corpo rigido sono sintetizzabili in quattro parametri, che ne caratterizzano l'inerzia:

- la massa, che indicheremo con m_j ;
- i tre momenti principali di inerzia, che indicheremo con $I_{\psi j}, I_{\theta j}$ e $I_{\varphi j}$.

Se definiamo genericamente q_j una qualunque coordinata dell'elemento j , J_{qj} il suo corrispondente parametro inerziale¹⁶, e R_{qj} la componente nella direzione q_j di una forza¹⁷ applicata al corpo, l'equazione che regola l'evoluzione temporale della coordinata q_j è la seguente:

$$R_{qj} = J_{qj} \ddot{q}_j \tag{64}$$

¹⁶ Alle traslazioni si associa la massa; alle rotazioni si associa il momento d'inerzia relativo al corrispondente asse di rotazione.

¹⁷ Se q è una coordinata angolare, si intende che R_q è la componente del momento di una forza, nella direzione dell'asse di rotazione associato alla coordinata.

II - 2.1(B) Elementi elastici e reazioni vincolari

In generale, un elemento elastico reagisce alle deformazioni rispetto alla condizione di riposo, ovvero applica una forza ed un momento ai corpi a cui è collegato, qualora questi si spostino lungo uno qualunque dei propri gradi di libertà.

Se si considerano piccoli spostamenti dall'equilibrio, cosa che sarà sempre fatta nel seguito, le reazioni sono proporzionali alle variazioni delle diverse coordinate. I coefficienti di proporzionalità sono detti *costanti elastiche*.

Ciascun vincolo sarà identificato da un suffisso, che indichiamo genericamente con i . Per riferirsi ai fili che sospendono i filtri ed i corpi dello stadio finale si utilizzeranno i valori: $i = W1, \dots, i = W8$; per i vincoli che legano le *crossbar* ai *vessel* si utilizzeranno i valori: $i = C0, \dots, i = C5$; per il pendolo invertito il valore: $i = 0$.

Se indichiamo con $R_{i,qj,qj'}$ la reazione esercitata dal vincolo i -esimo sul corpo j -esimo lungo la coordinata q , a seguito di uno spostamento δ corpo j' -esimo lungo la coordinata q' , la costante elastica ad essa associata si scrive:

$$k_{i,qj,qj'} = -\frac{R_{i,qj,qj'}}{\delta} \quad (65)$$

Se il suffisso i è omissso, s'intende che la costante elastica è riferita alla risultante di tutte le reazioni vincolari lungo la coordinata specificata, a seguito dello spostamento specificato. Per la costante elastica relativa alla reazione lungo la stessa coordinata dello spostamento (qj e qj' coincidenti), si userà la forma: $k_{i,q}$.¹⁸

II - 2.2 GRADI DI LIBERTÀ ACCOPPIATI ED EQUAZIONI DEL MOTO

Se un corpo si sposta lungo una sua coordinata, i vincoli sollecitati inducono su quel corpo una reazione contraria allo spostamento, ma possono esercitare azioni anche su altri gradi di libertà, dello stesso corpo o di altri corpi. Tali azioni inducono ulteriori spostamenti, i quali generano altre azioni: con questo meccanismo, il movimento di un singolo corpo innesca in genere un moto collettivo, al quale partecipano numerosi corpi su diverse coordinate. I gradi di libertà che possono essere attivati da un singolo spostamento si dicono 'accoppiati'; tutti gli altri si dicono 'disaccoppiati' da questi. Si capisce che l'insieme dei gradi di libertà del sistema può essere suddiviso in gruppi,

¹⁸ La specificazione del corpo j al quale è applicata la reazione è superflua: che si tratti del corpo a monte o di quello a valle del vincolo i , la costante elastica è la stessa.

ciascuno dei quali è composto da gradi di libertà accoppiati tra loro e disaccoppiati da tutti gli altri.

Ciascun gruppo di coordinate ubbidisce ad un sistema di equazioni del moto indipendente dalle coordinate degli altri gruppi. Per ogni coordinata q_j , la reazione R_{q_j} , definita nella (64), si ottiene sommando le singole reazioni generate dagli spostamenti $q'_{j'}$ delle coordinate accoppiate. Se, utilizzando la (65), queste somme vengono espresse in termini delle costanti elastiche e degli stessi spostamenti, le equazioni del moto in regime di piccole oscillazioni diventano:

$$\ddot{q}_j + \sum_{q'_{j'}} \frac{k_{q_j, q'_{j'}}}{J_{q_j}} q'_{j'} = 0 \quad (66)$$

Il modello introdotto in precedenza per descrivere il superattenuatore, di cui la Figura 12 è una rappresentazione grafica, necessita di novanta coordinate. Le semplificazioni introdotte circa la geometria e la consistenza dei vincoli permettono di scomporre il sistema in gruppi indipendenti¹⁹ di coordinate, di dimensione assai più piccola. In questo modo, la risoluzione della (66) è molto più semplice e l'esposizione dei risultati più facilmente comprensibile.

Per ragioni di pura disposizione geometrica dei vincoli, i seguenti gruppi di coordinate sono reciprocamente indipendenti:

- Le traslazioni verticali,
- Le rotazioni intorno all'asse verticale;
- Le traslazioni lungo l'asse x , insieme alle rotazioni intorno all'asse y ;
- Le traslazioni lungo l'asse y , insieme alle rotazioni intorno all'asse x .

Le traslazioni orizzontali sarebbero disaccoppiate dalle corrispondenti rotazioni sul piano verticale, se i fili di sospensione agganciassero i filtri esattamente nel loro baricentro, e fossero privi di rigidità longitudinale. Nella realtà, la rotazione di un filtro determina uno spostamento orizzontale dei filtri collegati, ed i fili di sospensione reagiscono alla deformazione non soltanto con momenti, ma anche con forze trasverse.

¹⁹ In realtà il disaccoppiamento non può mai essere perfetto. L'introduzione di piccoli termini di accoppiamento tra i vari sottogruppi di coordinate produce però variazioni irrilevanti nei risultati del modello, relativamente alle frequenze di risonanza ed alla geometria dei modi normali. La stessa cosa non si può dire riguardo alle proprietà di attenuazione del sistema, come vedremo nei paragrafi che concludono questa tesi (II - 3.3(F) e II - 3.3(G)).

Come vedremo, l'entità di questi accoppiamenti è abbastanza piccola in alcuni casi, ma determina effetti macroscopici in altri casi.

Un ulteriore fattore di disaccoppiamento tra coordinate è costituito dall'alternanza di vincoli di consistenza molto differente. In effetti, ogni vincolo tra due elementi massivi del superattenuatore è costruito in modo da opporre una resistenza minima rispetto agli spostamenti in certe direzioni, ed essere viceversa molto rigido rispetto agli spostamenti nelle altre direzioni. In pratica, esistono due classi di costanti elastiche nettamente differenti per l'ordine di grandezza. Come vedremo tra poco, le oscillazioni che coinvolgono una classe di vincoli non interessano l'altra, e viceversa.

II - 2.2(A) *Le oscillazioni verticali*

Per chiarire meglio l'affermazione precedente, conviene partire dall'insieme dei gradi di libertà verticali. Osservando la rappresentazione schematica del sistema (Figura 12), si nota che c'è una continua alternanza tra vincoli 'forti' (i fili di sospensione) e vincoli 'deboli' (i sistemi di aggancio delle *crossbar* ai *vessel* dei filtri). Percorrendo la catena dall'alto verso il basso, s'incontra per primo il *vessel* del filtro 0. Questo è agganciato rigidamente al suolo attraverso il pendolo invertito, ma è debolmente vincolato alla propria *crossbar*. Le azioni innescate dallo spostamento di un corpo a valle si trasmettono ad esso attraverso il vincolo debole, e sono dunque compensate con piccolissime deformazioni del vincolo a monte: il *vessel* del filtro 0 non partecipa dunque al movimento collettivo del sistema. Lo stesso meccanismo si verifica anche in senso contrario: se il corpo in questione viene sollecitato direttamente, esso oscilla seguendo la deformazione del vincolo più rigido, ma la debole azione esercitata dai suoi spostamenti attraverso le lame non ha effetto sul resto della catena.

In conclusione, il grado di libertà *verticale* del *vessel* del filtro 0 costituisce un 'gruppo' unidimensionale indipendente. La sua evoluzione temporale è regolata con buona approssimazione da una singola equazione di moto, derivante della (66):

$$\ddot{z}_{v0} + \frac{k_{0,z}}{m_{v0}} z_{v0} = 0 \quad (67)$$

Le sue soluzioni sono le oscillazioni armoniche:

$$z_{v0}(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{0,z}}{m_{v0}}} \quad (68)$$

dove l'ampiezza A e la fase ϕ dipendono dalla posizione e dalla velocità del corpo all'istante $t = 0$, e ω è legata alla frequenza f dell'oscillazione ($\omega = 2\pi f$).

Proseguendo lungo la catena, s'incontra una situazione analoga per la *crossbar* del filtro 0 ed il *vessel* del filtro 1. I due corpi sono agganciati rigidamente tra loro attraverso un filo di sospensione, e debolmente vincolati al resto della catena attraverso due sistemi di lame. Per lo stesso meccanismo descritto nell'esempio precedente, gli spostamenti indotti su altri corpi della catena non possono generare deformazioni apprezzabili del vincolo interno ai due corpi. Nelle equazioni del moto relative alle coordinate verticali dei due corpi c'è un termine elastico dominante, associato al filo di sospensione. Sottraendo tra loro le due equazioni, si ottiene con buona approssimazione un'equazione di moto armonico, formalmente identica alla (67):

$$(\ddot{z}_{C0} - \ddot{z}_{V1}) + \left(\frac{1}{m_{C0}} + \frac{1}{m_{V1}} \right) k_{W1,z} (z_{C0} - z_{V1}) = 0 \quad (69)$$

In questo caso, il grado di libertà indipendente non è lo spostamento verticale dell'uno o dell'altro corpo, ma la loro differenza (la coordinata relativa dei due corpi). La risonanza associata è detta *risonanza di crossbar*. Resta a disposizione un grado di libertà per descrivere lo spostamento comune dei due corpi, nel quale non è sollecitato il filo di sospensione. Si può utilizzare la coordinata z_I , ma è necessario ricordare che in questo caso non si riferisce all'intero filtro 1, bensì alla coppia *crossbar* 0 – *vessel* 1.

Lungo la catena si incontrano cinque sistemi come quello appena descritto, costituiti ciascuno da una *crossbar*, da un filo di sospensione e dal *vessel* del filtro successivo. Ognuno presenta un grado di libertà indipendente, la cui evoluzione temporale è governata esclusivamente dal vincolo molto rigido che collega i due corpi. Le cinque coordinate che descrivono il moto d'insieme di ciascun sistema sono invece accoppiate: i vincoli che tengono insieme la catena (lame – antimolle – fili di centraggio) hanno costanti elastiche dello stesso ordine di grandezza.

A questo gruppo di coordinate ne va aggiunta una sesta: quella che descrive il moto d'insieme dei quattro corpi che terminano la catena. La *crossbar* del filtro 7, la marionetta, la massa di riferimento e lo specchio sono infatti collegati tra loro da vincoli forti (i fili di sospensione) e sono connessi al resto della catena tramite un vincolo debole (le lame del filtro 7). Le tre coordinate che rimangono (gli allungamenti dei tre fili di sospensione) costituiscono l'ultimo gruppo di gradi di libertà indipendenti.

II - 2.2(B) *Le oscillazioni orizzontali*

Come già è stato spiegato, le traslazioni dei filtri lungo una direzione orizzontale sono accoppiate alle rotazioni intorno all'asse trasverso. In tutto si tratta di sessanta gradi di libertà (quattro per quindici corpi), che si separano in due gruppi di trenta, uno per i movimenti nel piano $x-z$ e l'altro per i movimenti nel piano $y-z$.

Anche in questo caso, la presenza di vincoli particolarmente rigidi, alternati ad altri più deboli, crea un sostanziale isolamento di alcuni gradi di libertà rispetto a tutti gli altri. In particolare, il moto relativo del *vessel* e della *crossbar* di uno stesso filtro è dominato dal vincolo costituito dai fili di centraggio. La traslazione relativa e la rotazione relativa costituiscono un sottogruppo bidimensionale indipendente dal moto d'insieme del filtro.²⁰ Per quanto riguarda il filtro zero, si deve considerare che il pendolo invertito è un vincolo molto rigido rispetto alle rotazioni intorno agli assi orizzontali, pertanto anche la coordinata angolare complessiva del filtro è coinvolta nei modi normali in alta frequenza, che diventano tre.

Le rimanenti diciassette coordinate costituiscono un sottogruppo indipendente, che dà luogo al complesso sistema di oscillazioni di pendolo del superattenuatore.

Come vedremo meglio nei paragrafi conclusivi di questo capitolo, si può individuare, all'interno dei diciassette modi normali, un insieme di modi che coinvolgono solo coordinate dello stadio finale, ed in particolare solo i fili di sospensione dello specchio e della massa di riferimento.

Uno di questi è l'oscillazione in controfase dei due corpi sospesi alla marionetta. Esso si disaccoppia dal resto del sistema se le frequenze proprie dei due pendoli, presi separatamente, sono identiche. In tal caso, si manifesta un modo di oscillazione in cui il loro baricentro è fermo e la forza complessiva sulla marionetta è nulla.

Gli altri due sono le rotazioni relative dei tre corpi rispetto all'asse orizzontale. La loro indipendenza è dovuta al fatto che sono coinvolti due vincoli (i fili di sospensione multipli dello specchio e della massa di riferimento), abbastanza rigidi su questi gradi di libertà rispetto al vincolo che collega la marionetta allo stadio superiore.

²⁰ La traslazione e la rotazione non sono indipendenti tra loro, perché i fili reagiscono alla traslazione relativa con un sistema di forze che ha un momento sensibilmente diverso da zero. Questo avviene perché il baricentro della *crossbar* è situato in posizione più elevata rispetto al centro di azione dei fili di centraggio, essendo la sua massa particolarmente concentrata nella parte superiore, dove sono collocate le antimolle magnetiche.

II - 2.2(C) Le oscillazioni torsionali

Restano da esaminare le quindici coordinate di rotazione intorno all'asse verticale. Per le due parti di un filtro vale il discorso fatto nel paragrafo precedente: i fili di centraggio oppongono una reazione molto forte alla loro rotazione relativa, rispetto alle deboli reazioni esterne esercitate dalla deformazione torsionale dei fili di sospensione. Si determinano per questo motivo sei sottogruppi unidimensionali indipendenti (uno per ciascun filtro), più un sottogruppo indipendente costituito dalle rimanenti nove coordinate.

Va detto che i vincoli che legano i due corpi terminali alla marionetta sono più rigidi alle torsioni rispetto agli altri fili di sospensione, perché sono costituiti da quattro fili che agiscono ad una certa distanza dall'asse di rotazione. In essi la reazione torsionale non è dovuta tanto alla deformazione interna dei singoli fili, quanto alla componente orizzontale della loro tensione, che nasce quando i fili si inclinano. Ci si aspetta pertanto che il sottogruppo presenti due modi torsionali a frequenza nettamente più alta, localizzati quasi del tutto nei tre corpi dello stadio finale.

Dobbiamo infine segnalare un possibile accoppiamento non trascurabile tra le rotazioni intorno all'asse verticale e le traslazioni orizzontali, localizzato al livello del pendolo invertito. Il vincolo, infatti, reagisce alle rotazioni per mezzo di forze tangenziali, applicate dalle tre colonne in posizione periferica rispetto all'asse di rotazione. Eventuali differenze tra le tre forze producono una risultante non nulla, che a sua volta può generare un accoppiamento significativo con le traslazioni orizzontali.

Per avere una situazione del genere sono sufficienti piccole differenze, in termini di costante elastica, tra i giunti elastici responsabili delle reazioni. Bisogna infatti ricordare che la reazione orizzontale complessiva di ciascuna colonna è molto più piccola di quella del rispettivo giunto, perché a quest'ultima va sottratto un termine quasi uguale dovuto alla compressione verticale della colonna (si veda il par. II - 1.4(A), ed in particolare la reazione espressa nella (61)). Le differenze assolute di elasticità dei giunti possono quindi risultare significative, e con esse il momento che accoppia le traslazioni alle rotazioni.

II - 2.3 FATTORI DI QUALITÀ

Il sistema di equazioni espresso dalla (66) descrive in buona approssimazione il moto di un oscillatore composto, per quanto riguarda le frequenze di risonanza e la geometria

dei modi normali. Non tiene invece conto di un'altra caratteristica del moto oscillatorio: lo smorzamento. In effetti il modello fornisce, come soluzioni del moto libero, oscillazioni di ampiezza costante nel tempo: i modi normali, una volta innescati, si manterrebbero all'infinito senza il bisogno di alcun apporto di energia dall'esterno. In realtà, com'è ovvio, questo non succede. Inevitabili meccanismi di dissipazione energetica portano ad una diminuzione progressiva dell'ampiezza di oscillazione, che termina con l'arresto del moto, a meno che il sistema non sia soggetto ad una sollecitazione esterna.

Lo smorzamento dell'energia di un'oscillazione armonica avviene generalmente a ritmo percentuale costante, il che è strettamente legato al fatto che si verifica un decadimento esponenziale dell'ampiezza di oscillazione. Il parametro più usato per la descrizione del fenomeno è il fattore di qualità, già introdotto nel par. I - 3.2(C).

Il fattore di qualità può essere ricavato sperimentalmente misurando il tempo τ che impiega l'ampiezza dell'oscillazione (la cui frequenza è f_0) a ridursi di un fattore e . La relazione tra queste grandezze è:

$$Q = \pi f_0 \tau \quad (70)$$

Ricordiamo che nell'oscillatore unidimensionale l'inverso del fattore di qualità esprime il valore, calcolato alla frequenza f_0 , del termine dissipativo $\phi(f)$ della costante elastica. Questa grandezza è legata ai fenomeni dissipativi che avvengono in un vincolo elastico durante la sua sollecitazione.

Nel caso degli oscillatori multipli, i termini dissipativi delle costanti elastiche contribuiscono in varia misura a determinare i fattori di qualità delle diverse risonanze, secondo il grado di coinvolgimento dei corrispondenti vincoli. In ogni caso, esiste una dipendenza inversa tra i primi ed i secondi.

Come discusso nel par. I - 3.2(C), il teorema di fluttuazione e dissipazione afferma che in un oscillatore la grandezza $\phi(f)$ è proporzionale alla densità di potenza spettrale della fluttuazione di posizione a cui è soggetta la massa oscillante, a causa del rumore termico generato dal vincolo. Per questo motivo, in sede di progettazione, costruzione e messa a punto del superattenuatore è posta particolare attenzione al contenimento dei fenomeni dissipativi. Questo vale soprattutto per lo specchio e per i suoi fili di sospensione, perché a questo livello si genera la componente del rumore termico che incide più direttamente sulla sensibilità del rivelatore.

Sono dunque attesi fattori di qualità piuttosto elevati per le risonanze del superattenuatore, ed in modo particolare per quelle localizzate nello stadio finale.

A causa della dipendenza dalla frequenza dei termini dissipativi delle costanti elastiche, non è possibile ottenere informazioni complete su di essi, semplicemente misurando i fattori di qualità delle risonanze. Nel caso in cui sia ipotizzabile una sostanziale indipendenza di questi termini dalla frequenza (come accade in bassa frequenza se predominano i fattori di dissipazione interna ai materiali), la cosa sarebbe teoricamente possibile, ma difficilmente realizzabile nella pratica.

La conoscenza dei fattori di qualità permette comunque di dedurre quantomeno l'ordine di grandezza di questi termini. Nel seguito saranno forniti alcuni risultati sperimentali in proposito, acquisiti con prove non sistematiche, finalizzate alla verifica della corretta messa a punto dell'apparato, ed in particolare della corretta disposizione dei cavi di alimentazione elettronica.

II - 2.4 LE RISONANZE INTERNE

Il modello meccanico che fa capo alla (66) può essere definito 'a parametri concentrati'. Esso si basa su due ipotesi:

- 1) Gli elementi massivi hanno una rigidità interna molto elevata, che ne impedisce qualunque deformazione. Essi sono completamente descritti da un numero finito di coordinate e dai parametri inerziali d'insieme.
- 2) Gli elementi elastici hanno una massa molto piccola, pertanto sono completamente descritti dalle loro costanti elastiche.

Come vedremo nei prossimi paragrafi, il comportamento meccanico del superattenuatore è ben descritto da un modello di questo tipo, se ci si limita allo studio delle sue risonanze in bassa frequenza (fino a circa 2 Hz).

In realtà, i corpi reali non sono mai perfettamente indeformabili: se sottoposti a sollecitazioni rapidamente variabili, le loro parti possono essere messe in movimento l'una rispetto all'altra. Da questo punto di vista, un corpo è un sistema composto, il cui comportamento meccanico è legato alla sua distribuzione di massa ed elasticità locali. Si rende pertanto necessaria l'attribuzione ad esso di parametri distribuiti, sia di tipo massivo, sia di tipo elastico, e l'utilizzo di un numero infinito di gradi di libertà.

Una cosa analoga succede ai vincoli reali. Finché le sollecitazioni sono in bassa frequenza, la trasmissione delle forze e dei momenti avviene in base ai parametri di

elasticità d'insieme. Quando la frequenza supera una certa soglia, si innescano moti interni, le cui caratteristiche dipendono dalla distribuzione della massa e dell'elasticità all'interno del vincolo.

La presenza delle risonanze interne incide in modo ben visibile sulle proprietà di attenuazione di oscillatore meccanico: la (59) non è più valida nella banda delle frequenze di risonanza interne, ed in corrispondenza di queste frequenze compaiono dei picchi di trasmissione che, in alcuni casi, possono essere molto pronunciati.

L'esperienza mostra che ogni componente del superattenuatore, sia essa massiva o vincolare, possiede innumerevoli risonanze a partire da frequenze dell'ordine di decine o centinaia di Hertz, in nessun modo deducibili dal modello a parametri concentrati.

Per esempio, la massa dei fili di sospensione, trascurabile rispetto a quella del carico se ci si limita allo studio dei modi di pendolo, manifesta il proprio comportamento meccanico in un insieme di modi di risonanza, nei quali è la massa del filo, e non quella del carico, ad oscillare sotto il richiamo della sua stessa elasticità.

Il fenomeno in questione è quello della vibrazione di una corda tesa con estremi fissi, detto anche *modo di violino*. La corda assume configurazioni geometriche sinusoidali, di ampiezza oscillante nel tempo. Il modo fondamentale di oscillazione è rappresentato da una sinusoide di semiperiodo pari alla lunghezza del filo, con i nodi alle estremità.

Come noto, le frequenze di risonanza si scrivono:

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho S}} \quad ; \quad f_n = n f_1 \quad (71)$$

con L la lunghezza, T la tensione, $\rho S = m/L$ la densità lineare del filo. Le frequenze successive si riferiscono alle configurazioni spaziali con $n - 1$ nodi intermedi.

Nel pendolo semplice vale $T = Mg$, dove M è la massa del carico sospeso. Ricordando inoltre l'espressione della frequenza di risonanza di pendolo (f_0), si ottiene:

$$f_1 = \pi f_0 \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (72)$$

I fili di sospensione del superattenuatore hanno masse dell'ordine delle decine di grammi, a fronte di carichi sospesi dell'ordine di centinaia di chilogrammi. Con una frequenza di pendolo pari a 0.5 Hz ed un rapporto di massa pari a 1/10000, la frequenza fondamentale di violino è pari a 150 Hz. Va detto, comunque, che la (71) non si applica

esattamente ai fili di sospensione del superattenuatore, in quanto questi sono composti da tre spezzoni collegati da due giunzioni in titanio. Le giunzioni modificano la distribuzione di massa dei fili, e quindi la geometria e la frequenza dei modi normali.

I fili di centraggio presentano anch'essi dei modi di violino. Queste risonanze agiscono sul trasferimento verticale delle vibrazioni tra *vessel* e *crossbar*, ma intervengono a frequenze piuttosto alte (oltre 180 Hz), ed i loro effetti sull'attenuazione sono secondari, rispetto da altri più rilevanti. In particolare, sono di grande importanza i modi flessionali delle lame, dei quali si è già parlato nel par. II - 1.2(A). Come avviene per i fili tesi, anche questi modi vedono coinvolta principalmente la parte centrale della lama mentre i suoi estremi sono, in confronto, quasi immobili.

Segnaliamo infine una risonanza interna del pendolo invertito, dovuta al moto flessionale delle colonne verticali. Essa ha le stesse caratteristiche delle risonanze interne già descritte, tranne che, a causa della notevole massa e le grandi dimensioni del vincolo, la sua frequenza di risonanza è particolarmente bassa: circa 10 Hz.

I modi interni degli elementi massivi seguono meccanismi analoghi a quelli già descritti, anche se richiedono trattazioni leggermente più complesse. Sono comunque attese frequenze di risonanza superiori a 200 Hz, dove l'attenuazione garantita dal sistema è già molto buona ed il rumore sismico molto basso.

II - 2.5 *STUDIO SPERIMENTALE DELLE RISONANZE DELLA CATENA*

II - 2.5(A) *Risonanze collettive in bassa frequenza*

Una volta che il superattenuatore è stato installato e messo a punto, è possibile eseguire una caratterizzazione sperimentale delle sue risonanze collettive in bassa frequenza, procedendo come segue:

- Si posizionano vari accelerometri in modo da registrare i movimenti lungo alcuni gradi di libertà appartenenti ad un sottogruppo indipendente.
- Si trasmette un'eccitazione in banda larga al sistema, utilizzando gli attuatori orizzontali o quelli verticali posti sullo stadio iniziale. Si innescano in questo modo molteplici risonanze, visibili sotto forma di picchi nell'analisi spettrale dei segnali registrati dai trasduttori. Alcuni picchi compaiono sui diversi canali esattamente alla stessa frequenza: questi corrispondono ai modi normali collettivi del sottogruppo indipendente. Se il loro numero è uguale al numero di gradi di libertà che si suppone appartengano al sottogruppo, significa che tutti i modi normali sono stati innescati.

- Si trasmette al sistema una debole eccitazione sinusoidale con frequenza uguale ad una delle frequenze registrate, cercando di innescare un singolo modo normale. Se l'operazione riesce, gli spettri dei segnali registrati presentano un picco di risonanza chiaramente predominante rispetto agli altri, alla frequenza del segnale in ingresso. Normalmente è percepibile a livello visivo un'oscillazione regolare del sistema.
- Disponendo i trasduttori in vari punti ed in varie orientazioni, si individuano i gradi di libertà maggiormente coinvolti nell'oscillazione, ed è anche possibile misurare le rispettive relazioni di ampiezza e di fase. I gradi di libertà angolari possono essere esaminati sottraendo i segnali di due accelerometri sistemati ad estremità opposte rispetto al fulcro della rotazione.
- Si ripete l'operazione per un'altra frequenza, fino ad eccitare selettivamente un numero di modi normali pari al numero di gradi di libertà del sottogruppo in esame.

L'analisi delle risonanze collettive in bassa frequenza è stata condotta in modo sistematico sulla catena di R&D, ed ha permesso di misurare le frequenze e le relazioni di fase per il gruppo dei sei modi verticali e per quello dei diciassette modi orizzontali-angolari. Di questi ultimi, soltanto uno è sfuggito all'individuazione.

Illustriamo i risultati ottenuti in Tabella 1 ed in Tabella 2. Esse riportano, per ogni modo normale, la frequenza di risonanza f_0 e le coordinate maggiormente coinvolte, espresse con la simbologia introdotta nel par. II - 2.1(A). A ciascuna coordinata è associato il simbolo '+' o il simbolo '-', che esprime la concordanza o l'opposizione del suo movimento rispetto ad una fase convenzionale. In questo modo si evidenziano le relazioni di fase tra i movimenti lungo le diverse coordinate coinvolte. Se viene attribuito il simbolo '0' s'intende che la coordinata in questione, pur essendo tra quelle del sottogruppo a cui fa capo il modo normale, è coinvolta in misura molto minore delle altre, ovvero su di essa si localizza un nodo della risonanza.

