UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Titolo tesi:

"STIMA TEORICA DEL RUMORE NEWTONIANO ATMOSFERICO IN RIVELATORI INTERFEROMETRICI DI ONDE GRAVITAZIONALI"

Candidato : Carlo Cafaro

Relatore : Prof. Carlo Bradaschia

Anno accademico 2001/2002

Indice

Introduzione

Inizio questo lavoro ponendo una domanda: "Perché tanti sforzi per una osservazione diretta delle onde gravitazionali?" Fino ad oggi la relatività generale è stata sottoposta a verifiche sperimentali estremamente puntigliose, ma non ha mai fallito. Sorge allora la domanda, perché continuare a sottoporla a verifiche?

Un motivo è che la gravità è una interazione fondamentale della natura e come tale richiede le più valide basi sperimentali. Un altro motivo è che tutti i tentativi di quantizzare la gravità e di unificarla alle altre forze suggeriscono che la gravità è una cosa a parte rispetto alle altre interazioni sotto molti aspetti, pertanto più profondamente si conosce la gravità e le sue conseguenze, meglio si potrà unirla alle altre forze.

Infine, e principalmente, le previsioni della relatività generale[1] sono fissate; la teoria non contiene costanti modificabili e pertanto niente può essere cambiato. Quindi ogni test della teoria è potenzialmente un test "mortale" .

Una eventuale discrepanza che si verifichi tra l'osservazione e la previsione invaliderebbe la teoria, ed una altra dovrebbe essere sostituita al suo posto.

Sebbene sia ammirevole che questa teoria, nata quasi del tutto dal puro pensiero, abbia sopravvissuto ad ogni test, la possibilità di trovare improvvisamente una discrepanza continuerà a far fare ricerca gravitazionale per i prossimi anni a venire [**16**].

[1] Per relatività generale intendiamo la versione "standard" proposta da Einstein. Non parleremo delle teorie alternative che la generalizzano. L'esempio piú semplice e noto di generalizzazioni di questo tipo è l'introduzione proposta dallo stesso Einstein di una costante cosmologica.

Ciò detto, sottolineo che questo lavoro di tesi riguarda esclusivamente uno dei tanti problemi che si affrontano nella rivelazione interferometrica delle onde gravitazionali (stima del rumore Newtoniano atmosferico), onde gravitazionali la cui esistenza è appunto prevista dalla relatività generale di Einstein.

Questo lavoro di tesi è centrato attorno a una stima della rilevanza del rumore Newtoniano di origine atmosferica in rivelatori interferometrici di onde gravitazionali.

Per rumore Newtoniano si intende l'effetto legato all'interazione tra apparato sperimentale e campi gravitazionali stocastici generati da fluttuazioni ambientali della densità di massa. L'effetto, in se piccolo, acquista rilevanza a causa della grande sensibilità degli apparati sperimentali considerati, e anche a causa del fatto che non esistono procedure semplici per attenuarlo.

Prima di affrontare questo problema sono state richiamate le motivazioni fisiche per questo tipo di apparato sperimentale. Inoltre è risultato necessario introdurre alcuni concetti importanti di teoria dei segnali.

Sono stati quindi selezionati alcuni fenomeni fisici di natura acustica, convettiva e turbolenta e per ciascuno di essi è stato valutato il relativo spettro di rumore Newtoniano atmosferico, rapportandolo quando possibile a misure sperimentali esistenti o di possibile attuazione.

Si ritiene importante la stima del Newtoniano atmosferico in quanto uno degli obiettivi dell'interferometro Virgo è quello di raggiungere una buona sensibilità a basse frequenze (attorno ai 4-10 Hz). In questo range di frequenze il rumore termico ed il Newtoniano sismico sono le sorgenti di rumore principali. Lo studio dello sviluppo di metodi ottici innovativi e di metodi di cooling termico (tecniche criogeniche) e la ricerca di materiali ad alto fattore di qualità meccanico Q hanno come scopo quello di rendere il rumore termico più basso a basse frequenze. Una volta raggiunti tali obiettivi, il Newtoniano sismico e noi affermiamo anche il Newtoniano atmosferico, questo ultimo in particolari condizioni meteorologiche, rappresenterebbero il limite di sensibilità a queste frequenze per un interferometro gravitazionale avanzato del futuro. Per un maggiore dettaglio circa i possibili miglioramenti che vengono introdotti utilizzando queste tecniche sperimentali innovative e la conseguente importanza del Newtoniano atmosferico nel range di frequenze di interesse, $f \in [1, 15]$ Hz, si rimanda alle conclusioni della tesi.

Organizzazione della Tesi

La tesi è divisa in tre capitoli.

Nel primo capitolo si introduce il concetto di onda gravitazionale, a partire dalle equazioni di Einstein linearizzate. Vengono discusse le possibili sorgenti di radiazione gravitazionale e, a grandi linee, le relative forme d'onda.

Si descrivono inoltre i principali approcci sperimentali alla rilevazione delle onde gravitazionali, accennando ai rivelatori a barra risonante, ma soffermandosi soprattutto sul principio di funzionamento delle antenne interferometriche gravitazionali, ed in particolare dell'interferometro Virgo.

Nel secondo capitolo si discutono gli elementi principali di teoria dei segnali e dalla loro rivelazione. Si introducono alcuni concetti importanti, come la probabilità di falso allarme e quella di rivelazione corretta, e si descrive il criterio di Neyman-Pearson per la rivelazione ottimale.

Dopo ciò vengono discusse le principali sorgenti di rumore rilevanti, in particolare lo shot noise fotonico, il rumore associato alla pressione di radiazione, il rumore quantistico e quello termico.

Viene dato particolare risalto alla descrizione del rumore sismico, con particolare riferimento al rumore Newtoniano da esso indotto.

Il terzo capitolo racchiude il nucleo centrale della tesi. Viene calcolato lo spettro di rumore Newtoniano atmosferico in relazione a tre generi di fenomeni atmosferici;

Acustici: si considera un modello semplificato della propagazione di onde acustiche nell'ambiente circostante l'apparato sperimentale.

Convettivi: si considera l'effetto generato da una bolla convettiva, e da un regime di turbolenza di Rayleigh-Bénard.

Turbolenti: si valuta l'importanza dell'eccitazione acustica connessa alla turbolenza (processo di Lighthill).

Per la trattazione degli ultimi due punti vengono utilizzati risultati della teoria statistica analitica della turbolenza connessi a considerazioni di ordine dimensionale e di similarità.

L'importanza di tali stime riguarda la nuova generazione di rivelatori gravitazionali ad alta sensibilità. Con il costante miglioramento delle tecniche ottiche, e con l'introduzione della tecnologia criogenica si prevede che sarà possibile migliorare di ordini di grandezza la sensibilità nella regione di basse frequenze. Gli effetti considerati potranno diventare allora una delle principali limitazioni da superare.

CAPITOLO 1

Onde gravitazionali

1.1. RELATIVITA' GENERALE

La teoria della relatività generale [**1, 2**] è stata introdotta da Albert Einstein nel 1916. Essa rappresenta l'estensione naturale della relatività speciale (teoria che rivoluzionò profondamente i concetti di spazio e di tempo pre-esistenti nell'ambito della fisica classica) teoria esposta da Einstein medesimo un decennio prima, pur differenziandosi in un modo netto da quest'ultima e per l'apparato matematico e per la struttura teorica. La relatività generale, per essere sviluppata in modo quantitativo, richiede l'uso di strumenti matematici particolari quali la geometria differenziale e l'analisi tensoriale. Questa complessità matematica causò non pochi problemi ai fisici contemporanei di Einstein, fisici che ignoravano queste tecniche di calcolo. A peggiorare le cose, c'era il fatto, non poco trascurabile, che l'evidenza sperimentale a supporto delle conseguenze osservabili della teoria erano davvero esigue.

Nei suoi studi sulla relatività, Einstein introdusse nuovi e fondamentali concetti in fisica, il più importante dei quali era la necessità che "tutte le leggi della fisica fossero invarianti sotto trasformazioni generali di coordinate" (Principi di Invarianza Generale [**3**]), cioè che tutte le leggi della fisica potessero essere espresse da equazioni che conservassero la stessa forma matematica indipendentemente dal sistema di riferimento scelto e dalle variabili spazio-temporali usate (equazioni covarianti), e che tutte le costanti numeriche e le grandezze indipendenti dallo stato della materia non venissero modificate dalle trasformazioni generali di coordinate medesime. A prima vista, sembra che il Principio di Invarianza Generale sia una semplice generalizzazione della richiesta di invarianza di Lorentz, invarianza che stabilisce che le equazioni devono rimanere invariate per tutte le trasformazioni di Lorentz.

Nel suo lavoro originale, Einstein tentò di giustificare l'invarianza generale facendo appello ad un principio di equivalenza per sistemi di riferimento in moto arbitrario accelerato. Si trattava di una generalizzazione del principio della relatività ristretta, che stabilisce l'equivalenza di sistemi di riferimento in moto uniforme. Pertanto, la teoria di Einstein voleva essere una teoria di "Relatività Generale". Ma in realtà la teoria della relatività ristretta è quanto di più relativistico si possa concepire. Il principio di invarianza generale non è un principio di relatività; esso è piuttosto un principio dinamico che impone delle restrizioni sulle possibili interazioni tra geometria e materia. Questo non era un fatto per niente ovvio, basti pensare alle leggi della dinamica classica, leggi che valgono solo nei sistemi di riferimento inerziali. Nella teoria di Einstein la forza di gravità è necessaria conseguenza della invarianza rispetto a trasformazioni arbitrarie dei sistemi di coordinate. Per questo la teoria della gravitazione è anche detta "relatività generale".

L'invarianza rispetto a trasformazioni arbitrarie di coordinate è una invarianza locale, dato che essa implica invarianza rispetto a trasformazioni che modificano il sistema di coordinate solamente in un piccolo intorno di un qualsiasi punto dello spazio-tempo.

La direzione indicata dalla teoria di Einstein (e dal modello standard [**10**]) è quella in cui le forze della natura derivano dalla invarianza locale rispetto ad un insieme di trasformazioni che modificano, nell'intorno di ogni punto fisico, sia la geometria spazio-tempo, sia quella più riposta che sottende la descrizione dei campi di forza (Per esempio in QED la lagrangiana del sistema fotone-elettrone è invariante per trasformazioni di gauge U(1)[**10**]). Si trova così una concettuale unificazione della gravitazione con le altre forze elementari. Tuttavia, mentre nello sviluppo della teoria lo studio della gravitazione ha preceduto di decenni quello delle forze fondamentali, la situazione si ribalta se si considera quel che succede nel campo delle ricerche sperimentali.

Se si considera il caso dell'elettromagnetismo, si vede come dallo studio dei campi stazionari, culminato nelle esperienze di Faraday del 1830, si sia passato allo studio delle onde elettromagnetiche verso la fine del secolo, quindi ai quanti della radiazione elettromagnetica sino a studiare i più raffinati effetti dello scambio virtuale di quanti elettromagnetici (Lamb shift [**7**], momento magnetico anomalo dell'elettrone, ecc..).

Nel campo delle interazioni gravitazionali il processo è stato enormemente più lento, dato che le molteplici verifiche della validità della teoria di Newton prima, di quella di Einstein poi, si limitano allo studio dei campi gravitazionali stazionari. È qui l'interesse, centrale per lo sviluppo della fisica, dei tentativi di rivelare e di studiare la radiazione gravitazionale.

La teoria della relatività generale porta ad una formulazione invariante delle leggi fisiche. Sperimentalmente essa si basa sulla equivalenza tra massa inerziale m_i e massa gravitazionale m_g, dove:

$$F_g = G\frac{M_g m_g}{r^2} \tag{1.1.1}$$

$$F = m_i a \tag{1.1.2}$$

La massa inerziale e quella gravitazionale sono sperimentalmente proporzionali; risulta dagli esperimenti che [**4**]:

$$\frac{m_i}{m_g} = 1 \pm 10^{-11} \tag{1.1.3}$$

L'idea di fondo in relatività generale è che le forze gravitazionali si possono esprimere come una alterazione delle leggi della geometria euclidea. La struttura geometrica dello spazio resta definita una volta assegnato il tensore metrico g_{ij}. Per introdurre in modo semplice questo tensore consideriamo prima il caso della geometria euclidea.

Si ponga $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ e si considerino due eventi in M^4 (spazio di Minkowski utilizzato in relatività ristretta) : $E^0 = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ed $E^1 = (x_0 + dx_0, x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. Il quadrato della loro distanza è, per definizione:

$$ds^2 \equiv \sum_{i,j=0}^{3} g_{ij} dx^i dx^j \tag{1.1.4}$$

dove, nel caso semplice della geometria minkowskiana,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

Usando la convenzione di Einstein, secondo cui viene sottintesa la somma sugli indici ripetuti, si può scrivere:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \tag{1.1.6}$$

E' possibile mostrare che, in generale, valori di $g_{ij}(x)$ diversi da quelli precedenti esprimono leggi geometriche diverse da quelle di Euclide, come Gauss fece notare già a partire dal 1799.

Secondo Einstein la legge che descrive il campo gravitazionale può essere rappresentata con leggi caratteristiche di una opportuna geometria non Euclidea, molto meglio che non con la forza di Newton. Grazie alla equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale (principio di equivalenza) si vede che, con una opportuna scelta di riferimento non inerziale, è possibile simulare localmente un campo gravitazionale (e viceversa).

Il concetto fondamentale che è alla base della teoria della gravitazione di Einstein è dunque il seguente: la materia determina la curvatura dello spazio-tempo ed è quest'ultima che produce gli effetti osservati; in pratica la forza gravitazionale è una proprietà geometrica dello spazio-tempo. Dunque si abbandona il concetto di spazio-tempo piatto (caratterizzato dal fatto che il tensore di curvatura di Riemann, che sarà definito tra poco, è nullo) presente in relatività speciale e si introduce quello di spazio- tempo curvo (tensore di Riemann non nullo). Le equazioni di campo per la gravità sono non lineari. Esse sono le equazioni fondamentali della relatività generale e sono dette anche equazioni di Einstein [**2**] (sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine) :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1.1.7}$$

dove $R_{\mu\nu}$ é il tensore di Ricci, definito come

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\gamma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\gamma} \tag{1.1.8}$$

in termini dei simboli di Christoffel

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \tag{1.1.9}$$

La curvatura scalare dello spazio è definita come

$$R = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \tag{1.1.10}$$

Il tensore $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia impulso della materia.

Il contenuto della teoria della relatività generale è espresso formalmente dall'equazione (1.1.7). Il primo membro della (1.1.7) dipende soltanto dal tensore simmetrico $g_{\mu\nu}$, che rappresenta sia le proprietà metriche dello spazio sia il campo gravitazionale. Il secondo membro della (1.1.7) rappresenta una descrizione di tutte le sorgenti del campo gravitazionale. $T_{\mu\nu}$ rappresenta l'energia che genera il campo gravitazionale, ma di per sé è di carattere non gravitazionale, quale ad esempio è l'energia del campo elettromagnetico, della densità di materia ponderabile, ecc. Nel limite lineare non relativistico la (1.1.7) deve essere in accordo con l'equazione per il potenziale Newtoniano

$$\triangle\varphi = -4\pi\rho$$

Le equazioni del campo gravitazionale contengono in sé anche le equazioni della materia stessa che genera questo campo. Ne risulta che la distribuzione e il moto della materia che genera il campo gravitazionale non possono essere dati arbitrariamente. Al contrario, essi debbono essere determinati (risolvendo le equazioni del campo per condizioni iniziali date) contemporaneamente al campo stesso creato da questa materia.

Sottolineiamo la differenza di fondo tra questa situazione e quella che si ha per il campo elettromagnetico . Le equazioni di questo campo (eq. di Maxwell) contengono solamente l'equazione di conservazione della carica totale (equazione di continuità), ma non le equazioni del moto delle cariche stesse. Di conseguenza, la distribuzione e il moto delle cariche possono essere dati arbitrariamente, purché la carica totale resti costante. Questa distribuzione data delle cariche determina allora, mediante le equazioni di Maxwell, il campo elettromagnetico da esse creato. Bisogna tuttavia precisare che, per determinare completamente la distribuzione e il moto della materia in un campo gravitazionale, si deve aggiungere alle equazioni di Einstein l'equazione di stato della materia (non contenuta nelle equazioni del campo), cioè una equazione che lega la pressione e la densità. Questa equazione deve essere data contemporaneamente alle equazioni del campo. L'equazione di stato lega infatti non due, ma tre grandezze termodinamiche, per esempio la pressione, la densità e la temperatura della materia. Nelle applicazioni alla teoria della gravitazione, questa circostanza però non ha, di solito, un'importanza sostanziale perché le equazioni di stato approssimate utilizzate qui non dipendono dalla temperatura (tali sono, per esempio, le equazioni $p = 0$ per una materia rarefatta, l'equazione ultrarelativistica $p = \frac{\varepsilon}{3}$ per una materia fortemente compressa, eccetera.

Le equazioni di Einstein sono dunque non lineari e pertanto il principio di sovrapposizione non è valido per i campi gravitazionali. Il principio di sovrapposizione è valido soltanto in modo approssimato per campi gravitazionali deboli in cui le equazioni possono essere linearizzate, per esempio nel caso di campi gravitazionali nel limite classico Newtoniano. Anche se i risultati più eccezionali della teoria della gravitazione dipendono pesantemente dalla non linearità delle equazioni di campo, quasi tutti i risultati ottenuti sperimentalmente si possono descrivere attraverso l'approssimazione lineare.

Le prove sperimentali a supporto della relatività generale sono:

(1) Il redshift gravitazionale.
(2) La deflessione gravitazionale.
(3) La precessione del perielio di mercurio.
(4) Il ritardo della luce.

Il redshift gravitazionale consiste nello spostamento verso il rosso delle linee spettrali della luce emessa da un atomo posto al fondo di un potenziale gravitazionale rispetto alle linee spettrali emesse da un atomo simile posto al di fuori del potenziale. Esso è conseguenza della dilatazione gravitazionale del tempo cioè del rallentamento degli orologi in un campo gravitazionale (curvatura dello spazio-tempo).

Si consideri la propagazione dei raggi di luce in un campo gravitazionale costante. Lo spettro di righe, emesso da qualsiasi atomo che si trovi, per esempio, sul sole, ha lo stesso aspetto dello spettro emesso da atomi identici sulla terra. Se si osserva dalla terra lo spettro emesso da atomi sul sole, allora le sue righe risulteranno spostate rispetto alle righe dello stesso spettro emesso sulla terra. Ciascuna riga di frequenza ω sarà spostata del valore $\Delta\omega$ definito dalla formula [**2**]:

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\omega = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\omega \tag{1.1.11}$$

dove φ_1 e φ_2 sono i potenziali del campo gravitazionale rispettivamente nel punto di emissione e nel punto d’osservazione dello spettro. Se si osserva sulla terra uno spettro emesso dal sole o dalle stelle, allora $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ e da (1.1.11) risulta che $\Delta\omega < 0$, cioè avviene uno spostamento verso le piccole frequenze.

Questo fenomeno appena descritto si chiama Spostamento Verso il Rosso (della frequenza della luce in un campo gravitazionale costante) o redshift gravitazionale.

La deflessione gravitazionale della luce consiste nel fatto che la luce (fotoni) propagandosi in un campo gravitazionale subisce un incurvamento che la fa deviare da un percorso rettilineo. Per stimare l’angolo di deflessione della traiettoria di un raggio di luce in un campo gravitazionale, si procede, brevemente, nel modo che segue.

Si adotta l’interpretazione secondo la quale la luce è composta da particelle (fotoni), in quanto ciò ci permette di utilizzare l’equazione relativistica del moto per una particella in un campo gravitazionale,

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\nu\rho} u^\nu u^\rho = 0 \tag{1.1.12}$$

dove u^α é la quadrivelocità del fotone.

Però la (1.1.12) va opportunamente modificata poiché bisogna tenere conto del fatto che i fotoni hanno massa nulla; l’equazione da considerare è [**1**]:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dp^2} + \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{dp}\frac{dx^\rho}{dp} = 0 \tag{1.1.13}$$

dove p è un parametro che descrive la traiettoria. In generale $d\tau$ ($ds^2 = c^2 d\tau^2$) è proporzionale a dp, così per una particella materiale si può normalizzare p in modo che $p = \tau$. Tuttavia per un fotone la costante di proporzionalità $d\tau/dp$ scompare, e poiché si vuole trattare i fotoni allo stesso modo delle particelle massive, si trova conveniente lasciarsi la possibilità di fissare la normalizzazione di p indipendentemente da τ.

A parte questi dettagli tecnici, il risultato a cui si arriva è il seguente [**1**]:

$$\theta \simeq 4\frac{GM}{c^2}\frac{1}{b} \tag{1.1.14}$$

dove M è la massa della sorgente del campo gravitazionale e b il parametro di impatto del fotone.

Utilizzando la formula (1.1.14), risulta che la deflessione di un fotone dal campo gravitazionale del sole è all'incirca:

$$\theta_{\text{th}} \simeq 2\frac{2GM}{c^2}\frac{1}{b} \simeq 2\frac{3\text{Km}}{7\times 10^5\text{Km}} \simeq 0.85\times 10^{-5}\text{rad}$$

dove per il parametro di impatto b è stato preso il valore del raggio solare pari a 7×10^5Km. Questo risultato è dunque in buon accordo con i risultati sperimentali, secondo cui $\theta_{\text{exp}} \simeq 0.82\times 10^{-5}$rad.

La precessione del perielio di mercurio consiste nell'avanzamento angolare del perielio ad ogni rivoluzione. Nello studio di questo fenomeno c'è buon accordo tra dati teorici e sperimentali.

In questo caso non si considera un processo di scattering, come quello riguardante la deflessione del fotone in un campo gravitazionale, ma si prende in considerazione il moto di una particella legata, in orbita attorno al sole. Nel perielio e nell'afelio la distanza sole-particella r raggiunge il suo minimo valore r_- ed il suo massimo valore r_+, ciascuno dei quali è tale che $dr/d\varphi = 0$.

Senza andare nei dettagli, diciamo che il risultato a cui si arriva è il seguente [**1**]:

$$\Delta\varphi \simeq \pi\frac{GM}{c^2}\left(\frac{r_+ + r_-}{r_+ r_-}\right) \tag{1.1.15}$$

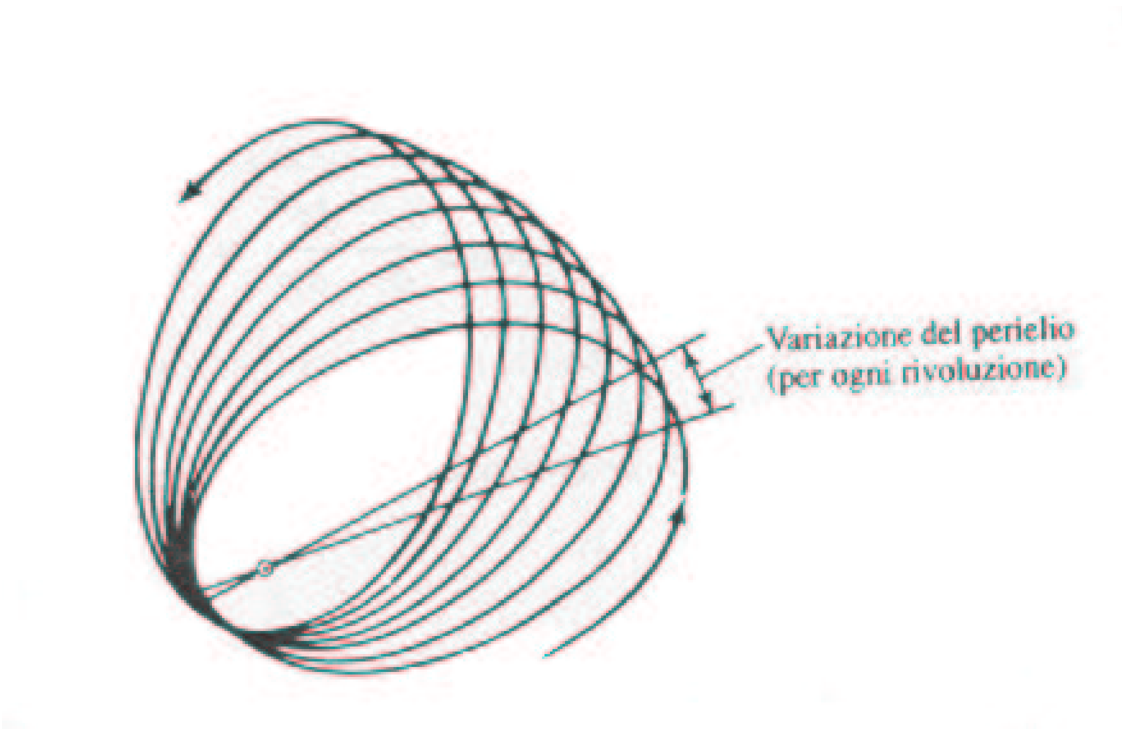

FIGURA 1.1.1. Orbita planetaria con precessione del perielio. Lo spostamento angolare, calcolato lungo l'orbita, tra un perielio ed il successivo è $\Delta\phi \simeq 2\pi\left[1+3(GM/l)^2\right] > 2\pi$ dove l é il momento angolare per unitá di massa del pianeta. La quantitá $6\pi(GM/l)^2$ fornisce la precessione angolare del perielio ad ogni rivoluzione.

dove $\Delta\varphi$ rappresenta lo spostamento angolare del perielio ad ogni rivoluzione. Per quanto riguarda Mercurio si trova

$$\begin{aligned}(\Delta\varphi)_{\text{th}} &\simeq 42.98\,\text{arcsec/secolo}\\(\Delta\varphi)_{\text{exp}} &\simeq 43.1\,\text{arcsec/secolo}\end{aligned}$$

Queste equazioni confermano il buon accordo tra teoria ed esperimento di cui si parlava sopra.