La misura delle frequenze è stata ottenuta da analisi spettrali con risoluzione in frequenza di circa 3 mHz, che ha consentito una buona stima della terza cifra decimale. Va detto però che i risultati ottenuti sono validi in condizioni ambientali e di assetto dell'apparato molto ristrette. Le normali variazioni di temperatura che si registrano nell'arco della giornata possono incidere sulle frequenze di risonanza verticali anche al livello della prima cifra decimale, mentre le frequenze orizzontali possono subire variazioni di alcuni mHz anche solo per lo spostamento di piccoli pesi sulla catena.

Tabella 1 **Caratterizzazione dei modi normali verticali in bassa frequenza**

f_0 (Hz)	$z_{C0}; z_{V1}$	$z_{C1}; z_{V2}$	$z_{C2}; z_{V3}$	$z_{C3}; z_{V4}$	$z_{C4}; z_{V5}$	$z_{C5}; z_6; z_7; z_8$
0.184	+	+	+	+	+	+
0.465	-	-	-	-	0	+
0.762	+	+	-	-	-	+
1.069	-	-	+	+	-	+
1.437	+	-	-	+	-	+
1.825	-	+	-	+	-	+

Tabella 2 **Caratterizzazione dei modi orizzontali-angolari in bassa frequenza**

f_0 (Hz)	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
0.035	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0
0.297	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0	0	-	0	0	0	0	0
0.479	+	+	+	0	-	0	0	+	+	0	0	+	0	+	-	-	-
0.595	0	0	0	0	0	0	0	-	+	0	0	0	0	0	0	0	0
0.600	-	+	+	+	+	0	0	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+
0.647	+	+	+	0	0	0	0	+	+	0	0	0	+	0	-	-	-
0.655	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0
0.807	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0
0.897	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0
1.010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0
1.074	+	0	-	-	+	+	-	+	+	-	0	0	0	0	0	0	0
1.387	-	+	+	0	-	+	-	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0
1.712	+	-	-	+	-	+	-	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0
2.155	-	+	-	+	-	+	-	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0
2.575	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	-	+
3.897	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	+	+

Come preannunciato nel par. II - 2.2(B), tre modi normali si distinguono dagli altri, perché coinvolgono esclusivamente le coordinate dei tre corpi dello stadio finale: il modo a 0.6 Hz è l'oscillazione in controfase dello specchio rispetto alla massa di riferimento; i due modi alle frequenze più alte (2.6 Hz e 3.9 Hz) riguardano le rotazioni degli stessi due corpi e della marionetta intorno alla direzione ortogonale all'asse ottico. Si fa notare inoltre che le analoghe risonanze intorno all'altra direzione (l'asse ottico) hanno frequenze ancora più alte (14.1 Hz e 19.4 Hz), perché il braccio di azione dei fili di sospensioni multipli è più elevato rispetto a questa direzione. Questa, comunque, è l'unica rottura di simmetria rilevante tra asse x e asse y ; per il resto, le risonanze corrispondenti hanno frequenze molto simili.

Non è stata affrontata la caratterizzazione dei modi di rotazione intorno all'asse verticale perché, dopo alcuni tentativi, l'operazione si è dimostrata eccessivamente laboriosa con i mezzi a nostra disposizione. In particolare, gli accelerometri utilizzati sono poco sensibili nella banda in cui si trovano queste risonanze (dell'ordine delle decine di mHz). Inoltre, trattandosi di accelerometri lineari, il loro utilizzo in misure di rotazione comporta un'ulteriore drastica riduzione di sensibilità, perché i movimenti traslatori del sistema introducono segnale indesiderato che maschera i picchi di risonanza cercati. Il problema non è tanto la misura della frequenza di risonanza: potendo innescare un singolo modo normale, l'oscillazione sarebbe osservabile a vista, pertanto sarebbe semplice misurarne il periodo con un cronometro. Il fatto è che, se non si conoscono preventivamente le frequenze di risonanza, resta piuttosto difficile eccitare selettivamente i vari modi. Si potrebbe procedere per tentativi, ma l'operazione richiederebbe tempi molto lunghi, vista l'estrema lentezza delle oscillazioni in esame.

Non è stata compiuta un'indagine sistematica sui fattori di qualità dei modi di risonanza, come invece è stato fatto per le loro frequenze. Sono comunque stati raccolti alcuni dati a titolo indicativo, che riportiamo in Tabella 3. L'elevata incertezza associata a queste determinazioni non consente di utilizzare più di una cifra significativa per l'espressione dei risultati.

Tabella 3 **Fattori di qualità di alcuni modi verticali e orizzontali-angolari**

Tipo	Verticale						orizzontale-angolare		
f_0 (Hz)	0.184	0.465	0.762	1.069	1.437	1.825	0.480	0.796	1.095
Q	90	50	70	70	70	110	2000	200	700

Queste misure sono state realizzate analizzando profilo temporale dell'accelerazione che si registra lungo uno dei gradi di libertà attivati, nei casi in cui si riesce ad innescare in maniera pulita un singolo modo normale. In questo caso, lo sviluppo temporale del segnale segue abbastanza bene il tipico andamento sinusoidale smorzato:

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi f_0 t) \quad (73)$$

Il fattore di qualità si ricava dalla (70) misurando la costante τ di decadimento dell'ampiezza di oscillazione. Questa può essere ottenuta in modo immediato, anche se un po' grossolano, misurando le ampiezze a_1 e a_2 raggiunte dal segnale su due creste separate da numerosi periodi di oscillazione, e l'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ trascorso tra i due istanti di acquisizione. Il risultato si ottiene applicando la relazione:

$$\tau = \frac{\Delta t}{\ln(a_1 / a_2)} \quad (74)$$

È opportuno prendere intervalli di tempo abbastanza lunghi, ma si devono escludere le fasi di oscillazione troppo ampia, per non uscire dal regime lineare di oscillazione, e le fasi di oscillazione troppo ridotta, per evitare il rischio che l'oscillazione sia alimentata dalle vibrazioni esterne. È inoltre particolarmente importante la disposizione del cavo dell'accelerometro: questo, infatti, introduce un fattore di dissipazione estraneo al sistema in esame, ed in certi casi si è avuta la sensazione che tale fattore potesse essere non trascurabile, portando a sottostimare gli effettivi fattori di qualità. Queste difficoltà pongono un consistente limite all'accuratezza di misura della costante di smorzamento, e rendono inutile l'utilizzo di tecniche più accurate e laboriose per l'analisi numerica del profilo temporale.

I risultati in Tabella 3 mostrano alcuni fattori di qualità molto alti, compatibili con termini dissipativi inferiori a 10^{-3} , nonostante la presenza del cablaggio.

I bassi fattori di qualità esibiti dai modi verticali sono dovuti non tanto a termini dissipativi elevati, quanto al fatto che la costante elastica effettiva dei vincoli verticali risulta dal bilancio di un termine positivo ed un termine negativo abbastanza simili (si veda il par. II - 1.2(B)). A titolo di esempio, si consideri un oscillatore costituito da un vincolo di costante elastica k e termine dissipativo ϕ , al quale viene aggiunta un'antimolla non dissipativa di costante elastica k' . L'espressione della costante elastica effettiva in forma complessa è dunque (si veda il paragrafo I - 3.2(C)):

$$k_{eff} = k + i\phi - k' = (k - k') \left(1 + i\phi \frac{k}{k - k'} \right) \quad (75)$$

dalla quale risulta che il fattore di qualità dell'oscillatore, uguale all'inverso del fattore di fase nella (75), diminuisce in proporzione alla riduzione della costante elastica.

Considerando che l'introduzione delle antimolle magnetiche abbassa la frequenza di risonanza di un filtro da circa 1.5 Hz ad un valore inferiore a 0.4 Hz, e ricordando che la costante elastica effettiva scala come il quadrato della frequenza di risonanza, si deduce che il fattore di qualità è ridotto almeno di un fattore 15. Si può pertanto concludere che i termini dissipativi responsabili dei fattori di qualità delle oscillazioni verticali sono dell'ordine di 10^{-3} . Misure effettuate sul filtro 7, messo in opera separatamente per studi preliminari, hanno fornito risultati analoghi, in quanto è stato misurato un fattore di qualità pari a circa 1600 senza antimolle magnetiche.

II - 2.5(B) Risonanze in alta frequenza

Per innescare i modi isolati in alta frequenza, come quelli che interessano le coordinate relative di una *crossbar* e di un *vessel* contiguo, o come le risonanze interne ai vincoli, è più opportuno impartire eccitazioni localizzate, facendo attenzione a sollecitare principalmente il grado di libertà in esame. Per esempio, le risonanze verticali di *crossbar* sono facilmente innescabili con una lieve e secca percussione in direzione verticale sulla sommità della barra trasversale, con un martelletto di legno o di gomma dura. Sono invece un po' più difficili da innescare selettivamente le risonanze che interessano i gradi di libertà orizzontali ed angolari della *crossbar*, perché questi sono accoppiati tra loro, ed inoltre possono più facilmente interferire con i modi interni delle strutture e dei vincoli.

Tra i modi interni, sono abbastanza semplici da osservare i modi di violino dei fili di sospensione. Si pone un accelerometro in orizzontale sul *vessel* di un filtro e si pizzica il suo filo di sospensione. Nell'analisi in frequenza del segnale rilevato compare un picco molto pronunciato e lento a smorzarsi, segno che la risonanza ha un elevato fattore di qualità. Sono inoltre riconoscibili le prime risonanze di ordine superiore.

La stessa cosa vale per le risonanze flessionali di lama. Percuotendo le lame di un filtro, si può osservare nell'accelerazione del filtro a valle un 'pacchetto' di risonanze concentrate tra 100 e 105 Hz, che rappresentano l'insieme delle configurazioni di vibrazione delle varie lame.

Nella fase di montaggio e messa a punto del sistema è stato eseguito un controllo sommario delle risonanze in alta frequenza usando questa tecnica. È stato possibile identificare quasi tutti i picchi emersi nella banda 0 – 200 Hz, sulla base della classificazione esposta nei paragrafi precedenti.

Gli unici picchi non previsti sono comparsi tra 130 e 150 Hz, a gruppi di due o tre, in modo abbastanza ricorrente sui vari filtri. Un'analisi minuziosa ha condotto ad ipotizzare che si tratti di risonanze dovute agli apparati che sostengono le lame mobili.

Alle frequenze superiori compare una miriade di altre risonanze dovute alla vibrazione interna dei vincoli o dei corpi rigidi. Una classificazione dettagliata è impossibile, pertanto si è ritenuto opportuno limitare lo studio delle proprietà del sistema alla banda 0 - 200 Hz.

Alcune delle vibrazioni in alta frequenza producono effetti molto vistosi nella funzione di trasferimento dei filtri, di cui si parlerà ampiamente nel capitolo II - 3. Rimandiamo a questo capitolo una caratterizzazione sperimentale dettagliata dei modi più interessanti, ed in particolare l'individuazione delle loro frequenze di risonanza.

II - 2.6 CARATTERIZZAZIONE DEI MODI NORMALI TRAMITE MODELLO DI CALCOLO

Il modello introdotto nei paragrafi precedenti permette di calcolare le frequenze di risonanza e gli autovettori dei modi normali del superattenuatore, relativamente ai gradi di libertà introdotti, a patto che siano noti con sufficiente accuratezza tutti i parametri inerziali ed elastici definiti nei paragrafi II - 2.1(A) e II - 2.1(B). In questo caso, un eventuale accordo tra i risultati sperimentali e le previsioni del modello rappresenterebbe una buona garanzia di attendibilità di quest'ultimo.

Purtroppo, molte delle grandezze necessarie alla descrizione del sistema non sono state oggetto di misurazione diretta; si deve dunque fare riferimento ai dati di progetto, che sono abbastanza incompleti e non sempre affidabili.

Ad ogni modo, sembra doveroso mettere ugualmente alla prova il modello di calcolo. Partendo dai dati a nostra disposizione, riguardanti la massa e le dimensioni dei singoli elementi, è possibile ottenere una stima preliminare dei parametri inerziali ed elastici che caratterizzano la rappresentazione schematica del sistema, descritta nel par. II - 2.2. Si può in questo modo scrivere esplicitamente e risolvere la (66) per ogni sottosistema in cui è stata suddivisa la sospensione.

Sebbene i risultati del modello mostrino una sostanziale compatibilità a livello qualitativo con la situazione sperimentale, il confronto quantitativo tra le frequenze di risonanza calcolate e quelle misurate evidenzia discordanze significative. Si è però potuto verificare che l'accordo migliora notevolmente se si apportano piccole modifiche ai parametri noti con minore accuratezza.

Il valore dei parametri è stato ulteriormente adattato facendo uso di un altro modello di calcolo, che simula le proprietà di trasmissione meccanica di un sistema composito. In questo modo, si è giunti ad ottimizzare l'accordo tra i risultati della simulazione e le numerose misure di funzione di trasferimento realizzate sulla catena.²¹

Al termine di questo capitolo è riportato l'elenco dei parametri liberi (Tabella 4 e Tabella 5), i cui valori finali sono tutti compatibili con i dati di progetto. Sono inoltre riportate le frequenze di risonanza dei modi normali che si ottengono applicando il modello (Tabella 6, Tabella 7 e Tabella 8), e le ampiezze relative delle coordinate coinvolte. L'accordo con i risultati sperimentali non è perfetto, ma ci pare comunque molto soddisfacente, vista la complessità del sistema. Per il confronto con i risultati sperimentali, si veda il paragrafo II - 2.5(A), ed in particolare la Tabella 1 e la Tabella 2.

II - 2.6(A) Espressione delle costanti elastiche in termini delle dimensioni dei vincoli

Sviluppiamo adesso una modellizzazione dei vincoli installati nel superattenuatore, in modo da ricavarne le costanti elastiche in termini delle loro dimensioni, della disposizione geometrica e dell'elasticità intrinseca.

I **fili di sospensione** sono sbarre cilindriche sottili di acciaio, sottoposte a tensione nella direzione della loro lunghezza per effetto del carico sostenuto. I parametri che ne determinano il comportamento meccanico sono:

- E - il modulo di Young del materiale di cui è costituito il filo;
- L - la lunghezza;
- d - il diametro;
- T - la tensione, uguale al carico sostenuto;
- a - la distanza verticale tra il punto di aggancio ed il baricentro del corpo a valle;
- b - la distanza verticale tra il baricentro del corpo a monte ed il punto di aggancio.

²¹ Si veda in proposito il capitolo II - 3

Rispetto ad un allungamento nella direzione della sua lunghezza, il filo reagisce con una forza nella stessa direzione. La *stiffness* di un filo rispetto agli spostamenti relativi delle sue estremità lungo la coordinata z vale:

$$k_{w,z} = \frac{ES}{L} \quad \text{con:} \quad S = \frac{\pi d^2}{4} \quad \text{la superficie della sezione} \quad (76)$$

Gli spostamenti relativi delle estremità lungo una direzione orizzontale danno luogo non solo ad una reazione in verso contrario, dovuta alla comparsa di una componente orizzontale nella tensione del filo, ma anche ad un momento, applicato ai due corpi vincolati. Ad esercitare quest'azione sono i tratti di filo prossimi al punto di ancoraggio con i corpi medesimi: in questi tratti il filo subisce una deformazione che coinvolge il grado di libertà angolare intorno all'asse trasverso, a causa della sua rigidità. La lunghezza del tratto incurvato si esprime attraverso il seguente parametro caratteristico:

$$\lambda = \sqrt{\frac{EJ}{T}} \quad \text{con:} \quad J = \frac{\pi d^4}{64} \quad \text{il momento della sezione} \quad (77)$$

Quanto più questa lunghezza è piccola rispetto alla lunghezza L del filo, tanto più il vincolo si comporta come una cerniera; in altre parole, la reazione orizzontale domina sul momento di richiamo e si disaccoppia dalle rotazioni delle estremità. Si noti che questo rapporto è dipendente della tensione del filo, ed è limitato inferiormente dalla necessità di mantenere il carico sopportato dal filo entro il limite elastico del materiale.

Nelle condizioni di lavoro del superattenuatore vale sempre: $\lambda \ll L$. Le forze F_b e F_a ed i momenti di richiamo M_b e M_a , esercitati dal filo sui corpi vincolati alle sue estremità, sono espressi, in forma approssimata²², dalle seguenti relazioni:

$$F_a = -\frac{T}{L-2\lambda}(x_a - x_b) + \frac{T\lambda}{L-2\lambda}(\theta_b + \theta_a) = -F_b \quad (78)$$

$$M_a = -T\lambda \frac{L-\lambda}{L-2\lambda}\theta_a - \frac{T\lambda^2}{L-2\lambda}\theta_b + \frac{T\lambda}{L-2\lambda}(x_a - x_b) = -M_b - F_a L - T(x_a - x_b) \quad (79)$$

dove con x_a , θ_a , x_b , θ_b sono state indicate le coordinate dei punti di aggancio rispettivamente a valle e a monte del filo.

²² Le relazioni esatte contengono termini del tipo: $\tanh(L/2\lambda)$. Nelle condizioni di lavoro del superattenuatore, l'approssimazione di questo termine all'unità comporta un errore del tutto trascurabile.

Queste coordinate non coincidono con quelle introdotte in precedenza per descrivere il comportamento dei corpi vincolati, perché i punti di aggancio non sono collocati necessariamente nei rispettivi baricentri. Devono pertanto essere applicate le seguenti trasformazioni:

$$x = x_a + a\theta_a ; \quad x' = x_b - b\theta_b ; \quad \theta = \theta_a ; \quad \theta' = \theta_b ; \quad M = M_a - a(F_a + \theta T) \quad (80)$$

dove le coordinate relative al corpo a monte sono indicate con un apice.

La (81) esprime la costante elastica associata alla reazione orizzontale del filo rispetto alle traslazioni orizzontali relative dei corpi vincolati.

$$k_{W,x} = \frac{T}{L - 2\lambda} \quad (81)$$

Le (82) esprimono le costanti elastiche associate ai momenti delle forze di reazione applicate sul corpo a valle del filo. La prima si riferisce alla reazione generata dalla rotazione dello stesso corpo a valle; la seconda si riferisce a quella generata dalla rotazione del corpo a monte.

$$k_{W,\theta} = k_{W,x}(\lambda + a)(L - \lambda + a) \quad k_{W,\theta,\theta'} = k_{W,x}(\lambda + a)(\lambda + b) \quad (82)$$

Restano infine le *stiffness* associate alle reazioni orizzontali generate da rotazioni, ed associate a momenti generati da traslazioni. Le (83) esprimono queste grandezze, ancora riferite al corpo a valle del filo.

$$k_{W,x,\theta'} = -k_{W,x}(\lambda + b) \quad k_{W,x,\theta} = k_{W,\theta,x} = -k_{W,\theta,x'} = -k_{W,x}(\lambda + a) \quad (83)$$

Il vincolo è simmetrico rispetto ad un piano orizzontale, pertanto le costanti elastiche che restano si possono ricavare con le sostituzioni $q \leftrightarrow q'$ e $a \leftrightarrow b$, ricordando di invertire il segno a quelle la cui definizione (vedi (65)) contiene uno pseudovettore. La sua simmetria cilindrica permette infine di affermare che il comportamento del vincolo rispetto alle coordinate $y-\psi$ è identico a quello visto per le coordinate $x-\theta$.

I fili di sospensione multipli, che sorreggono lo specchio e la massa di riferimento, reagiscono agli spostamenti verticali come un filo singolo: la loro *stiffness* complessiva è pari alla somma delle *stiffness* verticali dei quattro fili, ciascuna delle quali è descritta dalla (76). A differenza dei fili singoli, questo tipo di reazione è presente anche nelle rotazioni intorno agli assi orizzontali. La separazione $2s$ dei fili lungo una direzione

orizzontale fa sì che una rotazione relativa dei corpi vincolati sia causa di un allungamento o accorciamento dei fili. Il vincolo reagisce dunque con una coppia aggiuntiva che, come risulta dai calcoli, è molto superiore a quella generata dai singoli fili. La relativa costante elastica è espressa dalla (84) in termini della *stiffness* verticale, e sostituisce quelle espresse nella (82).

$$k_{W,\theta} = -k_{W,\theta,\theta'} = k_{W,z} \cdot s^2 \quad (84)$$

Nel caso dei fili multipli la simmetria cilindrica è rotta, perché la separazione dei fili è diversa lungo i due assi orizzontali ortogonali.

La **sospensione del filtro 0** è realizzata con un vincolo che ha una struttura più complessa di un insieme di fili, ma un comportamento analogo. In questo caso, la reazione verticale è esercitata dalle colonne del pendolo invertito, in tre punti disposti a 120° l'uno dall'altro lungo l'anello esterno del filtro 0, di raggio s . Detta $k_{0,z}$ la costante elastica verticale, la costante elastica angolare si calcola come segue:

$$k_{0,\theta} = k_{0,z} \cdot s^2 / 2 \quad (85)$$

La *stiffness* orizzontale è determinata dalla competizione tra l'elasticità del pendolo invertito (colonne e giunti) e l'azione in senso contrario della forza di gravità (vedi par. II - 1.4(A)). Quest'ultima, come pure la *stiffness* verticale, sono introdotte nel modello come parametri liberi, perché una loro determinazione in termini delle dimensioni del vincolo richiederebbe un'analisi numerica piuttosto complessa.

Il comportamento dei **fili di centraggio** è determinato dai seguenti parametri:

- E - il modulo di Young del materiale;
- L - la lunghezza;
- d - il diametro;
- $2s$ - la separazione dei piani su cui agiscono i due gruppi di fili;
- a - la distanza verticale tra il centro di azione dei fili ed il baricentro della *crossbar*;
- b - la distanza verticale tra il baricentro del *vessel* ed il centro di azione dei fili.

Il comportamento del vincolo rispetto alla direzione verticale può essere tralasciato, perché si sovrappone all'effetto delle lame e delle antimolle magnetiche. La *stiffness* del vincolo verticale complessivo è introdotta nella simulazione come parametro libero.

La (86) esprime la costante elastica associata alla reazione orizzontale dei fili rispetto alle traslazioni orizzontali relative dei corpi vincolati.

$$k_{c,x} = \frac{\pi E d^2}{L} \quad (86)$$

Come nel caso dei fili di sospensione multipli, le forze che reagiscono alle rotazioni θ_c e θ_v rispettivamente della *crossbar* e del *vessel* sono determinate dall'allungamento o accorciamento dei fili che li collegano. In questo caso, però, gli assi di rotazione che definiscono le due coordinate non coincidono, perché i baricentri dei due corpi non sono allineati su uno stesso asse orizzontale. La *crossbar* ha infatti la massima concentrazione di massa nella parte superiore, dove si trovano le antimolle magnetiche, quindi il suo baricentro è spostato verso l'alto rispetto al baricentro del *vessel*, che invece si trova in prossimità del centro del filtro. I parametri a e b , che fissano la posizione dei due baricentri, sono stati scelti in modo piuttosto arbitrario. Del resto, essi incidono esclusivamente sulle risonanze orizzontali ed angolari in alta frequenza della *crossbar*, le quali hanno scarsa rilevanza sulle proprietà di attenuazione del sistema.

Le costanti elastiche associate ai momenti delle forze di reazione (87), e quelle che definiscono i termini di accoppiamento $x-\theta$ (88) si scrivono come segue:

$$k_{c,\theta} = k_{c,x} (s^2 + a^2) \quad k_{c,\theta,\theta'} = -k_{c,x} (s^2 - ab) \quad (87)$$

$$k_{c,x,\theta'} = -k_{c,x} b \quad k_{c,x,\theta} = k_{c,\theta,x} = -k_{c,\theta,x'} = -k_{c,x} a \quad (88)$$

Si può ritenere trascurabile il contributo generato dalla tensione statica applicata sulla *crossbar* nel punto di sospensione del carico, ed equilibrata dalle lame in una posizione distanziata dalla prima lungo l'asse verticale. Si evita in questo modo di introdurre un ulteriore parametro (la separazione dei punti di applicazione della suddetta tensione), che appesantirebbe inutilmente la trattazione.

Anche questo vincolo gode della simmetria cilindrica e della simmetria rispetto ad un piano orizzontale, pertanto le costanti elastiche che restano si possono calcolare come descritto nel caso del filo di sospensione.

II - 2.6(B) *Quantificazione dei parametri in ingresso e risultati della simulazione*

In Tabella 4 sono riportati i valori delle masse e dei momenti d'inerzia di tutti gli elementi massivi, ottenuti con l'adattamento del modello ai dati sperimentali. Sono

riportati anche i parametri inerziali complessivi dei filtri come blocco unico (*vessel* più *crossbar*). Mentre le masse complessive si ottengono semplicemente sommando le rispettive masse del *vessel* e della *crossbar*, il calcolo dei momenti di inerzia tiene conto del fatto che i baricentri dei singoli elementi sono tra loro distanziati sull'asse verticale. Nella tabella, sono riportate in corsivo le grandezze che non entrano nella simulazione come parametri liberi, ma sono frutto di un calcolo a partire dagli altri parametri.

Tabella 4 **Parametri massivi**

<i>j</i>	<i>m</i> [kg]	<i>I_θ</i> [kg·m ²]	<i>I_ψ</i> [kg·m ²]
V0	300	37.26	37.26
C0	45.5	1.515	0.409
0	<i>345.5</i>	<i>41.94</i>	<i>40.83</i>
V1	125	10.33	10.33
C1	17.5	0.63	0.158
1	<i>142.5</i>	<i>11.27</i>	<i>10.8</i>
V2	144	11.45	11.45
C2	16.1	0.5796	0.145
2	<i>160.1</i>	<i>12.28</i>	<i>11.84</i>
V3	136	10.86	10.86
C3	13.8	0.4968	0.124
3	<i>149.8</i>	<i>11.55</i>	<i>11.17</i>
V4	119	11.9	11.9
C4	12.3	0.4428	0.111
4	<i>131.3</i>	<i>12.49</i>	<i>12.15</i>
V5	205	30.32	30.32
C5	10	0.36	0.09
5	<i>215</i>	<i>31.81</i>	<i>31.54</i>
6	102	1.836	2.295
7	47.5	0.7398	1.691
8	36	0.2162	0.4324

In Tabella 5 sono elencati i valori, in millimetri, dei parametri che definiscono le dimensioni dei vincoli, a partire dai quali si calcolano le varie costanti elastiche. Non sono riportati esplicitamente i valori delle tensioni *T* e delle lunghezze caratteristiche *λ*,

perché si tratta di grandezze derivate. In particolare, le tensioni si ottengono moltiplicando la massa totale del carico sostenuto da ciascun vincolo per l'accelerazione di gravità ($g = 9.81$).

Nella stessa tabella sono riportati anche i valori delle costanti elastiche, nelle unità di misura del Sistema Internazionale. Questi sono stati ottenuti, a partire dalle relazioni esposte nel paragrafo precedente, utilizzando: $E = 1.95 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ per i fili di sospensione, e $E = 1.86 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ per i fili di centraggio. Nel prototipo preso in esame sono stati infatti utilizzati rispettivamente due diversi tipi di acciaio: il *maraging* per i fili di sospensione ed il *marval 18* per i fili di centraggio.

I vincoli godono tutti di simmetria cilindrica, tranne le sospensioni della massa di riferimento (W7) e dello specchio (W8). Per questi, il parametro $2s$ ha un valore diverso se si considera la direzione perpendicolare all'asse ottico. I due valori riportati in tabella devono essere sostituiti rispettivamente con: $2s = 380$; $2s = 312.6$.

Le costanti elastiche k_ψ e $k_{\psi, \psi'}$ devono essere pertanto ricalcolate, partendo dalla (84).