Un altro effetto osservabile a supporto della relatività generale è il ritardo temporale che subiscono i segnali luminosi in presenza di campi gravitazionali: la velocità di propagazione della luce misurata con strumenti posti nel campo gravitazionale è in disaccordo con quella misurata con strumenti posti a distanza infinita.

Si consideri la propagazione di un raggio di luce tra la terra (posta in z_1) ed un pianeta bersaglio (posto in z_2) nel campo gravitazionale del sole. Risulta che il tempo impiegato da un segnale luminoso per andare da z_1 a z_2, osservando la Figura 1.1.2, è [**3**]:

$$\Delta t = z_2 + |z_1| + 2GM_\odot \left(\frac{\sqrt{(z_2^2 + b^2)} + z_2}{\sqrt{(z_1^2 + b^2)} - |z_1|} \right) \tag{1.1.16}$$

Il terzo termine della (1.1.16) rappresenta una misura dell'intensità del campo gravitazionale. Questa grandezza compare nelle formule della deflessione della luce e del suo rallentamento, del redshift gravitazionale relativistico e nel caso del sistema solare è piccola; perfino sulla superficie solare $\frac{GM}{rc^2}$ è circa 2×10^{-6}. Grandi effetti relativistici si riscontrano nel campo gravitazionale nelle vicinanze di una massa estremamente compatta, dove $\frac{GM}{rc^2}$può raggiungere valori dell'ordine di 1.

In effetti la relatività generale riproduce, nel limite di campo debole, i risultati previsti dalla gravità newtoniana.

Ci si potrebbe chiedere come mai l'approssimazione lineare delle equazioni di Einstein sia così importante. Ci sono diversi motivi, sia per una comprensione più completa del significato fisico delle equazioni, sia per motivi di utilità pratica, non ultimo quello riguardo l'introduzione del concetto di onda gravitazionale.

1.2. ONDE GRAVITAZIONALI.

Gli effetti gravitazionali non si possono propagare con velocità infinita e ciò è conseguenza del fatto che ci sono violazioni di causalità associate a segnali con velocità superiore a quella della luce. La velocità della luce è l'unica che sia invariante per trasformazioni di Lorentz e ci si aspetta che gli effetti gravitazionali si propaghino sotto forma di onde alla velocità della luce.

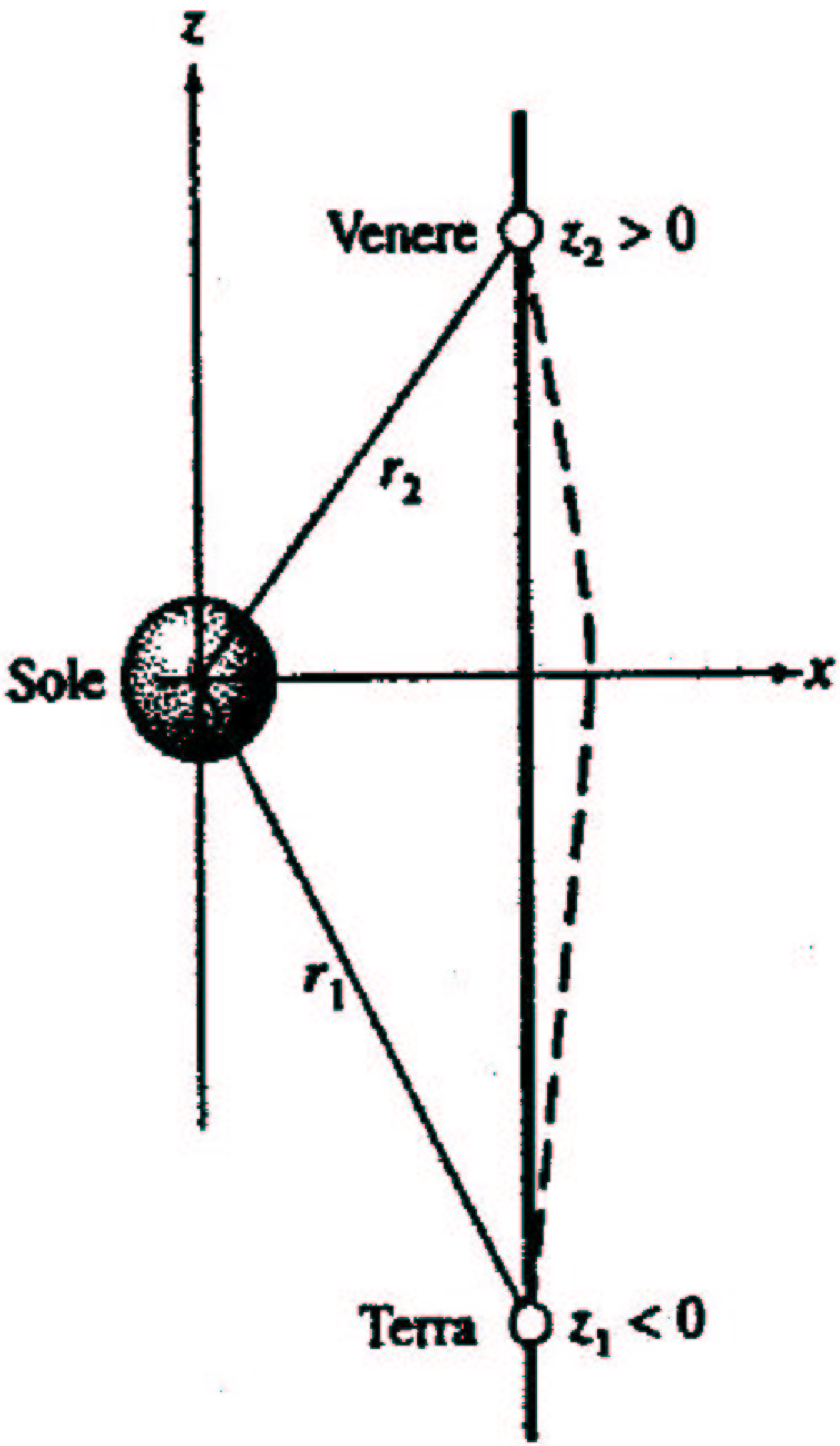

FIGURA 1.1.2. Traiettoria di un raggio di luce tra la terra ed un pianeta. La traiettoria vera è indicata dalla linea tratteggiata. La traiettoria rettilinea è un'approssimazione.

L'esistenza delle onde gravitazionali è una conseguenza immediata della relatività e, in un certo senso, la scoperta sperimentale delle onde gravitazionali confermerebbe semplicemente una ovvietà. Tuttavia, sebbene l'esistenza delle onde sia garantita da argomenti generali, l'intensità ed il tipo di onda dipende dai dettagli della teoria gravitazionale, e quindi gli studi sperimentali delle proprietà delle onde costituirebbero una verifica della teoria. Un aspetto ancora più importante è che l'astronomia basata sulle onde gravitazionali sarebbe una utile aggiunta alla astronomia ottica. Le onde gravitazionali permetterebbero di sondare nei nuclei dei quasar (cluster di stelle extragalattiche) ed in altre regioni con campi gravitazionali intensi. L'energia, la forza della pulsazione, e la polarizzazione dei segnali impulsivi di radiazione gravitazionale potrebbero rivelare i processi astrofisici in cui questi segnali sono generati.

Dunque una delle più importanti previsioni della relatività generale è l'esistenza delle onde gravitazionali.

Secondo la teoria di Einstein un'onda gravitazionale è una perturbazione della metrica dello spazio-tempo che si propaga alla velocità della luce. Il genere di onde gravitazionali cui siamo interessati sono assai deboli e dunque possono essere considerate nel studiarle come una piccola perturbazione rispetto ad una geometria di fondo (minkowskiana, trascurando sia la curvatura dello spazio-tempo di origine cosmologica sia quella prodotta da sorgenti locali come la terra).

Considerando il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ come

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{1.2.1}$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è la metrica Minkowskiana e $h_{\mu\nu}$ una sua piccola perturbazione, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Definendo i campi di radiazione $\phi_{\mu\nu}$ come

$$\phi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu} \tag{1.2.2}$$

si ha che le equazioni di Einstein nel vuoto, linearizzate, diventano

$$\Box\phi^{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.3}$$

con la condizione di gauge

$$\partial_\mu\phi^{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.4}$$

Le soluzioni di (1.2.3) e (1.2.4) possono essere rappresentate da onde piane monocromatiche :

$$\phi_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha} + e^*_{\mu\nu}e^{-ik_\alpha x^\alpha} \tag{1.2.5}$$

dove $e_{\mu\nu}$ è il tensore di polarizzazione (simmetrico, $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$) e k_α il vettore d'onda.

La (1.2.5) soddisfa le Eq. (1.2.3) e (1.2.4) se:

$$k_a k^\alpha = 0 \tag{1.2.6}$$

$$e^{\mu\nu}k_\mu = 0 \tag{1.2.7}$$

Per un'onda piana monocromatica le componenti indipendenti di $h_{\mu\nu}$ sono soltanto 2: esistono solo due stati fisici indipendenti di polarizzazione per un'onda gravitazionale di dato momento, risultato coerente con la teoria quantistica relativistica .

Nel limite di campo debole, la quantizzazione del campo gravitazionale comporta l'introduzione della particella di campo detta "gravitone". I gravitoni trasportano due unità di momento angolare (elicità $\pm 2\hbar$), hanno massa nulla e di conseguenza possono esistere solo nei due stati di elicità massima.

Si può affermare che una onda elettromagnetica può essere decomposta in parti con elicità $\pm\hbar$ e 0. Tuttavia, le elicità significative dal punto di vista fisico sono $\pm\hbar$ e non 0. Per un'onda gravitazionale invece le elicità fisiche sono $\pm 2\hbar$, non $\pm\hbar$ oppure 0.

Le onde gravitazionali sono trasversali così come le onde elettromagnetiche. Questo fatto è espresso dalla condizione (1.2.7).

Per esempio per un'onda piana gravitazionale che si propaga lungo l'asse x, $k_\mu = (\omega, \frac{\omega}{c}, 0, 0)$ e quindi

$$\phi^{\mu\nu} = e^{\mu\nu} \cos\left(\frac{\omega}{c}(x - ct)\right) \tag{1.2.8}$$

Il più generale $e_{\mu\nu}$ per questa particolare direzione di propagazione può scriversi come combinazione lineare dei seguenti due tensori di polarizzazione (detti trasversi):

$$e_{+}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e_{\times}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.9}$$

queste sono le uniche polarizzazioni che corrispondono ad onde gravitazionali fisiche.

Si possono definire onde polarizzate circolarmente, con tensori di polarizzazione

$$e_{+}^{\mu\nu} - i e_{\times}^{\mu\nu} \tag{1.2.10}$$

e

$$e_{+}^{\mu\nu} + i e_{\times}^{\mu\nu} \tag{1.2.11}$$

queste onde polarizzate circolarmente trasportano momento angolare. La quantità di momento angolare è proporzionale alla quantità di energia trasportata dall'onda:

$$[\text{Momento angolare}] = \frac{2}{\omega}[\text{Energia dell'onda}]$$

Le onde con polarizzazione (1.2.10) hanno momento angolare parallelo al flusso di energia e si dice che possiedono elicità positiva; quelle con polarizzazione (1.2.11), hanno momento angolare antiparallelo rispetto al flusso di energia e si dice che possiedono elicità negativa.

Dunque anche le equazioni di Einstein, come le equazioni di Maxwell, ammettono soluzioni radiative. Purtroppo la teoria della radiazione gravitazionale è complicata dalla non linearità delle equazioni di Einstein. Tuttavia le proprietà più semplici sia delle onde elettromagnetiche che di quelle gravitazionali si rendono evidenti quando ci si trova nella zona d'onda, dove i campi sono deboli.

La teoria di Einstein prevede che la radiazione gravitazionale venga prodotta in quantità estremamente ridotta negli ordinari processi atomici. Per esempio, la probabilità che avvenga una transizione tra due stati atomici per emissione di radiazione gravitazionale piuttosto che per emissione di radiazione elettromagnetica è [**1**] all'incirca:

$$\frac{(P_{A\to B})_{\text{grav}}}{(P_{A\to B})_{\text{e.m.}}} \simeq \left(\frac{GE^2}{e^2}\right) \simeq 10^{-54} \ll 1$$

dove G è la costante di Newton, e la carica elettrica ed E una tipica separazione energetica tra due livelli, dell'ordine di 1 eV.

Ma allora ci si potrebbe chiedere perché si studia la radiazione gravitazionale. Prima di tutto una sua osservazione diretta fornirebbe una fondamentale verifica della teoria di Einstein; di più le onde gravitazionali potrebbero essere usate come sonde per lo studio di regioni con campi gravitazionali intensi. Ovviamente questi sono solo alcuni dei motivi che giustificano lo sforzo per la conoscenza diretta di queste onde.

Nel prossimo paragrafo si tratterranno le possibili sorgenti di radiazione gravitazionale.

1.3. SORGENTI DI ONDE GRAVITAZIONALI

Seguendo l'analogia con l'elettrodinamica, l'emissione di onde gravitazionali può essere espressa in termini di potenziale ritardato.

Nell'ipotesi di applicabilità dell'espansione multipolare ($a/\lambda \ll 1$, con a dimensione della sorgente e λ lunghezza d'onda della radiazione), la conservazione della massa vieta la generazione di radiazione di monopolo mentre la conservazione della quantità di moto e quella del momento angolare del sistema vietano la generazione di radiazione dipolare di tipo elettrico e magnetico rispettivamente. Dunque non esiste né radiazione di monopolo né radiazione dipolare gravitazionale. Il primo termine non nullo dello sviluppo in multipoli della radiazione gravitazionale è rappresentato dal termine quadrupolare. Definiamo il tensore di momento di quadrupolo ridotto delle masse $I_{\mu\nu}$:

$$I_{\mu\nu} = \int d^3\vec{r} \left(x_\mu x_\nu - \frac{1}{3} r^2 \delta_{\mu\nu} \right) \rho(\vec{r}) \tag{1.3.1}$$

La perturbazione alla metrica minkowskiana $\eta_{\mu\nu}$ causata da questo tipo di radiazione emessa dalla sorgente è del tipo [**5**]:

$$h_{\mu\nu} = \frac{2G}{Rc^4} \frac{d^2 I_{\mu\nu}}{dt^2} \tag{1.3.2}$$

dove R è la distanza sorgente-punto di osservazione.

Tale radiazione è detta radiazione quadrupolare poiché la perturbazione è espressa in termini del momento di quadrupolo ridotto.

Per esempio consideriamo le onde emesse da una coppia di corpi puntuali di masse uguali che si muovono in moto orbitale attorno al loro centro di massa comune. Questo esempio rappresenta in modo semplice un sistema di stelle binarie (per esempio due stelle di neutroni), una delle più probabili sorgenti astronomiche di onde gravitazionali.

Assumiamo che ciascun oggetto abbia massa M e che la loro distanza relativa sia $2d$. Supponiamo che la normale al piano orbitale sia lungo l'asse z, allora segue direttamente dalla (1.3.1) che le componenti del momento di quadrupolo ridotto sono:

$$I_{xx} = 2Md^2\left[\cos^2(2\pi f_{\text{orb}}t) - \frac{1}{3}\right] \tag{1.3.3}$$

$$I_{yy} = 2Md^2\left[\sin^2(2\pi f_{\text{orb}}t) - \frac{1}{3}\right] \tag{1.3.4}$$

$$I_{xy} = I_{yx} = 2Md^2\left[\cos(2\pi f_{\text{orb}}t)\sin(2\pi f_{\text{orb}}t)\right] \tag{1.3.5}$$

Le componenti che coinvolgono z sono costanti: $I_{zz} = \frac{1}{3}Md^2$, mentre $I_{xz} = I_{yz} = 0$, e per questo non contribuiscono.

Calcolando le derivate seconde temporali degli I_{ij} si ottengono immediatamente le ampiezze d'onda gravitazionali. Per esempio per un punto lungo l'asse z a distanza R dalla sorgente , si ha:

$$h_{xx} = -h_{yy} = \frac{32\pi^2 G}{Rc^4}Md^2 f_{\text{orb}}^2 \cos\left[2(2\pi f_{\text{orb}})t\right] \tag{1.3.6}$$

$$h_{xy} = h_{yx} = -\frac{32\pi^2 G}{Rc^4}Md^2 f_{\text{orb}}^2 \sin\left[2(2\pi f_{\text{orb}})t\right] \tag{1.3.7}$$

Le h_{ij} di questa forma rappresentano tipiche forme d'onda gravitazionali di sorgenti periodiche, sorgenti di cui si parlerà tra breve.

L'analogo della radiazione di quadrupolo gravitazionale è la radiazione dipolare di tipo elettromagnetico. Questi tipi di radiazione corrispondono all'approssimazione di ordine minore che si può effettuare nella soluzione ritardata della equazione di campo.

L'emissione di onde gravitazionali comporta perdita di energia del sistema che irraggia. La perdita di energia del sistema nell'unità di tempo è [**5**]:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\left(\frac{d^3Q_{\alpha\beta}}{dt^3}\right)^2 \tag{1.3.8}$$

dove

$$Q_{\alpha\beta} = 3I_{\alpha\beta} \tag{1.3.9}$$

Dalla (1.3.8) si deduce che la radiazione totale delle onde gravitazionali produce un effetto del quinto ordine in $1/c$. Questa proprietà, unita al fatto che la costante di Newton è una grandezza "piccola", $G = 6.67\times10^{-8}\mathrm{cm}^3/\mathrm{gsec}^2$ ($G/c^2 = 7.4\times10^{-29}\mathrm{cm/g}$) implica che l'emissione di onde gravitazionali sia in generale difficilmente osservabile.

Le onde più intense che possono raggiungere un osservatore terrestre si prevede che siano prodotte in processi astrofisici in cui si verificano moti accelerati di corpi molto massivi (la radiazione gravitazionale viene emessa esclusivamente quando i corpi sono sottoposti ad accelerazioni). Una sorgente astrofisica efficiente di radiazione gravitazionale può essere una supernova che esplode, emettendo onde gravitazionali di ampiezza $h \simeq 10^{-18}$ (ampiezza misurata in un rivelatore interferometrico terrestre). Di supernove e di altre possibili sorgenti si parlerà in seguito.

Dalle equazioni (1.3.8) segue che qualsiasi sistema di masse con momento angolare di quadrupolo dipendente dal tempo e con la derivata temporale terza di $Q_{\alpha\beta} \neq 0$ irraggia.

Le sorgenti di onde gravitazionali sono classificabili in sorgenti periodiche e in sorgenti impulsive.

1.3.1. Sorgenti periodiche. Le sorgenti periodiche sono caratterizzate da un momento di quadrupolo che presenta un andamento temporale periodico. L'emissione avviene a frequenze che corrispondono alle armoniche della frequenza corrispondente a tale periodo. Esempi di sorgenti periodiche sono le masse vibranti, le masse rotanti, il quadrupolo lineare (due masse uguali connesse da una molla).

Il quadrupolo lineare si studia principalmente per motivi teorici poiché irraggia in quantità trascurabile quando composto di masse con dimensioni tipiche di un laboratorio terrestre. Non ci sono sorgenti astrofisiche di onde gravitazionali con la forma di un quadrupolo lineare. Tuttavia una stella vibrante mostra alcuni dei comportamenti generali del quadrupolo lineare oscillante e pertanto si può stimare la radiazione emessa da una stella usando le semplici relazioni valide per un quadrupolo lineare.

Un'altra semplice sorgente periodica di onde gravitazionali è il quadrupolo rotante. Esso consiste di due particelle o due masse sferiche che si muovono su orbite circolari attorno al loro centro di massa comune. La potenza emessa dal quadrupolo rotante è:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5}\frac{G}{c^5}\mu^2 r^4 \omega^6 \tag{1.3.10}$$

dove μ é la massa ridotta del sistema, r la distanza tra i due corpi e ω la frequenza orbitale.

Il moto orbitale di un sistema binario ci fornisce l'esempio più semplice di emissione di onde gravitazionali da un quadrupolo rotante. Ma anche il moto di rotazione di ogni sistema costituito da particelle in orbita attorno al centro, oppure di un corpo asimmetrico attorno ad un asse, produrrà un momento di un quadrupolo dipendente dal tempo che emetterà onde gravitazionali (per esempio le stelle di neutroni).

1.3.1.1. *Novae.* Le novae sono stelle (candele nucleari) variabili che mostrano un breve, esplosivo aumento di luminosità che dura solo pochi giorni e poi decade gradualmente. L'esplosione di una nova è determinata da una violenta fusione termonucleare innescata sulla superficie della stella quando una massa critica di gas, proveniente da una stella compagna, si accumula sulla superficie.

La radiazione emessa da vibrazioni di quadrupolo potrebbero essere importante nel caso delle novae.

Nel 1934 Baade e Zwicky [**58**] notarono che durante l'esplosione di una nova, esse aumentavano la loro luminosità di un fattore aggiuntivo pari a circa 10^{-6} volte la luminosità che le caratterizzavano durante la fase di quiescenza.

Dunque questo aumento di luminosità era estremamente basso, e questo fatto, unito alla proprietà delle nove di avere una velocità di smorzamento relativamente alta, dove per quest'ultima si intende il rapporto tra perdita di energia e l'energia medesima della stella, permette di poter considerare le nove come sorgenti periodiche di radiazione gravitazionale.

In modo più quantitativo, risulta che la velocità di smorzamento è espressa come

$$\gamma_{\text{rad}} \equiv -\frac{1}{E}\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_{\text{tempo}}$$

dove E rappresenta l'energia del sistema mentre $< dE/dt >$ è la potenza totale mediata nel tempo. γ^{-1} viene detto tempo di smorzamento e rappresenta il tempo che il sistema impiega per perdere una frazione e^{-1} della sua energia sotto forma di radiazione gravitazionale. Schematizzando, in prima approssimazione, una nova con un oscillatore unidirezionale quadrupolare vibrante (il modello più elementare di una tipica sorgente periodica di onde gravitazionali), risulta

$$\gamma_{\text{rad}} \simeq \frac{G}{c^5} m d^2 \omega^4 \simeq 10^{-1}\text{sec}^{-1}$$

$$\gamma_{\text{rad}}^{-1} \simeq 10\text{sec}$$

dove m è la massa in gioco, d la scala di dimensioni tipica del sistema e ω la frequenza di emissione, $10^{-2}\text{Hz} < \omega/(2\pi) < 1\text{Hz}$.

Esplosioni di novae si verificano in sistemi binari costituiti da nane bianche, dove l'accrescimento da una stella compagna determina un grande accumulo di combustibile nucleare sulla superficie della nana bianca, finché il combustibile raggiunge una massa critica ed esplode. L'esplosione innesca delle vibrazioni nel corpo della nana bianca. L'energia rilasciata in una esplosione di una nova è tipicamente 10^{45}erg, di cui forse il 10% viene depositato nel moto di oscillazione della stella e viene successivamente emesso sotto forma di onde gravitazionali.

1.3.1.2. *Stelle di Neutroni.* Una stella di neutroni può essere considerata come un plasma elettronico-nucleare fortemente compresso [**6**].

Il moto di rotazione delle stelle di neutroni ha un grande interesse astrofisico. Una grande quantità di energia (superiore a 10^{45}erg) viene emessa da vibrazioni di stelle di neutroni, stelle formate in implosioni di supernovae (si veda il paragrafo 1.3.2.2). Poiché il tempo di smorzamento delle vibrazioni di una stella di neutroni è abbastanza breve (una frazione di secondo), questo tipo di radiazione ha la forma di un impulso. Il periodo di radiazione delle stelle di neutroni (il periodo delle pulsar, stella di neutroni rotante che emette impulsi radio) è compreso in genere nell'intervallo tra 0.03 e 3 secondi. Se una stella di neutroni rotante presenta una deviazione dalla simmetria cilindrica esatta rispetto all'asse di rotazione, allora è un quadrupolo rotante che emette radiazione gravitazionale.

1.3.2. Sorgenti impulsive. Le sorgenti impulsive di radiazione gravitazionale sono invece caratterizzate da un momento di quadrupolo che varia per un breve periodo in modo non periodico. Esse emettono un impulso di onde gravitazionali. Una massa che subisce una breve ed improvvisa accelerazione collidendo con un'altra massa è un esempio di sorgente impulsiva.

Consideriamo alcuni esempi di sorgenti impulsive.

1.3.2.1. *Coalescenza di un Sistema Binario.* Un sistema binario è costituito da un insieme di due stelle in rotazione.

A causa della perdita di energia per radiazione gravitazionale, le orbite di due stelle in un sistema binario si restringono gradualmente e le stelle si muovono gradualmente a spirale una verso l'altra. Questo avvicinamento dapprima è lento, ma quando le stelle si spostano su orbite sempre più piccole, con frequenza orbitali sempre maggiori, tale avvicinamento diventa estremamente accelerato. Le stelle si muovono una verso l'altra sempre più velocemente, emettendo un crescendo di radiazione gravitazionale. L'urto determina una vampata finale di radiazione gravitazionale. La radiazione emessa durante questa coalescenza di un sistema binario è inizialmente periodica, o quasi-periodica, ma la radiazione emessa durante le ultime rivoluzioni è un fenomeno impulsivo.

E' quasi universalmente accettato che la più promettente sorgente di onde gravitazionali da rivelare sia rappresentata dalla coalescenza di un sistema binario massivo composto, per esempio, da due stelle di neutroni. In prima approssimazione (approssimazione newtoniana), quando i due corpi sono sufficientemente lontani, l'espressione esplicita della forma d'onda può essere fornita dalla parte reale del segnale complesso [**5**]

$$x(t,t_0,M) = A(t-t_0)^{-1/4} \exp\left(-i2\pi d(r_0-r)^{5/8}\right) \theta(t_0-t) \tag{1.3.11}$$

dove $\theta(t)$ è la funzione gradino, t_0 il tempo di coalescenza, μ la massa ridotta del sistema. A e d costanti che dipendono da alcuni parametri fisici che caratterizzano il sistema, in particolare

$$d \simeq 241 \left(\frac{\mu^{\frac{3}{5}} M^{\frac{2}{5}}}{M_{\odot}}\right)^{-\frac{5}{8}} \tag{1.3.12}$$

Anche una particella che cade in accelerazione verso una stella lungo una direzione radiale costituisce una possibile sorgente di onde gravitazionali.