Tabella 5 Parametri elastici

i	L	d	a	b	$2s$	k_z	k_x	k_θ	$k_{x,\theta}$	$k_{x,\theta'}$	$k_{\theta,\theta'}$
0					700	7402200	64.3	1813500			
W1	880	4	10	-24.7		2784600	11380	258	-295	100	-2.6
W2	1130	3.8	10	10		1957100	7514	216	-192	-192	4.9
W3	1130	3.5	10	10		1660300	6075	169	-150	-150	3.7
W4	1130	3.1	10	10		1302500	4726	123	-109	-109	2.5
W5	1130	2.7	259	10		988000	3548	1320	-959	-76	21
W6	1130	1.843	9	-219		460400	1633	31	-27	345	-5.8
W7	705	0.5396	0	10	47.5	253000	666	144	-1.8	-8.4	-144
W8	705	0.4753	0	10	47.5	196300	504	111	-1.2	-6.2	-111
C0	370	1	-221	-62	236	1626	1580000	99100	349000	97900	-351
C1	370	1	-124	-17.4	236	6272	1580000	46300	196000	27500	-18600
C2	370	1	-118	-13.2	236	4630	1580000	44000	186000	20800	-19500
C3	370	1	-111	-11.3	236	3983	1580000	41400	175000	17800	-20000
C4	370	1	-101	-10.4	236	3448	1580000	38100	160000	16400	-20300
C5	370	1	-88	-255	236	2087	1580000	34200	139000	403000	13400

Mostriamo adesso la caratterizzazione completa dei modi normali in bassa frequenza, ottenuta applicando il modello ai dati appena esposti. I modi riguardanti le due direzioni orizzontali sono quasi identici, pertanto si riportano solo quelli relativi all'asse ottico.

Come già detto, fanno eccezione i due modi rotazionali della massa di riferimento e dello specchio, perché tanto i due corpi quanto i rispettivi vincoli non hanno simmetria cilindrica. Le frequenze di risonanza relative alle coordinate y e ψ si ottengono sostituendo gli ultimi due valori della Tabella 7 con: $f_0 = 14.1 \text{ Hz}$; $f_0 = 19.4 \text{ Hz}$.

Tabella 6 **Caratterizzazione dei modi normali verticali in bassa frequenza**

f_0 (Hz)	$z_{C0}; z_{V1}$	$z_{C1}; z_{V2}$	$z_{C2}; z_{V3}$	$z_{C3}; z_{V4}$	$z_{C4}; z_{V5}$	$z_{C5}; z_6; z_7; z_8$
0.18	0.2	0.27	0.34	0.42	0.51	0.6
0.44	-0.4	-0.46	-0.44	-0.28	0.01	0.61
0.70	0.43	0.36	0.06	-0.36	-0.62	0.43
1.04	-0.49	-0.08	0.53	0.51	-0.45	0.1
1.43	0.39	-0.35	-0.44	0.7	-0.19	0.02
1.78	-0.33	0.71	-0.56	0.26	-0.04	0

Tabella 7 **Caratterizzazione dei modi normali orizzontali-angolari in bassa frequenza**

f_0 (Hz)	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
0.035	0.33	0.33	0.33	0.33	0.34	0.34	0.34	0.34	0.34	0	0	0	0	0	0	0	0
0.31	-0.2	-0.17	-0.12	-0.06	0.04	0.19	0.34	0.48	0.48	0.03	0.06	0.08	0.12	0.1	0.29	0.3	0.3
0.48	0.02	0.02	0	-0.01	-0.03	-0.06	0	0.13	0.12	-0.01	-0.02	-0.02	-0.03	-0.07	0.56	0.58	0.56
0.58	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.03	0.05	0.02	0.03	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.07	-0.56	-0.6	-0.57
0.60	0	0	0	0	0	0.01	-0.01	-0.44	0.88	0	0	0	0	0.01	0.1	0.1	0.11
0.65	0.03	0.01	-0.02	-0.04	-0.03	0	0	0	0	-0.04	-0.05	-0.05	0.99	0.03	-0.02	-0.02	-0.02
0.67	0.09	0.04	-0.06	-0.15	-0.18	0.06	0.01	0.06	0.06	-0.12	-0.18	-0.19	-0.28	0.53	-0.39	-0.42	-0.39
0.80	0.03	0	-0.03	-0.02	0	0	0	0	0	-0.06	-0.1	0.99	0	0.01	-0.02	-0.02	-0.02
0.88	-0.01	0	0.03	0.04	-0.01	-0.02	-0.08	0.09	0.09	0.05	0.69	0.1	0.05	0.16	-0.36	-0.42	-0.38
0.92	-0.03	0.01	0.05	0.05	0.02	-0.02	-0.12	0.12	0.12	0.22	-0.45	0.01	0.05	0.12	-0.44	-0.52	-0.46
1.01	0.01	-0.02	-0.05	0	0.06	0.03	-0.12	0.07	0.07	-0.8	-0.04	-0.07	-0.02	-0.09	-0.29	-0.36	-0.31
1.09	0.06	-0.01	-0.11	-0.12	0.05	0.1	-0.16	0.08	0.08	0.66	0.12	-0.06	-0.07	-0.31	-0.31	-0.4	-0.34
1.40	-0.13	0.17	0.37	-0.11	-0.47	0.23	-0.11	0.03	0.03	-0.32	0.05	0.19	-0.03	-0.56	-0.12	-0.19	-0.13
1.71	0.13	-0.32	-0.29	0.64	-0.52	0.11	-0.03	0	0	0.14	-0.13	-0.02	0.06	-0.25	-0.02	-0.05	-0.02
2.13	-0.18	0.83	-0.48	0.2	-0.06	0.01	0	0	0	-0.01	0.09	-0.04	0.01	-0.01	0	0	0
2.57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.29	-0.78	0.55
3.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.09	0.04	1

Nelle due tabelle precedenti, i valori in neretto evidenziano le coordinate che partecipano in maniera più rilevante all'oscillazione in oggetto.

Terminiamo il resoconto dei risultati che si ottengono dall'applicazione del modello di calcolo, elencando le frequenze di risonanza dei modi normali legati alle vibrazioni delle *crossbar*. Si aggiungono anche le risonanze verticali dello stadio finale e le vibrazioni in alta frequenza del *vessel* del filtro 0.

Tabella 8 **Caratterizzazione dei modi normali in alta frequenza**

C0	z_{C0}	$x_{C0}; \theta_{C0}$	$x_{C0}; \theta_{C0}$	$y_{C0}; \psi_{C0}$	$y_{C0}; \psi_{C0}$
f_0 (Hz)	46	12.9	50.2	14.7	83.3

C1	z_{C1}	$x_{C1}; \theta_{C1}$	$x_{C1}; \theta_{C1}$	$y_{C1}; \psi_{C1}$	$y_{C1}; \psi_{C1}$
f_0 (Hz)	56.4	25.5	62.2	32.6	95.1

C2	z_{C2}	$x_{C2}; \theta_{C2}$	$x_{C2}; \theta_{C2}$	$y_{C2}; \psi_{C2}$	$y_{C2}; \psi_{C2}$
f_0 (Hz)	54	26.6	63.5	34.3	96.6

C3	z_{C3}	$x_{C3}; \theta_{C3}$	$x_{C3}; \theta_{C3}$	$y_{C3}; \psi_{C3}$	$y_{C3}; \psi_{C3}$
f_0 (Hz)	51.7	29	67.2	37.9	101.3

C4	z_{C4}	$x_{C4}; \theta_{C4}$	$x_{C4}; \theta_{C4}$	$y_{C4}; \psi_{C4}$	$y_{C4}; \psi_{C4}$
f_0 (Hz)	46.4	31.3	69.5	41.7	103

C5	z_{C5}	$x_{C5}; \theta_{C5}$	$x_{C5}; \theta_{C5}$	$y_{C5}; \psi_{C5}$	$y_{C5}; \psi_{C5}$
f_0 (Hz)	36.1	35.3	73.9	48.2	107.7

V0	z_{V0}	θ_{V0}	ψ_{V0}
f_0 (Hz)	25	35	35

stadio f.	$z_6; z_7; z_8$	$z_6; z_7; z_8$
f_0 (Hz)	11.7	15.3

II - 3 LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SUPERATTENUATORE

Il superattenuatore è stato progettato e costruito per isolare le ottiche di un interferometro dalle vibrazioni della crosta terrestre a partire da pochi Hz. La prima

prerogativa dell'apparato deve pertanto essere quella di garantire bassissimi spostamenti dell'ottica sospesa, rispetto a quelli della base su cui è appoggiato.

Se si adotta la rappresentazione lagrangiana sviluppata nel capitolo precedente, si può affermare che esiste una relazione lineare, causale e tempo-invariante tra le vibrazioni dei punti in cui è applicato il sisma (ingresso) e le vibrazioni trasmesse dall'apparato al corpo sospeso (uscita), purché quest'ultimo non sia soggetto a forze esterne. Questo operatore lineare è detto *funzione di trasferimento*.

È molto utile rappresentare operatori di questo tipo nel dominio delle frequenze. La funzione di trasferimento è allora identificata da una matrice $\mathbf{T}(\omega)$, i cui elementi sono funzioni a valori complessi nella variabile $\omega = 2\pi f$, dove f indica la frequenza. Vale la seguente relazione:

$$\hat{\mathbf{X}}_{out}(\omega) = \mathbf{T}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{X}}_{in}(\omega) \quad (89)$$

dove $\hat{\mathbf{X}}_{in}(\omega)$ e $\hat{\mathbf{X}}_{out}(\omega)$ sono vettori le cui componenti rappresentano le trasformate di Fourier degli spostamenti in ingresso ed in uscita.

Se, per esempio, si produce una variazione $\hat{x}_{in,j}(\omega)$ della coordinata j -esima in ingresso, lasciando invariate tutte le altre coordinate in ingresso, e si misura contemporaneamente la variazione $\hat{x}_{out,i}(\omega)$ della coordinata i -esima in uscita, il rapporto della seconda rispetto alla prima esprime la componente $t_{ij}(\omega)$ della funzione di trasferimento. Questa può essere ottenuta equivalentemente dal rapporto tra le trasformate di Fourier $\hat{a}(\omega)$ delle accelerazioni $\ddot{x}(t)$:²³

$$t_{ij}(\omega) = \frac{\hat{a}_{out,i}(\omega)}{\hat{a}_{in,j}(\omega)} \quad (90)$$

Ovviamente, l'utilizzo di semplici accelerometri commerciali non permette di realizzare misure dirette della funzione di trasferimento di un intero superattenuatore: essi infatti non sono abbastanza sensibili da rilevare le debolissime vibrazioni residue sulla massa sospesa, anche se il punto di sospensione viene fortemente eccitato.

L'obiettivo principale di questa tesi è quello di produrre una stima sperimentale indiretta della funzione di trasferimento del superattenuatore, ovvero degli elementi

²³ La trasformata di Fourier di una derivata seconda si scrive: $\hat{\ddot{x}}(\omega) = -\omega^2 \hat{x}(\omega)$.

$t_{ij}(\omega)$ della matrice $\mathbf{T}(\omega)$. Il lavoro si basa su una serie di misure dirette del trasferimento parziale tra filtri consecutivi della catena, realizzate con accelerometri commerciali. Tenuto conto dei sostanziali disaccoppiamenti tra gradi di libertà, di cui si è parlato in precedenza, sono stati analizzati separatamente il trasferimento verticale (la componente t_{zz}) ed il trasferimento orizzontale (t_{xx}). Vedremo che la conoscenza di questi due canali di trasmissione, più qualche ragionevole ipotesi sugli altri, è sufficiente a determinare la funzione di trasferimento dell'intero sistema. I risultati sono confrontati con le previsioni di un modello teorico, che utilizza la rappresentazione del superattenuatore descritta nel capitolo precedente. È infine fornita una stima del reale spostamento sismico residuo dell'ottica sospesa e del suo effetto sulla sensibilità del rivelatore interferometrico di onde gravitazionali VIRGO.

II - 3.1 LE MATRICI D'IMPEDENZA

Per trattare dal punto di vista teorico il problema del trasferimento delle vibrazioni in un sistema meccanico complesso [38], conviene seguire il criterio adottato nel capitolo II - 2: la scomposizione del sistema in sottosistemi collegati tra loro.

Nel limite delle piccole oscillazioni ciascun elemento, sia esso elastico o massivo, si comporta come un operatore lineare di trasmissione meccanica tra le sue estremità, presso le quali è collegato al resto della catena. Lo stato meccanico di ciascuna estremità è descritto completamente dall'evoluzione temporale di due vettori: le coordinate \mathbf{X} e le forze e momenti \mathbf{F} ad esse associate. L'informazione necessaria per descrivere le proprietà di trasmissione di un elemento è dunque contenuta in una matrice, dipendente della pulsazione ω , che indicheremo con la lettera \mathbf{Z} , e che individueremo nel seguito con il termine *impedenza*:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{out}(\omega) \\ \hat{\mathbf{F}}_{out}(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{in}(\omega) \\ \hat{\mathbf{F}}_{in}(\omega) \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\omega) & \mathbf{B}(\omega) \\ \mathbf{C}(\omega) & \mathbf{D}(\omega) \end{pmatrix} \quad (91)$$

dove \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{D} sono matrici quadrate di dimensione pari al numero di gradi di libertà in ingresso ed in uscita. Per convenzione, le forze in ingresso sono applicate sul sistema dall'esterno, mentre le forze in uscita sono applicate dal sistema verso l'esterno.

Le impedenze dei sistemi di trasmissione elementari utilizzati per la descrizione del superattenuatore godono tutte della seguente proprietà:

$$\mathbf{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{D}(\omega) & -{}^t\mathbf{B}(\omega) \\ -{}^t\mathbf{C}(\omega) & {}^t\mathbf{A}(\omega) \end{pmatrix} \quad (92)$$

Sfruttando identità $\mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{I}$, si dimostra che la (92) è equivalente alle seguenti relazioni algebriche:

$$\mathbf{A} \cdot {}^t\mathbf{D} - \mathbf{B} \cdot {}^t\mathbf{C} = \mathbf{I} \quad \mathbf{A} \cdot {}^t\mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot {}^t\mathbf{A} \quad \mathbf{C} \cdot {}^t\mathbf{D} = \mathbf{D} \cdot {}^t\mathbf{C} \quad (93)$$

Da queste relazioni se ne può ricavare un'altra, di grande utilità per il calcolo della funzione di trasferimento di questi sistemi meccanici, nella condizione in cui le forze in uscita sono nulle. Ponendo nella (91) $\mathbf{F}_{out} = 0$ ed utilizzando le (93) si ottiene:

$$\hat{\mathbf{X}}_{out} = {}^t\mathbf{D}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{in} \quad (94)$$

Nel seguito saranno espresse alcune regole algebriche che permettono di ottenere l'impedenza di un sistema composto, a partire dalle matrici associate alle sue parti elementari. Si può dimostrare che anche le matrici ottenute mediante queste regole di composizione godono delle proprietà appena citate, pertanto si può concludere che esse valgono anche per l'impedenza dell'intero superattenuatore.

Dall'impedenza di un vincolo si possono anche ricavare le relative costanti elastiche, di cui si è parlato nei paragrafi II - 2.1(B) e II - 2.6(A). Esse si esprimono come segue:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{F}}_{out} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{out} \\ \hat{\mathbf{F}}_{out} = (\mathbf{C} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{X}}_{in} \\ \hat{\mathbf{F}}_{in} = -\mathbf{B}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{out} \\ \hat{\mathbf{F}}_{in} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{in} \end{cases} \quad (95)$$

Queste relazioni si ottengono ponendo alternativamente $\hat{\mathbf{X}}_{in} = 0$ e $\hat{\mathbf{X}}_{out} = 0$ nella (91), e ricavando le forze in ingresso ed in uscita in termini dello spostamento non nullo.

II - 3.1(A) Sistemi collegati in serie

Due sistemi meccanici si dicono *collegati in serie* se il vettore spostamento-forza di uscita del primo coincide con il vettore spostamento-forza di ingresso del secondo, mentre l'ingresso del primo è l'ingresso complessivo e l'uscita del secondo è l'uscita complessiva. Risulta banalmente dalla definizione che, se \mathbf{Z}_1 e \mathbf{Z}_2 sono nell'ordine le

impedenze dei due elementi collegati in serie, l'impedenza del sistema complessivo si scrive:

$$\mathbf{Z}_{serie} = \mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1 \quad (96)$$

II - 3.1(B) Sistemi collegati in derivazione

Un sistema meccanico si dice *collegato in derivazione* ad un altro sistema se il suo spostamento in ingresso coincide con lo spostamento in ingresso o in uscita di quest'ultimo, mentre la sua uscita è libera.

Se \mathbf{Z} è l'impedenza dell'elemento principale e $\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d, \mathbf{D}_d$, sono le sottomatrici dell'impedenza dell'elemento in derivazione, l'impedenza del sistema complessivo, che ha lo stesso ingresso e la stessa uscita dell'elemento principale, si scrive:

$$\mathbf{Z}_{d,in} = \mathbf{Z} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathbf{D}_d^{-1} \cdot \mathbf{C}_d & I \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z}_{d,out} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathbf{D}_d^{-1} \cdot \mathbf{C}_d & I \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Z} \quad (97)$$

La prima delle (97) si applica se la derivazione è in ingresso; la seconda se la derivazione è in uscita. Da notare che una derivazione in ingresso ad un sistema non ne modifica la funzione di trasferimento, perché la sottomatrice \mathbf{D} dell'impedenza resta invariata nel prodotto dato dalla prima delle (97).

II - 3.1(C) Sistemi collegati in parallelo

Se due sistemi meccanici sono connessi in modo da avere in comune sia lo spostamento in ingresso sia lo spostamento in uscita, si dice che i sistemi sono *collegati in parallelo*.

Se \mathbf{Z}_1 e \mathbf{Z}_2 sono le impedenze dei due elementi collegati in parallelo, l'impedenza del sistema complessivo si scrive:

$$\mathbf{Z}_{z_1 \parallel z_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)^{-1} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) & \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)^{-1} \cdot \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)^{-1} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) & \mathbf{D}_1 + (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)^{-1} \cdot \mathbf{B}_1 \end{pmatrix} \quad (98)$$

La (98) si semplifica notevolmente se le impedenze dei sistemi di partenza hanno gli stessi elementi diagonali \mathbf{A} e \mathbf{D} . L'impedenza della connessione in parallelo si scrive in questo caso:

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{z}_1 \parallel \mathbf{z}_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)^{-1} \cdot \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (99)$$

II - 3.1(D) Sistemi ad una dimensione

L'impedenza \mathbf{Z}_m di un corpo rigido unidimensionale di massa m si costruisce osservando che lo spostamento di tutti i suoi punti è descritto dalla stessa coordinata, pertanto lo spostamento in uscita coincide con lo spostamento in ingresso. Inoltre, le forze applicate alle estremità determinano la sua accelerazione secondo la consueta equazione di Newton. Risultano pertanto valide le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} \\ -m\omega^2 \hat{x}_{in}(\omega) = \hat{F}_{in}(\omega) - \hat{F}_{out}(\omega) \end{cases} \quad (100)$$

Da queste si ricava l'impedenza:

$$\mathbf{Z}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (101)$$

Una molla ideale di massa trascurabile è tale per cui alle sue estremità sono sempre applicate forze uguali ed opposte, di intensità proporzionale alla costante elastica ed allo spostamento relativo delle estremità. Si ottengono pertanto le seguenti relazioni, valide anche se la costante elastica k contiene una parte immaginaria, responsabile dello smorzamento:

$$\begin{cases} \hat{F}_{out} = \hat{F}_{in} \\ \hat{F}_{out} = -k(\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in}) \end{cases} \quad (102)$$

Da queste si ricava l'impedenza \mathbf{Z}_k della molla:

$$\mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} 1 & -1/k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (103)$$

Si ricava immediatamente dalla (99) che, se si connettono in parallelo due elementi puramente massivi o puramente elastici, il sistema che ne risulta è ancora un elemento della stesso tipo, con massa o costante elastica pari alla somma dei parametri di partenza.

Combinando in serie una molla ed un corpo rigido si ottiene l'impedenza dell'oscillatore armonico unidimensionale:

$$\mathbf{Z}_{osc} = \begin{pmatrix} I & -I/k \\ m\omega^2 & I - m\omega^2/k \end{pmatrix} \quad (104)$$

Da questa, utilizzando la (94), si ricava sua funzione di trasferimento, già anticipata nel par. II - 1.1:

$$T_{osc}(\omega) = \frac{I}{I - \omega^2 / \omega_0^2} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (105)$$

La possibilità di rappresentare un sistema meccanico come un elemento puramente massivo o puramente elastico dipende in modo essenziale dalla banda spettrale alla quale si è interessati e dai sistemi ai quali l'elemento è connesso.

Per meglio comprendere quest'affermazione, è utile studiare un esempio più concreto di sistema meccanico: un cilindro sottile di densità ρ , lunghezza L , sezione S e modulo di Young E . Se si considerano solamente le sue deformazioni in senso longitudinale, la matrice d'impedenza si scrive:

$$\mathbf{Z}_{filo} = \begin{pmatrix} \cos(\omega/\nu) & -\frac{I \sin(\omega/\nu)}{k \omega/\nu} \\ m\omega^2 \frac{\sin(\omega/\nu)}{\omega/\nu} & \cos(\omega/\nu) \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega \ll \nu} \begin{pmatrix} I & -\frac{I}{k} \\ m\omega^2 & I \end{pmatrix} \quad (106)$$

dove $m = \rho LS$ è la massa del cilindro e $k = ES/L$ è la sua costante elastica.

La frequenza caratteristica $\nu = (I/L)\sqrt{E/\rho}$ definisce l'ordine di grandezza delle frequenze alle quali cominciano a manifestarsi gli effetti della distribuzione di massa ρ e dell'elasticità locale E . Nella banda delle frequenze molto inferiori a questo valore, l'espressione limite dell'impedenza del cilindro (seconda parte della (106)) dipende invece esclusivamente dai suoi parametri concentrati m e k . Si vede però che non può essere stabilito a priori se l'elemento debba essere considerato di tipo massivo o di tipo elastico: compaiono infatti entrambi i termini non diagonali caratteristici delle rispettive impedenze.

Le cose si chiariscono solo quando si considerano due elementi di questo tipo collegati in serie, e si scrive l'impedenza del sistema complessivo:

$$\mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_1 = \begin{pmatrix} 1 - m_1 \omega^2 / k_2 & -1/k_1 - 1/k_2 \\ (m_1 + m_2) \omega^2 & 1 - m_2 \omega^2 / k_1 \end{pmatrix} \quad (107)$$

Se, per esempio, il primo è un cilindro molto sottile rispetto al secondo, la sua massa e la sua costante elastica sono molto minori di quelle del secondo, cosicché nella (107) possono essere trascurati i termini dipendenti da m_1 e k_2 , e questa si approssima a quella di un oscillatore semplice (104). Il primo cilindro si comporta dunque come un elemento puramente elastico, mentre il secondo come un elemento puramente massivo.

Per quanto riguarda la trasmissione delle vibrazioni lungo la direzione verticale, il superattenuatore può essere decomposto in elementi unidimensionali, costituiti dai fili di sospensione, dalle lame triangolari e dai vari corpi rigidi.

I fili di sospensione, per quanto riguarda il loro comportamento longitudinale, hanno frequenze caratteristiche dell'ordine di 10^5 rad/s, pertanto nella banda di utilizzo del superattenuatore possono essere considerati come elementi puramente elastici.

Le lame triangolari possono invece essere considerate un elemento puramente elastico solo in una banda che si estende fino a pochi Hertz (già a 10 Hz l'effetto della loro massa diventa sensibile). Anche per queste esiste una matrice 2x2 che descrive il trasferimento meccanico tra le due estremità collegate al resto della catena. Non è però disponibile una sua espressione analitica, pertanto è necessario ricavarne un'espressione numerica risolvendo agli elementi finiti le equazioni differenziali che descrivono il comportamento meccanico delle lame nel loro complesso.

Si ritiene infine che i corpi rigidi possano essere ben rappresentati come elementi puramente massivi nella banda compresa tra 0 e 200 Hz, entro la quale sono eseguite le misure di funzione di trasferimento presentate nei prossimi paragrafi. Sulla base delle osservazioni sperimentali illustrate nel par. II - 2.4 si può infatti escludere la presenza di risonanze interne ai corpi rigidi in questa banda.

Non si è ritenuto opportuno estendere lo studio della funzione di trasferimento del sistema alla banda delle risonanze interne dei corpi rigidi, perché a queste frequenze i diversi punti di un *vessel* si muovono l'uno rispetto all'altro, e le accelerazioni misurate dai sensori collocati sulla superficie del *vessel* non coincidono con quelle dei punti di sospensione dei filtri. Misure condotte in questo modo non ci fornirebbero pertanto informazioni sulla reale trasmissione meccanica della catena.

II - 3.1(E) Sistemi a due dimensioni

Come abbiamo già discusso in precedenza, le oscillazioni in direzione orizzontale di un pendolo reale coinvolgono necessariamente una coordinata angolare. La descrizione della trasmissione orizzontale lungo una catena di pendoli richiede dunque l'utilizzo di matrici d'impedenza di dimensione 4. Il vettore spostamento è formato dalla coordinata x di traslazione orizzontale e dalla coordinata θ di rotazione intorno all'asse orizzontale perpendicolare all'asse x ; il vettore forza è formato dalla componente x della forza applicata e dalla componente del momento in direzione dell'asse di rotazione.

Corpo rigido

A differenza del caso unidimensionale, gli spostamenti dei punti di un corpo rigido che si muove in due dimensioni dipendono dalla posizione del punto, e le equazioni del moto dipendono dai punti di applicazione delle forze.

Se le posizioni di ingresso e di uscita coincidono con il suo baricentro, valgono le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} \hat{F}_{in} - \hat{F}_{out} = -m\omega^2 \hat{x}_{in} \\ \hat{M}_{in} - \hat{M}_{out} = -I\omega^2 \hat{\theta}_{in} \end{cases} \quad (108)$$

dove m è la massa del corpo e I è il suo momento d'inerzia rispetto al baricentro.

Considerando che vale $x_{out} = x_{in}$ e $\theta_{out} = \theta_{in}$, si ricava la matrice d'impedenza:

$$\mathbf{Z}_{m,I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ m\omega^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & I\omega^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (109)$$

Se l'ingresso non coincide con il baricentro, ed a è la distanza tra questi due punti (vedi par. II - 2.6(A)), le relazioni tra le coordinate diventano le seguenti: $x_{out} = x_{in} + a\theta_{in}$; $\theta_{out} = \theta_{in}$, dove a si intende positiva se l'ingresso è più in alto dell'uscita. Inoltre la forza applicata in ingresso contribuisce al momento totale applicato al corpo rigido. L'impedenza complessiva si ottiene moltiplicando in ingresso (a destra) la (109) per la seguente matrice:

$$\mathbf{Z}_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -aT & -a & 1 \end{pmatrix} \quad (110)$$

dove T è l'eventuale componente verticale della forza applicata in ingresso (T si intende positiva se è diretta verso l'alto).

Analogamente, se l'uscita non coincide con il baricentro del corpo rigido la (109) deve essere moltiplicata in uscita (a sinistra) per una matrice come quella rappresentata nella (110). Si considera positiva la traslazione verso il basso e la tensione verso l'alto (applicata dal sistema verso l'esterno, come da convenzione per le forze in uscita).

La matrice espressa nella (110) può rappresentare l'impedenza di una connessione perfettamente rigida e priva di massa.

Fili di centraggio

Il vincolo elastico bidimensionale più semplice è quello che reagisce in modo indipendente sui due gradi di libertà, ovvero la forza applicata dipende solo dalle traslazioni delle sue estremità e il momento applicato dipende solo dalle rotazioni delle sue estremità. Se k_x e k_θ sono le due rispettive costanti elastiche, l'impedenza si scrive:

$$\mathbf{Z}_{k_x, k_\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/k_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/k_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (111)$$

Un vincolo di questo tipo è il sistema di centraggio che collega il *vessel* alla *crossbar* in un filtro (si veda par. II - 1.2, ed in particolare la Figura 6). Si tratta della composizione di due vincoli puramente orizzontali di costante elastica k_1 e k_2 che agiscono su due piani paralleli, la cui distanza è $2s$. Se l'ingresso e l'uscita sono posti sul piano rispetto al quale il momento di reazione ad una traslazione pura è nullo, che dista $h_1 = 2sk_2/(k_1 + k_2)$ dal vincolo 1, il trasferimento è rappresentato dalla (111) con:

$$k_x = k_1 + k_2 \quad ; \quad k_\theta = \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2} s^2 \quad (112)$$

Filo di sospensione

Il filo di sospensione di un pendolo non può essere descritto da un'impedenza semplice come quella espressa dalla (111) perché, quando una sua estremità ruota, la rigidità trasversa determina la trasmissione di una forza orizzontale all'altra estremità. Devono quindi essere rappresentati anche gli accoppiamenti tra i gradi di libertà traslazionali e quelli rotazionali.