1.3.2.2. *Collasso Gravitazionale di Supernovae.* Le supernovae sono stelle che mostrano un aumento esplosivo della luminosità, come le novae, ma raggiungono una luminosità molto più alta ed impiegano più tempo per decadere. Le supernovae sono di due tipi, I e II. Le supernovae di tipo I derivano dall'esplosione di una nana bianca il cui nucleo di carbonio si accende quando la stella è surriscaldata dal gas accumulato sulla sua superficie, proveniente da una stella compagna. Le supernovae di tipo II invece derivano dal collasso gravitazionale catastrofico di una stella di grande massa che ha esaurito il carburante nucleare.

Discutiamo brevemente in cosa consiste il concetto di collasso gravitazionale.

Nelle stelle normali, come il sole, la spinta gravitazionale verso l'interno viene mantenuta in equilibrio dalla pressione termica del gas. Questa pressione termica sarà sufficiente a resistere alla spinta gravitazionale solo se la stella a abbastanza calda. La stella può pertanto rimanere in equilibrio fino a quando l'energia liberata in queste relazioni compensa l'energia perduta per radiazione alla superficie. In una stella che ha esaurito la scorta di combustibile nucleare, la pressione termica alla fine svanirà, e la stella collasserà sotto il suo stesso peso. Il collasso può essere improvviso (implosione) o graduale (contrazione), ma in ogni caso può essere arrestato solo se si rende disponibile raggiunta una certa densità un meccanismo alternativo per generare sufficiente pressione.

Nelle nane bianche e nelle stelle di neutroni esiste un meccanismo alternativo di questo genere: queste stelle sono così dense che la pressione quanto- meccanica di punto zero diventa prevalente. In sostanza, un gas degenere di Fermi di elettroni fornisce la pressione di equilibrio in una nana bianca, ed un gas di Fermi di neutroni quella in una stella di neutroni.

Alle densità di una nana bianca ($\rho > 10^5 \mathrm{g/cm}^3$) gli elettroni sono separati dai loro nuclei e si muovono abbastanza liberamente attraverso il volume della stella. La stella consiste di gas compenetranti di elettroni e nuclei. La pressione di punto zero del gas di elettroni fornisce il contributo principale alla pressione, ed i nuclei danno il contributo principale alla densità di massa. L'equazione di stato (pressione in funzione della densità) basata su questo modello consente configurazioni di equilibrio, posto che la massa totale sia al di sotto di un limite superiore critico. Se la massa supera questo limite critico (limite di Chandrasekhar), allora la pressione degli elettroni non può sostenere la stella.

Da un calcolo approssimato risulta [**3**]:

$$M_{\text{crit}} \propto \left(\frac{\hbar c}{G m_n^2}\right)^{\frac{3}{2}} m_n \simeq 1 M_\odot \tag{1.3.13}$$

dove $m_n \simeq 1\text{GeV}$ è la massa del neutrone. Si è stimato che la massa critica per una nana bianca è dell'ordine di $1.44 M_\odot$.

La densità di una stella di neutroni è molto più alta di quella di una nana bianca. Essa è paragonabile con le densità nucleari ($\simeq 2 \times 10^{14}\,\text{g}/\text{cm}^3$), e quindi la stella può essere descritta come un singolo nucleo gigante. La maggior parte della stella consiste di un gas di Fermi di neutroni, con alcuni protoni ed elettroni.

Al centro vi è un piccolo nucleo contenente particelle pesanti. Come la nana bianca, la stella di neutroni ha un valore limite per la massa, oltre al quale la pressione di punto zero dei neutroni diviene insufficiente per l'equilibrio.

Secondo un primo calcolo di Oppenheimer e Volkoff (1939), nel quale le forze nucleari tra neutroni vennero trascurate, la massa critica di una stella di neutroni è di circa $0.7 M_\odot$, detto Limite di Oppenheimer-Volkoff. Calcoli successivi di Wheeler (1965) hanno cercato di tenere conto delle forze nucleari, ed hanno trovato una massa limite leggermente più grande.

Questi valori della massa limite si ottengono assumendo un nucleo duro repulsivo nell'interazione nucleare, che rende il materiale nucleare molto rigido ad alte densità. Ma per quanto alle alte densità l'equazione di stato venga modificata dalle interazioni, è possibile dimostrare che esiste sempre un limite superiore alla rigidità ed alla massa che può essere sostenuta. La ragione di questo è che la rigidità di una materiale è direttamente correlata alla velocità del suono. La condizione che la velocità del suono non superi quella della luce pone dunque un limite alla rigidità del materiale.

Ciò conduce alla conclusione che la massa di una stella di neutroni non può mai superare $3.2M_{\odot}$, indipendentemente da qualsiasi ipotesi sui dettagli dell'equazione di stato ad alte densità (Rhoades - Ruffini).

Un'altra sorgente di radiazione gravitazionale è rappresentata dal collasso gravitazionale di supernove. In breve succede quanto segue:

quando una stella di parecchie masse solari evolve in uno stato di densità elevata, il campo gravitazionale può diventare così intenso che la pressione interna non riesce più a bilanciare il peso degli strati esterni della stella. La parte centrale della stella viene compressa dal suo stesso campo gravitazionale e collassa, fino a raggiungere densità nucleari, momento in cui il collasso subito rallenta e si arresta. Questo arresto improvviso genera un'onda d'urto che si propaga verso l'esterno e va a distruggere gli strati superficiali della stella in una tremenda esplosione. Nel frattempo il nucleo raggiunge una configurazione stabile come stella di neutroni oppure, se è troppo massivo, continua a collassare ed infine arriva a formare un buco nero.

1.3.2.3. *Buchi Neri.* Un buco nero è una regione finita di spazio dentro la quale possono entrare segnali, ma dalla quale nessun segnale può uscire.

L'esistenza dei buchi neri fu ipotizzata negli anni attorno al 1930 su un piano puramente teorico, principalmente attraverso il lavoro di J.Robert Oppenheimer e dei suoi collaboratori. Tuttavia questi oggetti esotici rimasero tali fino agli anni attorno al 1960, quando gli sforzi di radioastronomi iniziarono a rivelare molte cose nuove e strane nel cielo.

L'esistenza dei buchi neri, pur essendo prevista teoricamente dalla relatività generale, non è supportata da evidenze sperimentali conclusive. Tuttavia, dato che essi sono un prodotto finale dell'evoluzione stellare, i buchi neri potrebbero essere abbastanza abbondanti. E' persino possibile che in alcune galassie la maggior parte delle masse si trovi sotto forma di buchi neri (un buco nero isolato non emette luce e non sarebbe osservabile direttamente). Dato che il sole è una stella abbastanza tipica, la maggior parte della materia in queste galassie deve essere “materia oscura” di luminosità molto bassa. Sono ipotizzate numerose forme di materia oscura, e tra queste i buchi neri.

La più strana caratteristica di questi oggetti è che un tale corpo deve necessariamente collassare sotto il suo stesso peso in dimensioni infinitesimali, e pertanto in densità infinita.

Occorrono soltanto tre numeri per caratterizzare completamente un determinato buco nero: la sua massa, il momento angolare (moto rotatorio) e la sua carica elettrica.

Un buco nero agisce, a livello classico, come un assorbitore perfetto: permette ad ogni oggetto di entrare, ma non lascia uscire nulla. In realtà i buchi neri emettono radiazione termica, ciò è stato dimostrato dal fisico Stephen Hawking, il quale ha scoperto che nello spazio-tempo curvo di un buco nero, la radiazione termica è generata da un processo quantistico. Risulta [**3**] che la temperatura T che caratterizza lo spettro della radiazione emessa dal buco nero è collegata alla sua massa dalla relazione

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B} \tag{1.3.14}$$

Il processo di emissione di Hawking sembra contraddire la proprietà fondamentale dei buchi neri: nulla può emergere dal loro interno. In realtà la radiazione termica non proviene dall’interno del buco nero, ma viene creata da fluttuazioni quantistiche [**7**] sulla sua supeficie o vicino ad essa (la spiegazione corretta di questo fenomeno va ben al di là dei nostri scopi e delle mie attuali conoscenze, tuttavia dico solo che essa si ottiene utilizzando la teoria quantistica dei campi in uno spazio-tempo curvo [**14, 15**]).

La formazione di un buco nero comporta un grande aumento di entropia. L'entropia di un buco nero è proporzionale alla sua superficie A, e risulta che:

$$S \simeq \frac{k_B c^3}{4\pi\hbar G} A \tag{1.3.15}$$

Un tale aumento può essere reso plausibile dall'interpretazione fornita dalla teoria della informazione della entropia (Shannon). Quando il buco nero si forma, o quando aumentiamo le dimensioni del buco nero scaricandovi materia di qualsiasi tipo, perdiamo informazioni sulla materia intrappolata. Questa perdita di informazione corrisponde ad una aumento di entropia.

Vi è un aspetto molto importante che è correlato alla radiazione di Hawking, il buco nero diventa sempre più piccolo e la radiazione sempre più intensa.

Poco prima di essere alla fine, la dimensione diventerà paragonabile alla lunghezza di Planck [**49**] ($l_{\text{Planck}} = \sqrt{\hbar G/c^3} \simeq 1.616 \times 10^{-33}$cm; la lunghezza di Planck è una lunghezza caratteristica che dipende da fattori correlati a gravità, spazio-tempo e quanti, essa è una unità "naturale" per ogni teoria che tenti di unire relatività generale e meccanica quantistica).

Soltanto una teoria completa della gravitazione quantistica può prevedere con precisione, e descrivere, ciò che di un buco nero avverrà dopo.

I buchi neri sarebbero il laboratorio ideale per esperimenti concettuali, ed il ruolo dei buchi neri nel mondo dell'infinitamente piccolo si prospetta importante [**49**]. Se si vuole veramente capire in quale modo la forza di gravità agisca su particelle individuali, quale migliore laboratorio concettuale si può scegliere se non il campo gravitazionale più intenso possibile?

L'osservazione di onde gravitazionali potrebbe fornire la prova schiacciante per l'esistenza di buchi neri, ed uno dei migliori modi di studiare le loro proprietà. I buchi neri potrebbero formarsi in un collasso gravitazionale, in un modo simile alla formazione di una stella di neutroni. La nascita di un buco nero da un collasso gravitazionale, oppure la collisone di due buchi neri già formati,

Sorgenti astrofisiche di radiazione gravitazionale

Sorgente	Frequenza	Distanza**	Ampiezza
Sorgenti periodiche			
Binarie	10^{-4} Hz	10 pc	10^{-20}
Nova	da 10^{-2} a 1	500 pc	10^{-22}
Stella di neutroni rotante (pulsar nella nebulosa del Granchio)	60	2 kpc	$< 10^{-24}$
Sorgenti impulsive			
Coalescenza di binarie	da 10 a 10^3	100 Mpc	10^{-21}
Caduta di una stella in un buco nero di 10 $M_\odot$	10^{-4}	10 Mpc	10^{-21}
Supernova	10^3	10 kpc	10^{-18}
Collasso gravitazionale di una stella di 10^4 $M_\odot$	10^{-1}	3 Gpc	10^{-19}

FIGURA 1.3.1. Tabella riassuntiva delle principali sorgenti astrofisiche.

potrebbero essere una forte sorgente di onde gravitazionali. La collisione di un paio di buchi neri emette onde gravitazionali in modo simile a quella che si verifica in una collisione di due stelle di neutroni.

In modo schematico le sorgenti astrofisiche di radiazione gravitazionale possono essere rappresentate come in Tabella 1.3.1 ($1\text{pc} = 1\text{parsec} = 3.0856 \times 10^{18}\text{cm}$).

Dopo aver brevemente parlato di sorgenti di onde gravitazionali, nel prossimo paragrafo si discuterà dei modi possibili di rivelazione delle onde medesime.

1.4. RIVELAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI

Esperimenti che tendono a rivelare la radiazione gravitazionale sono stati condotti inizialmente da Joseph Weber attorno al 1960, e sono tuttora condotti in diversi laboratori sparsi per il mondo. Alcuni di questi esperimenti si basano su oscillatori risonanti (bars), che possono essere rappresentati da qualsiasi piccolo sistema meccanico o idrodinamico dotato di un modo libero di oscillazione.

Le sezioni d'urto efficaci di queste antenne possono essere valutate utilizzando il teorema ottico[**1**], senza alcun bisogno di una dettagliata analisi dell'interazione tra l'onda gravitazionale e l'antenna. Altri rivelatori sono di tipo interferometrico, tipo quello di Michelson-Morley.

La banda di frequenza delle onde gravitazionali più promettente per la rivelazione è quella delle medie frequenza, da 10^2 a 10^5 Hz. Ci sono parecchie probabili sorgenti di onde gravitazionali in questa banda e, fortunatamente, si possono costruire rivelatori sensibili a queste frequenze.

Ci sono pochi dubbi che le onde gravitazionali incidano sulla terra, il problema è costruire un'antenna sufficientemente sensibile da rivelarle. I rivelatori ad onde gravitazionali di ampiezza $h \simeq 10^{-20}$ sono già stati costruiti, ma rispondono solo ad onde con frequenza molto più alte di quelle emesse da sistemi binari, e non ci sono prospettive immediate per la diretta rivelazione di queste onde gravitazionali.

Come è stato detto precedentemente, i primi rivelatori di radiazione gravitazionale sono stati costruiti da Weber. Tali rivelatori sono cilindri massivi di alluminio le cui oscillazioni quadrupolari vengono eccitate dalle onde gravitazionali. Il rivelatore quadrupolare è sensibile ad una onda gravitazionale periodica (o continua) solo se la frequenza dell'onda è accordata con quella di risonanza del rivelatore ed è sensibile ad un impulso d'onda solo se la trasformata di Fourier di tale impulso ha una componente alla frequenza di risonanza. Ovviamente ci sono problemi di natura tecnica che limitano la capacita di analizzare l'interazione onda rivelatore. Uno di questi problemi è quello di fornire un buon isolamento contro le vibrazioni meccaniche esterne, ma ancora più importante è limitare il rumore termico nelle oscillazioni del cilindro. I primi rivelatori di Weber lavoravano a temperatura ambiente $T \simeq 300K$; le fluttuazioni termiche di energia in ciascun modo di vibrazione sono dell'ordine di $k_B T$ e per poter rivelare la presenza di un onda gravitazionale, l'energia di eccitazione deve essere almeno $k_B T$. Anche se il rivelatore registra un segnale di energia $k_B T$, non si può essere assolutamente certi che sia stato causato da una onda gravitazionale, poiché le fluttuazioni termiche a volte superano questo livello. Le fluttuazioni termiche seguono la distribuzione di Boltzmann; la probabilità di avere energia termica E è proporzionale a $\exp(-E/k_BT)$. Per avere una prova evidente dell'arrivo delle onde gravitazionali, si deve richiedere che l'energia depositata nel rivelatore sia diversi multipli di k_BT.

In modo alternativo, si potrebbero far lavorare due o più rivelatori in coincidenza; se un segnale viene osservato simultaneamente in tutti questi rivelatori, allora si può essere ragionevolmente certi che è presente una forza esterna, anche se questi segnali sono soltanto di un ordine di grandezza confrontabili con quello del rumore termico casuale. Per esempio stelle di neutroni rotanti possono emettere radiazione gravitazionale con una frequenza compresa tra 10 e 100 Hz, ed è possibile realizzare rivelatori di Weber accordati deliberatamente alla frequenza d'onda. Questo è un esempio eccezionale e realizzato di proposito, non si può fare affidamento su una coincidenza fortuita tra la frequenza dell'onda e quella di risonanza del rivelatore. In questi ultimi anni vari gruppi sperimentali hanno costruito rivelatori quadrupolari più grandi e con una sensibilità molto maggiore rispetto a quella raggiunta da Weber. I moderni rivelatori lavorano a temperature estremamente basse, prossime alla temperatura dell'elio liquido (4.2 K). La frequenza di risonanza di questi rivelatori è di circa 100Hz.

Il principio su cui si basano i rivelatori quadrupolari di Weber è, per sommi capi, il seguente: date due masse collegate elasticamente in un riferimento localmente inerziale, in una regione investita da una onda gravitazionale, esse oscilleranno. La loro distanza in genere varierà nel tempo e questo è un effetto osservabile. Si ha [**11**]:

$$\delta x_i = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} h_{ik} x_0^k \tag{1.4.1}$$

dove x_0 è la distanza media tra le masse test, δx_i la deviazione dalla distanza media, ω la frequenza dell'onda gravitazionale e ω_0 quella propria del sistema. La relazione (1.4.1) è valida nell'ipotesi in cui è possibile trascurare l'effetto dello smorzamento dell'oscillatore.

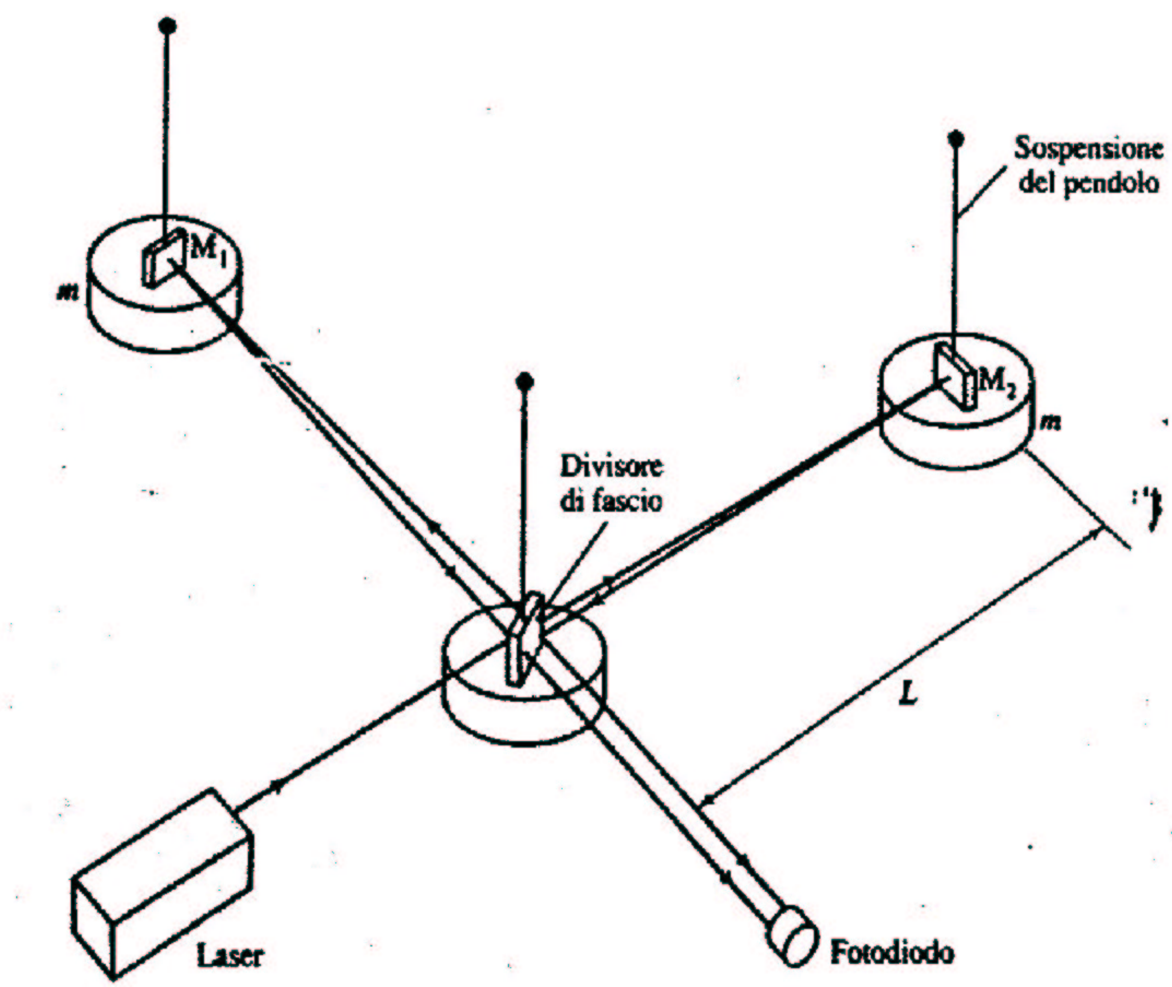

FIGURA 1.4.1. Interferometro di Michelson per la rivelazione di onde gravitazionali

Altri gruppi sperimentali hanno costruito rivelatori interferometrici quali quello in Figura 1.4.1. Il principio su cui si basano questi rivelatori è lo stesso di quello su cui si basano i rivelatori di Weber ma in questo caso le masse test sono libere. In questa situazione, la deviazione dalla distanza media x_0 tra le masse libere investite da una onda gravitazionale è data da

$$\delta x_i = \frac{1}{2} h_{ik} x_0^k \tag{1.4.2}$$

La sensibilità di tali rivelatori viene aumentata facendo più grande possibile la distanza x_0 tra le masse-test libere.

Dunque i rivelatori interferometrici misurano lo spostamento che un'onda gravitazionale incidente determinata tra una coppia di masse libere. Si possono ottenere masse libere sospendendole tramite fili metallici, come dei pendoli. Quando la frequenza del pendolo è molto minore di quella dell'onda gravitazionale, allora la massa sospesa si comporterà come una massa libera. La sospensione del pendolo ha in genere una frequenza dell'ordine di 1 Hz e la frequenza dell'onda gravitazionale deve essere quindi molto più grande di 1Hz.

Lo spostamento delle masse viene rivelato con metodi interferometrici basati sul principio di funzionamento di un interferometro di Michelson oppure di Fabry-Perot con cavità risonanti. Le masse libere sono fornite di specchi, ed un fascio di luce, emesso da un laser, viene riflesso lungo i bracci e poi lasciato interferire con se stesso. Un'onda gravitazionale incidente sposta gli specchi nei due bracci in modo diverso, e quindi genera uno sfasamento tra i fasci di luce che interferiscono. La misura dello sfasamento del fascio di luce deve essere terminata entro mezzo periodo T dell'onda gravitazionale, cioè deve essere $t_c < T/2$, dove t_c è il tempo di campionatura (per Virgo $t_c = 1/20 \times 10^3$ sec), questo perché dopo mezzo periodo l'onda sposterà gli specchi in direzioni opposte e lo sfasamento tra i due fasci di luce che interferiscono tornerà ad essere nullo. Per aver alta sensibilità i bracci dell'interferometro devono essere lunghi, inoltre è necessario un fascio laser intenso in modo che anche un piccolo sfasamento diventi misurabile.

L'ordine di grandezza dello spostamento Δl degli specchi è approssimativamente dato da[**5**]:

$$\Delta l \simeq \frac{1}{2} h l \tag{1.4.3}$$

dove h è l'ampiezza adimensionale dell'onda gravitazionale e l la lunghezza dei bracci dell'interferometro.

Interferometri di grande dimensione hanno specchi di massa di 100Kg e lunghezza dei bracci di circa 3 Km e sono dotati di laser stabilizzato con potenza stazionaria. Un'onda generata dall'esplosione di una supernova nel cluster di Virgo presenta un picco nell'ampiezza pari a $h \simeq 10^{-21}$. La rivelazione di questi segnali deboli è legata alla sensibilità dell'apparato sperimentale ed alla capacità di isolare segnali reali da quelli falsi, cioè da quello che in genere è chiamato rumore.

Nel prossimo capitolo si discuterà, tra l'altro, dei principali rumori che possono rendere difficile l'analisi dei dati forniti dai rivelatori interferometrici.

Nel prossimo paragrafo invece ci si soffermerà più in dettaglio sulle caratteristiche di un'antenna interferometrica con particolare riferimento a quella di Virgo.

1.4.1. INTERFEROMETRO LASER: VIRGO. Le onde gravitazionali perturbano lo spazio-tempo: al passaggio di un'onda, le distanze fra due punti prefissati aumenteranno o diminuiranno. Tale variazione è minima ed è proporzionale alla distanza tra i due punti. Questa minima variazione di distanza può essere misurata attraverso il fenomeno ottico dell'interferenza. Un rivelatore interferometrico gravitazionale consiste di cavità ottiche risonanti con agli estremi due specchi a distanza di qualche chilometro. Due fasci di luce laser prodotti da una stessa sorgente, dopo aver percorso cammini ottici molto lunghi all'interno delle cavità, vengono ricombinati sfasati in modo che nel rivelatore non arrivi luce. La variazione di lunghezza del cammino ottico prodotta da un'onda gravitazionale che abbia modificato la distanza fra gli specchi comporta un parziale sfasamento dei fasci e quindi un'alterazione nell'intensità luminosa che viene osservata, proporzionalmente all'ampiezza dell'onda.

Dunque il principio di funzionamento di un'antenna interferometrica è quello dell'interferometro di Michelson. I raggi laser provenienti dai due diversi cammini interferiscono sullo schermo formando una figura di interferenza. Se la lunghezza l di uno dei due bracci varia nel tempo si osserva un movimento delle frange di interferenza. L'arrivo di un'onda gravitazionale, ad esempio nella direzione perpendicolare ad uno dei bracci, produce un accorciamento o un allungamento di esso dell'ordine di $1/2hl$. Questa variazione della lunghezza può essere quindi rivelata osservando lo spostamento indotto sulle frange di interferenza. Il limite di questo metodo è la fluttuazione del numero di fotoni laser che vengono usati. Una tale fluttuazione simula una variazione della lunghezza del braccio pari a[**4**]:

$$\Delta l = \sqrt{\frac{\hbar c \lambda \Delta\nu}{\pi P}} \tag{1.4.4}$$

dove λ è la lunghezza d'onda e P la potenza del laser, e $\Delta\nu$ la banda di frequenza considerata.

Pertanto il limite alla misura di h è:

$$h \geq 2\frac{\Delta l}{l} = 2\sqrt{\frac{\hbar c \lambda \Delta\nu}{\pi P l^2}} \tag{1.4.5}$$

Con un valore ideale $P = 100$Watt, $\lambda = 0.6\mu m$, $\Delta\nu = 1000$Hz, affinché si possa avere $h \geq 4 \times 10^{-21}$ è necessario che sia $l = 30$Km. E' possibile superare l'ovvia difficoltà di dover costruire dei bracci così lunghi con un interferometro di Michelson multi-pass, in cui viene aumentato ognuno dei due cammini ottici del braccio laser facendolo riflettere più volte avanti e indietro tra due specchi posti a distanza l. Per studiare correttamente il problema è necessario considerare l'intervallo $ds^2 = c^2dt^2 - (1-h(t))dx^2 - dy^2 = 0$ per il fotone dei laser, con l'onda gravitazionale viaggiante lungo l'asse x o l'asse y. Lo sfasamento introdotto da un'onda gravitazionale monocromatica di frequenza ν è :

$$\delta\phi = \frac{h\nu_L}{\nu}\sin(\pi\nu\tau_s) \tag{1.4.6}$$

dove ν_L è la frequenza del raggio laser e τ_s il tempo di immagazzinamento (storage time)

$$\tau_s \simeq \frac{L}{c}\frac{F}{\pi}$$

dove L è la lunghezza della cavità di Fabry-Perot mentre F si dice essere la "finesse" della cavità. La finesse caratterizza l'acutezza della risonanza della cavità ed è definita come il rapporto tra la larghezza (a metà altezza) di risonanza della cavità ed il range spettrale libero $\Delta f \equiv c/2L$, cioè l'intervallo tra due risonanze consecutive. Il tempo di immagazzinamento esprime il tempo di viaggio del raggio laser attraverso il cammino completo (tenendo conto cioé di tutte le riflessioni) all'interno della cavità ottica. Si osserva il massimo dello sfasamento se $\pi\nu\tau_s = \pi/2$, cioè per $\tau_s = \nu/2 = 1/(2T)$, dove T è il periodo dell'onda gravitazionale.

La misura con l'interferometro è perturbata da vari tipi di rumore.

Estremamente importante è il cosiddetto shot noise. Questo tipo di rumore, dovuto ad una fluttuazione statistica del numero di fotoni che arrivano sullo schermo, introduce un limite quantistico alla misura di h [**4**], limite il cui significato sarà chiarito nel prossimo capitolo (Sezione 2.2.3),

$$h \geq \sqrt{\frac{\pi\lambda\hbar\Delta\nu}{\varepsilon I_0 c}} \frac{\nu}{\sin(\pi\nu\tau_s)} \tag{1.4.7}$$

εI_0 è la potenza efficace del laser. I laser utilizzati al giorno d'oggi raggiungono una potenza efficace massima di 1 Watt. Per aumentare la sensibilità dell'interferometro si effettua un riciclaggio della luce. Infatti parte della luce viene riflessa indietro, e affinché non vada perduta si rimanda in avanti per mezzo di due specchi. Questi specchi devono avere un alto coefficiente di riflessività $R \simeq 0.999$. L'effetto del riciclaggio è in pratica equivalente ad aumentare la potenza del laser, lasciando inalterato il tempo di immagazzinamento.

Un'altra importante sorgente di rumore é legata al moto browniano degli specchi. Per ovviare a questo problema si fa in modo che la frequenza di risonanza degli specchi sia diversa dalla frequenza dell'onda, infatti il rumore browniano è pressoché diverso da zero soltanto intorno alla frequenza di risonanza degli specchi. Si dice in genere che il sistema deve avere un alto fattore di qualità $Q = f_0/\Delta f$ dove f_0 è la frequenza di risonanza e Δf è la la banda di frequenza attorno al picco. Q è una misura adimensionale di quanto piccola sia la dissipazione in corrispondenza della frequenza di risonanza.

Tutto il dispositivo si trova in una camera a vuoto in cui la pressione residua ($\simeq 10^{-9}$mbar), seppur molto piccola, introduce del rumore a causa della variazione dell'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga la luce. Inoltre vi sono fluttuazioni statistiche dell'impulso fornito dai fotoni agli specchi.

Ci sono difficoltà nel mantenere stabile il raggio laser sia in intensità che in frequenza. I tubi in cui si propaga il raggio laser sono ad alto vuoto per evitare interferenze fra la luce ed il gas residuo. Un eventuale residuo di gas potrebbe rallentare, sia pur minimamente il fascio di luce e falsare così i risultati delle misure. Il tubo, lungo 6 Km con diametro di 1.2 m sarà, di fatto, una delle maggiori camere ad alto vuoto del mondo.

E' necessaria una cura estrema per evitare movimenti spuri dei componimenti ottici dovuti a vibrazioni sismiche. L'isolamento meccanico è possibile grazie ad un complesso sistema di pendoli composti chiamato "Superattenuatore" di circa 10 m di altezza. Il rumore sismico deve venire schermato nel miglior modo possibile. Di questo rumore si discuterà nel prossimo capitolo.

L'importanza di questi rumori per la rivelazione delle onde gravitazionali verrà trattata con maggiore dettaglio nel prossimo capitolo. Ora si discuterà, brevemente delle caratteristiche dell'interferometro laser di Virgo.

Il rivelatore interferometrico Virgo è in costruzione a Cascina (Pisa). Esso è un interferometro laser formato da due bracci ortogonali lunghi 3 Km, tuttavia, per mezzo di riflessioni multiple, la lunghezza ottica effettiva di ciascun dei due bracci è pari a 120 Km. L'interferometro è costruito in modo da essere sensibile ad onde gravitazionali in un ampio spettro di frequenza, da 10 a 6000Hz. Questo spettro di frequenze dovrebbe comprendere sia le radiazioni gravitazionali emesse da supernovae sia quelle provenienti da coalescenze di sistemi binari nella via lattea e in galassie esterne.

L'interferometro Virgo è realizzato da studiosi italiani e francesi. La sua realizzazione richiede la conoscenza delle più avanzate tecniche nel campo dei laser ultrasensibili di alta potenza e degli specchi ad alta riflessività, e metodi di stabilizzazione meccanica per il controllo e l'attenuazione del rumore sismico. Due sono i requisiti importanti che deve soddisfare l'interferometro:

- L'interferometro deve essere perfetto otticamente per mantenere una estrema sensibilità.
- L'interferometro deve essere isolato da ogni influenza esterna per rimanere sensibile alle sole onde gravitazionali.

Il laser Virgo è il primo di una generazione di laser ultrastabili ed avrà l'oscillatore più stabile mai costruito. Gli specchi per Virgo devono combinare la più alta riflessività R possibile ($1 - R < 10^{-6}$), con la più alta qualità di superficie (levigata con una precisione superiore al centesimo di micron[**18**]).

L'ambiente dell'interferometro Virgo risulterà nel suo stadio finale molto meno perturbato che se fosse posto in orbita intorno alla terra.

CAPITOLO 2

Rumore e detection

2.1. ELEMENTI DI TEORIA DEI SEGNALI

Lo scopo principale della teoria di rivelazione (Detection Theory) di un segnale è quella di fornire le tecniche necessarie per distinguere un segnale in presenza di rumore casuale. Questa situazione è tipica nello studio sperimentale delle Onde Gravitazionali. Poiché il segnale da rivelare è raramente completamente noto, la sua forma può variare a causa di diversi parametri sconosciuti, come l'ampiezza, la frequenza, la direzione di arrivo eccetera. La valutazione di questi parametri è perciò essenziale per la determinazione corretta delle onde gravitazionali da rivelare (Estimation Theory). La struttura di fondo su cui si basa la detection theory è quella riguardante la teoria dei processi stocastici dei quali si discuterà prossimamente. Eseguendo un esperimento, il risultato sarà di solito un segnale (grandezza fisica variabile nel tempo che trasporta l'informazione) ottenuto tramite l'elaborazione di un certo numero di sistemi (aggregati di elementi fisici che eseguono trasformazioni sui segnali). In genere i sistemi con cui si lavora sono lineari e stazionari, descritti da equazioni integrodifferenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti, le quali esprimono un modello matematico che permette di rappresentare l'elaborazione effettuata dal sistema sul segnale. Il problema è pertanto quello di studiare il comportamento ingresso-uscita del sistema. Si consideri il sistema schematizzato in Figura 2.1.1 (lineare e stazionario)

si verifica che

$$b(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\,a(t')\,dt' = \int_{0}^{\infty} G(\tau)a(t-\tau)d\tau = (G*a)(t) \tag{2.1.1}$$

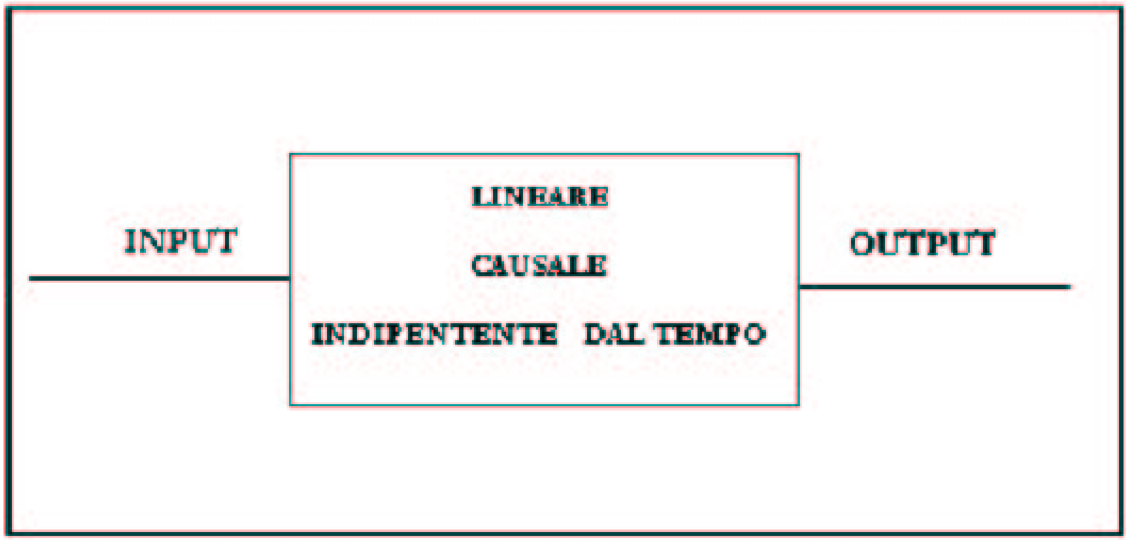

FIGURA 2.1.1. Sistema fisico lineare e stazionario

$a(t)$ rappresenta l'ingresso del sistema e $b(t)$ la sua uscita del sistema. $G(t,t')$ è detta funzione di Green del sistema nel caso generale di un sistema non necessariamente stazionario. Si osservi che il limite superiore dell'integrale in (2.1.1) è t perché si suppone valido il principio di causalità. Per $a(t) = \delta(t)$ (ingresso impulsivo), si ha che $b(t) = G(t)$. Una tale $b(t)$ si dice risposta impulsiva. Applicando la trasformata di Fourier all'equazione (2.1.1), si ha:

$$b(t) = (G * a)(t) \longrightarrow \tilde{b}(\omega) = \tilde{G}(\omega)\tilde{a}(\omega) \tag{2.1.2}$$

La trasformata di Fourier dell'integrale di convoluzione è il prodotto delle trasformate di Fourier delle funzioni. La $\tilde{G}(\omega)$ si dice funzione di trasferimento (trasformata di Fourier della risposta impulsiva) ed è il rapporto delle trasformate di Fourier dei segnali di ingresso e di uscita. Un sistema lineare e stazionario è descritto completamente da una delle due funzioni, la $G(t)$ oppure la $\tilde{G}(\omega)$. Per definire la funzione $a(t)$ all'ingresso di un sistema, cioè un segnale, bisogna assegnare una funzione del tempo che lo descriva. Per esempio per determinare completamente un segnale sinusoidale basta assegnare la funzione $x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ che a sua volta dipende dai tre parametri, ampiezza, fase, frequenza. Vi sono dei casi in cui una variabile non assume un singolo valore, ma presenta un certo intervallo definito di valori, ciascuno dei quali, dipendendo dal caso, si realizza con probabilità definita. Una variabile di questo tipo è dunque definita dall'insieme di possibili valori che assume e dalla probabilità di ottenere ciascun valore dell'insieme. E' questo il caso del rumore, dovuto sia a fluttuazioni proprie del segnale di ingresso che a fluttuazioni introdotte dall'apparato sperimentale. In questo caso bisogna ricorrere ad una analisi statistica del fenomeno. Un modello molto generale per la trattazione dei segnali di questo tipo è quello dei processi stocastici [**22**]. Parlando in termini generali ciò che si intende per processo stocastico $x(t)$ è un processo in cui la variabile $x(t)$ non dipende in modo completamente definito dalla variabile indipendente t (= tempo), come invece succede per un processo causale; invece si ottengono, per mezzo di diverse osservazioni, differenti funzioni $x(t)$, così che solo certe distribuzioni di probabilità sono direttamente osservabili. Può essere che $x(t)$ rappresenti uno spostamento o la velocità di una particella nel moto browniano o un potenziale fluttuante quando si considera il rumore termico. Esso potrebbe pure denotare una combinazione di due o più di tali quantità, e allora si parlerà di processi stocastici bidimensionali o multidimensionali[**22**]. Nel seguito, tutto sarà scritto come se x e t fossero variabili continue. Ciò non è necessario, può succedere che x e t od entrambi possano assumere solo valori discreti, anzi in realtà ciò è quello che succede sperimentalmente.

Un processo casuale $x(t)$ è completamente descritto da un set di distribuzioni di probabilità. Comunemente si dice che un processo stocastico è definito sulla base di un ensemble. Due casi particolarmente importanti sono quelli dei processi stocastici stazionari, le cui proprietà statistiche sono invarianti rispetto a traslazioni temporali, e dei processi stocastici ergodici, quando la conoscenza di una sola realizzazione permette di individuare tutte le quantità statistiche del processo. Le variabili statistiche più importanti di un processo stocastico sono il valore medio ξ_x e l'autocorrelazione A_{xx}. Per esempio un processo stocastico gaussiano (processo casuale rappresentato da funzioni di probabilità che sono distribuzioni gaussiane) è completamente determinato una volta assegnati ξ_x e

A_{xx}. In genere queste grandezze saranno definite da medie di insieme (fissato un certo istante si medieranno i risultati possibili). Nel caso di processi ergodici queste medie di insieme possono essere sostituite con medie temporali su una delle possibili realizzazioni (si segue lo sviluppo nel tempo di una singola realizzazione e la si media nell'intervallo in cui è stata analizzata). Si definisce valore medio del processo stocastico $x(t)$ la quantità ξ_x così definita:

$$\xi_x = < x(t) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{2.1.3}$$

Nel definire le prossime quantità statistiche associate ad un processo stocastico, ipotizziamo che il processo che si considera abbia valore medio nullo. Si definisce autocorrelazione del processo stocastico $x(t)$ la quantità

$$A_{xx}(\tau) = < x(t)x(t+\tau) > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt \tag{2.1.4}$$

$A_{xx}(\tau)$ è tale che

$$A_{xx}(0) = < x^2(t) > = \xi_x^2 + \sigma_x^2 \tag{2.1.5}$$

La quantità

$$\sigma_x^2 = < x^2 > - < x >^2 \tag{2.1.6}$$

è detta deviazione standard di x. Inoltre vale

$$A_{xx}(0) \geq A_{xx}(\tau) \tag{2.1.7}$$

$$A_{xx}(\tau) = A_{xx}(-\tau) \tag{2.1.8}$$

L'autocorrelazione è una quantità che dà informazioni dirette sull'andamento temporale delle fluttuazioni del processo casuale $x(t)$. Un segnale $x(t)$ è generalmente espresso come funzione di t, ponendo dunque l'attenzione sugli eventi temporali. Al contrario la trasformata di Fourier $\tilde{x}(f)$ dello stesso segnale, definita come

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft}\, dt \tag{2.1.9}$$

mette in evidenza la distribuzione in frequenza del segnale (analisi spettrale), ma senza alcuna localizzazione nel tempo. Si vuole sottolineare che la rappresentazione di Fourier, quando è applicabile, sebbene rappresenti una descrizione matematica di particolare interesse in molti casi (fenomeni oscillatori, fenomeni vibratori di stati stazionari, eccetera), presenta dei limiti non appena si analizzano segnali che contengono fenomeni transienti che presentano brusche variazioni nel proprio spettro di frequenze.

Le proprietà spettrali di molti segnali sono individuate dalla loro trasformata di Fourier. Ma i segnali casuali, rappresentati da processi stocastici, non soddisfano in genere le condizioni per la trasformabilità secondo Fourier, e in particolare per un processo casuale quale il rumore non è definibile la trasformata di Fourier. Tutti i processi stocastici possiedono però sicuramente una funzione di autocorrelazione. Allora, per caratterizzare le proprietà spettrali si usa lo spettro di potenza che è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione $F(A_{xx})$, indicata con $S(\omega)$ dove :

$$F(A_{xx}) \equiv S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{2.1.10}$$

$S(\omega)$ si dice spettro di potenza (power spectrum o power spectral density, PSD) del segnale stocastico $x(t)$, ed ha le dimensioni del quadrato delle dimensioni della quantità x, diviso una frequenza. La relazione (2.1.10) e quella inversa, cioè quella che esprime la funzione di autocorrelazione come antitrasformata di Fourier dello spettro di potenza $S(\omega)$ (le dimensioni della autocorrelazione A_τ

sono il quadrato delle dimensioni di x:

$$A_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \tag{2.1.11}$$

sono note in teoria dei processi stocastici casuali come le relazioni che definiscono il Teorema di Wiener-Khintchine [**22**]. Si osservi che poiché $A(\tau)$ è una funzione pari, $S(\omega)$ è una grandezza reale e non negativa che rappresenta la distribuzione in energia del processo sull'asse delle frequenze ω. Lo spettro di potenza contiene tutte le informazioni che sono contenute nella funzione di autocorrelazione (che indica quanto rapidamente la funzione $x(t)$ varia nel tempo) ma espresse in modo diverso. Lo spettro di potenza è una misura della quantità di variazione temporale $x(t)$ che avviene con frequenza f. La conoscenza della densità di potenza spettrale di rumore è fondamentale per l'analisi dei dati ottenuti per mezzo del rivelatore interferometrico gravitazionale. Un rumore caratterizzato da un PSD indipendente dalla frequenza è detto comunemente rumore bianco. In generale i rumori associati ai rivelatori di onde gravitazionali non soddisfano l'ipotesi di rumore bianco, ma il rumore che ci si aspetta presenta un background colorato a banda con alcuni picchi spettrali. In più, la distribuzione di rumore associata ad una antenna gravitazionale potrebbe presentare, in principio, caratteristiche di non stazionarietà e di non gaussianità. Altre quantità utili da definire sono lo spettro unitario e la ampiezza di densità spettrale di un segnale $x(t)$. Lo spettro unitario o single sided power spectrum $s^2(\omega)$ è così indicato [**5**]:

$$s^2(\omega) = \begin{cases} 2S(\omega) & \text{per} \omega \geq 0 \\ 0 & \text{per} \omega < 0 \end{cases} \tag{2.1.12}$$

La quantità $s(\omega)$ è chiamata amplitude spectral density, ed ha dimensioni date dalle dimensioni della quantità x diviso la radice di una frequenza.

Si noti che nel caso di un segnale deterministico $x(t)$ (ovvero completamente determinato ad ogni istante) si può fare la trasformata di Fourier $\tilde{x}(\omega)$ e si dimostra che [**4**]:

$$S_{xx}(\omega) = \tilde{x}^*(\omega)\tilde{x}(\omega) = |\tilde{x}(\omega)|^2 \tag{2.1.13}$$

Si osservi che per fare la trasformata di Fourier di un segnale bisogna conoscerlo in un arco di tempo infinito. Infine si noti che quando un segnale $x(t)$ viene immesso in un sistema lineare di risposta impulsiva $G(t)$, si ha per l'uscita $y(t)$ la relazione [**4**]:

$$S_{yy}(\omega) = |\tilde{G}(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \tag{2.1.14}$$

Altre due quantità da introdurre nella teoria dei segnali sono i concetti di correlazione incrociata e quello di spettro incrociato. Dati due processi $x(t)$e $y(t)$, si definisce correlazione incrociata $A_{xy}(\tau)$ la quantità:

$$A_{xy}(\tau) =< x(t+\tau)y(t) > \tag{2.1.15}$$

dove la funzione $A_{xy}(\tau)$ esprime la relazione statistica dinamica fra due segnali. La funzione di correlazione incrociata non è più una funzione pari come l'autocorrelazione. Per $A_{xy}(\tau)$ valgono le proprietà, generalizzazioni delle (2.1.7),(2.1.8):

$$A_{xy}(\tau) = A_{yx}(-\tau) \tag{2.1.16}$$

$$\max_{\tau} A_{xy}(\tau) \leq \sqrt{A_{xx}(0)A_{yy}(0)} \tag{2.1.17}$$

Dalla trasformata di Fourier della funzione di correlazione incrociata si può definire lo spettro incrociato $S_{xy}(\omega)$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{xy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{2.1.18}$$

In genere $S_{xy}(\omega)$ è una funzione complessa di ω perché la funzione di correlazione non è più una funzione pari. Se $x(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ l'uscita di un sistema, si possono trovare delle relazioni con lo spettro di potenza del segnale d'ingresso. Si trova:

$$S_{xy}(\omega) = \tilde{G}^*(\omega) S_{xx}(\omega) \tag{2.1.19}$$

$$S_{yx}(\omega) = \tilde{G}(\omega) S_{xx}(\omega) \tag{2.1.20}$$

Dopo aver brevemente introdotto le quantità più importanti che si incontrano nello studio della teoria dei segnali, ci si soffermerà su alcuni concetti della detection theory con particolare riguardo al significato della quantità rapporto segnale-rumore (SNR). Il problema di rivelare una informazione che riguarda un segnale sorge in diversi campi della scienza tra i quali vi è quello riguardante lo studio sperimentale delle onde gravitazionali. La difficoltà principale è che l'informazione contenuta nel segnale può subire delle alterazioni mentre transita dalla sorgente che lo ha generato all'apparecchiatura di rivelazione: l'indebolimento, dovuto alla dispersione della sua energia, la distorsione, dovuta ai mezzi fisici che gli permettono la trasmissione ed il rumore, che è sempre presente in qualsiasi strumento di misura, rappresentano le principali fonti di alterazione del segnale. La soluzione del problema è costruire un appropriato ricevitore che possa rivelare segnali che sono indeboliti, distorti ed inquinati dal rumore. L'oggetto della detection theory è quello di escogitare il principio di funzionamento di tali rivelatori e di valutarne l'esecuzione. Per esempio, nel problema della rivelazione di una onda gravitazione, la questione principale è decidere, in un certo istante, se è stato rivelato dall'apparato sperimentale un segnale gravitazionale utile in mezzo al rumore oppure se è presente esclusivamente rumore; si parla, in questo caso di binary hypothesis testing.

Uno strumento matematico utile per la formulazione del problema della detection è la teoria della probabilità: nel caso generale di verifica di una ipotesi multipla (multiple hypotheses testing), si associano le N ipotesi, ciascuna che rappresenta la rivelazione di un certo segnale, a N diversi eventi E_j. Si supponga che il rivelatore osservi il segnale $s_o(t)$ (o =osservato) in un intervallo di lunghezza T, misurando n valori $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$. $\mathbf{v}$ è un vettore composto da campioni reali estratti da $s_o(t)$, che appartiene a $\Re^n$, dove $\Re$ è l'insieme dei numeri reali. Il problema è il seguente: fissare j, e pertanto l'ipotesi N_j basandosi sull'uscita del vettore random $\mathbf{v}$. Il punto cruciale per la soluzione di questo problema è la conoscenza delle funzioni densità di probabilità (pdf) condizionali

$$p_j(v_1, \cdots v_n) \tag{2.1.21}$$

che esprimono la probabilità di realizzazione dell'evento E_j condizionata all'osservazione di $\mathbf{v}$. Il problema può allora essere formulato in questo modo: scegliere quale delle N possibili $p_j(\mathbf{v})$ si pensa caratterizzi i dati osservati. Il rivelatore deve allora associare univocamente un E_j a ciascun punto appartenente allo spazio delle possibili sequenze $\mathbf{v}$, dividendo pertanto $\Re^n$ in N regioni R_j disgiunte: una tale decomposizione è chiamata stategy.