Se poi si tiene conto della sua massa, ovvero della dinamica interna al filo, le equazioni che legano gli spostamenti delle estremità e le forze ad esse applicate diventano piuttosto complesse. Nondimeno, è possibile calcolare la soluzione analitica di queste equazioni, dalla quale si ottiene la matrice d'impedenza del filo.

Quella che segue è la sua rappresentazione esplicita, in termini della lunghezza L , la densità ρ , la sezione S , il momento della sezione J , il modulo di Young E e la tensione longitudinale T a cui il filo è sottoposto, per effetto del carico sospeso.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^2 c_3 + \lambda_3^2 c_1}{\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{L(\lambda_3 s_3 + \lambda_1 s_1)}{\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{L^3(-\lambda_1 s_3 + \lambda_3 s_1)}{EJ\gamma^2 \sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{L^2(c_3 - c_1)}{EJ\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} \\ \frac{\gamma^2(-\lambda_1 s_3 + \lambda_3 s_1)}{L\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{\lambda_3^2 c_3 + \lambda_1^2 c_1}{\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{L^2(-c_3 + c_1)}{EJ\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{L(\lambda_3 s_3 + \lambda_1 s_1)}{EJ\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} \\ \frac{EJ\gamma^2(\lambda_1^3 s_3 + \lambda_3^3 s_1)}{L^3\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{EJ\gamma^4(-c_3 + c_1)}{L^2\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{\lambda_1^2 c_3 + \lambda_3^2 c_1}{\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{\gamma^2(\lambda_1 s_3 - \lambda_3 s_1)}{L\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} \\ \frac{EJ\gamma^4(c_3 - c_1)}{L^2\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{EJ(\lambda_3^3 s_3 - \lambda_1^3 s_1)}{L\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{L(\lambda_3 s_3 + \lambda_1 s_1)}{\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} & \frac{\lambda_3^2 c_3 + \lambda_1^2 c_1}{\sqrt{4\gamma^4 + \tau^2}} \end{pmatrix} \quad (113)$$

$$c_3 = \cos(\lambda_3) \qquad s_3 = \sin(\lambda_3)$$

$$c_1 = \cosh(\lambda_1) \qquad s_1 = \sinh(\lambda_1)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{\tau^2 + 4\gamma^4} + \tau}{2}} \qquad \lambda_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{\tau^2 + 4\gamma^4} - \tau}{2}}$$

$$\tau = \frac{TL^2}{EJ} \qquad \gamma^4 = \frac{\omega^2 \rho SL^4}{EJ}$$

L'ordine zero di espansione della (113) in termini di γ^4 , utilizzabile se $\gamma^2 \ll \tau/2$, è una matrice indipendente dalla frequenza e dalla massa del filo. Essa rappresenta l'impedenza di un filo privo di massa, oppure il limite alle basse frequenze dell'impedenza di un filo dotato di massa, e si scrive come segue:

$$\mathbf{Z}_{L,\lambda,T} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda sh & (\lambda sh - L)/T & (1 - ch)/T \\ 0 & c & (ch - 1)/T & -sh/\lambda T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda T sh & -\lambda sh & ch \end{pmatrix} \quad (114)$$

$$sh = \operatorname{senh}\left(\frac{L}{\lambda}\right) \quad ch = \operatorname{cosh}\left(\frac{L}{\lambda}\right) \quad \lambda = \sqrt{\frac{EJ}{T}} \quad f \ll f_c = \frac{T}{2\pi\sqrt{\rho SEJ}}$$

dove λ è la lunghezza caratteristica del filo, introdotta nel paragrafo II - 2.6(A), e f_c è la frequenza presso la quale si cominciano a manifestare gli effetti della massa.

Un'altra frequenza caratteristica della matrice (113) è quella per la quale si annulla il determinante della sottomatrice B . In questo caso, gli spostamenti in ingresso ed in uscita possono essere annullati da un'opportuna combinazione di forze e momenti: si tratta dunque della condizione di risonanza che si realizza nei modi di violino (si veda in proposito il par. II - 2.4).

Si può verificare che la frequenza di risonanza del primo modo di violino (71), soddisfa la condizione di validità della (114) per tutti i fili di sospensione presenti nel superattenuatore; l'effetto della massa dei fili è dunque trascurabile fino alle prime risonanze interne. Del resto, vedremo che non è necessario studiare il trasferimento orizzontale del superattenuatore alle frequenze dei modi di violino, perché in questa banda è nettamente dominante il contributo proveniente dal trasferimento verticale.

La (114), molto più semplice della (113), presenta lo stesso grossi problemi di trattamento numerico. Si può notare che l'impedenza ha elementi di matrice veramente enormi, per la presenza dei parametri sh e ch . Si tratta essenzialmente di funzioni esponenziali del rapporto L/λ , il quale ha un ordine di grandezza di diverse decine quando i fili sono molto tesi e sottili, come quelli del superattenuatore.²⁴

Se questi parametri non sono scritti con grandissima precisione, si commettono errori relativi troppo grandi nei calcoli in cui compaiono sottrazioni di termini quasi uguali²⁵.

Un modo per eliminare questa divergenza consiste nel connettere in parallelo al filo un vincolo del tipo rappresentato dalla (111), con costante elastica orizzontale

²⁴ La divergenza di questi parametri esprime una proprietà meccanica del filo: per effetto della sua tensione, lo sforzo di torsione e la deformazione angolare decadono in modo esponenziale da un'estremità all'altra, con lunghezza di decadimento molto più piccola della sua lunghezza totale. In pratica, l'applicazione di un momento ad un'estremità induce una rotazione microscopica sull'altra estremità.

²⁵ Si ha spesso a che fare con cancellazioni del tipo: $ch^2 - sh^2 = 1$.

trascurabile. Del resto, questa situazione è del tutto realistica: i cavi di alimentazione degli apparati elettronici sulla catena possono essere rappresentati proprio in questo modo. Applicando la (98) per ottenere l'impedenza dei due elementi in parallelo, ponendo a zero la costante di richiamo orizzontale, e sfruttando il fatto che $tgh(L/\lambda) \approx 1$, si ottiene la seguente matrice, in termini del parametro $\alpha = \lambda T/k_\theta$:

$$\mathbf{Z}_{L,\lambda,P,k_\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda(1+\alpha/2) & (2\lambda(1+\alpha/2)-L)/P & -\lambda/k_\theta \\ 0 & 1+\alpha & \lambda/k_\theta & -1/k_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\lambda P(1+\alpha/2) & -2\lambda(1+\alpha/2) & 1+\alpha \end{pmatrix} \quad (115)$$

L'impedenza appena scritta gode della seguente proprietà: se k_θ è abbastanza piccolo (in particolare se $\alpha \gg L/\lambda \gg 1$), solo la componente $\theta-\theta$ della funzione di trasferimento dipende da k_θ ; le altre componenti e tutte le costanti elastiche sono uguali a quelle che si ricavano dalla matrice di impedenza esatta (114). Del resto, la componente $\theta-\theta$ non produce alcun effetto sulle proprietà di attenuazione del superattenuatore, perché questo canale di trasmissione è sopravanzato dai canali che accoppiano la rotazione e la traslazione. In pratica, la presenza del vincolo aggiuntivo produce effetti dinamici trascurabili, ma introduce un termine di accoppiamento angolare abbastanza grande da eliminare le divergenze nella matrice d'impedenza.

Sospensione a due o a quattro fili

In questo caso, una rotazione del corpo sospeso intorno all'asse orizzontale ortogonale a quello di oscillazione determina un momento di richiamo aggiuntivo, oltre a quello esercitato dai singoli fili in conseguenza della loro torsione. Questo momento si sviluppa grazie all'azione congiunta dei fili, che reagiscono al loro allungamento longitudinale. Se i fili sono sufficientemente separati rispetto al loro diametro, ovvero se $s/d \gg (L/\lambda)^{1/2}$, quest'ultimo contributo diventa quello dominante.

Detta k_z la costante elastica longitudinale del sistema e s la distanza tra i piani di azione dei fili, la costante elastica torsionale k_θ si ottiene dalla seconda delle (112), considerando che $k_1 = k_2 = k_z/2$:

$$k_\theta = \frac{k_z s^2}{4} \quad (116)$$

A parte questo termine aggiuntivo, i quattro fili si comportano come un solo filo, posto sull'asse centrale, con la stessa lunghezza L , diametro d e lunghezza caratteristica λ , e tensione pari al carico totale sul vincolo.

Rappresentando separatamente i due effetti, e connettendo in parallelo le relative impedenze, si ottiene una matrice d'impedenza come quella espressa nella (115), dove però questa volta vale l'approssimazione: $\alpha \ll 1$.

Pendolo invertito

Gli elementi elastici principali sono i giunti che connettono la piattaforma di base alle colonne di alluminio. Il giunto è costituito semplicemente da un cilindro metallico abbastanza lungo e sottile da potersi flettere sotto il peso della catena.

La sua struttura geometrica è identica a quella del filo di sospensione, e dunque anche la matrice d'impedenza. L'unica differenza sta nel fatto che il giunto è sottoposto a compressione, invece che a tensione, pertanto nella (113) il parametro τ deve comparire con segno negativo. Nel limite alle basse frequenze, l'impedenza è analoga a quella espressa nella (114), tranne che, al posto delle funzioni iperboliche, sono presenti le funzioni circolari (seno e coseno). Anche la colonna di alluminio, in quanto elemento lineare sottoposto a compressione, è descritto da un'impedenza dello stesso tipo.

L'impedenza dell'intera gamba si ottiene dalla connessione in serie di due elementi compressi ed uno teso (il breve filo che sospende l'anello dello stadio superiore alla colonna). È indispensabile che, per la descrizione della colonna, sia adottata l'espressione esatta dell'impedenza, perché l'effetto della sua massa si manifesta a partire da frequenze molto basse. Per esempio, si otterrebbero risultati molto diversi se la colonna fosse descritta come una sbarra rigida priva di massa.

Anche per quanto riguarda il giunto è stata utilizzata la matrice completa, ma si è potuto verificare che non si ottengono risultati differenti se si adotta l'approssimazione della cerniera elastica ((111), con $1/k_x = 0$). Questa descrizione è valida perché il giunto è molto più corto ed elastico della colonna.

Connettendo le tre colonne in parallelo, con lo stesso procedimento utilizzato per la sospensione a due fili, si ottiene infine l'impedenza complessiva.

II - 3.2 LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO VERTICALE

Come è già stato osservato precedentemente, i gradi di libertà di traslazione in direzione verticale si possono considerare praticamente disaccoppiati da tutti gli altri, perché le reazioni elastiche a questi spostamenti sono forze agenti lungo la stessa direzione. Si può pertanto parlare di *funzione di trasferimento verticale* (FTV) delle vibrazioni. Il superattenuatore può essere rappresentato come un insieme di elementi unidimensionali connessi tra loro in vario modo. Nella classificazione che segue sarà associata a ciascun elemento di trasmissione una matrice d'impedenza, che ne rappresenta il comportamento esclusivamente lungo la direzione verticale.

A partire dalla piattaforma di base, che rappresenta l'ingresso del sistema, fino ad arrivare allo specchio, che ne rappresenta l'uscita, si incontra una successione di sistemi di sospensione, realizzati dalla connessione in serie di un vincolo elastico e di un corpo rigido. Nella banda in esame i corpi rigidi si comportano tutti come elementi massivi puri, pertanto sono rappresentati da matrici del tipo (101).

I *vessel* dei filtri (tranne il filtro 0) e la marionetta sono sospesi tramite un filo singolo di massa trascurabile, rappresentabile come elemento elastico puro, ovvero con la matrice d'impedenza (103). Ciascuna di queste sospensioni costituisce pertanto un oscillatore armonico ed è rappresentata da una matrice del tipo (104).

Per quanto riguarda lo specchio e la massa di riferimento, il vincolo di sospensione è costituito da quattro fili uguali connessi in parallelo. In base a quanto osservato nel par. II - 3.1, questi si comportano quindi come un solo filo di costante elastica quadrupla. Una considerazione analoga vale per il *vessel* del filtro 0, per il quale il vincolo di sospensione è costituito dai tre fili che lo connettono alle colonne del pendolo invertito. Questi sistemi sono anch'essi descritti da una matrice del tipo (104).

Il vincolo di sospensione tra *vessel* e *crossbar* di un filtro consiste nella connessione in parallelo di un numero variabile di lame e di un'antimolla magnetica, più un sistema di centraggio, che aggiunge un ulteriore contributo alla *stiffness* verticale complessiva. Questi vincoli hanno un comportamento principalmente elastico, ma l'elemento della matrice d'impedenza che collega \mathbf{F}_{out} a \mathbf{X}_{in} (elemento \mathbf{C} della (91)) non può essere trascurato, a causa della considerevole massa delle lame. Le sospensioni che ne risultano sono rappresentabili come oscillatori semplici solo per frequenze molto basse; già a qualche Hertz si manifestano deviazioni apprezzabili.

Per completare la rappresentazione devono essere aggiunti gli assorbitori del modo di *crossbar* e quelli del modo di lama. Si tratta di oscillatori a bassissimo fattore di qualità, ottenuti sospendendo un piccolo corpo rigido tramite un elemento elastico gommoso. L'impedenza degli assorbitori è ancora del tipo (104), dove però la parte reale e la parte immaginaria della costante elastica k , legate rispettivamente al termine elastico ed al termine dissipativo della forza di reazione (vedi par. I - 3.2(C)), sono dello stesso ordine di grandezza. Gli assorbitori del modo di *crossbar* sono collegati in derivazione all'uscita delle *crossbar* dei filtri standard. L'assorbitore del modo di lama deve essere inserito in fase di calcolo della matrice di impedenza della lama.

Per calcolare la FTV tra due punti qualunque della catena si procede come segue:

1. Si connettono in serie (vedi (96)) le matrici d'impedenza dei singoli elementi meccanici posti tra l'ingresso e l'uscita. Allo stesso modo, si determina l'impedenza dalla parte della catena che va dall'uscita allo specchio.
2. L'impedenza tra l'ingresso e l'uscita si ottiene connettendo in derivazione (vedi (97)) l'impedenza della parte terminale all'impedenza della parte intermedia.
3. Si calcola la funzione di trasferimento applicando la (94) alla matrice ottenuta.

Tutte le misure presentate in questa tesi sono direttamente confrontate con la corrispondente simulazione teorica. Come già discusso nel par. II - 2.6, i parametri d'ingresso (Tabella 4 e Tabella 5) sono stati fissati in modo da realizzare il migliore accordo tra modello e misure, e sono tutti compatibili con i dati di progetto, tenuto conto dell'incertezza da cui essi sono affetti.

II - 3.2(A) *Misura della funzione di trasferimento verticale dei filtri standard*

Lo stadio elementare di attenuazione verticale è costituito dalla successione di un sistema lame - antimolle, una *crossbar*, un filo di sospensione ed il *vessel* del filtro ad esso sospeso. La connessione in serie dell'impedenza di questi quattro elementi, più l'impedenza della parte sottostante della catena, connessa in derivazione all'uscita del *vessel* sospeso, determina la FTV del filtro standard.

La capacità di attenuazione del sistema è dovuta al fatto che il sistema di sospensione, costituito dalle lame precurvate e dalle antimolle magnetiche, è in grado di sostenere un carico molto pesante, pur manifestando una costante elastica relativamente bassa. La frequenza di risonanza principale della sospensione è dunque molto più bassa di quella che si può ottenere con una molla tradizionale.

La massa delle lame manifesta il suo effetto in una risalita della FTV rispetto al normale andamento $1/f^2$ dell'oscillatore armonico, fino ad arrivare ad un picco in corrispondenza della sua risonanza flessionale (vedi par. II - 1.2(A)). L'elasticità del filo di sospensione del carico si manifesta nella risonanza di *crossbar* (vedi par. II - 2.2(A)).

Alle basse frequenze la FTV presenta una serie di picchi, che riguardano i modi di risonanza collettivi della catena a valle del *vessel* d'ingresso. Ai picchi sono interposti una serie di *zeri*, che invece riguardano le risonanze collettive della catena a valle del *vessel* di uscita. Al di sopra di questa banda, gli effetti derivanti dalla catena a valle dell'uscita praticamente scompaiono dalla FTV dello stadio in esame, perché le lame del filtro in basso attenuano drasticamente le reazioni in alta frequenza provenienti dallo stadio successivo, e determinano una sorta di sconnessione da quest'ultimo.

Le misure di FTV realizzate caricando un filtro standard con un peso equivalente a quello che esso deve sostenere nella catena forniscono un'idea qualitativamente corretta della capacità di attenuazione del filtro, ma sono errate per un fattore di scala. Come abbiamo visto, quando un filtro lavora in catena il suo comportamento alle alte frequenze è più simile a quello che si avrebbe se il carico di prova equivalesse al *vessel* del filtro sospeso, e la precurvatura delle lame fosse regolata per equilibrare solo il peso di questo carico. La presenza del resto della catena è praticamente ininfluente, per le ragioni precedentemente esposte. Ne consegue che le misure effettuate con carico fittizio equivalente a tutta la catena sovrastimano l'attenuazione di un fattore circa uguale al rapporto tra la massa totale e la massa dal solo *vessel* sottostante.

Le misure presentate in questa tesi sono state realizzate sulla catena completa, pertanto rappresentano la reale capacità di attenuazione dei filtri. Utilizzeremo anche alcune misure realizzate quando nella catena non era ancora stato installato lo stadio finale, e non erano ancora presenti gli assorbitori delle risonanze verticali in alta frequenza. In questo caso il filtro 4 era caricato con una massa compatta di circa 400 kg, quindi la misura sottostima la funzione di trasferimento reale di un fattore 2 circa; per gli altri filtri invece le due configurazioni sono praticamente equivalenti.

La misurazione della FTV del filtro 1 è tecnicamente più semplice e precisa rispetto agli altri filtri, grazie alla presenza, tra *vessel* e *crossbar* del filtro 0, di attuatori verticali di tipo bobina-magnete, inseriti per ragioni di controllo della dinamica in bassa frequenza. È dunque possibile pilotare l'eccitazione in ingresso utilizzando un segnale prodotto dall'analizzatore di spettro.

Per realizzare questa misura non è stato utilizzato rumore bianco come segnale d'ingresso agli attuatori, perché l'eccitazione che giunge al *vessel*, trasmessa attraverso il filo di sospensione, risulta molto amplificata alla frequenza di risonanza della sospensione stessa, e molto attenuata man mano che si sale in frequenza al di sopra della risonanza. Per ottimizzare il risultato è stata utilizzata la tecnica della *sweep*, che consiste nell'invio di un segnale sinusoidale di frequenza crescente a passo discreto costante. Questa tecnica permette di controllare ad ogni passo l'ampiezza dell'eccitazione, e di compensare quindi le differenze di vibrazione in ingresso dovute alla trasmissione meccanica.

Non potendo agganciare un accelerometro al centro del *vessel*, occupato dalla *crossbar*, sono stati utilizzati due accelerometri in posizioni diametralmente opposte. In questo modo è stato possibile rilevare sia l'accelerazione verticale che quella angolare, rispettivamente sommando e sottraendo i segnali dei due accelerometri. Sebbene gli attuatori operino in direzione verticale, l'accelerazione in ingresso ha una componente angolare non trascurabile, in particolare intorno alla frequenza del modo flessionale di lama; la separazione delle due componenti è quindi necessaria per una maggiore attendibilità della misura. In uscita invece la componente angolare è tale da non poter essere apprezzata, perché il canale verticale di trasmissione è dominante rispetto al canale angolare ed ai canali incrociati. Il segnale verticale in uscita è dunque rilevato con un solo accelerometro. Si può inoltre assumere che la presenza di un'eccitazione angolare non porti un contributo spurio al segnale verticale in uscita.

Le misure relative ai tre filtri successivi sono state effettuate con una tecnica di eccitazione diversa: non potendo avvalersi di attuatori già predisposti sulla *crossbar* del filtro a monte, questa è stata percossa in direzione verticale utilizzando un martelletto di plastica ed uno spessore di gomma. L'impulso trasferito alla *crossbar* ha spettro piatto, mentre il segnale che giunge al *vessel* è condizionato dall'elasticità del filo di sospensione, come descritto in precedenza, senza alcuna possibilità di compensazione.

Mostriamo adesso le misure delle FTV dei filtri standard, effettuate su una catena non ancora completa. Sui filtri non erano ancora installati gli assorbitori delle risonanze interne, come è evidente dalla presenza di due picchi molto pronunciati in alta frequenza. Il grafico in Figura 13 utilizza la scala logaritmica in ascissa, per apprezzare come il modello si accordi alla misura anche in bassa frequenza.

Figura 13 Funzione di trasferimento verticale del filtro 1

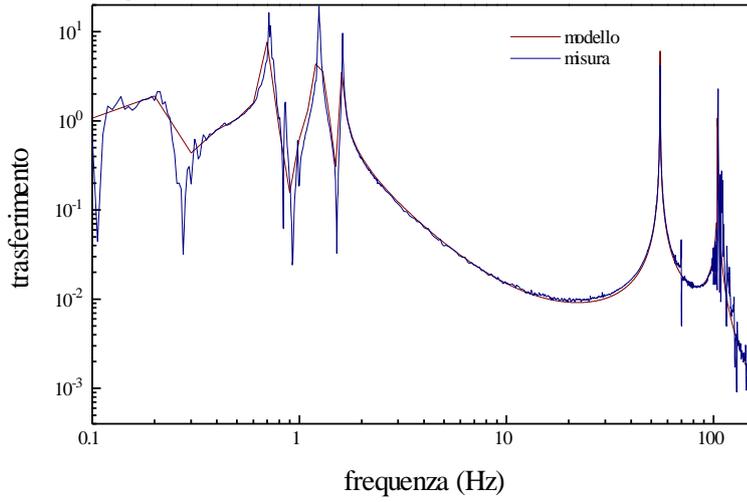


Figura 14 Funzione di trasferimento verticale del filtro 2

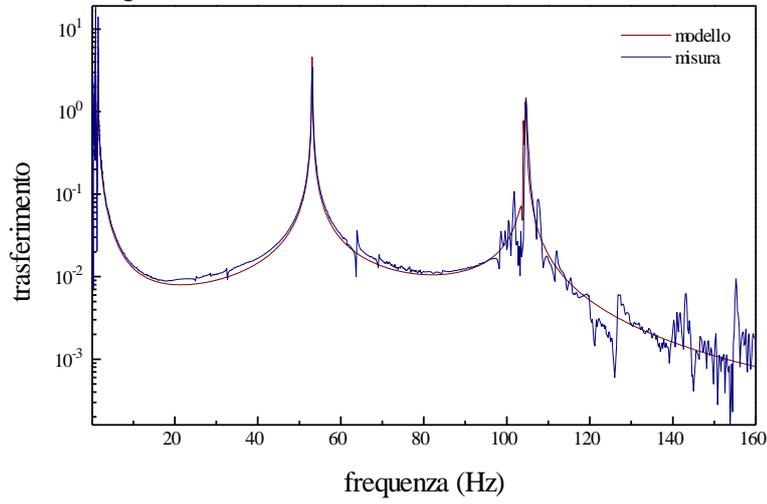
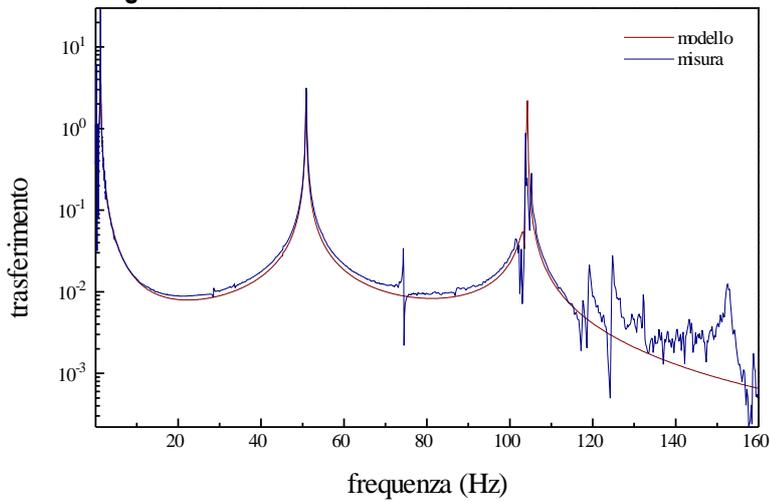
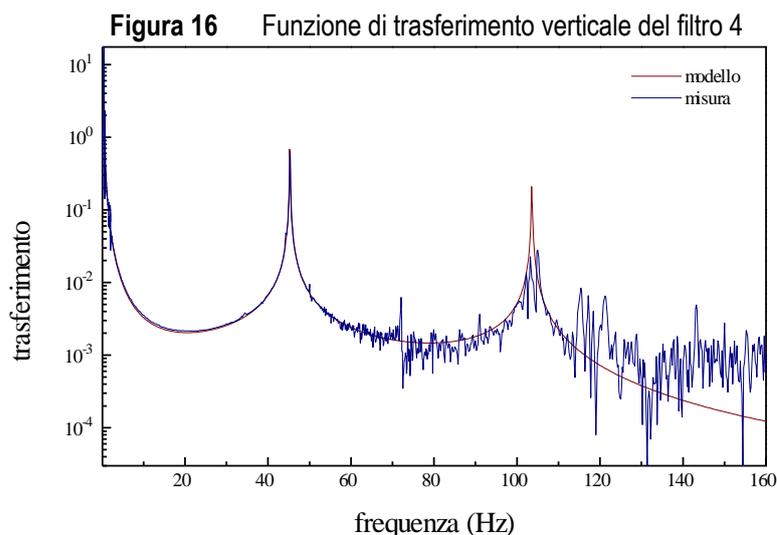


Figura 15 Funzione di trasferimento verticale del filtro 3





Il picco a circa 50 Hz è dovuto alla risonanza di *crossbar*; il picco a circa 100 Hz è dovuto alla risonanza flessionale delle lame. A circa 70 Hz si nota appena una coppia polo-zero dovuta alla risonanza flessionale della canna da pesca (non inserita nella simulazione).

La risonanza flessionale delle lame presenta, oltre ad un picco dominante, una serie di altri picchi più bassi e molto ravvicinati. Questi sono dovuti al fatto che la sospensione è costituita non da una sola lama, ma da molte lame. Oltre al modo principale, in cui le vibrazioni flessionali si combinano in maniera coerente, compaiono altri modi, nei quali alcune lame si muovono in controfase. Questi coinvolgono dunque solo il movimento angolare del filtro, e compaiono nella misura a causa dell'impossibilità di separare completamente la coordinata verticale da quella angolare.

II - 3.2(B) Smorzamento delle risonanze in alta frequenza

Il modo di *crossbar* ed il modo flessionale di lama comportano un notevole peggioramento delle prestazioni del filtro standard. Si vede infatti che il trasferimento, già dell'ordine di 10^{-2} intorno a 10 Hz, risale addirittura al di sopra dell'unità presso i due picchi di risonanza suddetti.

Avendo già ottimizzato il dimensionamento delle componenti e la scelta dei materiali al fine di spostare verso l'alto le due frequenze di risonanza, rimane solo la possibilità di agire sullo smorzamento. È stato detto in precedenza (par. II - 1.1) che l'altezza di un picco di risonanza nella funzione di trasferimento dipende direttamente dal fattore di qualità dell'oscillazione. Se si applica alla massa in moto una forza resistente in grado

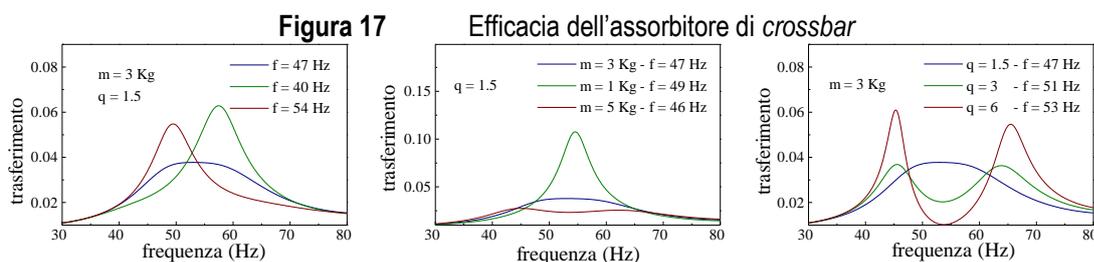
di dissipare l'energia della risonanza, il fattore di qualità diminuisce, e con esso l'altezza del picco di risonanza.