Fissata la strategia, è determinata la regola secondo cui il rivelatore decide per una data ipotesi, per una data osservazione $\mathbf{v}$. Per decidere quale strategia utilizzare si deve stabilire un criterio di decisione. Nel caso semplice di ipotesi binaria, per il problema della rivelazione il rivelatore può solo scegliere tra la presenza di solo rumore nei dati osservati, il che è noto come null hypothesis E_0, e la presenza di un segnale utile oltre al rumore, il che è noto come alternative hypothesis E_1. Nelle decisioni binarie, possono essere commessi due tipi di errori: si dice che si commette un errore del primo tipo quando si opta per E_1quando non è presente alcun segnale: ciò è detto “false alarm”. Errori del secondo tipo avvengono quando si sceglie E_0 in presenza di segnale: ciò è detto “false dismissal”. Quando si verifica un evento E_1 e si opta per esso si dice che si è avvenuta una detection. Per caratterizzare questi concetti di falso allarme e di falso rigetto, definiamo le seguenti quantità [**24, 27**]:

(2.1.22) $$P_{FA} = \int_{R_1} p_o(\mathbf{v}) d^n\mathbf{v}$$

(2.1.23) $$P_D = \int_{R_1} p_1(\mathbf{v}) d^n\mathbf{v}$$

(2.1.24) $$P_{FD} = \int_{R_0} p_1(\mathbf{v}) d^n\mathbf{v}$$

(2.1.25) $$P_R = \int_{R_0} p_0(\mathbf{v}) d^n\mathbf{v}$$

dove valgono le seguenti condizioni di normalizzazione:

(2.1.26) $$P_D + P_{FD} = 1$$

(2.1.27) $$P_{FA} + P_R = 1$$

P_{FA} è la probabilità di falso allarme mentre P_D è la probabilità di rivelazione corretta. P_{FD} è detta probabilità di “false dismissal”, e possiamo chiamare P_R come probabilità di “correct dismissal”. In genere P_{FA} è nota sotto il nome di size del test mentre P_D come power del test. E’ opportuno definire inoltre le seguenti quantità:

(2.1.28) $$P_c = P_r(E_0)(1 - P_{FA}) + P_r(E_1)P_D$$

(2.1.29) $$P_e = 1 - P_c$$

P_c è la probabilità corretta, P_e la probabilità di errore. Per poterle definire è stato necessario introdurre le probabilità a priori della realizzazione di un dato evanto, $P_r(E_i)$. Vale ovviamente:

$$P_r(E_0) + P_r(E_1) = 1 \tag{2.1.30}$$

In molte applicazioni pratiche è difficile, se non addirittura impossibile, stabilire a priori la probabilità degli eventi E_0 ed E_1: nella rivelazione delle onde gravitazionali potrebbe essere perfino inutile stabilire la probabilità a priori con cui una onda gravitazionale sia presente nei dati osservati. Ma in quelle situazioni in cui E_1 si verifica raramente, la probabilità di errore è dominata dai falsi allarmi. Pertanto un criterio di decisione ragionevole, stabilito da Neyman e Pearson (1933), è quello di stabilire, fissata la P_{FA}, una strategia che massimizza P_D oppure, detto in altri termini, data la size massimizzare il power del test.

Prima di esporre il criterio di Neyman-Pearson [**25**] è opportuno definire una quantità che contenga tutte le informazioni necessarie, tratte dai dati, per prendere la decisione ottimale: Si tratta della likelihood ratio $\Lambda(\mathbf{v})$, così definita

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \frac{p_1(\mathbf{v})}{p_0(\mathbf{v})} \tag{2.1.31}$$

Si noti che $\Lambda(\mathbf{v})$ è essa stessa una variabile casuale, essendo funzione dei dati random $\mathbf{v}$. Λ avrà quindi una funzione densità di probabilità condizionata alla presenza del segnale $P_1(\Lambda)$, ed una analoga condizionata alla assenza di segnale $P_0(\Lambda)$, in linea di principio calcolabili.

Il criterio di Neyman-Pearson assicura allora che, a fissata P_{FA}, la strategia di decisione ottimale[1] è definita da

$$E_1 = \{\mathbf{v}|\Lambda > \lambda\} \tag{2.1.32}$$

$$E_0 = \{\mathbf{v}|\Lambda < \lambda\} \tag{2.1.33}$$

in altre parole per decidere per la presenza di un segnale si confronterà Λ con una opportuna soglia λ .

Il collegamento tra λ e P_{FA} è allora definito dalla relazione

$$P_{FA} = \int_{\lambda}^{\infty} P_0(\Lambda)\, d\Lambda \tag{2.1.34}$$

Trovato $\lambda(P_{FA})$ usando la (2.1.34), possiamo calcolare P_D usando

$$P_D = \int_{\lambda(P_{FA})}^{\infty} P_1(\Lambda)\, d\Lambda \tag{2.1.35}$$

E' molto importante sottolineare il fatto che la soglia λ è indipendente dalle probabilità $P_r(E_i)$, che non sono note a priori, e ciò rappresenta proprio la situazione in cui ci si trova nello studio sperimentale delle onde gravitazionali. Presentiamo un esempio elementare ma comprensibile in cui venga applicato il criterio di decisione di Neyman-Pearson. Consideriamo un caso in cui si presenti il problema di testare una ipotesi binaria. Supponiamo di dover decidere, in un certo istante, se è stato rivelato dall'apparato sperimentale un certo segnale $X = x + c$ (alternative hypothesis, E_1) oppure se è stato rivelato $X = x$ (null hypothesis, E_0), dove x è un segnale stocastico gaussiano di media nulla e varianza σ, la cui funzione di distribuzione è data da:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.1.36}$$

[1]Ottimale nel senso di Neyman-Pearson, ossia che massimizza la probabilità di detezione.

mentre c è una costante nota.

Pertanto si ha:

$$p_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X-c)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.1.37}$$

$$p_0(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{X^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.1.38}$$

Il criterio di Neyman-Pearson garantisce che la strategia ottimale di detection a fissata P_{FA} deciderà per E_1 quando

$$\frac{p_1(X)}{p_0(X)} = \exp\left(\frac{Xc}{\sigma^2} - \frac{c^2}{2\sigma^2}\right) > \lambda \tag{2.1.39}$$

ossia quando

$$X > \lambda' = \left(\frac{\sigma^2}{c}\ln\lambda + \frac{c}{2}\right) \tag{2.1.40}$$

Facendo riferimento alla Figura 2.1.2, si può dare una interpretazione grafica delle formule (2.1.34) e (2.1.35). Si ha che l'area sotto la gaussiana p_1 , per $X > \lambda'$, rappresenta la P_D, mentre quella sotto la gaussiana p_0, sempre per $X > \lambda'$, rappresenta la P_{FA}.

Inoltre è utile osservare che esprimendo le probabilità di detection e di falso allarme in funzione della soglia λ, è possibile graficare la P_D in funzione della P_{FA}.

Per il semplice esempio considerato le formule (2.1.34) e (2.1.35) si specializzano a

$$P_{FA} = \int_{\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\Phi_c(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2}})$$

e

$$P_D = \int_{\frac{\lambda-c}{\sigma\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\Phi_c(\frac{\lambda-c}{\sigma\sqrt{2}})$$

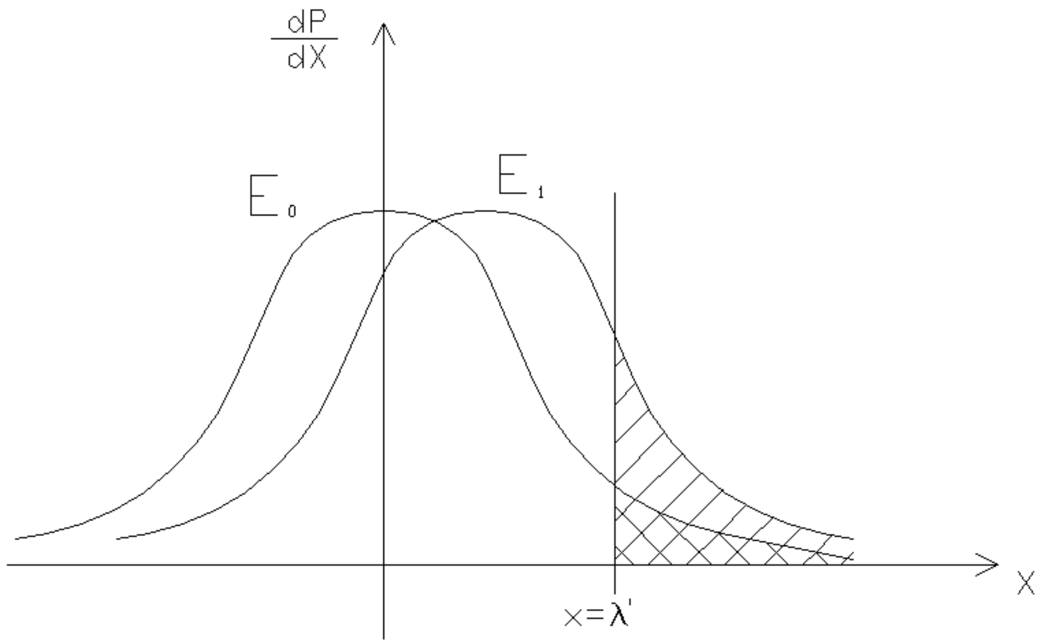

FIGURA 2.1.2. Confronto tra distribuzioni di probabilitá per una variabile stocastica osservata, in presenza o meno di “segnale”.

dove abbiamo introdotto la funzione di errore complementare [**25**]

$$\Phi_c(x) = 1 - \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}\, dt$$

Eliminando la soglia λ otteniamo

$$P_D = \frac{1}{2}\Phi_c\left(\Phi_c^{-1}(2P_{FA}) - \frac{c}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Questa funzione è riportata in Figura 2.1.3 per diversi valori di $\frac{c}{\sigma\sqrt{2}}$.

Come si vede a fissato falso allarme la probabilità di detection aumenta all’aumentare del rapporto $\frac{c}{\sigma}$.

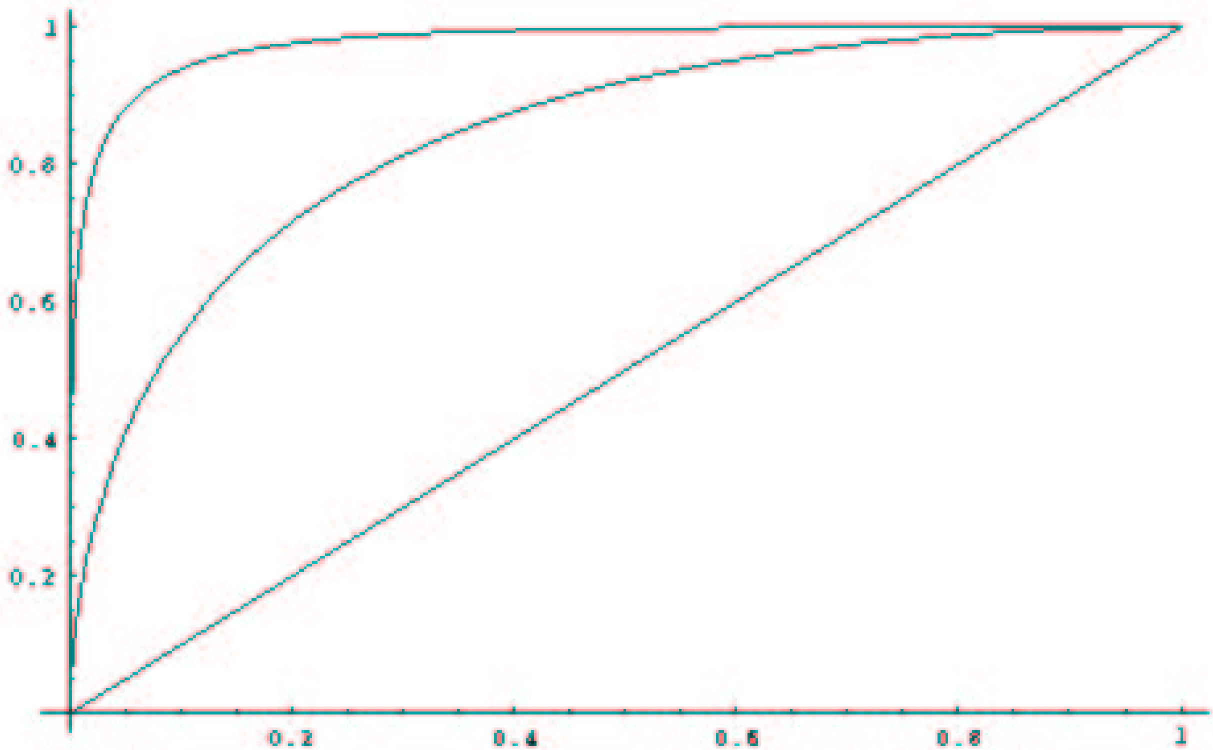

FIGURA 2.1.3. Curve di ROC. I valori corrispondenti del parametro $\frac{c}{\sigma\sqrt{2}}$ sono 0.0 (la bisettrice), 1.0 e 2.0.

Dopo aver introdotto brevemente gli elementi principali per affrontare lo studio della rivelazione di un segnale, ora si discuterà di una della più importanti quantità che si incontrano nella fisica sperimentale delle onde gravitazionali, cioè del rapporto segnale-rumore (SNR). Le onde gravitazionali causano effetti molto deboli sugli strumenti di misura. Pertanto è naturale discutere circa i modi in cui sarà possibile registrare tali piccoli effetti, in presenza di un certo inevitabile livello di rumore. Il rumore limita la sensibilità delle misure e una discussione quantitativa della sensibilità delle misure è basata sul concetto del rapporto segnale-rumore. Una misura accurata può essere fatta quando l'effetto che si sta cercando (il segnale) causa una uscita dall'apparato di misura che è grande paragonato alla componente casuale della uscita quando non è presente alcun segnale (il rumore). In effetti l'arte della rivelazione delle onde gravitazionali si basa sul miglioramento del rapporto segnale-rumore delle misure. Sottolineiamo che una misura caratterizzata da un SNR dell'ordine di 1 non è di alcuna utilità, mentre SNR dell' ordine di 10 oppure anche più grande rappresentano possibili rivelazioni con un certo grado di confidenza: un grande SNR è indice che è presenta qualcosa oltre al rumore nel segnale. Il problema è costruire un rapporto adimensionale tra l'intensità del segnale e l'ampiezza del rumore.

Consideriamo un segnale puro s in presenza di rumore n, definiamo allora rapporto segnale-rumore la quantità

$$\mathrm{SNR} = \frac{E[< s,s >]}{\sqrt{E[< n,s >^2]}} \tag{2.1.41}$$

dove il simbolo $<,>$ indica il prodotto scalare alla Wiener

$$< x_1,x_2 >= 2\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{x}_1(f)\tilde{x}_2^*(f)+\tilde{x}_1^*(f)\tilde{x}_2(f)}{S_n(f)}df$$

dove gli x_i indicano due segnali arbitrari e $E[\cdots]$ indica l'usuale valore di aspettazione di una variabile stocastica. La (2.1.41) può essere interpretata come il rapporto tra l'energia del segnale puro e l'energia della "componente parallela[2] al segnale s del rumore n", e quindi di principio indistinguibile in assenza di altre informazioni su esso. La quantità $S_n(f)$ è la potenza spettrale del rumore.

L'importanza di questo parametro può essere illustrata con l'esempio riportato in Figura 2.1.4.

Nel caso in cui i dati non vengano opportunamente filtrati l' SNR è in generale molto basso e non consente di rivelare eventuali piccoli segnali gravitazionali. E' possibile migliorare di ordini di grandezza la sensibilità di un'antenna gravitazionale applicando ai dati sperimentali alcuni algoritmi di filtraggio (filtro diretto, filtro zop, filtro Wiener-Kolmogorov ecc.). Tuttavia qui non si vuole presentare la teoria degli algoritmi di filtraggio, ma è importante sottolineare il seguente

[2] Il concetto di parallelismo è quello usuale, definito a partire dal prodotto scalare alla Wiener.

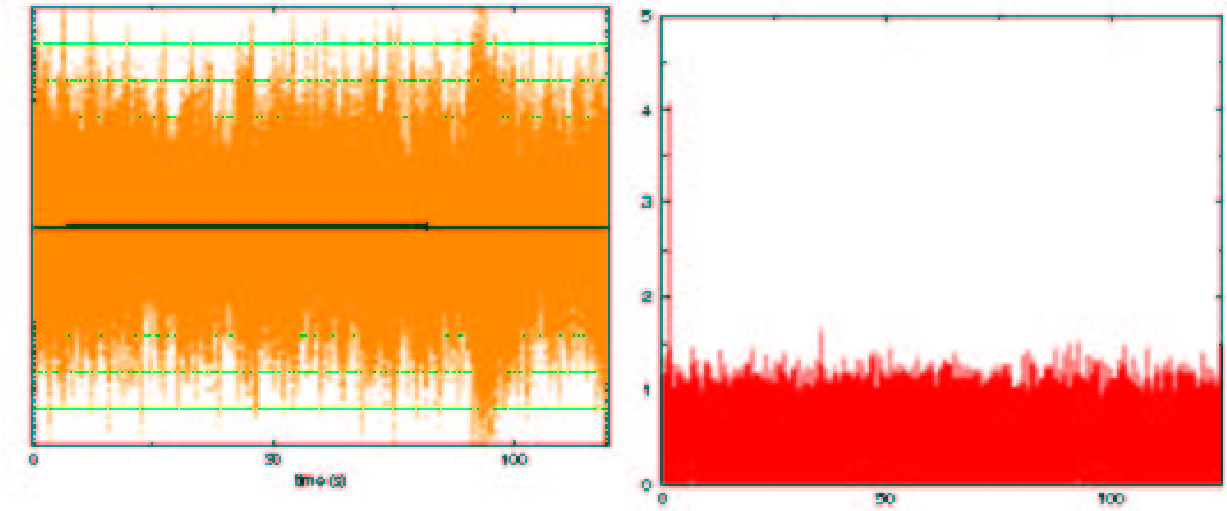

FIGURA 2.1.4. A destra, segnale (in nero) sovrapposto a rumore. É evidente che non é possibile distinguere la presenza del segnale visivamente. Nonostante ció nell'esempio presentato si ha un elevato rapporto segnale rumore. Dopo un opportuno filtraggio infatti il segnale viene trasformato in un picco nettamente maggiore al background di rumore non ortogonale (figura a destra).

fatto: lo scopo del filtro è la ricerca di eventi impulsivi e per far ciò si confrontano i dati filtrati con una soglia opportunamente scelta, soglia che definisce la sensibilità del sistema. In altre parole osservando la distribuzione dei dati all'uscita del filtro, che è una gaussiana, si sceglie un valore che stabilisce quali sono i dati fuori statistica che possono essere interpretati come eventi. Il SNR definito dalla 2.1.41.

Un modo equivalente di definire l'SNR fornisce [**26**]:

$$\text{SNR} = \frac{\int_0^T s^2(t)\,dt}{\int_0^T \left(\frac{\int_0^T n(t')s(t')\,dt'}{\int_0^T s(t')s(t')\,dt'}\right)^2 s^2(t)\,dt} \tag{2.1.42}$$

dove $s(t)$ è il segnale puro, $n(t)$ il rumore e T l'intervallo di tempo di osservazione. L'SNR così definito rappresenta il rapporto tra l'energia del segnale $s(t)$ e l'energia del rumore "proiettata" lungo il segnale medesimo. Si osservi inoltre che utilizzando l'uguaglianza di Parseval generalizzata [**51**]:

$$(\tilde{f},\tilde{g}) = 2\pi(f,g) \tag{2.1.43}$$

dove f e g sono due funzioni arbitrarie a quadrato sommabile, l' SNR può essere espresso come :

$$\mathrm{SNR} = \frac{\|\tilde{s}(\omega)\|_{L^2}^2}{\left\| \frac{(\tilde{n},\tilde{s})}{(\tilde{s},\tilde{s})}\tilde{s}(\omega)\right\|_{L^2}^2} \tag{2.1.44}$$

dove il dominio di integrabilità è esteso a tutta la retta reale e $s(t) \to s(t)[\theta(t) - \theta(T-t)]$.

A questo punto iniziamo a discutere dei principali rumori che limitano pesantemente la sensibilità delle misure relative alla rivelazione delle onde gravitazionali.

2.2. SORGENTI DI RUMORE NELLA RIVELAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI

In questo paragrafo si parlerà delle possibili sorgenti di rumore che si incontrano nello studio della rivelazione delle onde gravitazionali. Si ricorda che :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.2.1}$$

Le perturbazioni della metrica h sono dell'ordine di 10^{-21}. Perturbazioni di tale intensità causerebbero uno spostamento di frange dell'ordine di 10^{-13}. Pertanto la precisione in queste misure deve essere estremamente accurata e le cose non sono certo semplificate dall'esistenza dentro e fuori dall'apparato sperimentale di sorgenti di rumore di natura diversa che rendono l'analisi dei dati raccolti piuttosto complicata.

Per valutare quantitativamente la sensibilità necessaria di VIRGO, consideriamo un tipico segnale emesso da una supernova nel cluster di Virgo. Questo segnale, sulla terra, è un impulso di pochi *ms* con una ampiezza adimensionale compresa tra 10^{-22} e 10^{-20}. Riferendoci a dei bracci interferometrici lunghi 3 Km quali quelli disponibili in VIRGO, il passaggio di un tale segnale dovrebbe indurre uno spostamento degli specchi pari a circa $10^{-19} - 10^{-17}$ m poiché vale la relazione $\Delta \simeq hL/2$ ed inoltre induce uno sfasamento del fascio laser di $10^{-12} - 10^{-10}$ radianti in quanto vale la relazione $\Delta\phi(t) = 4\pi Lh(t)/\lambda_{laser}$ con $\lambda_{laser} \gg L$. Abbiamo preso in considerazione una lunghezza d'onda del laser di circa $1\mu m$. È chiaro da questi numeri che l'interferometro VIRGO deve essere caratterizzato da una sensibilità estremamente alta.

La gran parte dei dati prodotti da un rivelatore interferometrico gravitazionale sarà rumore e si spera che, nascosto nel rumore, ci sia il segnale gravitazionale che si cerca. Come è stato già detto nel primo capitolo, i rivelatori interferometrici (Virgo) sono sensibili ad un ampio range di frequenze (da $2-3$ Hz a più di 1 kHz) nel rivelare lo spostamento relativo delle masse test poste alle due estremità dei bracci dell'interferometro, spostamento dovuto (si spera) ad un segnale gravitazionale, ma sfortunatamente molti altri fattori possono causare un simile spostamento. Le masse test sono sospese a strutture a pendolo affinché siano isolate dal rumore sismico, ma il rumore termico della catena di sospensione causa uno spostamento della massa. Anche lo shot noise ed il rumore dovuto alla pressione di radiazione del laser muovono gli specchi. Si lavora per dare forma a tutte le possibili sorgenti di rumore nell'interferometro fornendo la curva di sensibilità dell'apparato sperimentale. Questa curva è limitata a frequenze molto basse (pochi Hz e sotto l'Hz) dal rumore sismico, nella banda di frequenza media la curva è limitata dal rumore termico e a frequenze molto alte (più alte di 0,7- 1 kHz) dallo shot noise .

La curva di sensibilità in Figura 2.2.1 viene ottenuta come somma incoerente di tutti i contributi di rumore stimati. Questa curva è caratterizzata da un rumore a banda larga (rumore termico) più parecchi picchi dovuti ai modi dei fili delle sospensioni che rendono la rivelazione di un segnale gravitazionale in questa banda di frequenza molto difficile. Nei prossimi paragrafi si discuterà dei principali rumori che si incontrano nella ricerca delle onde gravitazionali, alcuni dei quali sono rappresentati in Figura 2.2.2.

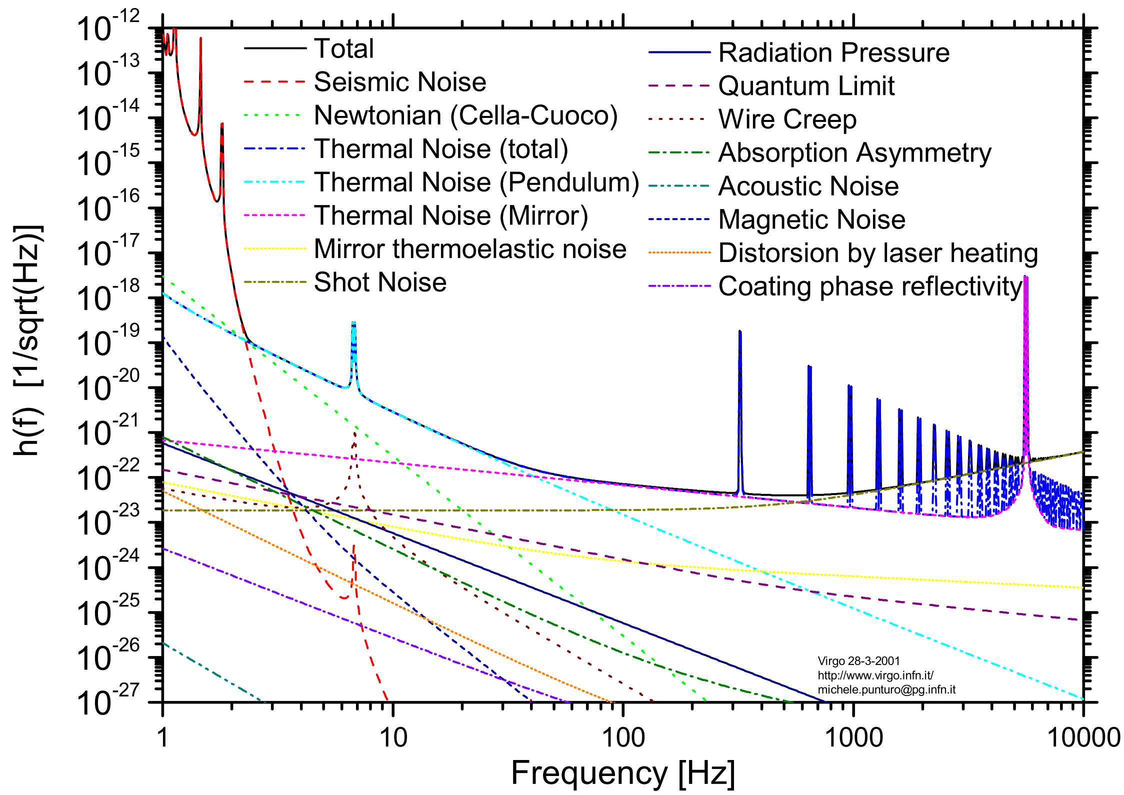

FIGURA 2.2.1. Curva di sensibilità di VIRGO ed alcune ampiezze spettrali di rumori. La curva di sensibilità viene tracciata sommando in modo incoerente le densità spettrali lineari di tutti i rumori presi in considerazione. La somma incoerente delle densità spettrali implica che questa curva è ottenuta come somma dei soli termini quadratici, mediando a zero i termini misti presenti nel quadrato della somma, cioè $|\tilde{h}_{\text{sensibility}}|^2 \equiv \sum_i < \tilde{h}_{\text{noise},i}\tilde{h}^*_{\text{noise},i} >$. Si considera cioè $< \tilde{h}_{\text{noise},i}\tilde{h}^*_{\text{noise},j} >= 0$ se $i \neq j$. In altre parole si suppone che le differenti sorgenti di rumore sia non non correlate tra di loro.

2.2.1. Shot Noise Fotonico. Anche se il rumore termico, di cui si discuterà prossimamente, è la sorgente principale in esperimenti a bassa frequenza, un'altra sorgente importante di rumore si ottiene considerando la natura corpuscolare della materia. La quantizzazione della luce è alla base dello shot noise fotonico così come la quantizzazione della carica elettrica è alla base del

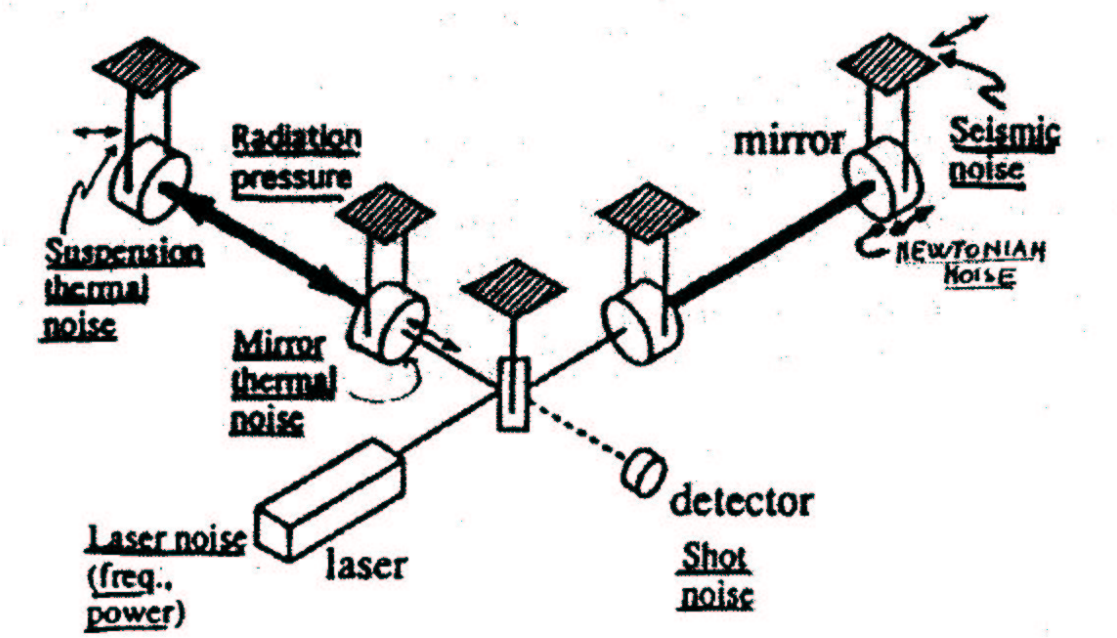

FIGURA 2.2.2. In questa figura semplificatrice sono indicate le preincipali sorgenti di rumore per una antenna interferometrica terrestre. Viene indicato il rumore termico delle sospensioni e dello specchio, il rumore della pressione di radiazione sugli specchi, lo shot noise presente nel detector, il rumore sismico cui sono soggette le componenti ottiche dell'interferometro ed infine il rumore Newtoniano che viene esercitato sulle masse.

rumore elettronico; pertanto, per caratterizzare il rumore fotonico ripercorriamo i punti principali che identificano quello elettronico. La carica elettrica è quantizzata. A bassa corrente, quando è possibile identificare il contributo di ciascun elettrone nel passaggio della corrente in un generico elemento di un circuito elettrico, la corrente appare come una funzione discontinua, con variazioni associate alla carica e del singolo elettrone. Questo rumore viene definito come shot noise per ricordare il passaggio discontinuo delle cariche.

La caratterizzazione del rumore richiede la determinazione della sua ampiezza e della sua distribuzione spettrale. Sia n il numero di elettroni che raggiunge il rivelatore nel tempo T_m che caratterizza lo strumento con il quale viene determinata la corrente, ed I la corrente che scorre dentro questo tempo.

Se $< n >$ è il numero medio di elettroni, definito come una media su un ensemble, la corrente media $< I >$ risulta [**19**]:

$$< I >=< n > \frac{e}{T_m} \tag{2.2.2}$$

Le fluttuazioni nella corrente I sono caratterizzate dalla deviazione quadratica media $< (\Delta I)^2 >$, che può essere derivata dalla deviazione quadratica media del numero di elettroni $< (\Delta n)^2 >$. Si divida l'intervallo di tempo T_m in N parti, ciascuna di durata T_m/N. Poiché si suppone di operare in un regime di debole corrente, si può supporre che dentro ciascun intervallo, si possa al massimo verificare un solo evento di passaggio della corrente dovuto ad un elettrone. Sia p la probabilità di evento di passaggio di corrente dentro un generico intervallino, e sia $1-p$ la probabilità di non realizzare l'evento. La probabilità che durante il tempo totale T_m si verifichino n passaggi di elettroni è allora data da:

$$P(n, T_m) = \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^{N-n} \tag{2.2.3}$$

Questa espressione per la probabilità binomiale permette di calcolare sia $< n >$che $< (\Delta n)^2 >$. Per $N \gg 1$, $p \ll 1$, Np finito, la distribuzione (2.2.3) può essere approssimata con una Poissoniana

$$P(n, T_m) = \frac{< n >^n}{n!} e^{-<n>} \tag{2.2.4}$$

dove è stato posto $< n >= Np$. Per una distribuzione Poissoniana vale la relazione $< (\Delta n)^2 >=< n >$, cioè:

$$\frac{<(\Delta n)^2>}{<n>^2} = \frac{1}{<n>} \tag{2.2.5}$$

Dalla (2.2.2) e dalla (2.2.5), si trova:

$$\frac{<(\Delta I)^2>}{<I>^2} = \frac{<(\Delta n)^2>}{<n>^2} = \frac{1}{<n>} = \frac{e}{T_m}\frac{1}{<I>} \tag{2.2.6}$$

e quindi

$$<(\Delta I)^2> = \frac{e<I>}{T_m} \tag{2.2.7}$$

Le equazioni (2.2.6) e (2.2.7) sono le espressioni per lo shot noise. E' importante notare che il rumore è proporzionale alla carica dell'elettrone e. Supponendo di non avere una discretizzazione della corrente, con $e \to 0$, si ottiene che questo rumore non esisterebbe. Risulta inoltre che la distribuzione spettrale che caratterizza lo shot noise è :

$$G_I(f) = 2e<I> \tag{2.2.8}$$

dunque lo spettro di rumore dello shot noise è quello di un rumore bianco. Si ricordi che queste formule dello shot noise sono derivate nell'ipotesi di debole passaggio di corrente, ed inoltre che le cariche contribuiscono alla corrente in modo indipendente [**19**]. Procedendo allo stesso modo è possibile introdurre lo shot noise fotonico considerando il fatto che la luce è quantizzata (fotoni). Sia $<n>$il numero medio di fotoni che arrivano nell'intervallo di tempo di misura T_m sullo specchio del rivelatore interferometrico e definiamo il numero di fotoni per unità di tempo che arrivano sullo specchio con

$$\bar{n} = \frac{<n>}{T_m} \tag{2.2.9}$$

allora la potenza della radiazione laser utilizzata nell'interferometro è legata al numero di fotoni che compongono la radiazione medesima dalla relazione [**5**]

$$\bar{n} = \frac{\lambda}{2\pi\hbar c} P_{\mathrm{out}} \tag{2.2.10}$$

dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione laser e P_{out} la sua potenza in uscita. Pertanto una fluttuazione nel numero di fotoni che arrivano sullo specchio implica fluttuazioni statistiche nella potenza della radiazione laser. Se indichiamo con l la lunghezza del braccio dell'interferometro e con P_{in} la potenza in entrata abbiamo:

$$\frac{dP_{\mathrm{out}}}{dl} = \frac{2\pi}{\lambda} P_{\mathrm{in}} \tag{2.2.11}$$

Ma la potenza in uscita del rivelatore controlla la differenza di posizione delle masse-test, dunque una sua fluttuazione implicherebbe in modo naturale una fluttuazione nella differenza di posizione delle masse-test medesime data da:

$$\sigma_{\delta l} = \frac{\sqrt{\frac{<(\Delta n)^2>}{<n>}}}{\frac{1}{P_{\mathrm{out}}}\frac{dP_{\mathrm{out}}}{dl}} = \sqrt{\frac{\hbar c\lambda}{4\pi P_{\mathrm{in}} T_m}} \tag{2.2.12}$$

e ponendo $\delta l = lh$, la fluttuazione apparente dello strain dell'onda gravitazionale sarà data da:

$$\sigma_h = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\hbar c\lambda}{4\pi P_{\mathrm{in}} T_m}} \tag{2.2.13}$$

Dalla (2.2.13) è chiaro che non c'é dipendenza dalla frequenza, l'arrivo di ciascun fotone è indipendente dall'arrivo di ciascun altro. Si noti inoltre che l'errore in h scala come $1/\sqrt{T_m}$. Queste due osservazioni possono essere compattate stabilendo che lo shot noise fotonico in h è descritto da una densità spettrale bianca h_{shot} pari a:

$$h_{\text{shot}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\hbar c\lambda}{2\pi P_{\text{in}}}} \tag{2.2.14}$$

2.2.2. Radiation Pressure Noise. Se lo shot noise fosse l'unico limite alla precisione determinata dalla potenza P_{in}, allora si potrebbe raggiungere in principio una precisione arbitraria semplicemente usando un laser sufficientemente potente. Ma oltre ad esserci difficoltà di natura tecnica legati alla costruzione di laser ad elevata potenza, ci sono limitazioni di natura fondamentale legate al principio di indeterminazione di Heisenberg. Un laser con potenza elevata determina un'alta pressione di radiazione sugli specchi ed una grande fluttuazione in questa pressione. Si crea quindi un rumore aggiuntivo in h detto radiation pressure noise. Per stimare la portata di questo effetto, si ricordi che la forza esercitata da un'onda elettromagnetica di potenza P che viene riflessa normalmente da uno specchio senza perdita è [**50**] $F_{\text{rad}} = P/c$. La fluttuazione in questa forza è dovuta alla fluttuazione di shot noise in P, cioè $\sigma_F = \sigma_P/c$, oppure, in termini di una densità spettrale:

$$F(f) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar P_{\text{in}}}{c\lambda}} \tag{2.2.15}$$

indipendente dalla frequenza. Questa forza di rumore è applicata a ciascuna massa test. La pressione di radiazione fluttuante fa in modo che ciascuna massa si muova con uno spettro dato da [**5**]:

$$x(f) = \frac{1}{m(2\pi f)^2}F(f) = \frac{1}{mf^2}\sqrt{\frac{hP_{\text{in}}}{8\pi^3 c\lambda}} \tag{2.2.16}$$

Le fluttuazioni di potenza nei due bracci sono anti- correlate e ciò raddoppia l'effetto sull'uscita di un interferometro, poiché lo sfasamento è proporzionale alla differenza in lunghezza dei due bracci.

Dunque il radiation pressure noise è descritto tramite la densità spettrale h_{rp}:

$$h_{rp}(f) = \frac{1}{mf^2 l}\sqrt{\frac{\hbar P_{\text{in}}}{2\pi^3 c\lambda}} \tag{2.2.17}$$

dove m è la massa dello specchio. In genere si usa vedere lo shot noise fotonico ed il radiation pressure noise come due versioni differenti di un singolo rumore chiamato optical readout noise, così definito:

$$h_{\text{or}} = \sqrt{h^2_{\text{shot}}(f) + h^2_{\text{rp}}(f)} \tag{2.2.18}$$

A basse frequenze, il termine di radiation pressure essendo proporzionale ad f^{-2} domina, mentre ad alte frequenze lo shot noise (che è indipendente dalla frequenza, cioè è un rumore bianco) è più importante.

2.2.3. Quantum Limit Noise. Per ogni data frequenza f_0 c'è una densità spettrale minima per h_{or}. Questo avviene quando la potenza P_{in} assume il valore P_{opt} che si ottiene imponendo l'uguaglianza $h_{\text{shot}}(f_0) = h_{\text{rp}}(f_0)$. La potenza che fornisce questa relazione è:

$$P_{\text{opt}} = \pi c\lambda m f^2 \tag{2.2.19}$$

e sostituendo questa espressione di in h_{or} si trova [**5**]:

$$h_{SQL}(f) = h_{\text{or}}(f)|_{P_{\text{in}}=P_{\text{opt}}} = \frac{1}{\pi f l}\sqrt{\frac{\hbar}{m}} \tag{2.2.20}$$

h_{SQL} viene chiamata a volte pseudo-densità spettrale. Essa rappresenta, per ogni valore fissato della frequenza, la densità spettrale di rumore minima, densità appartenente alla famiglia spettrale degli $h_{\text{or}}(f)$. SQL indica il cosiddetto "limite quantistico standard", limite imposto sulle misure dal principio di indeterminazione di Heisenberg, $\delta x \delta p \geq \hbar/2$.

2.2.4. Rumore termico. Un ostacolo fondamentale che limita il grado in cui una massa test può rimane in quiete è il rumore termico, un rumore dovuto alla natura atomica (e quindi granulare) della materia (masse test ed ambiente in cui sono immerse).

Esso è il rumore dovuto al moto termico casuale. Poiché è un fenomeno termico, esso è caratterizzato dalla costante di Boltzman k_B e non dalla costante di Dirac $\hbar$. Esso limita la sensibilità dei rivelatori interferometrici nella banda di frequenza centrata su 100 Hz.

Il rumore termico può essere visto come una generalizzazione del moto browniano. La causa reale del moto Browniano [**20, 23**] non era stata capita finché Einstein mostrò come esso sorgeva da fluttuazioni dovute ad urti di molecole d'acqua con particelle granulari. Capendo che gli urti molecolari erano anche alla base della spiegazione della dissipazione dell'energia cinetica delle particelle granulari quando queste si muovevano nel fluido, Einstein mostrò che lo spostamento quadratico medio di una particella in un tempo di osservazione τ era [**5**]:

$$< x^2_{\text{therm}} >= k_B T \frac{1}{3\pi a\eta}\tau \tag{2.2.21}$$

Il modello assumeva che le particelle fossero sfere di raggio a, e si muovessero in un mezzo di viscosità η.

La (2.2.21) fu il primo di molti collegamenti tra un fenomeno di fluttuazione, lo spostamento casuale della particella, e un meccanismo dissipativo, la viscosità dell'acqua. Si consideri il seguente esempio fisico che è in stretta relazione con la struttura sperimentale per la rivelazione di un'onda gravitazionale. Si prenda in considerazione il moto Browniano di una massa macroscopica (una lamina) sospesa tramite un filo lungo, con frequenza di risonanza f_0, in un gas diluito. Lo spazio attorno alla lamina è riempito con gas diluito di pressione $P = nk_B T$, dove n è la densità di molecole nel gas. Si supponga il limite in cui P è abbastanza piccola in modo che il cammino libero medio l per le molecole di gas sia grande paragonato alla scala dimensionale della massa. Allora si possono trascurare le collisioni intermolecolari e concentrarsi solo sulle collisioni tra la lamina e le singole molecole. Quando la lamina è in quiete, essa sarà bombardata dalle molecole del gas. In media, arriverà lo stesso numero di particelle da ciascun lato della lamina. Utilizzando ragionamenti di meccanica statistica risulta che il numero di molecole di gas per unità di tempo che arrivano sulla lamina, la cui faccia laterale ha area superficiale A, è [**5**]:

$$N = \frac{1}{4} n \bar{v} A = nA\sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}} \tag{2.2.22}$$

(m è la massa di una singola molecola di gas, $\bar{v}$ la velocità media di una singola molecola).

Si assuma che ciascuna delle molecole venga riflessa elasticamente dalla superficie della lamina. L'effetto di una collisione media corrisponde ad una forza media da un lato pari a PA, oppure:

$$F_T = n k_B T A \tag{2.2.23}$$

La pressione rappresenta la forza effettiva dovuta alle collisioni di molte singole molecole. Supponendo che le particelle granulari che urtano la lamina arrivino in modo scorrelato, ci si aspetta che le perturbazioni obbediscano alla statistica di Poisson. Considerando un tempo di osservazione τ, si avrà una fluttuazione nel numero totale di molecole N_τ che urtano la lamina da un lato pari a:

$$\frac{\sigma_{N_\tau}}{N_\tau} = \frac{1}{\sqrt{N_\tau}} \tag{2.2.24}$$

La fluttuazione relativa nella forza dovrebbe uguagliare la fluttuazione relativa nel numero di collisioni molecolari con la massa sospesa. Pertanto ci si aspetta un rumore di forza dell'ordine di:

$$\sigma_F^2 \sim (k_B T)^2 \frac{nA}{\bar{v}\tau} \tag{2.2.25}$$

In termini dello spettro di potenza della forza la (2.2.25) può essere scritta nella forma:

$$F^2(f) \sim (k_B T)^2 \frac{nA}{\bar{v}} \tag{2.2.26}$$

A questo punto è utile mettere in relazione la forza fluttuante con la forza viscosa che sente la lamina quando si muove in direzione normale alla sua superficie con velocità v_p. La lamina sente una forza nella direzione opposta al suo moto. La forza viscosa è:

$$F_{\text{fric}} = -\frac{1}{4} nAm\bar{v} v_p \equiv -b v_p \tag{2.2.27}$$

dove si è introdotto il coefficiente di dissipazione $b = nAm\bar{v}/4$.

Confrontando la (2.2.26) con la (2.2.27), si ottiene il seguente interessante risultato:

$$F^2(f) \sim b k_B T \tag{2.2.28}$$

cioè lo spettro di potenza della fluttuazione della forza è proporzionale al coefficiente di dissipazione.

Le relazioni (2.2.21) ed (2.2.28) legano fenomeni di fluttuazione a quelli di dissipazione. Esse sono diretta conseguenza di un teorema di grande generalità in quanto applicabile a qualsiasi sistema fisico lineare in equilibrio termico . Si tratta dell'importantissimo Teorema di Fluttuazione - Dissipazione [**6, 39**]:

$$x^2_{\text{therm}} = \frac{k_B T}{\pi^2 f^2} \text{Re}\, Z^{-1}(f) \tag{2.2.29}$$

dove $Z(f)$ è l'impedenza del sistema, cioè $F_{\text{ext}}(f) = Z(f)v(f)$ rappresenta l'equazione del moto del sistema vista nello spazio delle frequenze. Il teorema di fluttuazione - dissipazione implica che il modo di ridurre il livello del rumore termico è quello di ridurre i fenomeni dissipativi. Dunque, nella costruzione di un rivelatore interferometrico, le masse test non solo devono essere verosimilmente libere ma inoltre non devono essere soggette a dissipazioni. Per determinati livelli di potenza del laser, il rumore termico è molto più importante del radiation pressure noise. Inoltre lo shot noise domina lo spettro di rumore dell'interferometro ad alte frequenze (all'incirca al di sopra dei 100Hz) mentre il rumore termico è principalmente importante a basse frequenze.

2.2.5. Rumore Sismico. Un nuovo rumore da affrontare è il rumore sismico. Esso è dovuto alle continue vibrazioni del suolo, vibrazioni che inducono movimenti spuri nelle componenti ottiche del rivelatore. In questo modo lo spostamento dello specchio causato da un'onda gravitazionale sarà mascherato, nel range di frequenze di interesse, dai segnali di rumore sismico che sono più grandi di diversi ordini di grandezza.

D'altra parte è previsto che diverse sorgenti astrofisiche emettono principalmente onde gravitazionali a bassa frequenza (da qualche frazione a poche decine di Hz). E' per questo motivo che è molto importante abbassare la soglia di rivelazione della frequenza quanto più possibile compatibilmente ai problemi di natura tecnica. Il problema del rumore sismico non può essere eliminato del tutto ma può essere contenuto, l'unico modo di eliminarlo sarebbe quello di sospendere il rivelatore nello spazio. A frequenze $f < 20$ Hz il rumore sismico costituisce un'importante sorgente di rumore, rumore sismico vibrazionale in cui il moto del suolo, opportunamente filtrato attraverso il sistema di isolamento meccanico del rivelatore interferometrico, provoca movimenti delle massetest. Una tipica densità spettrale dello spostamento del suolo in un luogo relativamente tranquillo è del tipo [**5**]:

$$\tilde{x}(f) = \begin{cases} 10^{-7}\,\mathrm{cm}/\sqrt{\mathrm{Hz}} & 1\,\mathrm{Hz} < f < 10\,\mathrm{Hz} \\ 10^{-7}\,\mathrm{cm}/\sqrt{\mathrm{Hz}} \times \left(\frac{10\mathrm{Hz}}{f}\right)^2 & f > 10\,\mathrm{Hz} \end{cases} \tag{2.2.30}$$

Il fatto che il rumore sismico abbia una larghezza piuttosto ampia costituisce un ostacolo per la rivelazione di onde gravitazionali. E' opportuno, pertanto, minimizzare la sovrapposizione del segnale con questo rumore mediante un isolatore da vibrazioni. Un modello elementare di un sistema di isolamento da vibrazioni sismiche potrebbe essere quello di attaccare la massa di prova m ad una molla di costante elastica k. Indicando con x_g la coordinata del suolo l'equazione del moto sarà

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_g) \tag{2.2.31}$$

Dalla (2.2.31) passando allo spazio delle frequenze mediante trasformata di Fourier, si trova la funzione di trasferimento che collega il moto della massa a quello del suolo ($\tilde{x}_g = G\tilde{x}$):

$$G(f) = \frac{f_0^2}{f_0^2 - f^2} \simeq \begin{cases} \frac{f_0^2}{f^2} & f \gg f_0 \\ 1 & f \ll f_0 \end{cases} \tag{2.2.32}$$

Questo è il meccanismo fondamentale per l'isolamento. A frequenze superiori alla frequenza di risonanza f_0 l'inerzia della massa impedisce alla particella di muoversi apprezzabilmente in risposta alla forza kx_g. A basse frequenze $G(f) \simeq 1$ cioè la molla è effettivamente rigida. Si può affermare che un isolatore da vibrazioni è un filtro passa-basso per il moto. Naturalmente si potrebbe complicare il modello mettendo nell'equazione del moto (2.2.31) un termine di smorzamento, ma è bene sottolineare che non c'è necessariamente connessione tra l'isolamento e la dissipazione. Inoltre non sono importanti né la forma né il materiale della molla; ogni molla isola una massa dalla vibrazione per lo stesso motivo: esse schermano molto bene i segnali ad alta frequenza nell'ipotesi in cui si riescano a costruire delle molle con frequenza propria molto bassa in quanto in questo caso visto nello spazio di Fourier, la forza esterna applicata al sistema viene attenuata di un fattore f^{-2}. Si potrebbe pensare di utilizzare come isolatore un pendolo multiplo, cioè un set di pendoli in cascata, ciascuno con frequenza di risonanza f_0. La funzione di trasferimento di questo sistema è:

$$G(f) \simeq \left(\frac{f_0^2}{f^2}\right)^N \qquad f \gg f_0 \tag{2.2.33}$$

Pertanto il moto vibrazionale del punto di sospensione del sistema è trasmesso alla massa di prova m con una attenuazione proporzionale a f^{-2N} cioè la massa è ancora più isolata rispetto al caso di singolo pendolo.

C'è tuttavia un fatto importante che non è stato detto. Si è presentato il problema dell'isolamento come se fosse un problema unidimensionale. In realtà un pendolo funziona in modo diverso a seconda di quale direzione si consideri, quella orizzontale o quella verticale. Usualmente la rigidezza della corda fornisce una risonanza verticale più vicina a $f_{0,\text{verticale}} \simeq 10$ Hz (frequenza che dipende dai dettagli del sistema) che a $f_{0,\text{orizzontale}} \simeq 1$ Hz caratteristica del pendolo visto come oscillatore orizzontale. Pertanto per $f > f_{0,\text{verticale}}$, un pendolo isolatore verticale è peggiore di un pendolo isolatore orizzontale di un fattore $(f_{0,\text{verticale}}/f_{0,\text{orizzontale}})^2$. Se consideriamo il pendolo multiplo, questo fattore correttivo diventa ancora più rimarchevole $(f_{0,\text{verticale}}/f_{0,\text{orizzontale}})^{2N}$.

Il problema potrebbe non essere preso in considerazione, pensando di disporre i bracci dell'interferometro in un piano orizzontale. Tuttavia non è detto che sia possibile costruire pendoli che abbiano una simmetria tale da non trasformare il rumore verticale in rumore orizzontale. Anche se ciò fosse possibile, la gravità annullerebbe tali sforzi qualora i pendoli fossero posti nei bracci interferometrici lunghi diversi chilometri in quanto in questo caso dovremmo prendere in considerazione la curvatura della terra e quindi la variazione in direzione di g: le direzioni verticali agli estremi dei bracci non sono parallele a causa della curvatura della terra.

A Virgo è stato costruito un sofisticato sistema di sospensione, il superattenuatore, come supporto meccanico di ogni componente ottica dell'interferometro. Il superattenuatore è stato progettato per eliminare la trasmissione del rumore sismico. E' possibile ridurre, al di sopra dei 4 Hz, il rumore sismico ben al di sotto del rumore termico.

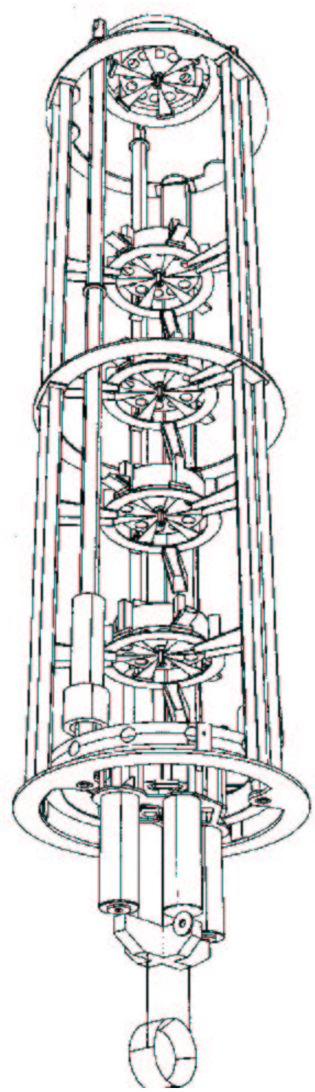

FIGURA 2.2.3. VIRGO è l'unico rivelatore interferometrico che presenta un sofisticato sistema di sospensioni (superattenuatore) per le componenti ottiche, che potrà isolare l'antenna dal rumore sismico. Esso presenta una struttura simile a quella di un pendolo composto (8 metri di altezza); ciascuno stadio dei 6 presenti è un filtro per le oscillazioni verticali. Lo specchio è sospeso all'estremità del pendolo ad una struttura più complessa costituita da un particolare filtro (filtro 7 o superfiltro) e ad una "marionetta", un corpo rigido di forma particolare che ha la funzione di manovrare lo specchio. Tutte queste componenti sono contenute in una torre in cui viene praticato il vuoto.