Ovviamente non è opportuno applicare forze dall'esterno, perché attraverso il contatto sarebbe reintrodotta rumore sismico, rendendo inutile l'attenuazione dei filtri a monte del punto di applicazione. Si potrebbe applicare uno smorzamento di tipo viscoso tra la *crossbar* ed il *vessel*, o tra il centro delle lame ed il *vessel*, ma questo produrrebbe anche il peggioramento delle prestazioni del filtro alle frequenze fuori risonanza. Non è poi possibile sostituire l'acciaio, di cui sono fatte le lame ed i fili di sospensione, con materiali plastici ad alto assorbimento interno, perché questi non possono avere la resistenza alla trazione necessaria a sostenere il peso della catena.

La soluzione adottata [14] consiste nell'applicare un oscillatore a bassissimo fattore di qualità, detto *damper*, nel punto in cui si manifesta maggiormente la risonanza indesiderata. Nel caso della risonanza dovuta al filo di sospensione, il *damper* è costituito da un corpo metallico appoggiato al centro della *crossbar* su tre barre di *viton*, una gomma elastica ad alta dissipazione adatta a lavorare sotto vuoto. Se il *damper* ha massa sufficiente ed è accordato alla frequenza opportuna, la risonanza si sdoppia in due modi normali accoppiati, nei quali è coinvolto l'elemento gommoso. Il fattore di qualità delle due oscillazioni risulta pertanto dell'ordine di quello del *damper*.

Il caso del *damper* di *crossbar* può essere trattato teoricamente, considerando che esso consiste in un oscillatore connesso in derivazione all'uscita della *crossbar*. L'impedenza complessiva del sistema si ottiene utilizzando la (97).

La Figura 17 mostra una simulazione della FTV del filtro 1 intorno alla frequenza di risonanza di *crossbar*, con assorbitore applicato. Il primo grafico si riferisce ad un assorbitore di massa 3 kg, fattore di qualità 1.5 e costante elastica variabile. Esso mostra come dipende l'efficacia dell'assorbitore dall'accordo della sua frequenza di oscillazione con la frequenza del modo di *crossbar*. I grafici successivi mostrano come varia l'efficacia dell'assorbitore in funzione rispettivamente della massa e del fattore di qualità, nelle condizioni di massimo accordo in frequenza.



Nei tre grafici la linea blu si riferisce ad un assorbitore di massa 3 kg, frequenza di risonanza 47 Hz e fattore di qualità 1.5. Le linee più chiare mostrano come varia l'assorbimento al variare dei tre parametri.

È interessante notare come la massa sia cruciale per l'efficacia dell'assorbimento. Se il *damper* è troppo leggero l'accoppiamento dei due modi di risonanza non si realizza, anche se l'accordo in frequenza dei due oscillatori è ottimizzato. L'assorbimento di energia nella gomma del *damper* non può pertanto influenzare il fattore di qualità del modo di *crossbar*. Si nota inoltre che il massimo accoppiamento non si realizza quando la frequenza di risonanza dell'assorbitore coincide con quella del modo da smorzare, ma ad una frequenza più bassa, dipendente dalla massa e dal fattore di qualità dell'assorbitore.

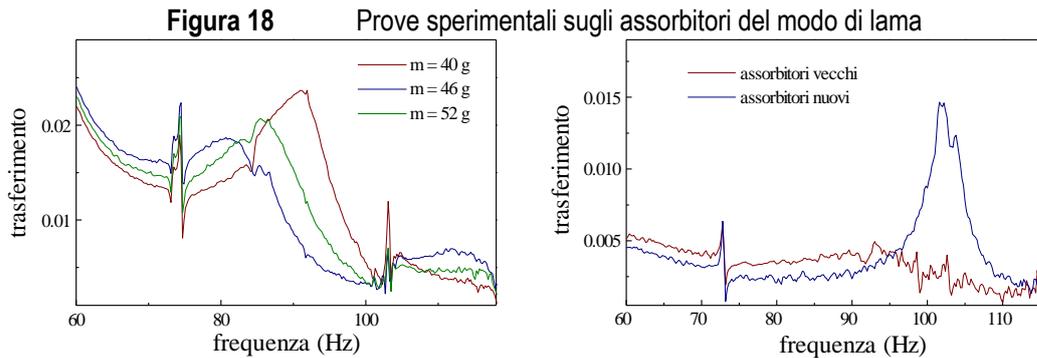
Nel caso della risonanza flessionale di lama, una piccola massa viene sospesa al centro della lama, sempre per mezzo di una barretta di *viton*. In questo sistema la connessione in derivazione avviene in un punto intermedio della lama, pertanto deve essere ricalcolata la matrice d'impedenza della lama, aggiungendo un altro grado di libertà ed un'altra equazione di moto nello schema agli elementi finiti.

Durante lo studio della funzione di trasferimento della catena di R&D incompleta è emerso che gli assorbitori del modo di lama non avevano prestazioni ottimali, tanto che il picco restava anche un fattore dieci più alto del livello di fondo, contro il fattore due del picco smorzato di *crossbar*. Considerando che le risonanze di lama dei vari filtri sono tutte alla stessa frequenza, la sovrapposizione dei picchi residui avrebbe portato un picco piuttosto alto nella funzione di trasferimento globale. Il *damper* consisteva in un cilindretto di *viton* con un dado metallico di pochi grammi applicato ad un'estremità. Il dispositivo era fissato in posizione orizzontale al centro della lama, in modo che la vibrazione del dado potesse accoppiarsi alla vibrazione della lama. Si è ritenuto che la massa di questo tipo di assorbitore fosse insufficiente, ma il suo disegno non consentiva grossi margini di variazione di questo parametro. Inoltre, non era particolarmente agevole l'accordatura della frequenza di risonanza.

È stato quindi sperimentato un nuovo modello di assorbitore. Esso consiste sempre in un cilindretto di *viton*, del quale un'estremità è fissata al centro della lama, e l'altra sorregge una massa, ma questa volta la gomma è orientata verticalmente, in configurazione di pendolo. Questa disposizione consente maggiore libertà nel dimensionamento della massa sospesa, che abbiamo visto essere un parametro molto

critico per l'efficienza dell'assorbitore. Anche la lunghezza del cilindretto può essere variata liberamente, ed in questo modo la frequenza di risonanza è accordabile con maggiore facilità.

Dei grafici in Figura 18, il primo mostra alcune prove fatte con diverse masse nella nuova configurazione, mentre il secondo mostra la differenza di efficacia tra il modello vecchio ed il modello nuovo.



Le misure che seguono mostrano la FTV dei vari filtri standard con applicati gli assorbitori delle risonanze in alta frequenza.

Nel caso del filtro 1 (Figura 19) sono mostrate in sovrapposizione le due misure effettuate con e senza gli assorbitori delle risonanze. Quando gli assorbitori sono applicati, al posto dei picchi di risonanza compaiono delle risalite appena accennate, a frequenza lievemente inferiore rispetto ai picchi originari.

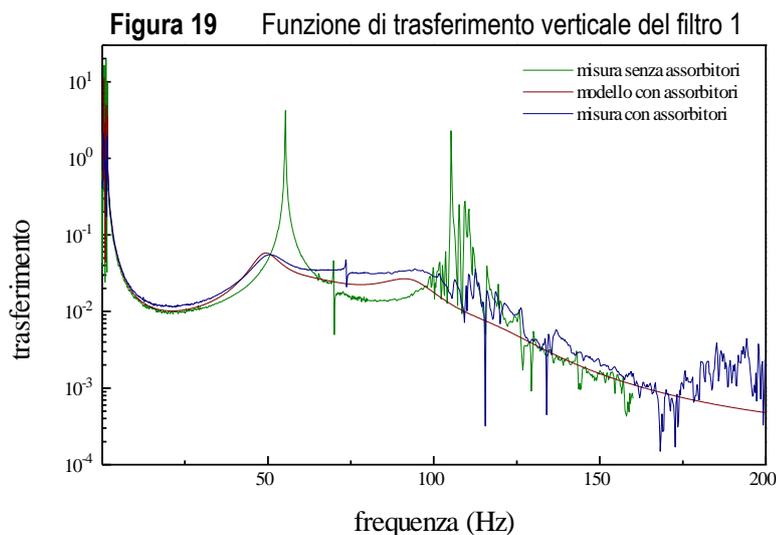


Figura 20 Funzione di trasferimento verticale del filtro 2

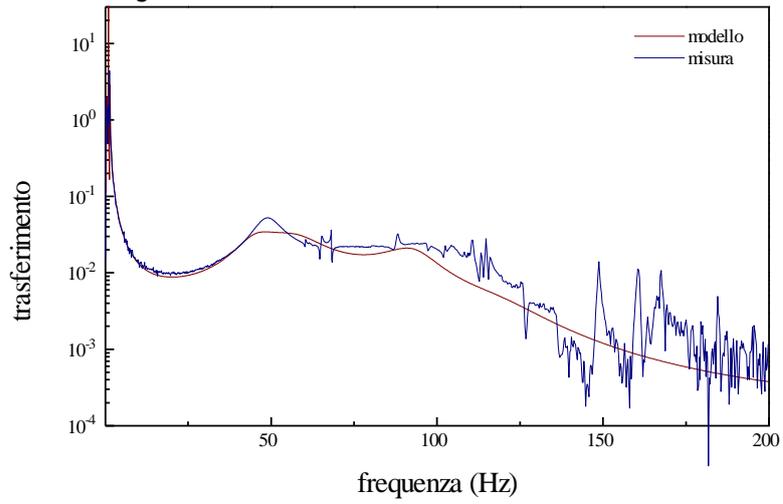


Figura 21 Funzione di trasferimento verticale del filtro 3

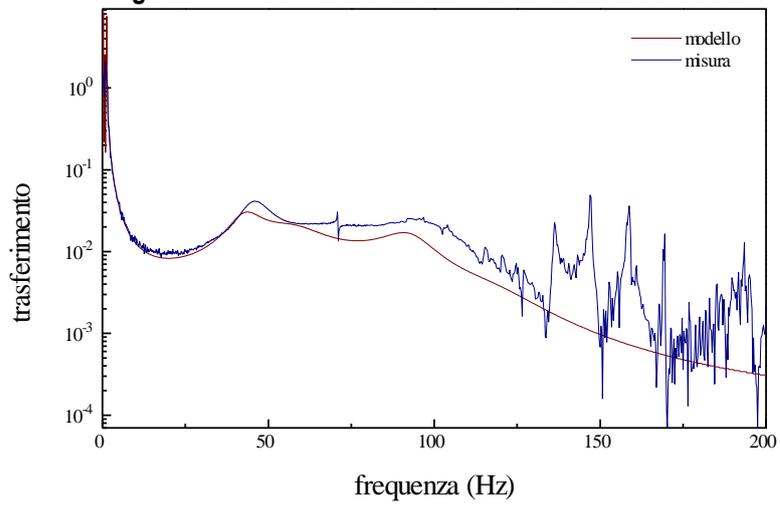
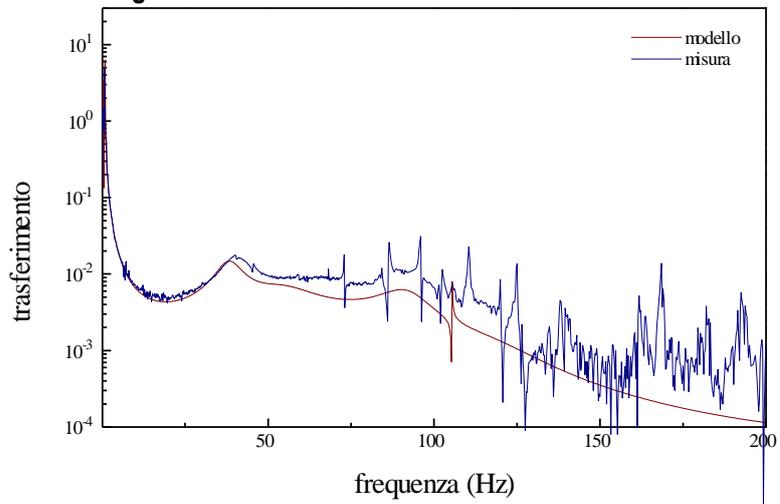


Figura 22 Funzione di trasferimento verticale del filtro 4



Per quanto riguarda gli altri filtri (Figura 20, Figura 21 e Figura 22), si nota che al di sotto di 120 Hz le misure sono leggermente più rumorose, ma comunque si possono considerare assolutamente soddisfacenti; inoltre appaiono praticamente identiche a quella relativa al filtro 1. Alle frequenze più alte si nota invece una serie di picchi molto frastagliati, praticamente assenti nel filtro 1. Premesso che l'altezza di questi picchi non è tale da inficiare le prestazioni dei filtri, resta comunque il dubbio che questi non siano effettivamente presenti nella funzione di trasferimento verticale. Essi potrebbero essere il frutto di accoppiamenti con gradi di libertà interni di tipo angolare (per esempio, legati alle lame mobili e ai relativi supporti), che non vengono eccitati se l'impulso in ingresso è puramente verticale.

II - 3.2(C) Misura della funzione di trasferimento verticale del filtro 0

La misura della FTV del filtro 0 presenta problemi particolari rispetto agli altri filtri, pertanto è opportuno trattarla a parte.

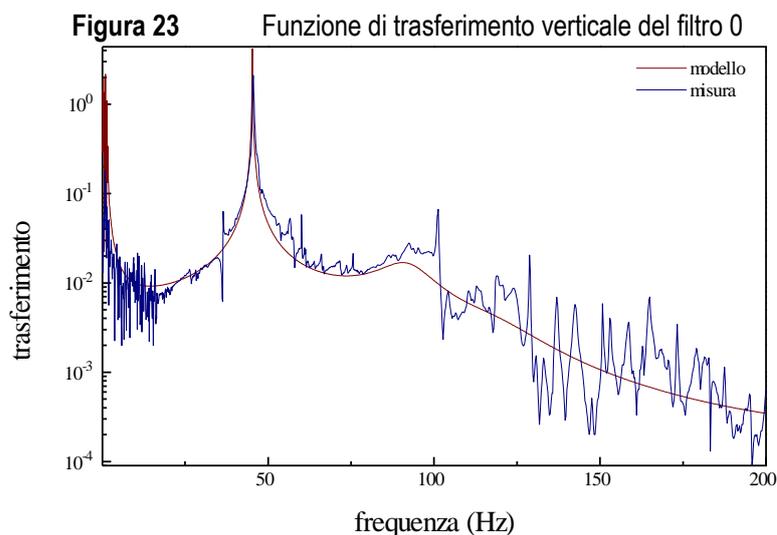
Mentre per i vari filtri standard il segnale in ingresso è trasmesso al centro del *vessel* attraverso il filo di sospensione, agendo sulla *crossbar* del filtro che lo sostiene, nel caso del filtro 0 è necessario agire direttamente sul *vessel* in posizione decentrata. La tecnica di eccitazione consiste nell'utilizzo di un martello abbastanza pesante, con il quale viene percosso il *vessel*. In questo modo si trasmette al sistema un impulso, il cui spettro è essenzialmente piatto fino ad una frequenza di taglio il cui ordine di grandezza è pari all'inverso della durata dell'impulso. Una percussione metallo contro metallo produce eccitazione considerevole anche a frequenze dell'ordine di 1 kHz, pertanto è opportuno che la percussione venga effettuata su uno spessore di gomma: questo allunga la durata dell'impulso, quindi limita la frequenza di taglio.

Con un'eccitazione di questo tipo, il segnale ingresso risulta molto contaminato dalla componente angolare. Questo problema può essere solo parzialmente risolto con l'utilizzo di due accelerometri in posizioni simmetriche rispetto all'asse centrale.

Ciò che crea i maggiori problemi è la difficoltà a trasmettere in ingresso un segnale sufficientemente intenso alle frequenze più basse. A differenza degli altri filtri, il *vessel* del filtro 0 non è sospeso da un sistema di lame, ma è vincolato rigidamente a terra tramite il pendolo invertito. Di conseguenza, esso è soggetto ad una risonanza la cui frequenza (circa 25 Hz) è piuttosto elevata, rispetto ai valori tipici delle risonanze verticali che interessano gli altri filtri (tutte inferiori a 2 Hz).

Abbiamo detto che l'accelerazione trasmessa da una forza impulsiva ad un corpo libero ha uno spettro piatto. Viceversa, se il corpo è vincolato elasticamente, la reazione del vincolo amplifica la componente dell'impulso alla frequenza di risonanza, ma tende ad annullare le componenti in bassa frequenza, perché l'andamento dell'accelerazione è, in questa zona, proporzionale al quadrato della frequenza. Con un'eccitazione di tipo impulsivo la dinamica dell'accelerometro in ingresso è dunque saturata dalle alte frequenze, prima che si riesca a produrre un'accelerazione in bassa frequenza sufficientemente elevata.

La Figura 23 mostra il risultato della misura. Anche se al di sotto di 15 Hz la misura è molto influenzata dal rumore, ci pare che ugualmente questa confermi un'assenza di anomalie nel comportamento del filtro. La misura è, come al solito, sovrapposta al risultato ottenuto applicando la simulazione.



Nel filtro 0 sono utilizzati gli assorbitori delle risonanze di lama, ma non è utilizzato quello della risonanza di *crossbar*: il picco che compare a circa 45 Hz è dovuto a quest'ultima risonanza.

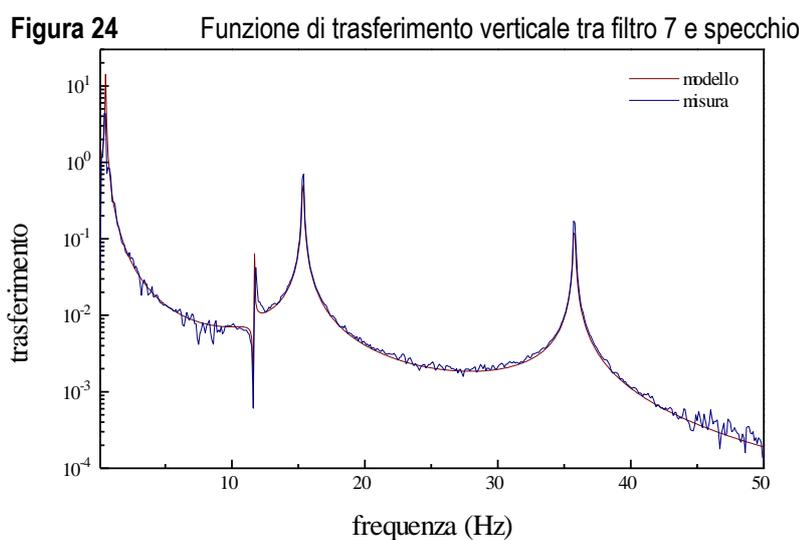
II - 3.2(D) *Misura della funzione di trasferimento verticale dello stadio finale*

L'ultimo filtro della catena, il filtro 7, sostiene un carico strutturato diversamente rispetto agli altri filtri, pertanto la sua FTV in alta frequenza presenta caratteristiche leggermente differenti. In particolare, ci riferiamo agli effetti delle risonanze dovute alla sospensione multipla a valle delle lame. Mentre per gli altri filtri il carico sostenuto dalle lame consiste essenzialmente in un sistema a due corpi (*crossbar* e *vessel* successivo) vincolati da un filo di sospensione, per il filtro 7 i corpi sono quattro:

crossbar, marionetta, massa di riferimento e specchio. Al posto della consueta risonanza di *crossbar* compaiono dunque tre risonanze in alta frequenza. Ciascuna di esse riguarda in misura dominante la coordinata relativa dei due corpi agganciati alle estremità di uno dei tre vincoli di pendolo, e solo in misura secondaria le altre coordinate.

Per il calcolo teorico della FTV tra filtro 7 e specchio si considera la connessione in serie di tre sospensioni (*crossbar*, marionetta e specchio), con la sospensione della massa di riferimento collegata in derivazione a partire dalla marionetta.

La Figura 24 mostra il confronto tra la previsione teorica ed una misura diretta.



Il picco a 36 Hz riguarda principalmente il filo di sospensione della marionetta; il picco a 15 Hz è associato ai fili di sospensione dello specchio; il picco a 12 Hz si riferisce al modo di risonanza della massa di riferimento, ed ha la forma di una coppia polo-zero perché agisce in derivazione rispetto alla linea di trasmissione in esame.

La triplice sospensione comporta uno stadio di attenuazione in più rispetto agli altri filtri, il che determina, alle frequenze più alte, un trasferimento troppo piccolo per poter essere misurato direttamente con gli accelerometri a disposizione. La misura diretta risulta valida soltanto nella banda 0-50 Hz.

Non è previsto l'utilizzo degli assorbitori per queste risonanze e per quella delle lame, perché è opportuno limitare al minimo il rumore termico vicino allo specchio.

Per poter estendere la misura alla banda 0-200 Hz è necessario separarla in due stadi: dal filtro 7 alla marionetta e dalla marionetta allo specchio. In Figura 25 e Figura 26 sono mostrati i risultati delle due misure di FTV, ed il confronto con il modello teorico.

Figura 25 Funzione di trasferimento verticale del filtro 7

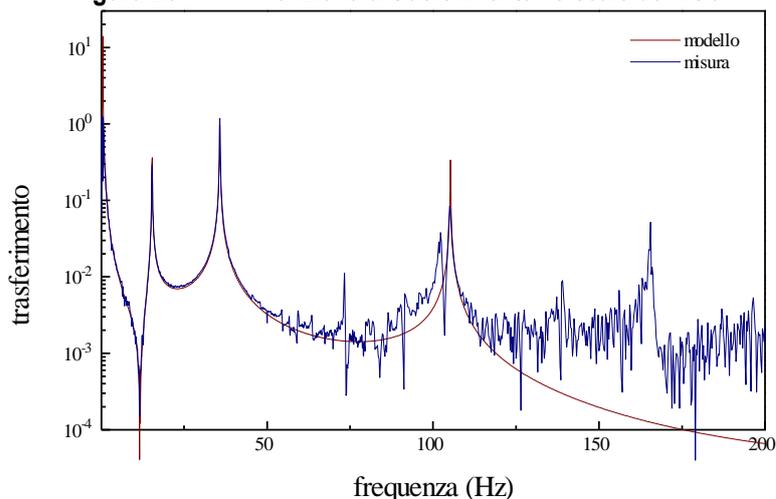
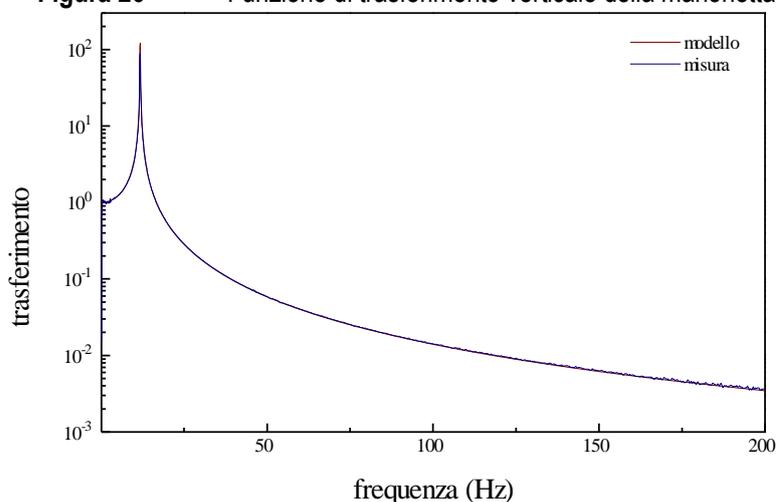


Figura 26 Funzione di trasferimento verticale della marionetta

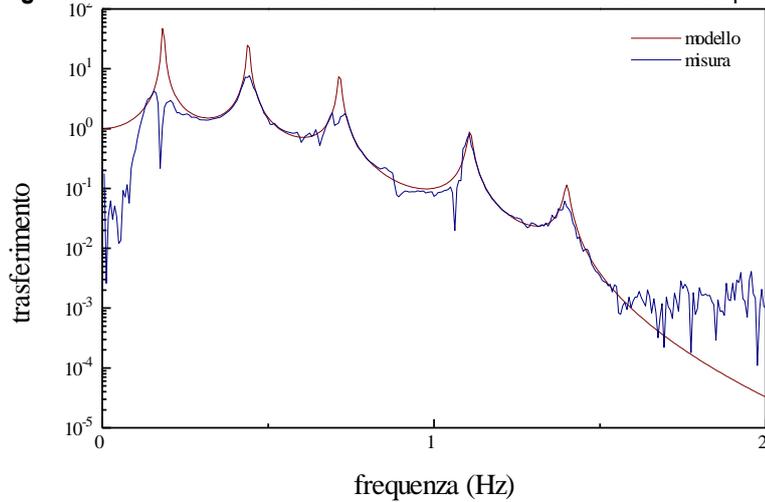


II - 3.2(E) Misura delle funzioni di trasferimento verticali in bassa frequenza

L'apparato comincia a funzionare come attenuatore al di sopra della frequenza di risonanza collettiva più alta, intorno a 1.5 Hz. Per frequenze inferiori, o di poco superiori, lo spostamento dello specchio è dello stesso ordine di grandezza dello spostamento in ingresso, pertanto la misura della FTV può essere effettuata direttamente, senza ricorrere alla tecnica delle misure parziali. Come posizione di ingresso deve essere preso il filtro 1, per il problema dell'eccitabilità in bassa frequenza della piattaforma di base e del filtro 0, già descritto precedentemente.

In questa banda i fili di sospensione possono essere considerati perfettamente rigidi, pertanto il modello teorico generale potrebbe anche essere sostituito da un modello semplificato che utilizza solo i sei vincoli elastici, costituiti dal sistema lame-antimolle, e sei corpi rigidi.

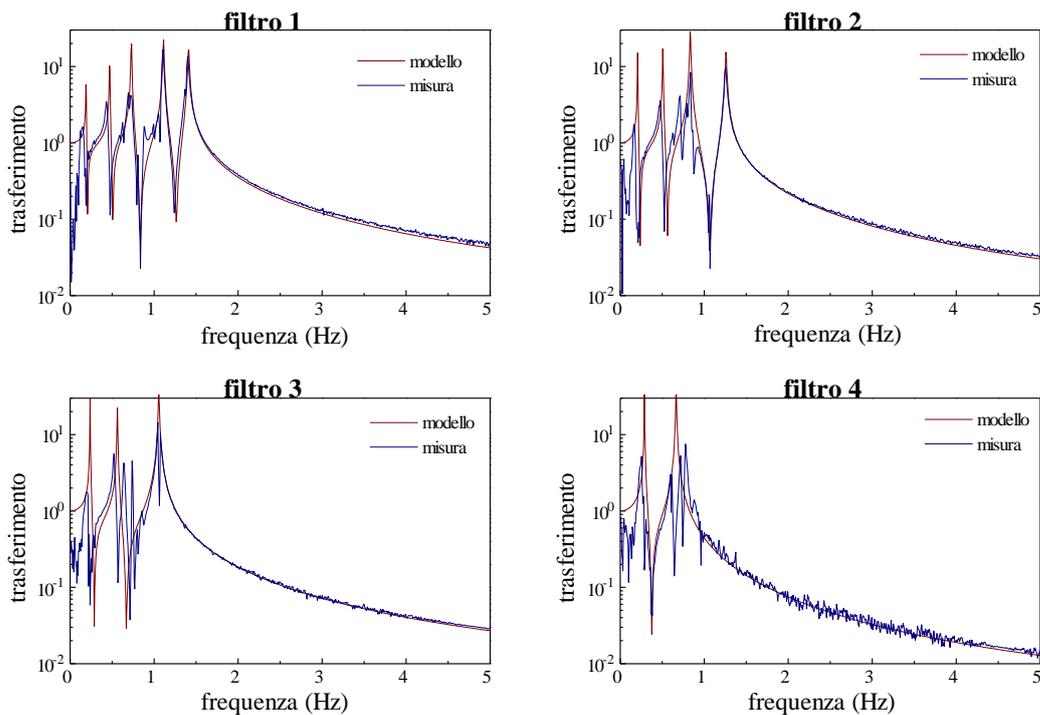
Figura 27 Funzione di trasferimento verticale dal filtro 1 allo specchio



La Figura 27 mostra il risultato della misura, confrontato con il modello teorico. Si vede che, già a frequenze appena superiori a quella della risonanza più alta, la sensibilità dell'accelerometro in uscita è insufficiente a rilevare un segnale ormai molto attenuato. Alle frequenze inferiori a 0.1 Hz la misura non è più attendibile, perché i sensori impiegati perdono le loro caratteristiche funzionali.

Completiamo la rassegna delle misure presentando le FTV in bassa frequenza dei quattro filtri standard, le quali confermano l'applicabilità del modello anche alla banda delle risonanze collettive.

Figura 28 Funzione di trasferimento verticale in bassa frequenza dei filtri standard

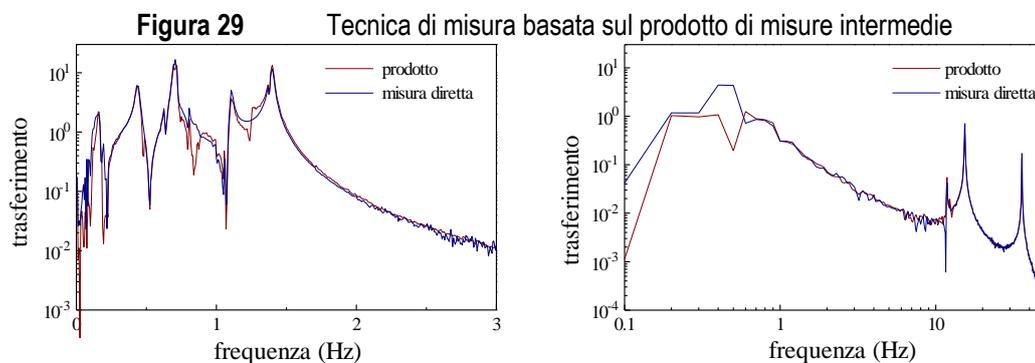


II - 3.2(F) La funzione di trasferimento verticale dell'intera catena

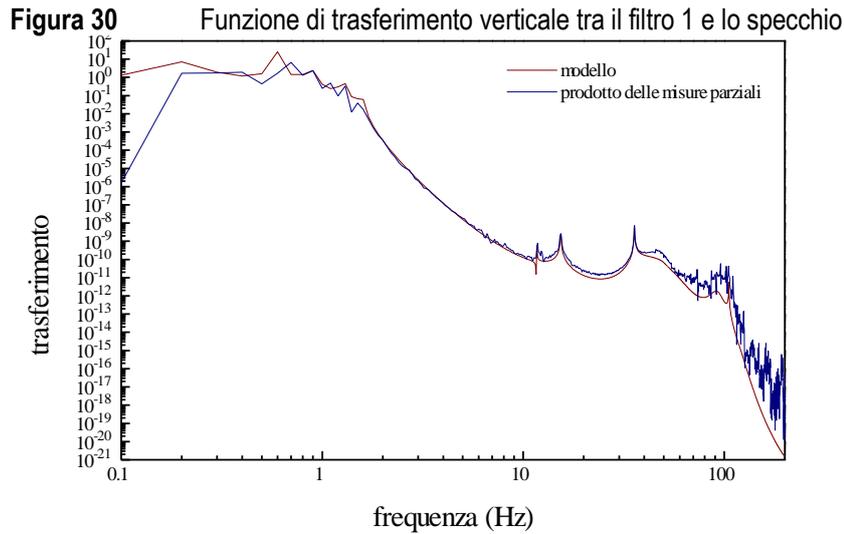
Fin qui sono state esposte le misure di FTV dei sette stadi in cui è stata decomposta la catena. Ciascuna di queste misure è stata effettuata eccitando il sistema immediatamente a monte dello stadio in esame. Non è stata realizzata alcuna misura del trasferimento dalla piattaforma di base al filtro 0, perché l'ingresso è vincolato a terra in modo molto rigido ed è possibile eccitarlo solo a frequenze molto alte.

Si può affermare in linea di principio che il prodotto delle misure effettuate equivale alla FTV della catena di sospensioni, ovvero al rapporto tra l'accelerazione verticale dello specchio e quella del *vessel* del filtro 0, quando su quest'ultimo sia applicata una forza esterna in direzione verticale. La cosa appare evidente se si pensa che ciascuna delle misure intermedie è indipendente da tutto ciò che è posto a monte dello stadio in esame, in quanto si tratta di un collegamento in derivazione all'ingresso del sistema (si veda l'osservazione a pag. 106, par. II - 3.1(B)). Si otterrebbero quindi gli stessi risultati se tutte le misure fossero realizzate contemporaneamente, trasmettendo l'eccitazione esterna al *vessel* del filtro 0 (e potendo disporre di trasduttori sufficientemente sensibili). In queste condizioni di misura, il rapporto tra il segnale in uscita e quello in ingresso si può evidentemente ottenere moltiplicando tra loro le FTV dei vari stadi. Infatti, tutti i segnali intermedi figurano una volta come uscita (al numeratore) ed una volta come ingresso (al denominatore) in due stadi consecutivi, dunque si semplificano nel prodotto.

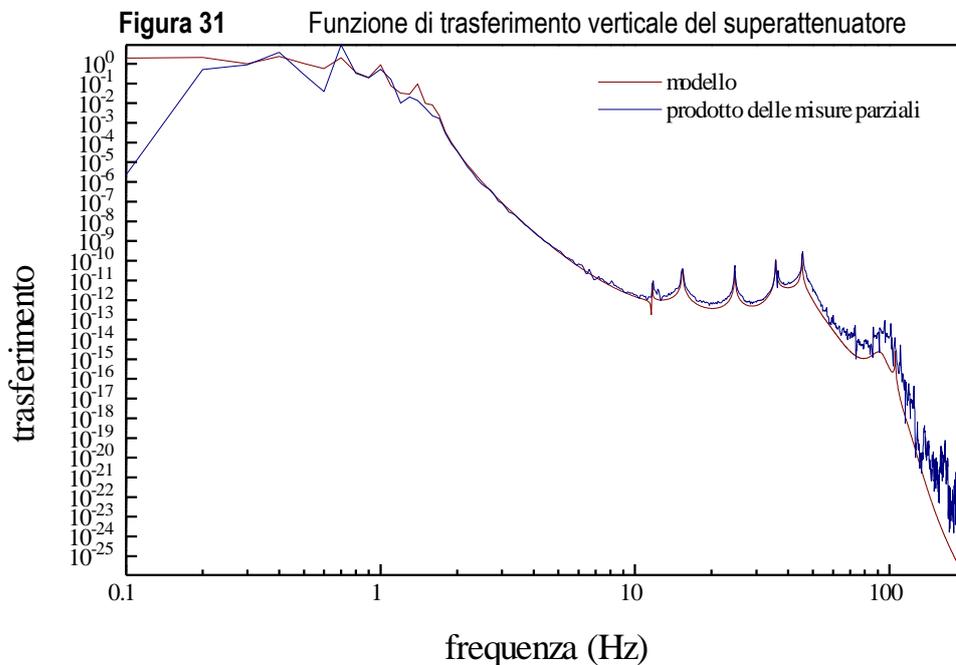
I risultati sperimentali mostrati in Figura 29 sono prove a sostegno della possibilità di realizzare la misura attraverso il prodotto di misure intermedie. Il primo grafico mostra il confronto tra una misura diretta della FTV tra il filtro 1 e il filtro 3 e la stessa FTV misurata in due stadi, ed ottenuta come prodotto dei risultati. Il secondo grafico mostra un confronto analogo per quanto riguarda la FTV tra il filtro 7 e lo specchio.



La Figura 30 mostra la misura della FTV tra il filtro 1 e lo specchio, ottenuta come prodotto tra le misure relative ai singoli stadi.



La FTV complessiva del superattenuatore, mostrata in Figura 31, comprende anche lo stadio di attenuazione dal suolo al filtro 1. Relativamente a questo stadio, la misura a nostra disposizione è incompleta, sia perché riguarda solo la trasmissione a partire dal *vessel* del filtro 0, sia perché è troppo rumorosa al di sotto di 15 Hz, per i problemi esposti nel par. II - 3.2(C). È stato pertanto necessario integrare questi dati sperimentali mancanti o inattendibili con i risultati del modello teorico, che sono comunque stati convalidati dai numerosi confronti precedentemente esposti.



II - 3.3 LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO ORIZZONTALE

L'isolamento dello specchio dal sisma orizzontale è ottenuto attraverso la connessione in cascata di sei stadi di pendolo molto simili tra loro, più uno stadio iniziale ed uno stadio finale con caratteristiche meccaniche abbastanza differenti.

Come nel caso del trasferimento verticale, il singolo stadio di attenuazione è costituito dalla catena di elementi meccanici che vanno dal *vessel* di un filtro al *vessel* del filtro successivo. Questa volta, però, l'attenuazione si realizza a valle del filtro d'ingresso, grazie al filo di sospensione dello stadio successivo. Per identificare gli stadi di attenuazione adotteremo comunque la stessa terminologia del capitolo precedente: lo stadio che termina con il *vessel* del filtro $n + 1$ sarà detto *filtro n*.

Quando si parla di *funzione di trasferimento orizzontale* (FTO), si deve in realtà intendere la trasmissione su due gradi di libertà: la traslazione orizzontale e la rotazione intorno all'asse orizzontale ortogonale a quello di traslazione. Agli elementi che compongono la catena devono essere dunque associate matrici d'impedenza di sistemi bidimensionali, delle quali si è parlato nel par. II - 3.1(E). La FTO è calcolata con procedimento simile a quello descritto all'inizio del capitolo II - 3.2, nel caso verticale.

Le simulazioni che mostreremo nel seguito si spingono fino alla frequenza di 80 Hz. Non siamo andati oltre perché, come detto, le impedenze adottate per i fili di sospensione non sono valide nella banda delle risonanze di violino.

II - 3.3(A) Misura della funzione di trasferimento orizzontale dei filtri standard

Sono state realizzate misure della FTO per i vari stadi del sistema, limitatamente alla componente $x-x$, rilevando i segnali di accelerazione in ingresso ed in uscita con due accelerometri applicati ai due *vessel*, in direzione orizzontale ed in posizione baricentrica. Con altri due accelerometri, applicati al *vessel* d'ingresso in direzione verticale ed in posizioni diametralmente opposte rispetto all'asse di simmetria del sistema, è stata tenuta sotto controllo la componente angolare dell'eccitazione applicata all'ingresso. Per la correttezza della misura è infatti necessario che questa componente rimanga sufficientemente bassa; in modo da non introdurre un segnale orizzontale spurio in uscita attraverso il canale di trasmissione 'angolare-orizzontale'.

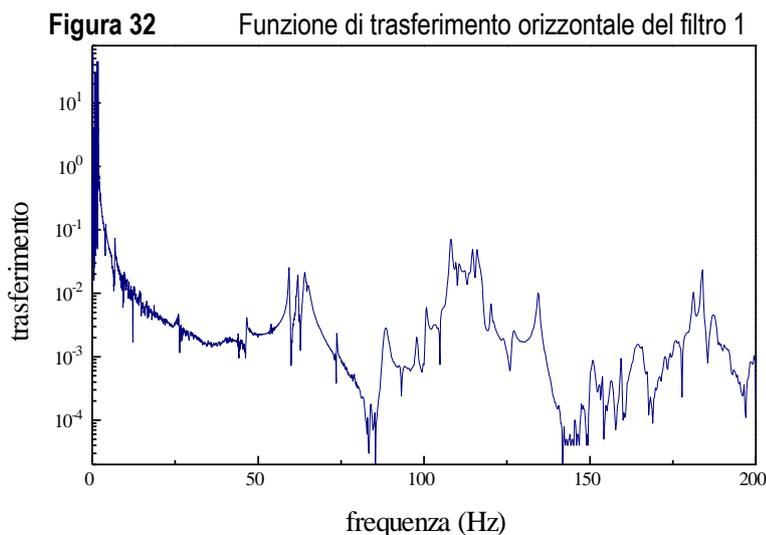
Sono state sperimentate varie tecniche di attuazione:

1. Percussione del *vessel* in ingresso con martelletto, in direzione orizzontale sul piano del baricentro;

2. attuatore piezoelettrico agganciato alla struttura di sicurezza ed applicato al *vessel* in ingresso, in direzione orizzontale sul piano del baricentro;
3. attuatore piezoelettrico agganciato alla struttura di sicurezza ed applicato in direzione orizzontale al filo di sospensione del filtro in ingresso, in una posizione prossima al punto in cui esso emerge dalla *crossbar* dello stesso filtro.

Il terzo dei meccanismi di attuazione descritti è risultato il migliore, perché permette di trasferire un segnale di buona entità all'ingresso, senza innescare un'eccitazione angolare eccessiva. Inoltre, come già sottolineato nel par. II - 3.2(A), con un attuatore controllabile elettronicamente è possibile compensare le disomogeneità spettrali di trasmissione meccanica in ingresso, regolando opportunamente l'ampiezza del segnale elettrico di eccitazione alle varie frequenze, con la tecnica della *sweep*.

In Figura 32 è rappresentata una misura della componente $x-x$ della FTO del filtro 1, effettuata su una catena completa.

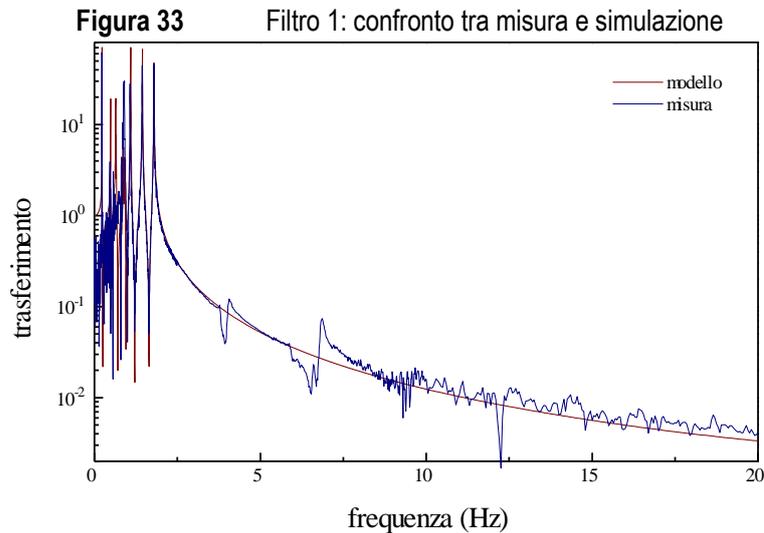


Sono presenti diverse strutture, la cui origine non è facilmente individuabile se non attraverso la loro eccitazione diretta. Pizzicando il filo di sospensione come una corda di violino, è stato possibile riconoscere la presenza di tre risonanze, alle frequenze di circa 60 Hz, 130 Hz e 180 Hz. Queste dovrebbero corrispondere ai primi tre modi normali di vibrazione del filo. Le risonanze della *crossbar* invece non sono facili da eccitare selettivamente, pertanto non possono essere individuate con certezza nella funzione di trasferimento.

La struttura che compare tra 100 e 120 Hz potrebbe essere dovuta in qualche modo alle lame, od ai supporti delle lame mobili. In tal caso, non dovrebbe appartenere alla

componente puramente orizzontale della matrice di trasferimento, ma probabilmente coinvolge altri gradi di libertà. A questa frequenza, infatti, è più difficile tenere basse la componente verticale e la componente angolare del segnale in ingresso.

Mostriamo adesso il confronto tra la misura ed il modello teorico, limitatamente alla banda 0-20 Hz, dove l'effetto dei modi di violino ancora non si manifesta.



I grafici che seguono mostrano le misure della FTO dei quattro filtri standard, del filtro 0 e del filtro 7, tra 0 e 200 Hz. È stata utilizzata la scala logaritmica anche sull'asse delle ascisse, per evidenziare l'accordo tra la misura ed il modello alle basse frequenze. I grafici mostrano anche il confronto con il modello teorico, limitatamente alla banda 0-80 Hz, per le ragioni espresse nel par. II - 3.3.

Si vede che l'accordo alle basse frequenze è ottimo nella banda tra 1 e 2 Hz, in cui si trovano le risonanze puramente orizzontali, mentre difetta nella banda al di sotto di 1 Hz, dove le risonanze orizzontali si accoppiano con quelle angolari.

Nella banda di attenuazione l'accordo tra misure e simulazioni è molto buono per quanto riguarda l'andamento generale. I modi normali dovuti alle *crossbar*, le cui frequenze di risonanza sono state mostrate nel par. II - 2.6(B), non trovano invece un riscontro sperimentale esatto. A questo proposito, si deve ricordare che nel caso reale dovrebbe esistere una notevole interferenza tra questi modi ed i modi di violino dei fili di sospensione, che invece sono stati tralasciati nella simulazione. L'argomento trattato nel prossimo paragrafo fornirà maggiori dettagli circa l'attendibilità del modello per quanto riguarda l'effetto delle *crossbar*.

Figura 34 Funzione di trasferimento orizzontale del filtro 0

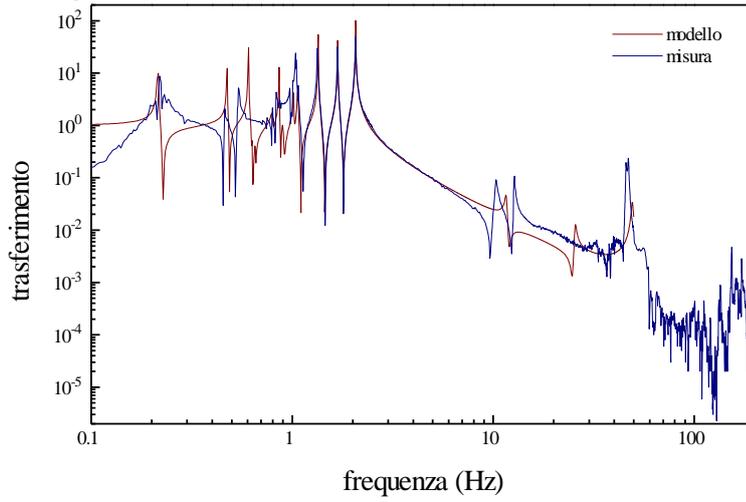


Figura 35 Funzione di trasferimento orizzontale del filtro 1

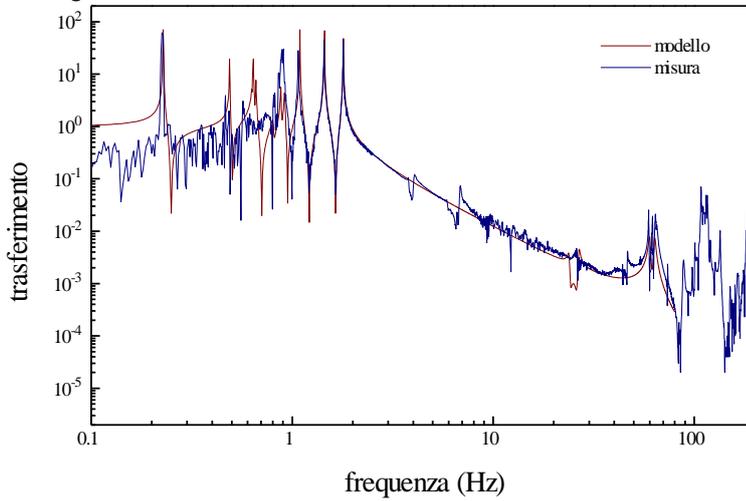


Figura 36 Funzione di trasferimento orizzontale del filtro 2

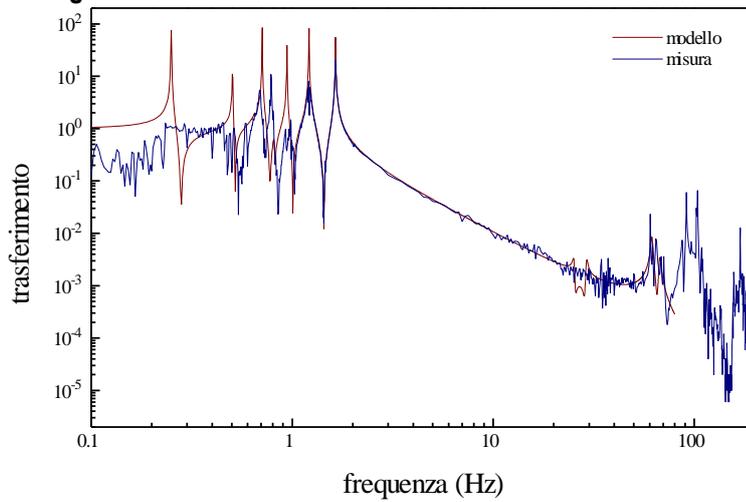


Figura 37 Funzione di trasferimento orizzontale del filtro 3

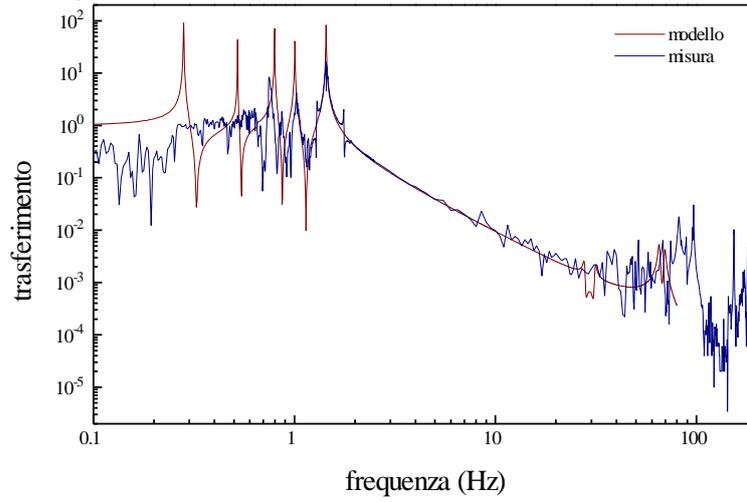


Figura 38 Funzione di trasferimento orizzontale del filtro 4

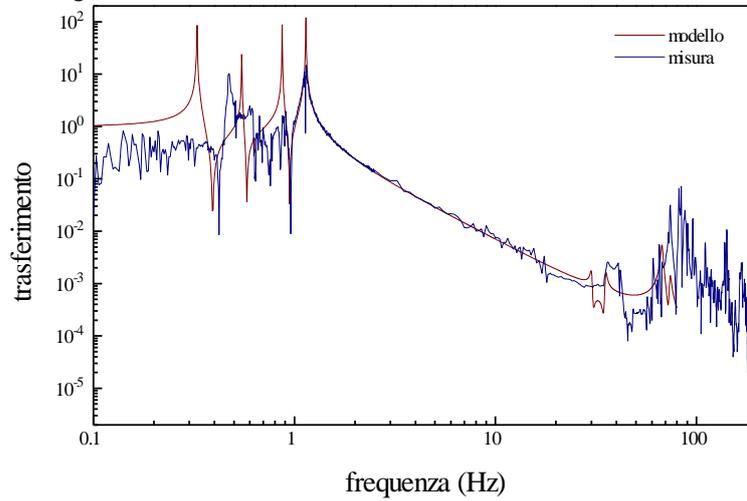
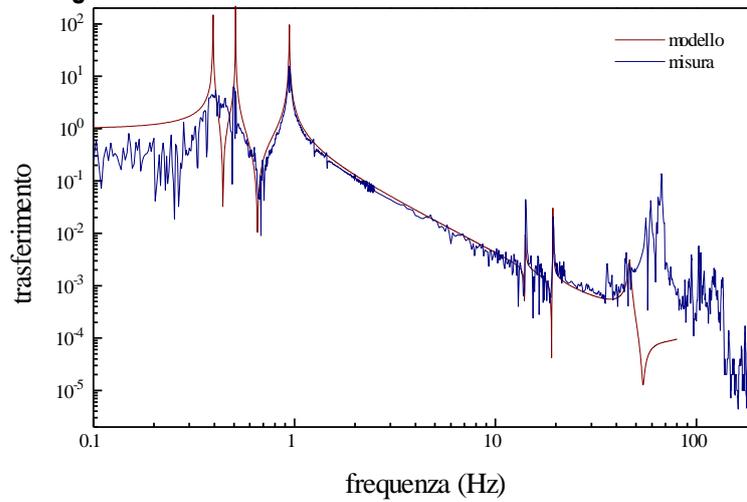


Figura 39 Funzione di trasferimento orizzontale del filtro 7



II - 3.3(B) *L'effetto della crossbar sul trasferimento orizzontale*

A proposito dell'accordo tra modello teorico e risultati sperimentali relativamente all'effetto delle crossbar sul trasferimento orizzontale, va detto che, nell'impostazione del modello teorico, oltre ad aver trascurato le risonanze dei fili di sospensione, non è stato tenuto conto della reale orientazione delle *crossbar* rispetto alla direzione di misura della FTO; è stato invece arbitrariamente supposto che tutte fossero allineate lungo la direzione di misura.²⁶ È inoltre opportuno tenere presente che alcuni valori inseriti nel modello relativamente alle dimensioni delle *crossbar* e dei loro vincoli sono estremamente incerti, e non è stato possibile sottoporli ad un adattamento basato sull'accordo tra modello e misure. Va infine ricordato che il trasferimento dovuto alla *crossbar* è particolarmente sensibile all'eccitazione angolare in ingresso, che non può essere tenuta perfettamente sotto controllo in misure come quelle descritte in questa tesi.

Per verificare meglio il comportamento della *crossbar* nella trasmissione delle vibrazioni orizzontali, e acquisire informazioni circa il coinvolgimento della coordinata angolare, è stata realizzata una misura della matrice di trasferimento tra il *vessel* e la *crossbar* del filtro 0, sui gradi di libertà orizzontale e angolare.

È stato scelto il filtro 0 perché, grazie alle grandi dimensioni della *crossbar*, le frequenze di risonanza sono abbastanza basse, e restano ben disaccoppiate dai modi di violino del filo sottostante e dai modi flessionali delle lame. La massa considerevole della barra trasversale, anche dovuta alla presenza degli accelerometri utilizzati per il controllo, determina una collocazione del baricentro della *crossbar* in una posizione elevata rispetto al punto di applicazione delle forze vincolari, con conseguente esaltazione dell'accoppiamento orizzontale-angolare.

Per rilevare le vibrazioni angolari tramite accelerometri assiali, è necessaria la misura contemporanea della vibrazione verticale in due punti diametralmente opposti rispetto all'asse di rotazione. L'accelerazione angolare si ottiene dalla differenza dei due segnali, divisa per la distanza dei punti di misura.