Il superattenuatore (vediFigura 2.2.3) è costituito da un sistema di filtri standard più un superfiltro configurati in modo da fornire una ragionevole attenuazione della componente verticale del rumore sismico nel range delle basse frequenze (fino ai 4 Hz [**27**]). Su ciascun filtro standard viene montata una lamina la cui prima frequenza di risonanza interna è attorno ai 100 Hz. Questa lamina non è libera ma è soggetta ad una forza di richiamo elastico detta di antispring, in quanto può essere espressa come il gradiente del potenziale elastico cambiato di segno. Sul superfiltro [**57**]è invece montata una lamina piú lunga con la prima frequenza di risonanza interna attorno ai 25 Hz. Nel range di frequenze medie, cioè al di sotto della prima delle risonanze della lamina ($\simeq$ 100 Hz), la funzione di trasferimento verticale del sistema può essere espressa approssimativamente in termini della dinamica delle lamine medesime. Queste lamine, utilizzate come delle molle verticali, costituiscono un elemento importantissimo per il sistema di sospensioni di Virgo e le funzioni di trasferimento verticali per le short blade e le long blade sono fornite nei grafici in Figura 2.2.4.

Senza entrare nei dettagli, si evidenzia esclusivamente che l'isolamento dell'intero sistema fornito dal superattenuatore è piuttosto buono ed inoltre è molto isotropo a differenza di ciò che si ha considerando un semplice pendolo multiplo. Dovrebbe essere possibile e fattibile isolare le masse test da vibrazioni sismiche in modo da poter ignorare il rumore sismico per $f > 4$ Hz. Purtroppo questo superattenuatore non è utile per isolare le masse test da un altro rumore, il rumore Newtoniano sismico.

2.2.6. Rumore Newtoniano Sismico. Il rumore Newtoniano è classificabile in rumore Newtoniano sismico ed in rumore Newtoniano atmosferico. Il rumore Newtoniano sismico è causato da fluttuazioni di densità di massa nel suolo prodotte da onde micro-sismiche. Le fluttuazioni di densità di massa nel suolo inducono un campo gravitazionale stocastico che si accoppia direttamente alle masse test dell'interferometro e provocano un rumore (segnale spurio)[3]. Esso rappresenta

[3] Allo stesso modo fluttuazioni di densità di massa nell'atmosfera prodotte da onde di pressione acustiche e da perturbazioni di temperatura sono alla base del rumore newtoniano atmosferico, che verrà studiato estensivamente nell'ultimo capitolo di questa tesi.

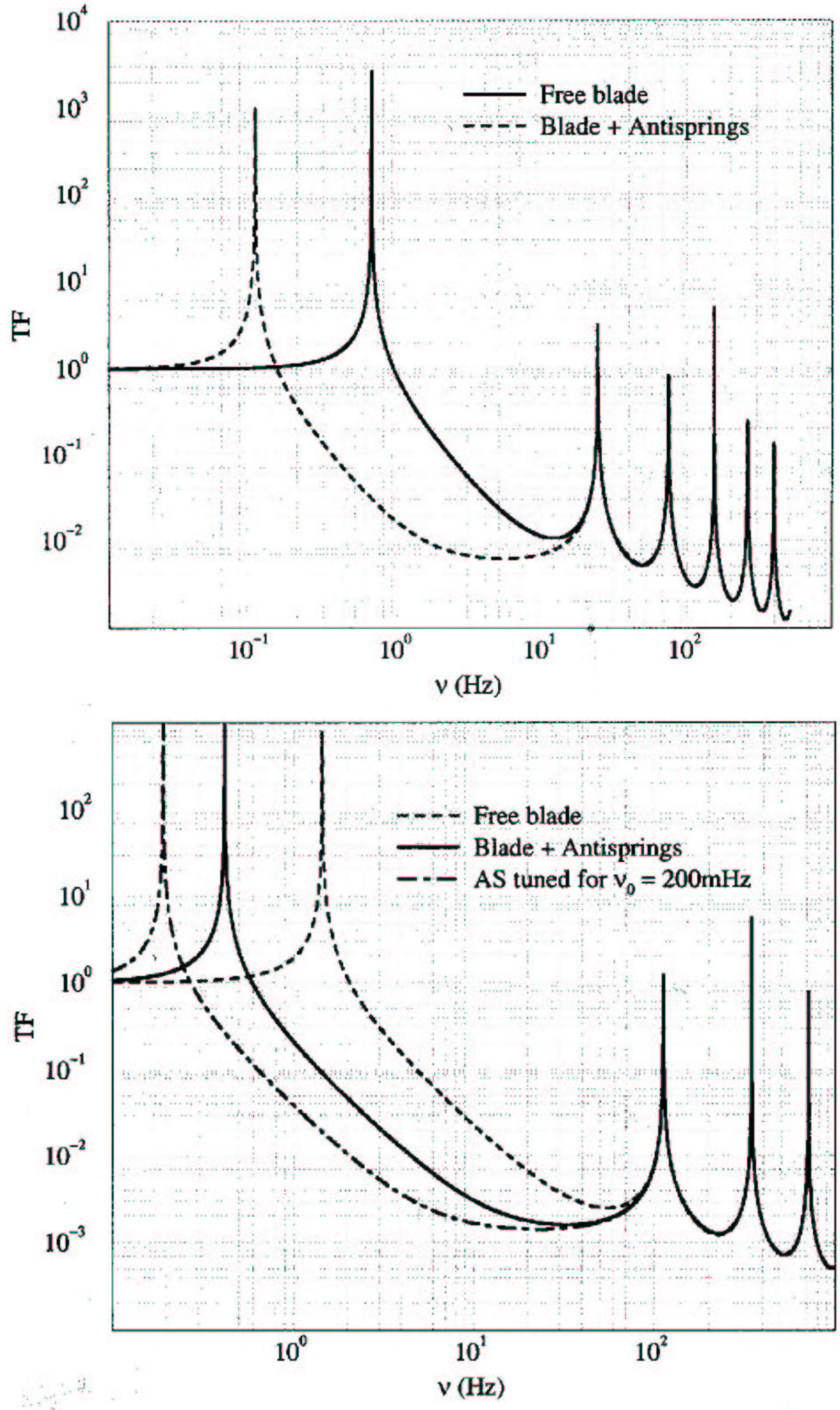

FIGURA 2.2.4. Funzioni di trasferimento verticali per una lama lunga (in alto) e corta (in basso). E' evidente dalle due figure che in entrambi i casi la funzione di trasferimento del sistema blade+antispring sia al di sotto di quella della blade libera per frequenze $f > 1$ Hz, ciò significando un maggior grado di efficacia del primo sistema rispetto al secondo nel fornire un isolamento da eventuali sorgenti di rumore sismico, riducendone la trasmissione.

un problema potenzialmente serio nella banda di frequenze che vanno da $f \simeq 4$ Hz (la più bassa frequenza a cui l'isolamento sismico meccanico sembra fattibile) a $f \simeq 30$ Hz.

Il primo che vide nel rumore Newtoniano una potenziale sorgente di rumore fu Weiss [**56**]. La prima analisi quantitativa di tale rumore risale a Saulson e Spero, nei primi anni ottanta [**54**]. Nei suoi studi Saulson arrivò alla conclusione che la più importante sorgente del rumore Newtoniano era la densità di massa fluttuante nel suolo sotto e vicino a ciascuna delle masse-test dell'interferometro. Egli concluse che queste fluttuazioni di densità erano indotte dalle onde sismiche circostanti. Spero mostrò che il rumore Newtoniano dovuto alle attività umane (e a quelle di animali e di qualsiasi altro corpo in movimento) può essere più serio del rumore Newtoniano sismico se tali corpi non sono tenuti ad adeguata distanza dalle masse-test. I primi calcoli di Saulson (1983) si basano su un modello fisico del suolo molto semplificato. Si divide il suolo in prossimità delle masse-test in regioni di dimensioni $\lambda/2$ (dove λ è la lunghezza d'onda di un'onda sismica longitudinale), e si schematizzano le masse di queste regioni come se fluttuassero in modo random ed indipendentemente ciascuna dall'altra. Il modello di Saulson [**28**] permette di collegare lo spettro di potenza del rumore Newtoniano su h allo spettro di potenza del movimento x del suolo:

$$< |\delta\tilde{h}(\omega)|^2 >= \frac{16}{3}\frac{\pi^3}{l^2}\frac{G^2\rho_0^2}{|R(\omega)|^2} < |\delta\tilde{x}(\omega)|^2 > \tag{2.2.34}$$

dove l è la lunghezza del braccio dell'interferometro, $R(\omega)$ la funzione di trasferimento meccanica che collega la accelerazione Newtoniana al moto delle masse test[4], e ρ_0 la densità di massa del suolo.

Il modello di Saulson non è privo di limiti. Questo modello assume che il contenuto di ciascuna cella possa fluttuare in modo indipendente, ma ciò non è possibile perché, per esempio, una massa crescente in un cubo deve essere connesso necessariamente ad un flusso di massa uscente nei cubi circostanti (conservazione della massa). Utilizzando un modello che tenga in considerazione la

[4] Ad esempio $R(\omega) = -\omega^2$ per una massa libera.

conservazione della massa, cioè tenendo in conto che le fluttuazioni di massa nelle celle adiacenti sono correlate, si arriva al seguente risultato[**28**]:

$$< |\delta\tilde{h}(\omega)|^2 >= \frac{64}{9}\frac{\pi^3}{l^2}\frac{G^2\rho_0^2}{|R(\omega)|^2} < |\delta\tilde{x}(\omega)|^2 > \tag{2.2.35}$$

La (2.2.35) è leggermente più grande (fattore $4/3$) del risultato ottenuto basandosi sul modello di Saulson. Ci si potrebbe chiedere se sia possibile controllare in qualche modo il rumore Newtoniano sismico. Un metodo è il seguente: bisogna monitorare le perturbazioni di densità di masse del suolo nei pressi delle masse-test, calcolare le forze gravitazionali che esse producono, e correggere i dati tenendo conto di tali forze.

Ma quale è l'importanza del rumore Newtoniano da un punto di vista sperimentale? L'ampiezza spettrale del rumore sismico in prossimità dell'interferometro può essere approssimativamente parametrizzato, nel range di frequenze di interesse, come[5] [**28**]:

$$\sqrt{< |\delta\tilde{x}(f)|^2 >} \simeq \frac{10^{-6}}{f^2}\frac{\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{Hz}}} \tag{2.2.36}$$

e in termini di ampiezza spettrale newtoniana, si ha:

$$\sqrt{< |\delta\tilde{h}(f)|^2 >} \simeq 3\times 10^{-17}\frac{1}{f^4} \tag{2.2.37}$$

che è, per esempio, bene al disotto della curva di sensibilità dell'interferometro Virgo[6].

Esso potrebbe diventare rilevante nel range delle basse frequenze (al di sotto dei 10Hz) qualora nello stadio finale il rivelatore presentasse un rumore termico ridotto.

[5]Questi valori sono circa un ordine di grandezza sopra i valori indicativi dati nella formula (2.2.30), che come detto in precedenza si riferiscono ad un sito "tranquillo". Essi sono ricavati da misure prese nelle vicinanze di Cascina [**55**].

[6]Vedere quanto riportato in Figura 2.2.1. Le curve di rumore Newtoniano ivi riportate si riferiscono ad un modello piú raffinato di quello descritto[**28**].

Saulson stimò anche il rumore Newtoniano generato da fluttuazioni atmosferiche, concludendo che esso è probabilmente più debole di quello prodotto dai movimenti del suolo. Del rumore Newtoniano atmosferico si discuterà nel prossimo capitolo.

CAPITOLO 3

Rumore Newtoniano atmosferico

3.1. INTRODUZIONE

Le fluttuazioni di densità di massa nell'atmosfera prodotte per esempio da onde di pressione acustiche o da perturbazioni di temperatura inducono un campo gravitazionale stocastico che si accoppia direttamente alle masse-test dell'interferometro e provocano rumore, il cosiddetto rumore Newtoniano atmosferico. Il primo a discutere gli effetti di tale rumore è stato Saulson [**54**]. Egli considerò esclusivamente gli effetti del background di onde di pressione acustiche e di corpi massivi in moto in prossimità dell'interferometro. Saulson giunse alla conclusione che il Newtoniano atmosferico da lui considerato sarebbe stato insignificante anche utilizzando un rivelatore interferometrico gravitazionale avanzato.

Successivamente T. Creighton [**29**] rivisitò il Newtoniano atmosferico. Tra le possibili sorgenti di fluttuazione di densità di massa nell'atmosfera, Creighton considerò quelle che riteneva fossero più preoccupanti. Le sorgenti considerate furono:

- Onde di pressione acustiche di fondo.
- Corpi massivi veloci in moto in prossimità dell'interferometro
- Onde d'urto atmosferiche transienti.
- Corpi massivi in collisione col suolo o con le strutture attorno alle masse-test.
- Perturbazioni della temperatura atmosferica in prossimità del rivelatore.

E' importante studiare gli effetti di riduzione di questo effetto a causa del suolo e delle costruzioni in prossimità dell'interferometro. E' utile cioè considerare il caso in cui la perturbazione acustica (onda sonora) è completamente assorbita dal suolo ed il caso in cui essa viene riflessa e vedere cosa cambia in relazione al rumore da essa provocato.

Le più grandi perturbazioni di densità atmosferica su piccola scala non sono causate da onde di pressione ma da perturbazioni di temperatura. Quando il calore è trasportato attraverso uno strato atmosferico convettivo, la turbolenza convettiva mescola pacchetti di aria calda e fredda, e ciò conduce alla formazione di perturbazioni della temperatura su tutte le scale fino ad arrivare a pochi millimetri. Sulla scala dei tempi di interesse queste perturbazioni sono in effetti "congelate" nella massa d'aria, mentre le variazioni di pressione si disperdono rapidamente in forma di onde sonore. Pertanto le fluttuazioni nella densità dell'aria sono provocate principalmente dalle perturbazioni di temperatura, che sono in genere più grandi delle perturbazioni di pressioni per diversi ordini di grandezza. Sebbene siano "congelate" nella massa d'aria, queste perturbazioni di temperatura possono causare fluttuazioni di densità che variano rapidamente nel tempo, $d\rho = -\rho\, dT/T$, quando il vento le trasporta nello spazio. Questa è la sorgente primaria di rumore in astronomia ottica. Le perturbazioni di temperatura trasportate dal vento, pur essendo la sorgente dominante delle fluttuazioni di densità atmosferiche, non producono rumore Newtoniano significativo alle alte frequenze, ciò essendo dovuto ai lunghi intervalli di tempo che ogni particolare pacchetto di aria calda e fredda trascorre nelle vicinanze delle masse-test dell'interferometro. Una possibile eccezione si ha quando il flusso d'aria forma vortici attorno alle costruzioni in cui si trova l'interferometro, poiché questo flusso può produrre uno spettro di rumore piccato attorno al valore delle frequenze del tipico vortice in circolazione in prossimità delle masse-test. La presenza delle fluttuazioni della temperatura nell'atmosfera, trasportate dal vento presso il rivelatore, possono costituire dunque una sorgente non banale di fluttuazioni di densità.

Anche le improvvise variazioni di pressione causate dalle onde d'urto atmosferico possono essere potenziali sorgenti di segnali transienti rivelabili nell'apparato rivelatore, se tali fenomeni avvengono in prossimità dei detectors . Questi "shocks" costituiscono un argomento da trattare perché possono produrre variazioni di pressioni significative su scala di tempi minore di 0.1 sec, che corrisponde al valore finale più basso della banda-passante della maggior parte dei rivelatori interferometrici. Gli shocks sono essenzialmente fenomeni transienti che possono produrre segnali spuri nel detector, piuttosto che alzare la soglia di rumore. Sarebbe utile sapere che SNR lo shock possa produrre. Pur costituendo una potenziale sorgente di segnali spuri nel rivelatore di onde gravitazionali, gli shockwaves atmosferici sono facilmente affrontabili utilizzando sensori ambientali. Se questi sensori rivelano una variazione di pressione maggiore di qualche millibar sulla scala dei tempi di 50-100 millisecondi, allora ci si potrebbe aspettare segnali spuri di ampiezza (adimensionale) dell'ordine di 10^{-22} nel range di frequenze di $10-20$ Hz.

Un'altra potenziale sorgente di segnale spuri nell'interferometro è il rumore Newtoniano causato dal moto di un singolo corpo massivo in prossimità dell'interferometro, o la collisione di un tale corpo con l'apparato sperimentale. Questa ultima eventualità è particolarmente preoccupante, poiché la decelerazione del corpo può produrre un segnale di alta frequenza. Un esempio di shocks atmosferici sono i "sonic booms" generati da corpi supersonici (per esempio un aereo supersonico che sorvola lo spazio attorno al rivelatore); essi potrebbero ostacolare la rivelazione delle onde gravitazionali. Anche se tali eventi sono rari se non addirittura inesistenti, essi sottolineano la potenziale serietà degli shocks rispetto ad altre sorgenti più deboli o a distanza più grande dall'apparato sperimentale, anche se magari i segnali sono parecchi ordini di grandezza più piccoli.

Consideriamo brevemente come esempio il meccanismo di produzione di rumore Newtoniano atmosferico da parte di onde di pressione acustiche di fondo. Si consideri un'onda piana di pressione di frequenza f, onda che si propaga alla velocità del suono c_s caratteristica del mezzo. Stimare l'effetto di questo rumore implica conoscerne la densità spettrale da confrontare con la curva di sensibilità dell'interferometro rivelatore. L'espressione che indica la densità spettrale del particolare rumore che si sta considerando è [**29**]:

$$S_h(f) = \left(\frac{G\rho c}{4\pi^2\gamma l}\right)^2 \frac{1}{3f^6p^2}\sum_{i=1}^{4} C\left(\frac{2\pi f r_{\min}^{(i)}}{c_s}\right) S_p^{(i)}(f) \tag{3.1.1}$$

dove gli indici identificano le diverse masse-test dell'interferometro. Riassumiamo in breve i punti importanti che hanno portato all'espressione (3.1.1).

(1) Si suppone che la fluttuazione relativa della pressione dell'aria sia piccola: $\delta p/p \ll 1$.

(2) Si considerano le onde sonore in prossimità dell'interferometro. Poiché l'interferometro è sensibile solo ai movimenti delle masse-test paralleli ai bracci, l'accelerazione gravitazionale prodotta dall'onda di pressione sulla massa test è ridotta di un fattore $\cos\theta$, dove θ è l'angolo tra la direzione di propagazione dell'onda ed il braccio dell'interferometro.

(3) La massa-test dell'interferometro è all'interno di una costruzione, che in principio può essere utilizzata per eliminare rumore entro una distanza caratteristica $r_{\min}$dalla massa-test. Per tenere conto di questo fatto, viene introdotta una funzione $C(x)$ la cui espressione dipende dalla forma della costruzione, dalla maniere in cui essa riflette le onde sonore, e da molti altri fattori.

(4) L'interferometro è posizionato sul suolo, non in uno spazio vuoto omogeneo. Si assume che le onde siano quasi del tutto riflesse dal suolo.

Sfruttando questi quattro punti, l'accelerazione gravitazionale prodotta dall'onda nella direzione di propagazione z è:

$$g_z(t) = \int \frac{Gz\delta\rho(t)}{r^3} dV = \frac{G\rho c_s}{\gamma p f}\cos\theta\, C\left(\frac{2\pi f r_{\min}^{(i)}}{c_s}\right)\delta p\left(1+\frac{1}{4f}\right) \tag{3.1.2}$$

dove $\gamma = c_P/c_V$, c_P è la capacità termica a pressione costante e c_V quella a volume costante .

D’altra parte il segnale d’onda gravitazionale $h(t)$ nell’interferometro è legato all’accelerazione di una delle masse test dalla relazione:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{g(t)}{l} \tag{3.1.3}$$

e nello spazio delle frequenze questa relazione diventa

$$\tilde{h}(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2}\frac{\tilde{g}(f)}{l} \tag{3.1.4}$$

Combinando la (3.1.2) e la (3.1.4) si ottiene:

$$\tilde{h}(f) = \frac{G\rho c_s}{4\pi^2\gamma p l f^3}\cos\theta C\left(\frac{2\pi f r^{(i)}_{\text{min}}}{c_s}\right) i\delta\tilde{p}(f) \tag{3.1.5}$$

Se adesso si assume che il rumore sia stazionario e che le direzioni e le ampiezze dei modi dell’onda siano scorrelati abbiamo che

$$S_h(f) = \left[\frac{G\rho c_s}{4\pi^2\gamma l f^3}C\left(\frac{2\pi f r^{(i)}_{\text{min}}}{c_s}\right)\right]^2 < \cos^2\theta > \frac{S_p(f)}{p^2} \tag{3.1.6}$$

dove $<\cdots>$indica una media sui modi dell’onda piana che contribuiscono al rumore. $S_p(f)$ è la densità spettrale di rumore acustico misurato al di fuori della costruzione nei pressi di una data massa test .

Infine, supponiamo che le masse test nell’ interferometro siano ad una distanza pari a diverse lunghezze di coerenza in modo che il loro rumore non sia correlato, e pertanto esso si sommi in potenza. Utilizzando $< \cos^2\theta >= 1/3$ si ottiene finalmente la (3.1.1) dove $r^{(i)}_{\text{min}}$ è la distanza caratteristica di cui al terzo punto relativa alla massa i-esima. $S^{(i)}_p(f)$ è lo spettro di rumore acustico misurato fuori dalla costruzione che circonda la massa i-esima.

Risulta (Creighton) che il background acustico e le fluttuazioni della temperatura producano rumore Newtoniano che è al di sotto della soglia di rumore perfino per rivelatori interferometrici avanzati, anche se le perturbazioni di temperatura trasportate lungo linee di flusso non-laminare potrebbero produrre rumore entro un ordine di grandezza dal fondo di rumore progettato, fissato a 10Hz.

Uno studio definito di questi effetti richiede probabilmente l'uso di modelli più fini. Inoltre le onde d'urto nell'atmosfera potrebbero produrre potenzialmente segnali spuri significativi per un interferometro avanzato. Questi segnali potrebbero essere controllati per mezzo di sensori acustici posti al di fuori delle costruzioni. Poi per evitare il rumore non trascurabile di oggetti massivi trasportati dal vento, sarebbe necessario costruire recinti che tengano questi corpi ad una distanza di sicurezza dalle masse-test.

Uno dei principali scopi dell'esperimento Virgo è quello di raggiungere una buona sensibilità a basse frequenze (attorno ai 4-10 Hz). In questa banda di frequenza il rumore termico ed il Newtoniano sismico rappresentano le sorgenti di rumore dominanti. Se l'esperimento rendesse il rumore termico più basso a basse frequenze, usando tecniche criogeniche o materiali ad alto Q, il Newtoniano sismico rappresenterebbe il limite di sensibilità a queste frequenze. Il terzo capitolo rappresenta il nucleo centrale di questo lavoro di tesi. L'obiettivo da raggiungere è quello di fornire una stima analitica del rumore Newtoniano atmosferico generato da fluttuazioni di densità di massa nell'atmosfera e di giudicarne l'effettiva importanza in relazione alla rivelazione di onde gravitazionali mediante tecniche di interferometria laser. Con lo sviluppo di tecniche sperimentali molto raffinate e molto sensibili, è possibile studiare direttamente i fenomeni di fluttuazione in diverse aree della fisica. Per quanto ci riguarda, i concetti di fluttuazione sono legati in maniera naturale ai fenomeni di trasporto, per esempio alla convezione. Anche i fenomeni di diffusione e la termodinamica dei fenomeni irreversibili sono basati sui risultati della teoria delle fluttuazioni. Considereremo il caso di fluttuazioni non quantistiche[**6**], cosa naturale in meccanica dei fluidi; ciò significa che le frequenze delle oscillazioni di fluttuazione sono supposte soddisfare la condizione $\hbar\omega \ll k_B T$. Si supporrà inoltre che i coefficienti di viscosità e di conducibilità termica del fluido (atmosfera) siano non dispersivi, cioè indipendenti dalla frequenza delle oscillazioni. I fenomeni che causano queste fluttuazioni di densità di massa nell'atmosfera vengono separati in tre gruppi, cioè:

(1) Fluttuazioni generate da FENOMENI ACUSTICI
(2) Fluttuazioni generate da FENOMENI TURBOLENTI
(3) Fluttuazioni generate da FENOMENI CONVETTIVI

Per ciascuno di questi gruppi di fenomeni fisici si studiano dei modelli teorici che simulano la situazione fisica reale e si dà una stima della densità spettrale del Newtoniano atmosferico per ciascun caso preso in esame.

3.2. CALCOLO DEL RUMORE Newtoniano

Prima di affrontare la trattazione di questi fenomeni fisici, calcoleremo le formule più importanti di uso generale che ci permetteranno di esprimere in maniera quantitativa la forma del rumore Newtoniano. L'effetto delle fluttuazioni di densità atmosferica $\delta\rho(\vec{x},t)$ su ciascuna delle quattro masse test di riferimento che sono sospese alle torri di sospensione, può essere calcolata con la forza di Newton:

$$\vec{a}(\vec{x},t) = -G\int d^3\vec{x}'\,\delta\rho(\vec{x}',t)\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \tag{3.2.1}$$

dove $\vec{x}$ è la posizione effettiva della massa test. Le masse test sono disposte in modo da formare due bracci dell'interferometro orientati lungo le direzioni x e y, così come risulta dalla Figura 3.2.1.