Le componenti $x-x$ e $x-\theta$ sono state misurate contemporaneamente, disponendo un accelerometro in ingresso, in direzione orizzontale, e tre in uscita, uno per il segnale

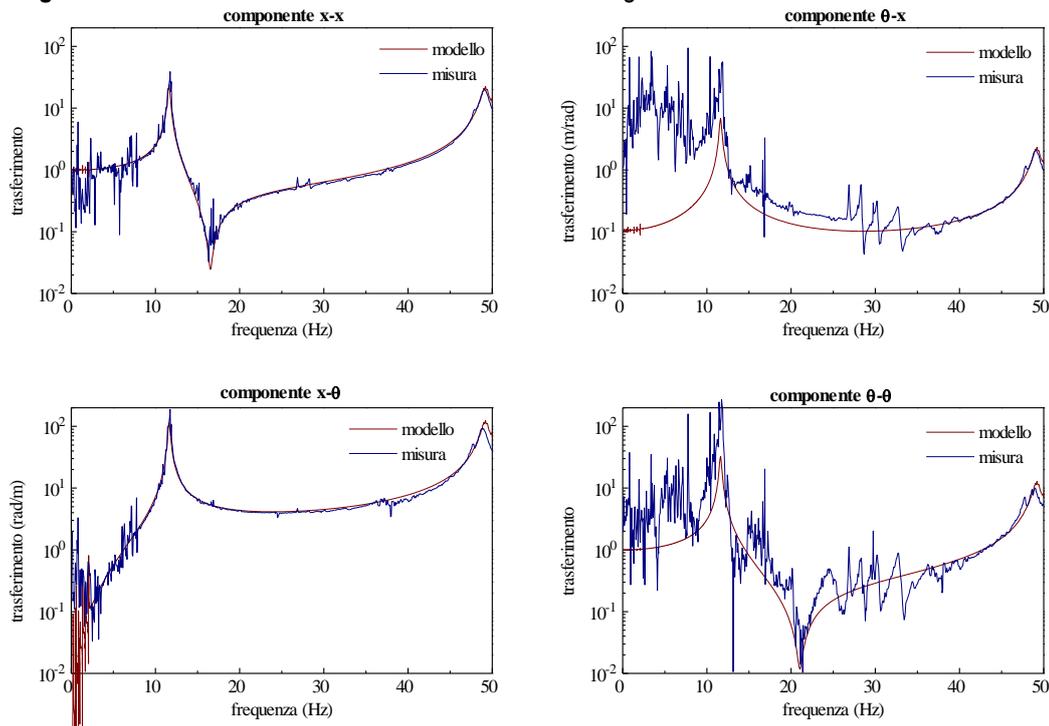
²⁶ In questo modo è stata presa in considerazione la coppia di risonanze con frequenza più bassa, perché la rotazione coinvolta nel movimento avviene intorno all'asse principale relativo al momento di inerzia più alto.

orizzontale e due per il segnale angolare. È stata applicata al *vessel* del filtro 0 un'eccitazione in direzione orizzontale, utilizzando un martello.

Per le componenti $\theta-x$ e $\theta-\theta$ è stata necessaria l'esecuzione della misura in due tempi, dovendo utilizzare due accelerometri in ingresso e tre in uscita, e potendo acquisire contemporaneamente solo su quattro canali. L'eccitazione è stata applicata martellando il *vessel* in direzione verticale, in un punto molto distante dall'asse di simmetria.

I grafici che seguono mostrano i risultati delle misure ed il confronto con il modello.

Figura 40 matrice di trasferimento 'orizzontale-angolare' dal *vessel* alla *crossbar* del filtro 0



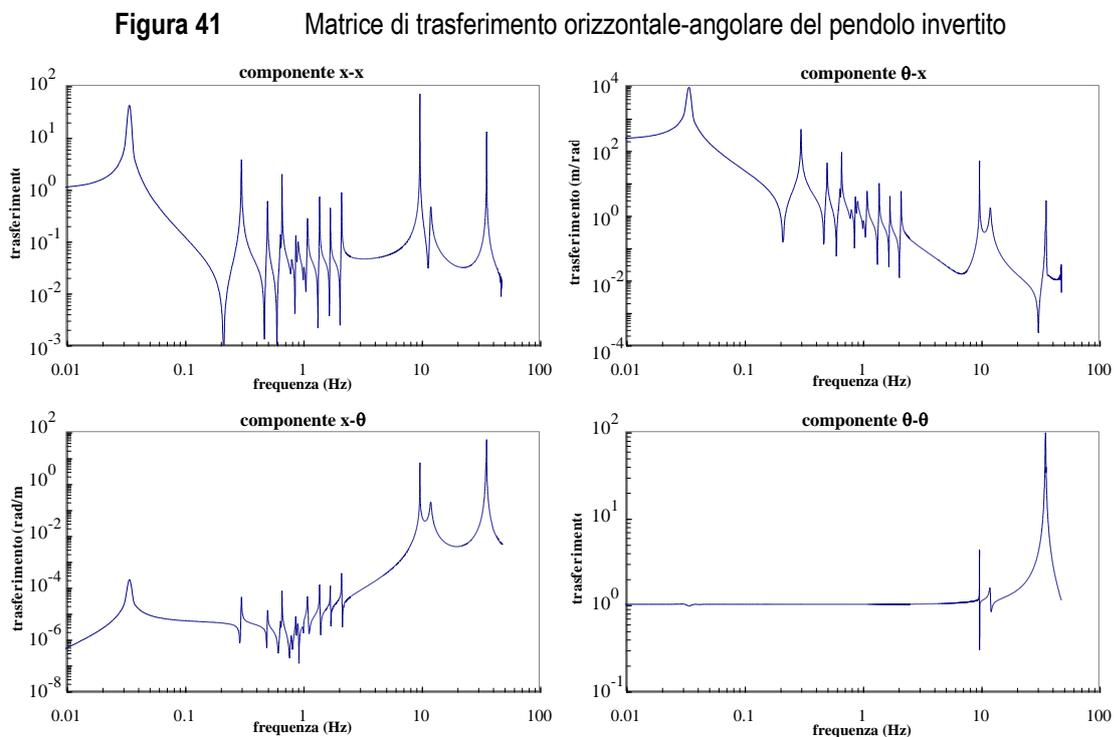
L'accordo è molto buono quasi ovunque, e conferma che il modello utilizzato per i vincoli di *crossbar* è sufficiente a descriverne gli effetti, almeno nella banda in cui si ritiene più interessante studiare il trasferimento orizzontale.

L'unica discrepanza tra modello e misure si osserva alle frequenze inferiori a 10 Hz, sulle componenti che riguardano la coordinata angolare in ingresso. A questo proposito, va detto che la tecnica di trasmissione dell'impulso angolare in ingresso porta inevitabilmente ad un'eccitazione molto consistente della coordinata verticale. È quindi probabile che la vibrazione in eccesso, che interessa la coordinata angolare in uscita, provenga dall'accoppiamento con la vibrazione verticale in ingresso. Il fenomeno è particolarmente rilevante alle basse frequenze, dove l'eccitazione angolare dell'ingresso è più difficoltosa, per la rigidità del vincolo che sostiene il *vessel* del filtro 0.

II - 3.3(C) *Il pendolo invertito*

Abbiamo appena osservato che il pendolo invertito è un vincolo molto rigido rispetto ai gradi di libertà angolari. Questo succede perché esso non aggancia il filtro 0 in un punto centrale, come accade per i fili di sospensione dei filtri standard, ma in tre punti periferici. È stato osservato sperimentalmente che il modo di rotazione del filtro 0 intorno agli assi orizzontali ha una frequenza di risonanza pari a circa 35 Hz. Ne consegue che, prima di quella frequenza, il sisma angolare è trasmesso integralmente dal pendolo invertito, ed è amplificato in corrispondenza della risonanza. È inoltre presumibile che i canali di trasmissione incrociata possano avere una certa rilevanza.

Per studiare il meccanismo di trasmissione delle vibrazioni sismiche attraverso lo stadio di pre-attenuazione, è necessaria un'analisi dettagliata della matrice di trasferimento (Figura 41). A questo riguardo non sono disponibili misure nella configurazione definitiva, con tutta la catena completamente installata, pertanto sarà utilizzata esclusivamente la simulazione. Il lavoro sperimentale condotto prima del montaggio finale [15] ha peraltro confermato le attese riguardo alle prestazioni del pendolo invertito come attenuatore passivo.



La componente $x-x$ mostra un fattore di attenuazione superiore a 10 prima ancora di arrivare alle frequenze di risonanza della catena di pendoli. Aumentando la frequenza, l'attenuazione non migliora molto, per l'effetto negativo prodotto dalla notevole massa

delle colonne. Questo effetto culmina nel picco di risonanza intorno a 10 Hz, ben visibile in tutte le componenti della matrice di trasferimento. A frequenze superiori compaiono i picchi legati alle risonanze angolari del filtro 0.

Non è possibile un confronto diretto tra gli elementi diagonali e gli elementi non diagonali della matrice di trasferimento, perché si tratta di grandezze non omogenee tra loro. Si possono comunque confrontare le vibrazioni trasmesse al filtro 0 attraverso canali differenti, purché si disponga di una stima del rapporto tra l'ampiezza del sisma orizzontale e l'ampiezza del sisma angolare al suolo.

È ipotizzabile una correlazione tra la componente verticale e quella angolare del sisma: un'onda sismica superficiale monocromatica polarizzata verticalmente genera increspature di profilo sinusoidale, e determina in ogni punto un'oscillazione della direzione ortogonale alla superficie. L'angolo formato dalla verticale locale con la verticale media si ottiene semplicemente derivando il profilo dell'onda sismica rispetto alla coordinata longitudinale.

Si può ottenere un paragone indiretto tra la densità spettrale lineare del sisma orizzontale e la densità spettrale lineare del sisma angolare, partendo dall'osservazione sperimentale in base alla quale il sisma verticale ed il sisma orizzontale hanno approssimativamente la stessa ampiezza. Se adottiamo quest'ipotesi, si ricava la seguente relazione:

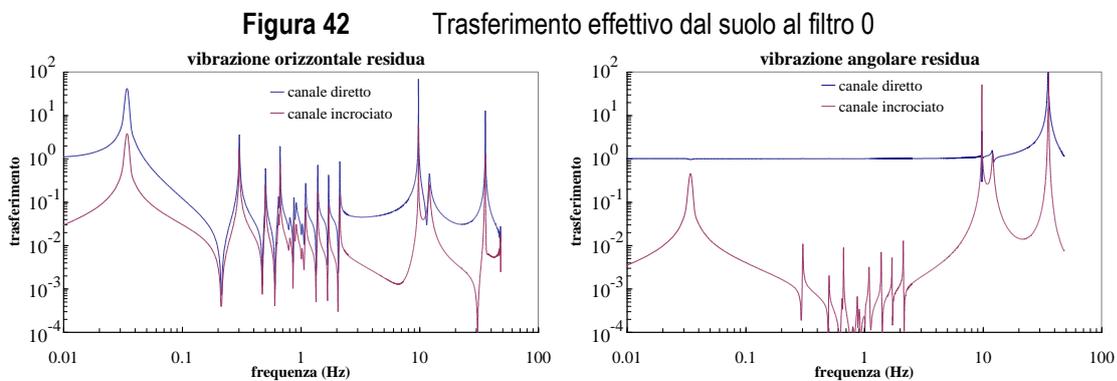
$$\frac{\tilde{\theta}_g(f)}{\tilde{x}_g(f)} = \frac{2\pi f}{v} \quad (117)$$

dove v è la velocità di propagazione delle onde sismiche superficiali. Misure di sisma angolare effettuate presso i laboratori dell'I.N.F.N. hanno confermato questa relazione, ed hanno permesso di stimare la velocità locale delle onde sismiche: $v \approx 500 \text{ m/s}$.

A partire dalle componenti $x-x$ e $\theta-x$ della matrice di trasferimento, si può ricavare l'ampiezza delle vibrazioni orizzontali del filtro 0, rispettivamente provenienti dal sisma orizzontale e dal sisma angolare al suolo. Se entrambe le componenti sono divise per il sisma orizzontale in ingresso, si ottengono due funzioni adimensionali ed indipendenti dalla vibrazione del suolo, grazie alla (117). Essi possono essere definite i 'canali di trasferimento effettivo' dal suolo al filtro 0. Il 'canale diretto' è uguale alla componente $x-x$ della matrice di trasferimento, mentre il 'canale incrociato' si ottiene moltiplicando la componente $\theta-x$ della matrice di trasferimento il fattore espresso nella (117).

Per ottenere il trasferimento effettivo della vibrazione angolare al filtro 0 si può applicare una procedura analoga alle componenti $x-\theta$ e $\theta-\theta$: il canale diretto è uguale alla componente $\theta-\theta$, mentre il canale incrociato si ottiene dividendo la componente $x-\theta$ per il fattore sopra menzionato.

La Figura 42 evidenzia che entrambi i canali diretti sono privilegiati, ovvero che le componenti della vibrazione residua sul filtro 0 sono correlate principalmente alle rispettive componenti del sisma al suolo. Può fare eccezione unicamente la trasmissione presso i picchi di risonanza delle colonne: in questo caso la vibrazione angolare del filtro 0 potrebbe essere generata dal sisma orizzontale, a patto che i fattori di qualità delle risonanze siano abbastanza elevati.



II - 3.3(D) *La trasmissione delle vibrazioni orizzontali e angolari lungo la catena*

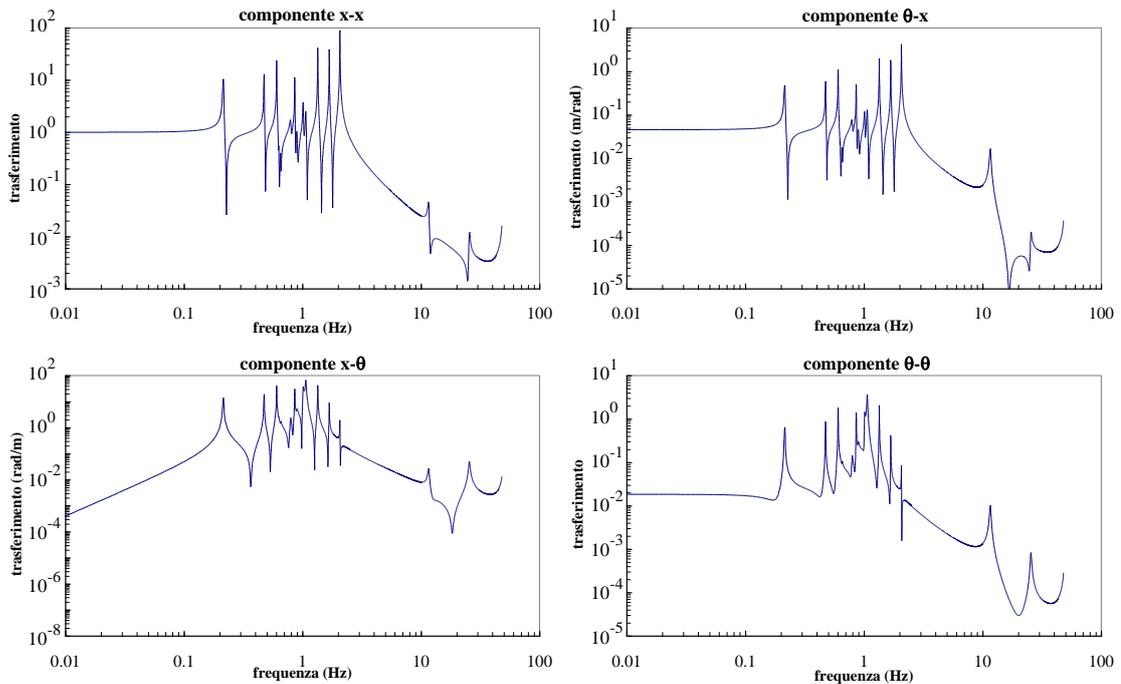
Resta ancora da capire se il sisma angolare residuo sul filtro 0 possa produrre effetti sullo specchio, per esempio convertendosi in movimento orizzontale nel passaggio al filtro 1, oppure seguendo altri canali di trasmissione lungo la catena.

Non siamo in grado di produrre prove sperimentali dirette in merito alla questione, in quanto non è stato possibile eseguire misure di funzione di trasferimento dei filtri che coinvolgessero entrambi i gradi di libertà in gioco. Per far questo sarebbe necessario disporre di un metodo di eccitazione selettiva delle vibrazioni angolari, o di accelerometri sensibili solo a queste vibrazioni. La tecnica che prevede l'utilizzo di due accelerometri verticali diametralmente opposti risulta infatti estremamente imprecisa in presenza di una vibrazione verticale dominante, che generalmente si ottiene eccitando il sistema con il meccanismo di attuazione già descritto.

Le numerose conferme ottenute circa la validità della simulazione adottata ci permettono comunque di produrre risultati che, pur non essendo sperimentalmente provati, godono di sufficiente attendibilità.

La Figura 43 mostra la matrice di trasferimento teorica del filtro 0, limitatamente alla banda in cui non sono eccitati i modi interni dei vincoli (fili di sospensione e lame). I filtri standard hanno un comportamento del tutto analogo, ma con risonanze di *crossbar* meno accentuate ed a frequenza più alta; essi sono quindi meno critici riguardo alla trasmissione della vibrazione angolare.

Figura 43 matrice di trasferimento 'orizzontale-angolare' del filtro 0



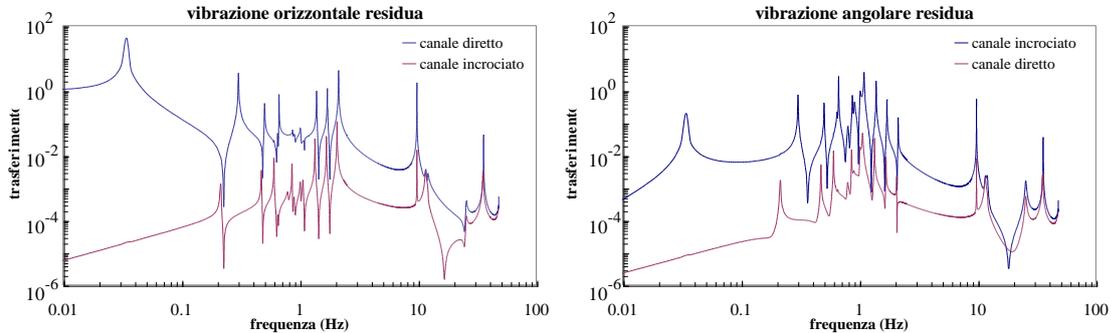
Il filtro standard ha una matrice di trasferimento molto più efficace di quella del pendolo invertito, a partire da qualche Hz. In particolare, è molto evidente la differenza di comportamento delle rispettive componenti θ - θ .

Si può ottenere il trasferimento effettivo della vibrazione dal filtro 0 al filtro 1 applicando alla matrice la procedura adottata nel paragrafo precedente. La correlazione tra la vibrazione orizzontale e quella angolare in ingresso si ottiene calcolando le componenti del sisma effettivo sul filtro 0, a partire dalla matrice di trasferimento 'suolo-filtro 0', ed utilizzando di nuovo la (117).

La Figura 44 mostra i risultati del calcolo. Si nota che, alle basse frequenze, entrambe le componenti della vibrazione residua del filtro 1 derivano esclusivamente dal sisma orizzontale in ingresso al filtro 0, quindi dal sisma orizzontale al suolo. Nella banda delle risonanze interne (*crossbar* e colonne del pendolo invertito) il sisma angolare al suolo mantiene una certa influenza, soprattutto sulla vibrazione angolare residua. Resta però evidente che l'efficacia del filtro 0 nell'attenuazione della

componente angolare è notevole, se si pensa che quest'ultima è esaltata in ingresso dalla presenza del pendolo invertito come stadio precedente.

Figura 44 Trasferimento effettivo dal filtro 0 al filtro 1

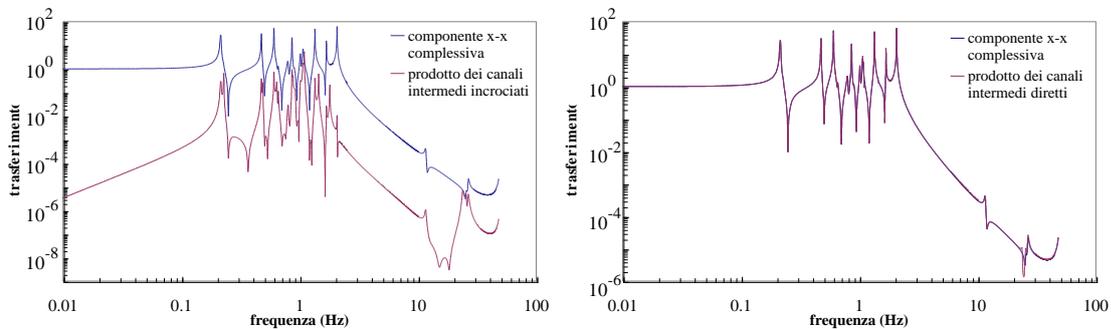


Quanto detto è sufficiente a dimostrare che il sisma angolare si esaurisce presto nel percorso lungo la catena, e che la vibrazione angolare residua dei vari stadi proviene per lo più dalla vibrazione orizzontale dello stadio precedente.

Si può inoltre verificare dalla simulazione che il trasferimento della vibrazione orizzontale tra due filtri consecutivi si sviluppa quasi esclusivamente lungo il canale diretto, ovvero non ha rilevanza la trasmissione lungo i due canali incrociati.

A tale proposito, abbiamo considerato il trasferimento orizzontale tra i due stadi che vanno dal *vessel* del filtro 0 al *vessel* del filtro 2 (Figura 45). Il primo grafico evidenzia che il prodotto dei canali diretti ($x-x-x$) è nettamente dominante rispetto al prodotto dei canali intermedi ($x-\theta-\theta-x$). Il secondo grafico mostra il confronto tra la componente $x-x$ del trasferimento orizzontale complessivo ed il prodotto delle componenti $x-x$ intermedie: i due grafici si sovrappongono in maniera quasi esatta.

Figura 45 trasferimento orizzontale del filtro 0 e del filtro 1 combinati



La proprietà dimostrata per i filtri 0 e 1 è generalizzabile a qualunque coppia di filtri consecutivi, compreso lo stadio di pre-attenuazione: la componente $x-x$ della matrice di

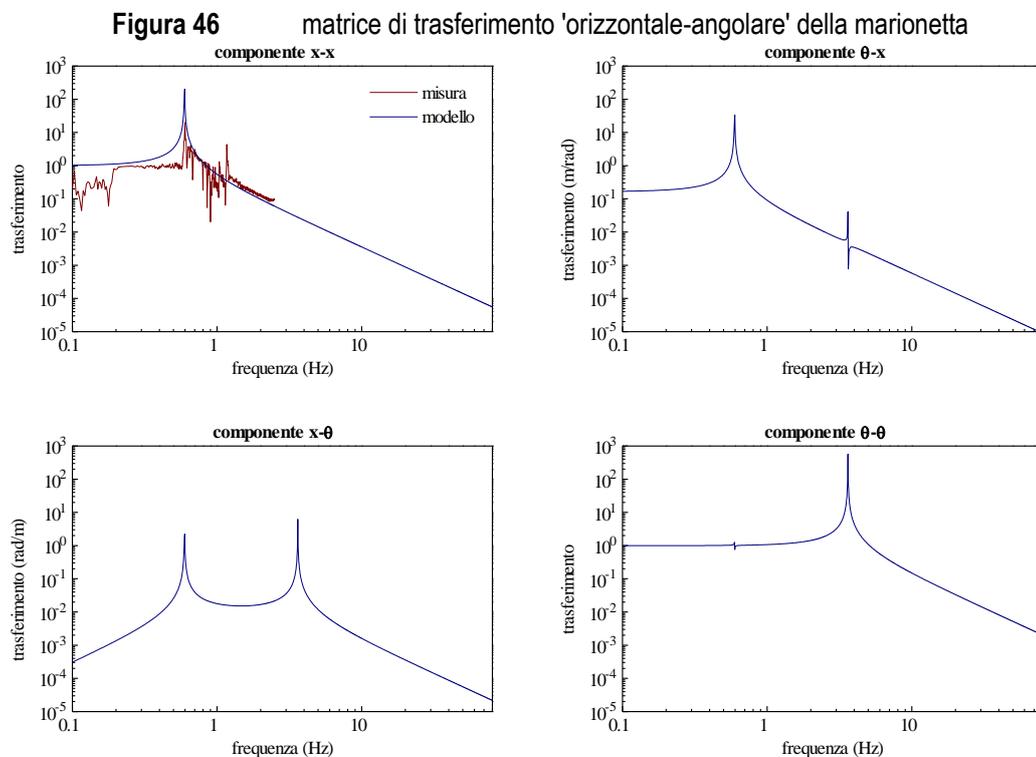
trasferimento complessiva è ben approssimata dal prodotto delle componenti $x-x$ della matrici di trasferimento parziali.

Vedremo in seguito che l'estensione di questa proprietà alla catena completa presenta qualche problema, non per effetto della trasmissione angolare, ma per effetto della trasmissione verticale. Gli accoppiamenti tra vibrazioni verticali e orizzontali saranno presi in considerazione più avanti.

II - 3.3(E) *Lo stadio finale*

Come abbiamo visto in precedenza, lo specchio è collegato alla marionetta tramite quattro fili, invece di uno solo centrale, il che consente una maggiore rigidità del sistema vincolare rispetto alle rotazioni dello specchio intorno agli assi orizzontali. Si tratta di un requisito fondamentale per il controllo dello specchio sui gradi di libertà angolari, ma va a scapito delle prestazioni del sistema in termini di attenuazione.

Anche in questo caso, come accade per il pendolo invertito, la trasmissione attraverso la coordinata angolare è molto più rilevante rispetto al caso del filtro standard. In Figura 46 si evidenzia che la componente $\theta-\theta$ presenta un picco di risonanza alla frequenza di circa 3.6 Hz, molto vicino alla banda di rivelazione dell'interferometro.



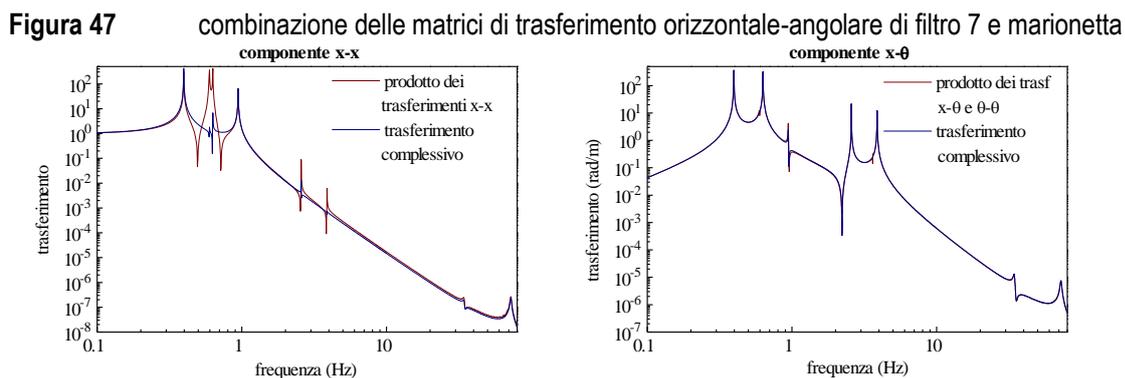
Relativamente alla componente $x-x$, il confronto tra la misura diretta e la simulazione conferma dell'attendibilità di quest'ultima, ma evidenzia anche maggiori difficoltà

sperimentali rispetto al caso dei filtri standard, perché la vibrazione orizzontale che si produce in uscita è contaminata dalla presenza di una notevole componente angolare.

Per eliminare il problema si renderebbe necessario il controllo contemporaneo di entrambi i gradi di libertà interessati. Abbiamo già descritto come la cosa risulti estremamente difficoltosa con gli strumenti a nostra disposizione; inoltre va aggiunto che il disco di alluminio che sostituisce lo specchio nella catena di R&D è stato predisposto per accogliere un solo accelerometro, in prossimità del suo centro.

Per questi motivi, non è stato possibile ottenere buone misure di FTO della marionetta. Riteniamo pertanto preferibile l'uso della simulazione nella valutazione sperimentale conclusiva della funzione di trasferimento del superattenuatore.

Vediamo adesso come si trasmettono le vibrazioni orizzontali ed angolari dal filtro 7 allo specchio. A questo proposito, i grafici in Figura 47 rendono evidenti i canali privilegiati di trasmissione attraverso i due stadi intermedi.



Il prodotto delle componenti $x-x$ delle matrici di trasferimento intermedie si sovrappone quasi esattamente alla componente $x-x$ della matrice di trasferimento complessiva. Se ne deduce che lo spostamento orizzontale si trasmette allo specchio solo attraverso il grado di libertà orizzontale intermedio, mentre il canale incrociato $x-\theta$ non ha rilevanza. Con ragionamento analogo, si deduce che il movimento angolare dello specchio proviene dal canale $x-\theta$ del filtro 7, e dal canale $\theta-\theta$ della marionetta.

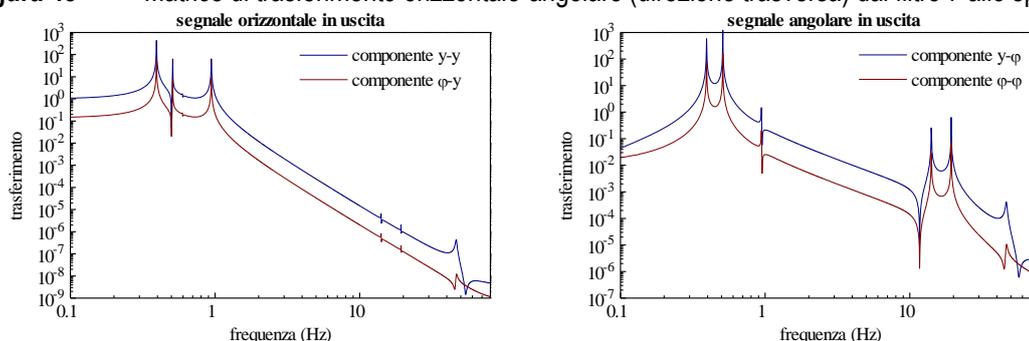
Le conclusioni appena argomentate sono valide nell'ipotesi che si possa trascurare il canale di trasmissione originato dalla vibrazione angolare in ingresso al filtro 7. Questa eventualità è legata non soltanto all'ampiezza delle componenti angolari ed incrociate delle matrici di trasferimento coinvolte, ma anche dalla composizione del sisma effettivo trasmesso al filtro 7, in termini di rapporto tra vibrazione orizzontale e vibrazione angolare. Abbiamo mostrato nei capitoli precedenti che, con ipotesi

ragionevoli circa la composizione del sisma al suolo, già sul filtro 1 la vibrazione angolare residua proviene principalmente dal canale $x-\theta$ del filtro 0, sebbene il pendolo invertito privilegi nettamente la trasmissione del sisma angolare. In altre parole, la componente $\theta-\theta$ del trasferimento del filtro 0 è troppo debole da permettere una trasmissione del sisma angolare lungo il canale diretto. La cosa è ragionevolmente generalizzabile a tutti i filtri, senza la necessità di ripetere il calcolo per ognuno di essi, ed equivale a concludere che la vibrazione angolare di ogni filtro proviene dalla vibrazione orizzontale del filtro precedente.

Abbiamo già mostrato che, per tutte le coppie di filtri, il canale $x-\theta-\theta-x$ è nettamente inferiore al canale diretto, tranne forse presso alcune risonanze in bassa frequenza. Si può pertanto concludere che il movimento angolare del filtro 7 non produce effetti sullo specchio in banda di rivelazione.

Terminiamo la trattazione dello stadio finale mostrando la matrice di trasferimento orizzontale-angolare dal filtro 7 allo specchio, sui gradi di libertà trasversi rispetto alla direzione del fascio ottico.

Figura 48 Matrice di trasferimento orizzontale-angolare (direzione trasversa) dal filtro 7 allo specchio



Le due risonanze angolari dovute al moto combinato dello specchio e della massa di riferimento sono responsabili della struttura di picchi che compare tra 10 e 20 Hz. Abbiamo visto che le stesse risonanze, relativamente allo spostamento nella direzione del fascio, sono poste a 2.6 e 3.9 Hz. Questa differenza è dovuta all'asimmetria del vincolo costituito dai fili di sospensione dello specchio: rispetto alla direzione del fascio la reazione vincolare ha un braccio e quindi una coppia maggiore. Questo determina una maggiore rigidità del vincolo alle rotazioni dello specchio intorno a questa direzione, e quindi risonanze a frequenza più alta.

Come si vede dal confronto tra la Figura 47 e la Figura 48, la cosa non ha effetto sulle proprietà di attenuazione orizzontale del sistema. Riguardo al moto rotazionale

residuo dello specchio, si può supporre che sia vantaggioso avere frequenze di risonanza elevate. La minore ampiezza del rumore sismico in ingresso e la migliore attenuazione offerta dal sistema dovrebbero infatti produrre un *rms* complessivamente inferiore.

II - 3.3(F) L'attenuazione orizzontale complessiva

Il confronto sistematico dei risultati sperimentali con le simulazioni porta ad una sostanziale conferma della validità del modello meccanico sviluppato in precedenza, ed autorizza l'utilizzo della simulazione per integrare i dati sperimentali mancanti. Per questo motivo, la funzione di trasferimento del superattenuatore, che tra poco sarà esposta come risultato finale di questo lavoro, può essere considerata una stima fondata sull'osservazione diretta, se non proprio una misura.

Non mostriamo la matrice di trasferimento orizzontale-angolare complessiva del superattenuatore, perché essa ha un'attendibilità limitata, rispetto e quelle analoghe relative ai singoli stadi. Ricordiamo che il modello tiene conto soltanto di due gradi di libertà, e considera la coordinata verticale completamente disaccoppiata da questi. Quest'ipotesi porta a risultati corretti per i singoli stadi, ma potrebbe essere troppo grossolana per quanto riguarda l'intera catena.

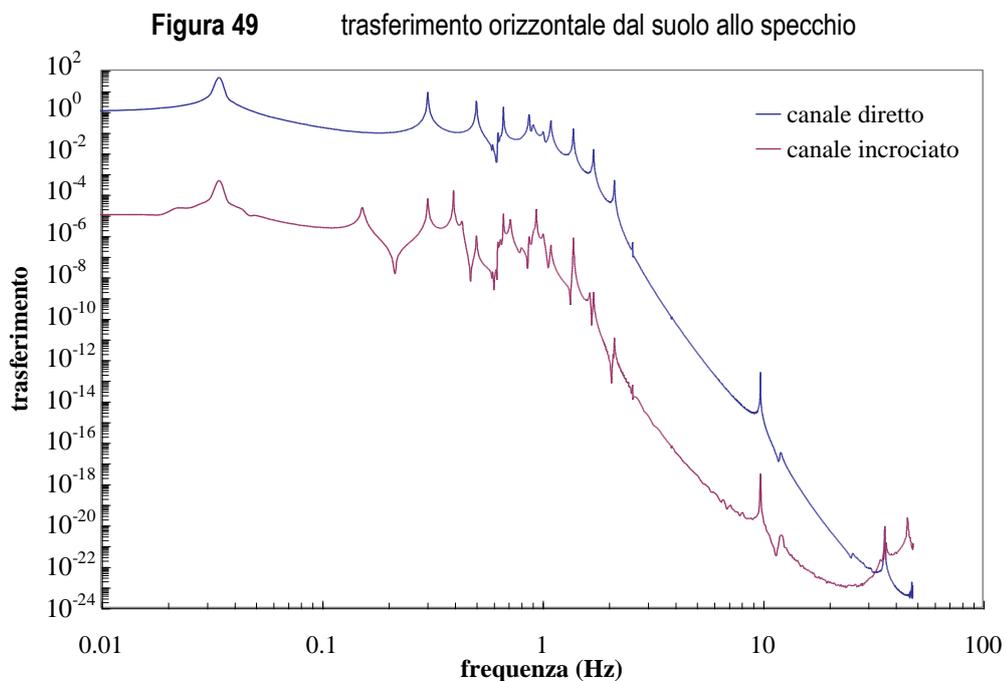
Non tenendo conto dei gradi di libertà verticali, si trascurano canali di trasmissione che potrebbero essere rilevanti. Per esempio, è possibile che la trasmissione del sisma orizzontale attraverso il pendolo invertito produca una vibrazione del filtro 0 che ha una componente verticale non nulla. In effetti, questo può accadere se nella centratura del sistema non si realizza un perfetto allineamento delle colonne rispetto alla verticale. Si consideri che una traslazione orizzontale di alcuni millimetri del punto di sospensione corrisponde ad una variazione di inclinazione delle colonne di circa 10^{-3} radianti.

Un altro meccanismo di possibile accoppiamento verticale-orizzontale deriva dalla sconnessione prodotta dai vincoli di *crossbar* all'interno dei filtri. Mentre i vincoli di pendolo hanno una direzione comune di trasferimento verticale, definita dalla direzione della gravità locale, per ciascun vincolo di *crossbar* la direzione principale di scorrimento verticale è ortogonale al piano su cui giacciono i rispettivi fili di centraggio. Se questo piano non è perfettamente orizzontale, ma la sua perpendicolare forma un angolo α con la gravità locale, il movimento verticale della *crossbar* si proietta sulla direzione orizzontale con un fattore di accoppiamento α . In fase di montaggio del superattenuatore è previsto un controllo di equilibratura dei filtri rispetto al piano orizzontale, che dovrebbe consentire un disallineamento non superiore a 10^{-2} radianti.

Si deduce dai risultati precedentemente esposti che, nella banda di rivelazione, la trasmissione verticale è favorita rispetto a quella orizzontale, a causa della minore efficacia delle lame rispetto ai fili di sospensione. Ne consegue che, se la vibrazione trasmessa al filtro 0 avesse una componente verticale anche molto piccola, questa potrebbe essere sufficiente a determinare un movimento principalmente verticale sul filtro 7, e proprio questo movimento potrebbe essere l'origine primaria del moto orizzontale dello specchio, secondo il meccanismo di accoppiamento appena citato.

Non sono stati acquisiti dati sperimentali circa l'accoppiamento verticale-orizzontale, perché gli accelerometri a nostra disposizione presentano anch'essi un accoppiamento meccanico, che determina una rilevante sensibilità spuria alle vibrazioni trasverse (garantita dal costruttore al di sotto del 5%). In altre parole, se vengono disposti in direzione orizzontale in presenza di una vibrazione verticale dominante, forniscono un segnale che non rispecchia la reale componente orizzontale della vibrazione.

Per evidenziare l'incidenza che possono avere i gradi di libertà verticali sulla trasmissione orizzontale, mostriamo in Figura 49 il confronto tra la componente x-x della matrice di trasferimento ed il possibile contributo derivante dal canale incrociato x-z-z-x descritto in precedenza, nell'ipotesi che i fattori di accoppiamento siano rispettivamente 10^{-3} sul filtro 0 e 10^{-2} sul filtro 7.

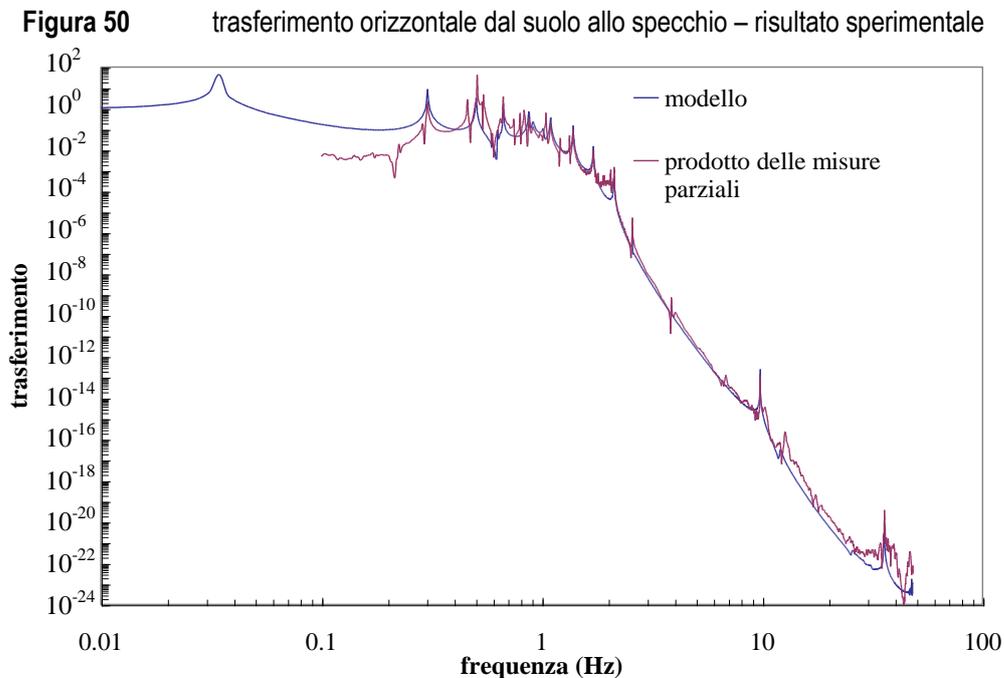


Se sono vere le ipotesi descritte, fino a circa 30 Hz il canale incrociato non incide sulla componente x-x reale della matrice di trasferimento del superattenuatore. Per

frequenze superiori invece diventa il canale predominante. Il modello bidimensionale è dunque adeguato a descrivere il trasferimento orizzontale solo a frequenze non troppo alte. Questa circostanza giustifica la scelta di utilizzare la descrizione semplificata dei fili di sospensione (vedi par. II - 3.1(E)), valida al di sotto delle frequenze di risonanza dei modi di violino. L'adozione delle matrici d'impedenza dipendenti dalla frequenza non porterebbe grandi benefici in termini di accuratezza del modello.

Le argomentazioni sviluppate in questo capitolo portano a concludere che, seppure in una banda limitata, la misura della funzione di trasferimento orizzontale del superattenuatore può essere ottenuta come prodotto di misure tra stadi intermedi, che riguardino semplicemente la componente $x-x$ del trasferimento. La Figura 50 mostra il risultato di questo procedimento, confrontato con la componente $x-x$ della matrice di trasferimento ottenuta dalla simulazione. Al posto dei dati sperimentali mancanti (trasferimento dal suolo al filtro 0 e dal filtro 7 allo specchio), sono stati utilizzati i risultati della simulazione. Nella banda delle risonanze collettive in bassa frequenza è stata utilizzata la misura diretta tra il filtro 0 e lo specchio.

I due grafici si sovrappongono quasi esattamente tra 1 Hz e 10 Hz. A frequenze più elevate si comincia ad evidenziare un lieve discrepanza (mediamente un fattore 3), che comunque non modifica le conclusioni circa la qualità dell'accordo tra i due approcci.



La conclusione che si trae da questa analisi è che, fino a 20 - 30 Hz, il sistema si comporta come un ideale pendolo a molti stadi: il trasferimento della vibrazione

orizzontale avviene esclusivamente lungo le coordinate x e la corrispondente funzione di trasferimento è ottenibile come prodotto di misure effettuate sui singoli stadi. Viceversa, a frequenze più elevate, la componente $x-x$ della matrice di trasferimento reale potrebbe essere influenzata in modo non trascurabile dai canali incrociati che coinvolgono la direzione verticale. Una trattazione accurata del problema richiederebbe pertanto di descrivere gli elementi meccanici come sistemi a tre gradi di libertà.

D'altra parte, lo studio del superattenuatore non si prefigge lo scopo di descrivere con grande dettaglio tutte le componenti della sua matrice di trasferimento, quanto piuttosto quello di stimare l'ampiezza della vibrazione residua sullo specchio, quando al suolo è presente un rumore sismico ben definito. In questa ottica, diventa inessenziale approfondire lo studio delle componenti il cui effetto è mascherato da altri canali di trasmissione certamente più rilevanti.

II - 3.3(G) Conclusioni: il rumore sismico residuo

La rilevanza dell'accoppiamento verticale-orizzontale si manifesta principalmente nella componente che trasferisce sulla direzione dell'asse ottico la vibrazione verticale del suolo. Se si analizzano separatamente i canali $z-z$ e $x-x$ (Figura 31 e Figura 50) si nota che il secondo produce valori di attenuazione molto più elevati del primo, a partire da frequenze di qualche Hz. Tenuto conto che al suolo il sisma orizzontale e quello verticale hanno approssimativamente la stessa ampiezza, si deduce che il movimento residuo dello specchio si sviluppa principalmente lungo la direzione verticale.

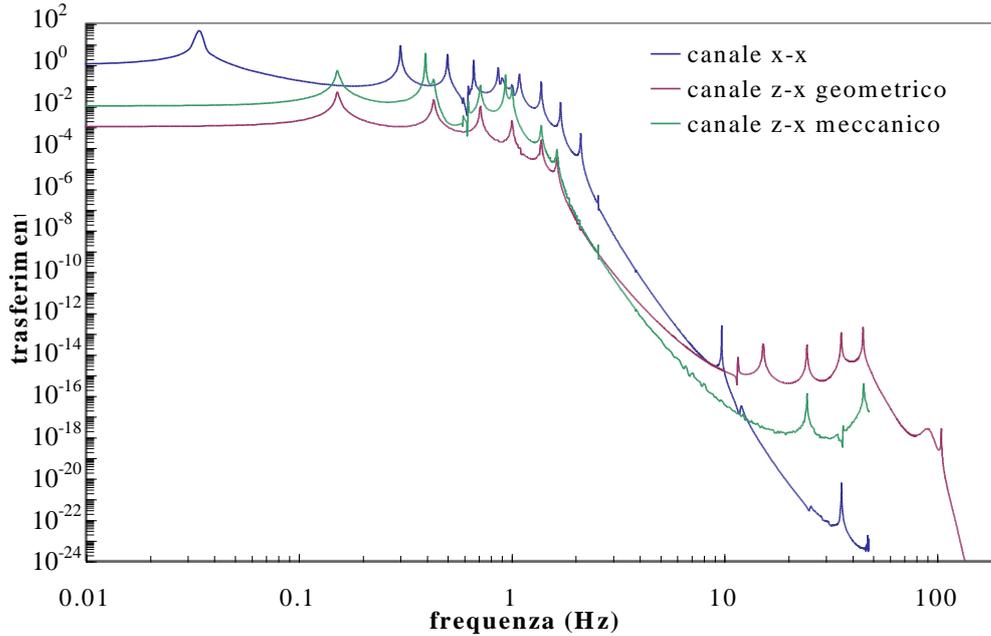
Come abbiamo già osservato (par. II - 1.1(A), Figura 5), la verticale locale ha una proiezione non nulla sulla direzione dell'asse ottico, in conseguenza del fatto che esso non è tangente alla superficie terrestre. Ne risulta che la perpendicolare all'asse ottico forma un angolo superiore a $2 \cdot 10^{-4}$ radianti con la verticale. Questo angolo rappresenta il fattore di accoppiamento con il quale il sisma verticale residuo si proietta sull'asse ottico, e produce un rumore di spostamento influente sulla sensibilità del rivelatore.

Il termine di accoppiamento può anche essere più elevato, se ipotizziamo che incidano sulla direzione di propagazione del sisma verticale anche fattori di tipo meccanico, come quello derivante dall'equilibratura orizzontale dei filtri. A nostro parere, gli elementi a valle dell'uscita del filtro 7 non dovrebbero introdurre accoppiamenti, se non quello geometrico. L'accoppiamento meccanico più rilevante dovrebbe essere quello introdotto dal vincolo di *crossbar* del filtro 7, perché quelli

relativi ai filtri più a monte dovrebbero essere assorbiti, dovendo attraversare un numero maggiore di stadi di attenuazione orizzontale.

La Figura 51 mostra una simulazione della trasmissione orizzontale effettiva del superattenuatore, intesa come il rapporto tra la vibrazione orizzontale residua dello specchio ed il sisma orizzontale al suolo, nell'ipotesi che quest'ultimo abbia la stessa ampiezza del sisma verticale.

Figura 51 Canali di trasmissione effettiva della vibrazione orizzontale dal suolo allo specchio



Sono evidenziati i canali che possono effettivamente generare una vibrazione orizzontale dello specchio in qualche parte dello spettro:

- **canale x-x, tratto blu** – è la trasmissione diretta del sisma orizzontale.
- **canale z-x geometrico, tratto rosso** – è la trasmissione del sisma verticale dal suolo allo specchio, proiettata sulla direzione orizzontale con un fattore 10^{-3} , per effetto dell'inclinazione dell'asse ottico e di altri fattori di accoppiamento meccanico eventualmente presenti nello stadio finale.
- **canale z-x meccanico, tratto verde** – è la trasmissione del sisma verticale dal suolo al filtro 7, proiettata sulla direzione orizzontale con un fattore di accoppiamento 10^{-2} , in conseguenza dell'incertezza di equilibratura del filtro 7.

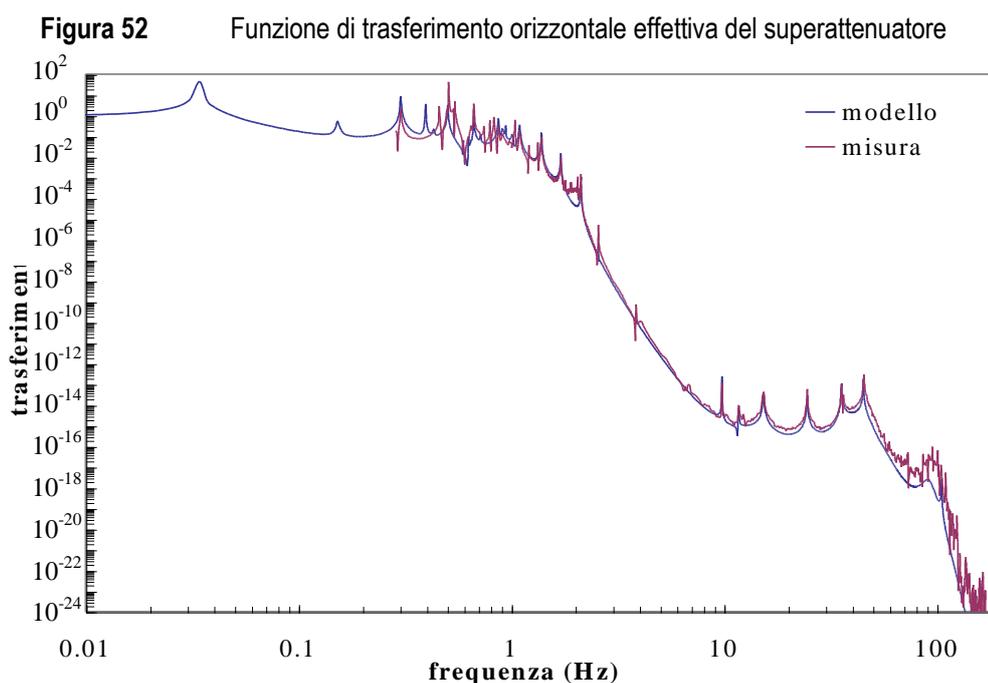
Si vede che la trasmissione diretta lungo il canale $x-x$ è dominante alle basse frequenze, fino a circa 10 Hz. A frequenze superiori è nettamente dominante l'accoppiamento geometrico $z-x$ sullo specchio.

A determinare l'attenuazione effettiva dell'apparato nella banda di rivelazione è dunque soprattutto la trasmissione verticale, in misura proporzionale al fattore di accoppiamento geometrico tra il moto verticale ed il moto orizzontale dello specchio.

È opportuno ricordare che il modello di trasmissione orizzontale da noi utilizzato non è valido oltre 30 Hz, quindi non è in grado di descrivere gli effetti delle risonanze interne dei fili di sospensione (modi di violino). A giudicare dalla grande differenza tra il canale verticale e i due canali orizzontali nella zona delle prime risonanze di violino, si può presumere che questi non siano in ogni caso presenti nella funzione di trasferimento effettiva, ad eccezione forse dei modi della sospensione finale, i quali potrebbero costituire un ulteriore veicolo di accoppiamento verticale-orizzontale.

Concludiamo mostrando il risultato finale di questo lavoro: una stima quasi sperimentale della funzione di trasferimento orizzontale effettiva del superattenuatore. Essa è ottenuta combinando il trasferimento del sisma orizzontale (Figura 50) ed il trasferimento del sisma verticale (Figura 31), con fattore di accoppiamento 10^{-3} .

La misura è confrontata con il risultato della simulazione, presentato in Figura 51. Sebbene i due approcci siano fortemente interdipendenti, l'ottimo accordo dei risultati ai quali si perviene costituisce una verifica di autoconsistenza dell'intero lavoro.



Bibliografia

- [1] C.W.Misner, K.S.Thorne, J.Wheeler, *Gravitation*, San Francisco (1973).
- [2] L.D.Landau, E.M.Lifšits, *Teoria dei campi*, Editori Riuniti Edizioni Mir (1976).
- [3] K.S.Thorne, in *300 Years of Gravitation*, S.Hawking and W.Israel eds. – Cambridge Univ. Press, New York (1987).
- [4] A.Buonanno, *Class. Quantum Grav.*, **19** 1267 (2002).
- [5] J.H.Taylor, *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 3, 711 (1994).
- [6] R.A.Hulse, *Rev. Mod. Phys.*, **66**, 3, 699 (1994).
- [7] A.Giazotto, S.Bonazzola, E.Gourgoulhon, *Phys. Rev. D*, **55**, 2014 (1997).
- [8] P.Astone, V.Ferrari, M.Maggiore, J.D.Romano, *Int. J. Mod. Phys. D*, **9**, 361 (2000).
- [9] D.G.Blair, "Resonant bar detectors", in *The detection of gravitational waves*, D.G.Blair Ed. – Cambridge University Press, New York (1989).
- [10] P.Astone, *Class Quantum Grav*, **19**, 1227, (2002)
- [11] P.R.Saulson, *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*, World Scientific (1994).
- [12] The VIRGO collaboration, VIRGO Final Design, E.T.S., Pisa (1995).
- [13] S.Braccini, *Tesi di Perfezionamento*, Scuola Normale Superiore di Pisa (1996).
- [14] C.Casciano, *Tesi di Laurea*, Dipart. di Fisica, Università degli Studi di Pisa (1997).
- [15] G.Losurdo, *Tesi di Perfezionamento*, Scuola Normale Superiore di Pisa (1998).
- [16] P.R.Saulson, *Phys. Rev. D*, **42** (8), 2437 (1990).
- [17] P.R.Saulson, *Phys. Rev. D*, **30** (4), 732 (1984).
- [18] S.A.Huges, K.S.Thorne, *Phys. Rev. D*, **60**, 122002 (1999).
- [19] M.Beccaria, *Class. Quantum Grav.*, **15**, 3339 (1998).

- [20] J.Hough et al., "The stabilisation of laser for interferometric gravitational wave detectors", in *The detection of gravitational waves*, D.G.Blair Ed. – Cambridge University Press, New York (1989).
- [21] A. Brillet, *Ann. De Phys.*, **10**, 219 (1985).
- [22] J.Y.Vinet, V.Brisson, S.Braccini, *Phys. Rev. D*, **54** (2), 1276 (1996).
- [23] J.Y.Vinet, V.Brisson, S.Braccini, *Phys. Rev. D*, **56** (10), 6085 (1997).
- [24] M. Barsuglia, *Thèse de Doctorat*, Université de Paris–Sud Orsay (1999).
- [25] A.Giazotto, *Phys. Rep.*, **182**, 6, 365 (1989).
- [26] C.Bradaschia et al., *Phys. Lett. A*, **137**, 329 (1989).
- [27] S.Braccini, Pisa VIRGO Group, *Design of the Superattenuators for the VIRGO Construction*, (1997).
- [28] M.Beccaria et al., *Nucl. Instrum. Meth. In Phys. Res. A*, **404**, 455 (1998).
- [29] S.Braccini et al., *Rev. Sci. Instrum.*, **67** (8), 2899 (1996).
- [30] M.Beccaria et al., *Nucl. Instrum. Meth. In Phys. Res. A*, **394**, 397 (1997).
- [31] S.Braccini et al., VIRGO Note NTS 096/032 (1996).
- [32] S.Braccini et al., VIRGO Note NTS 096/045 (1996).
- [33] R.Flamini, H.Heitmann, *Phys. Lett. A*, **214**, 112 (1996).
- [34] G.Losurdo et al., *Rev. Sci. Instrum.*, **72** (9), 3653 (2001).
- [35] G.Losurdo et al., *Rev. Sci. Instrum.*, **70** (5), 2507 (1999).
- [36] R.De Salvo et al., *Nucl. Instrum. Meth. In Phys. Res. A*, **420**, 316 (1999).
- [37] G.Ballardin et al., *Rev. Sci. Instrum.*, **72** (9), 3643 (2001).
- [38] B.Caron et al., (SIESTA), *Astropart. Phys.*, **10**, 369 (1999).