Inoltre poiché sono rivelate solo le variazioni della lunghezza relativa del cammino di luce, saremo interessati semplicemente alle componenti x e y dell'accelerazione. Indicando con $h(t)$ la differenza

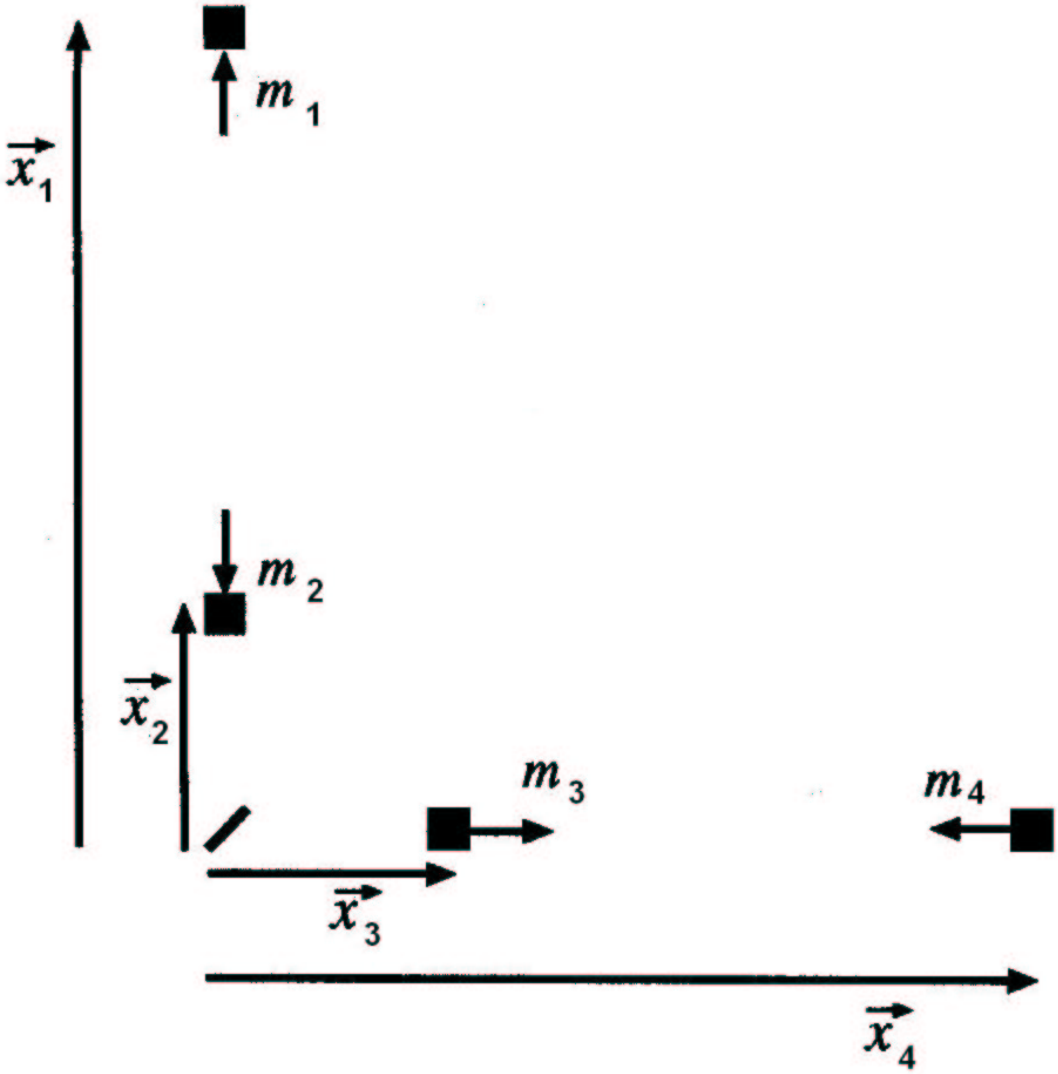

FIGURA 3.2.1. Geometria dell'interferometro

relativa della lunghezza dei bracci e con L la lunghezza dei bracci dell'interferometro, si ha :

$$h(t) = \frac{1}{L}\left[\left(x_2^{(1)} - x_2^{(2)}\right) - \left(x_1^{(4)} - x_1^{(3)}\right)\right] \tag{3.2.2}$$

e quindi possiamo collegare la derivata seconda temporale di $h(t)$ alla accelerazione Newtoniana delle masse test:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} = \frac{1}{L}\left[\left(a_2^{(1)} - a_2^{(2)}\right) - \left(a_1^{(4)} - a_1^{(3)}\right)\right] \tag{3.2.3}$$

Poiché siamo interessati alla ampiezza spettrale del rumore Newtoniano atmosferico, consideriamo la trasformata di Fourier di $h(t)$, espressa formalmente come $\tilde{h}(\omega) = \int dt\, h(t)\, e^{i\omega t}$; l'equazione (3.2.3) diventa nello spazio di Fourier :

$$-\omega^2\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{L}\left[\left(\tilde{a}_2^{(1)} - \tilde{a}_2^{(2)}\right) - \left(\tilde{a}_1^{(4)} - \tilde{a}_1^{(3)}\right)\right] \tag{3.2.4}$$

Inoltre, a causa della natura stocastica delle fluttuazioni di densità, abbiamo a che fare con la media di insieme $S_h(\omega)$ così definita:

$$S_h(\omega) =< \tilde{h}(\omega)\tilde{h}^*(\omega) > \tag{3.2.5}$$

$S_h(\omega)$ rappresenta lo spettro di rumore Newtoniano e, utilizzando l'equazione (3.2.3), diventa:

$$S_h(\omega) = \frac{1}{L^2\omega^4}\left\langle\left|\left(\tilde{a}_2^{(1)} - \tilde{a}_2^{(2)}\right) - \left(\tilde{a}_1^{(4)} - \tilde{a}_1^{(3)}\right)\right|^2\right\rangle \tag{3.2.6}$$

Osserviamo che questa formula verrà opportunamente semplificata nei vari casi in cui verrà utilizzata, ipotizzando condizioni di omogeneità (invarianza per traslazioni in senso statistico) e di isotropia (invarianza per rotazioni in senso statistico) delle funzioni di correlazioni delle fluttuazioni di densità e quindi delle fluttuazioni di accelerazione.

3.3. FENOMENI ACUSTICI

E' il gioco di equilibrio tra la comprimibilità e l'inerzia del fluido che sostiene la propagazione delle onde sonore (un moto oscillatorio di piccola ampiezza in un fluido comprimibile è chiamato onda sonora) nel mezzo materiale. Trattiamo la teoria lineare dell'acustica poiché consideriamo perturbazioni così deboli nelle equazioni del moto che possiamo considerarle come piccole quantità i cui prodotti sono trascurabili. Dunque prendiamo in considerazione esclusivamente la comprimibilità e l'inerzia del fluido, ma nessuna altra proprietà del fluido, otteniamo le equazioni linearizzate della teoria del suono nella loro forma più semplice, forma molto utile. Trascuriamo considerazioni circa l'influenza sulla propagazione di onde sonore da parte di fenomeni quali la viscosità, la conduzione di calore ed eventuali disomogeneità al contorno. Prendiamo in considerazione la propagazione ondosa in un fluido perfetto, riferendoci al caso dei cosiddetti "piccoli moti". Con questo modo di dire si intende una approssimazione che consiste nella linearizzazione della equazione di Eulero[**30**]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \tag{3.3.1}$$

Il procedimento considerato è legittimo quando le perturbazioni rispetto all'equilibrio sono sufficientemente piccole. Procediamo alla linearizzazione dell'equazioni che descrivono la dinamica di un fluido perfetto, cioé la (3.3.1) insieme all'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{3.3.2}$$

e alla condizione di adiabaticità (s è l'entropia per unità di massa)

$$\frac{ds}{dt} = 0$$

ponendo $p = p_0 + \delta p$, $\rho = \rho_0 + \delta\rho$. ρ_0 e p_0 sono la densità e la pressione del fluido all'equilibrio, e $\delta\rho$, δp le loro variazioni nella propagazione ondosa ($\delta\rho \ll \rho_0$, $\delta p \ll p_0$) e definendo la funzione potenziale di velocità ϕ tale che $\vec{\nabla}\phi = \vec{v}$ (nell'ipotesi ragionevole in cui il campo di velocità sia irrotazionale), si giunge all'equazione delle onde sonore:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi(\vec{x},t) = 0 \tag{3.3.3}$$

dove $c_s = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$ è la velocità del suono, che si può scrivere anche $c_s = 1/\sqrt{\rho\chi_s}$, con $\chi_s = \rho^{-1}(\partial\rho/\partial p)_s$ compressibilità adiabatica del mezzo.

Si verifica semplicemente che anche la $\delta\rho$ la δp soddisfano la stessa equazione d'onda. Tenendo conto che la relazione tra la fluttuazione di pressione e quella di densità di un mezzo comprimibile è $\delta p = c_s^2 \delta\rho$.

E' utile rendere chiaro che le equazioni d'onda introdotte per ϕ, $\delta\rho$ o δp sono approssimazioni lineari. Non ci si soffermerà qui sullo studio dei fenomeni di propagazione ondosa non lineari; si ricordi solo che le non linearità possono produrre una "distorsione" del segnale iniziale o addirittura l'insorgenza di discontinuità (onde d'urto o shock waves). Sottolineiamo inoltre due punti fondamentali che ci permettono di giungere alle equazioni linearizzate:

(1) la condizione affinché le equazioni linearizzate del moto siano applicabili alla propagazione delle onde sonore è che la velocità delle particelle del fluido sia piccola paragonata alla velocità del suono, $v \ll c_s$
(2) la propagazione di una onda sonora in un fluido ideale viene considerato adiabatica. L'ipotesi che il processo di compressione e di rarefazione che avviene localmente sia adiabatico è una ipotesi naturale, anche se in conseguenza di ciò si creano nel mezzo delle disomogeneità termiche, le quali farebbero presupporre l'esistenza di scambio di calore tra zone adiacenti a diversa temperatura. Accade tuttavia che la scala temporale sulla quale può avvenire localmente un apprezzabile scambio di calore è molto più lunga di quella per cui si mantengono le cause dello scambio termico stesso, cioè i valori locali del gradiente

di pressione e quindi di temperatura. Si suppone cioè che

$$T_{\text{oscillazione}} \ll \tau_{\text{conduzione}} \tag{3.3.4}$$

dove T rappresenta il periodo dell'onda sonora, mentre τ rappresenta la scala temporale caratteristica su cui può avvenire un significativo scambio di calore nel mezzo. Queste due scale temporali possono essere stimate numericamente e risulta:

$$\tau_{\text{conduzione}} \simeq \frac{(\lambda/2)^2}{\chi} = \frac{c_s^2}{\chi f^2} \simeq 10^{10} \left(\frac{1\,\text{Hz}}{f}\right)^2 \text{sec}$$

in cui λ è la lunghezza d'onda considerata, e χ la conducibilità termometrica dell'aria. Chiaramente il tempo di conduzione è molto maggiore di qualsiasi tempo di oscillazione che ci può interessare.

3.3.1. PROPAGAZIONE DI ONDE ACUSTICHE IN UN SEMISPAZIO. Come primo problema riguardante la generazione di rumore Newtoniano atmosferico, consideriamo l'accoppiamento gravitazionale delle masse-test dell'interferometro alle fluttuazioni di densità di massa atmosferiche dovute alla propagazione di onde sonore in un semispazio occupato da un fluido ideale comprimibile (atmosfera), semispazio delimitato da un piano (suolo) infinitamente rigido.

È necessario quindi risolvere [**30**] l'equazione d'onda (3.3.3) con la condizione al contorno

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z=0,t) = 0 \tag{3.3.5}$$

La condizione al contorno esprime il fatto che la velocità del fluido perfetto sulla superficie di separazione in quiete è puramente tangenziale. La soluzione generale di questo problema è data da:

$$\phi(\vec{x},t) = \int d^3\vec{k}\, f(\vec{k})\, u_{\vec{k}}(\vec{x},t) \tag{3.3.6}$$

dove le $u_{\vec{k}}$ sono onde piane:

$$u_{\vec{k}}(\vec{x},t) = \exp i\left(\vec{k}\vec{x} - \omega t\right) \tag{3.3.7}$$

Le $f(\vec{k})$ sono tali che $f(k_x,k_y,k_z) = f(k_x,k_y,-k_z)$, in modo da soddisfare le condizioni al contorno del problema, ed inoltre ci proponiamo di ridefinirle includendo gli eventuali fattori di normalizzazione che ometteremo di scrivere nel seguito. Per trovare le espressioni del rumore Newtoniano acustico è necessario calcolare la funzione di correlazione associata al potenziale di velocità relativa alle fluttuazioni di accelerazione subita dalle masse test.

Dalla meccanica dei fluidi risulta che [**30**]:

$$\delta\rho(\vec{x},t) = -\frac{\rho_0}{c_s^2}\frac{\partial\phi(\vec{x},t)}{\partial t} \tag{3.3.8}$$

Nello spazio di Fourier la (3.3.8) diventa:

$$\delta\tilde{\rho}(\vec{x},\omega) = \frac{i\omega\rho_0}{c_s^2}\tilde{\phi}(\vec{x},\omega) \tag{3.3.9}$$

e moltiplicando la (3.3.9) per il suo complesso coniugato e mediando (media di ensamble) si ha:

$$S_{\delta\rho}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\omega) = \langle\delta\tilde{\rho}(\vec{x}_1,\omega)\,\delta\tilde{\rho}^*(x_2,\omega)\rangle = \frac{\omega^2\rho_0^2}{c_s^4}\left\langle\tilde{\phi}(\vec{x}_1,\omega)\,\tilde{\phi}^*(\vec{x}_2,\omega)\right\rangle \tag{3.3.10}$$

Poiché si ha inoltre che:

$$a_i(\vec{x},t) = -G\int d^3\vec{x}\,\delta\rho(\vec{x}',t)\,\frac{x_i - x_i'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \tag{3.3.11}$$

si trova, procedendo come per la (3.3.9), che è valida la relazione:

$$\begin{aligned} S_{a,ij}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\omega) &= \left\langle \tilde{a}_i(\vec{x}_1,\omega)\tilde{a}^*_j(\vec{x}_2,\omega)\right\rangle \\ &= G^2\int d^3\vec{x}'_1\int d^3\vec{x}'_2\frac{(\vec{x}'_1-\vec{x}_1)_i\,(\vec{x}'_2-\vec{x}_2)_j}{\left|\vec{x}'_1-\vec{x}_1\right|^3\left|\vec{x}'_2-\vec{x}_2\right|^3}S_{\delta\rho}(\vec{x}'_1,\vec{x}'_2,\omega) \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

dove $a_i(\vec{x},t)$ è la componente i-esima della fluttuazione di accelerazione esercitata sulla massa test posizionata in $\vec{x}$ da parte delle fluttuazioni di densità di massa atmosferica, massa atmosferica che occupa il volume V. Poniamo, per comodità di notazione :

$$K_{ij}(\vec{x},\vec{y}) \equiv \frac{x_i y_j}{|\vec{x}|^3\,|\vec{y}|^3} \tag{3.3.13}$$

e sostituendo la (3.3.10) nella (3.3.12), si ha:

$$\left\langle \tilde{a}_i(\vec{x}_1,\omega)\tilde{a}^*_j(\vec{x}_2,\omega)\right\rangle = \frac{G^2\omega^2\rho_0^2}{c_s^4}\int d^3\vec{x}'_1\int d^3\vec{x}'_2 K_{ij}(\vec{x}'_1-\vec{x}_1,\vec{x}'_2-\vec{x}_2)\left\langle\tilde{\phi}(\vec{x}'_1,\omega)\,\tilde{\phi}^*(\vec{x}'_2,\omega)\right\rangle \tag{3.3.14}$$

Dunque il problema principale resta quello di calcolare l'espressione per $S_\phi(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\omega)$:

$$S_\phi(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\omega) = \left\langle\tilde{\phi}(\vec{x}_1,\omega)\tilde{\phi}^*(\vec{x}_2,\omega)\right\rangle = \int d^3\vec{k}_1\int d^3\vec{k}_2\tilde{u}_{\vec{k}_1}(\vec{x}_1,\omega)\tilde{u}^*_{\vec{k}_2}(\vec{x}_2,\omega)\left\langle f(\vec{k}_1)\,f^*(\vec{k}_2)\right\rangle \tag{3.3.15}$$

ossia quello di calcolare l'espressione per la funzione di la correlazione $< f(\vec{k}_1)\,f^*(\vec{k}_2) >$. Assumendo che questa funzione di correlazione sia omogenea ed isotropa, cioè assumendo invarianza (in senso statistico) per traslazioni e rotazioni, si può scrivere :

$$< f(\vec{k}_1)\,f^*(\vec{k}_2) >= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\left\langle|f(k_1)|^2\right\rangle \tag{3.3.16}$$

e pertanto, includendo le costanti di normalizzazione nella definizione di $f(\vec{k})$, la (3.3.15) diventa :

$$\left\langle\tilde{\phi}(\vec{x}_1,\omega)\,\tilde{\phi}^*(\vec{x}_2,\omega)\right\rangle = \int d^3\vec{k}\,\tilde{u}_{\vec{k}}(\vec{x}_1,\omega)\tilde{u}^*_{\vec{k}}(\tilde{x}_2,\omega)\left\langle|f(\vec{k})|^2\right\rangle \tag{3.3.17}$$

il problema si è ridotto al calcolo dell'espressione per $<|f(\vec{k})|^2>$. Dalla espressione generale per f e poiché $\vec{v}=\vec{\nabla}\phi$, risulta che:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = -\int d^3\vec{k}\,k^2 f(\vec{k})u_{\vec{k}}(\vec{x},t) \tag{3.3.18}$$

L'equazione di continuità (conservazione della massa) espressa nello spazio delle frequenze è:

$$\delta\tilde{\rho}(\vec{x},\omega) = \frac{-i\rho_0}{\omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \tag{3.3.19}$$

Supponendo di ragionare a frequenza ω fissata, la (3.3.19) diventa:

$$\delta\tilde{\rho}(\vec{x},\omega) = \frac{i\rho_0\omega^3}{c_s^4}\int d\Omega_{\vec{k}}\, f(\vec{k})u_{\vec{k}}(\vec{x}) \tag{3.3.20}$$

e quindi,

$$\langle\delta\tilde{\rho}(\vec{x}_1,\omega)\,\delta\tilde{\rho}^*(x_2,\omega)\rangle = \frac{\rho_0^2\omega^6}{c_s^8}\int d\Omega_{\vec{k}}\int d\Omega_{\vec{p}}\, u_{\vec{k}}(\vec{x}_1)u^*_{\vec{p}}(\vec{x}_2)\left\langle f(\vec{k})f^*(\vec{p})\right\rangle \tag{3.3.21}$$

Utilizzando l'invarianza per rotazione attorno all'asse z del problema e le condizioni di vincolo sulle ampiezze $f(\vec{k})$, si ha che la (3.3.21) diventa:

$$\begin{aligned} S_{\delta\rho}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\omega) &= \frac{2\rho_0^2\omega^6}{c_s^8}\int_0^1 d\xi F(\xi,\omega)J_o\left(\frac{\omega r}{c_s}\sqrt{1-\xi^2}\right) \\ &\times \left\{\cos\left[\frac{\omega\xi}{c_s}(z_1-z_2)\right]+\cos\left[\frac{\omega\xi}{c_s}(z_1+z_2)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

dove $r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, $F(\xi,\omega)=<|f(\xi,\omega)|^2>$ e $J_0(z)$ è una funzione di Bessel del primo tipo [**52**].

Considerando i punti $\vec{x}_1=\vec{x}_2=(0,0,z)$ la (3.3.22) si semplifica e diventa:

$$S_{\delta\rho}(z,\omega) = \frac{2\rho_0^2\omega^6}{c_s^8}\int_0^1 d\xi F(\xi,\omega)\left[1+\cos\left(\frac{2\omega\xi z}{c_s}\right)\right] \tag{3.3.23}$$

e poiché $c_s^4 S_{\delta\rho} = S_p$ si ha :

$$S_p(z,\omega) = \frac{2\rho_0^2\omega^6}{c_s^4}\int_0^1 d\xi F(\xi,\omega)\left[1+\cos\left(\frac{2\omega\xi z}{c_s}\right)\right] \tag{3.3.24}$$

Dalla (3.3.24) risulta:

$$\int_0^{+\infty} S_p(z,\omega)\cos\alpha z\, dz = \frac{2\rho_0^2\omega^6}{c_s^4}\int_0^1 d\xi F(\xi,\omega)\int_0^{+\infty} dz\,\cos\alpha z\left[1+\cos\left(\frac{2\omega\xi}{c_s}z\right)\right] \tag{3.3.25}$$

cioè

$$\int_0^{+\infty} S_p(z,\omega)\cos\alpha z\, dz = \frac{\pi\rho_0^2\omega^6}{c_s^4}F\left(\frac{c_s}{2\omega}\alpha,\omega\right) \tag{3.3.26}$$

e quindi

$$F\left(\frac{c_s}{2\omega}\alpha,\omega\right) = \frac{c_s^4}{\pi\rho_0^2\omega^6}\int_0^{+\infty} dz S_p(z,\omega)\cos\alpha z \tag{3.3.27}$$

Lo spettro di pressione $S_p(z,\omega)$può essere ricavato sperimentalmente mediante un rivelatore acustico (microfono) direzionato lungo differenti direzioni (il parametro α tiene conto di ciò) e quindi può essere calcolata la quantità $F(\omega,\alpha)$, tenendo conto che è necessario integrare su z, tramite la quale è possibile stimare la funzione di correlazione associata alle fluttuazioni di accelerazione delle masse test.

Alternativamente é possibile determinare qualsiasi correlazione a partire dalla conoscenza delle correlazioni al suolo. Un modo semplice per verificare questo consiste nell'applicare una trasformata di Fourier alle variabili *x,y,t* nelle equazioni e nelle condizioni al contorno. Il problema si riduce alla integrazione di una equazione differenziale ordinaria con condizioni iniziali che dipendono dai valori della pressione al suolo.

In mancanza di misure dettagliate delle correlazioni di pressione è necessario semplificare ulteriormente il modello. Ad esempio possiamo partire nuovamente dall'equazione d'onda per la fluttuazione di pressione, previa trasformazione di Fourier della variabile temporale:

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c_s^2}\right)\delta\tilde{p}(\vec{r},\omega) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\delta\tilde{p}(\vec{r},\omega)\Big|_{z=0} = 0 \\ \delta\tilde{p}(\vec{r},\omega)\big|_{z=0} = \delta\tilde{p}_{\mathrm{exp}}(x,y,\omega) \end{array} \right. \tag{3.3.28}$$

Nelle condizioni al contorno appare naturalmente la misura delle fluttuazioni di pressione al suolo $\delta\tilde{p}_{\mathrm{exp}}$.

La soluzione del problema (3.3.28) può essere scritta come somma su modi, a frequenza ω fissata:

$$\delta\tilde{p}(\vec{r},\omega) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} A(\vec{k},\omega) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cos\left(\gamma_{\vec{k}} z\right)$$

dove $\gamma_{\vec{k}} = \sqrt{\omega^2/c_s^2 - k^2}$ e l'integrazione é estesa a tutti i valori $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$ tali che $\gamma_{\vec{k}}$ sia reale.

Allora le correlazioni delle fluttuazioni di pressione si possono scrivere come

$$S_p(\vec{r}_1,\vec{r}_2;\omega) = \int \frac{d^2\vec{k}_1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2\vec{k}_2}{(2\pi)^2} < A(\vec{k}_1,\omega) A^*(\vec{k}_2,\omega) > e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}_1} e^{-i\vec{k}_2\cdot\vec{r}_2} \cos\left(\gamma_{\vec{k}_1} z_1\right) \cos\left(\gamma_{\vec{k}_2} z_2\right)$$

L'ipotesi semplificatrice é che le correlazioni tra le ampiezze dei modi abbiano la forma

$$< A(\vec{k}_1,\omega) A^*(\vec{k}_2,\omega) >= (2\pi)^2 \Lambda(\omega) \delta^{(2)}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$$

siano cioè completamente scorrelate tra modi diversi, e dipendano solo dalla frequenza.

Data questa ipotesi possiamo riscrivere le correlazioni delle fluttuazioni di pressione nella forma[1]

$$S_p(\vec{r}_1,\vec{r}_2;\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 \Lambda(\omega) \int_0^1 d\eta\, \eta J_0\left(\frac{\omega\eta}{c_s} R_{12}\right) \cos\left(\frac{\omega z_1}{c_s}\sqrt{1-\eta^2}\right) \cos\left(\frac{\omega z_2}{c_s}\sqrt{1-\eta^2}\right)$$

[1] $R_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

A questo punto possiamo considerare una misura puntuale dello spettro di potenza delle fluttuazioni di pressione:

$$S_p(0,0;\omega) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\omega}{c_s}\right)^2 \Lambda(\omega)$$

ed otteniamo il risultato finale cercato

$$\frac{S_p(\vec{r}_1,\vec{r}_2;\omega)}{S_p(0,0;\omega)} = \int_0^1 d\eta\,\eta J_0\left(\frac{\omega\eta}{c_s}R_{12}\right)\cos\left(\frac{\omega z_1}{c_s}\sqrt{1-\eta^2}\right)\cos\left(\frac{\omega z_2}{c_s}\sqrt{1-\eta^2}\right)$$

Infine per la correlazione tra accelerazioni avremo

$$\begin{aligned} S_{a,ij}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\omega) &= \frac{G^2}{c_s^4} S_p(0,0;\omega) \int d^3\vec{r}_1' \int d^3\vec{r}_2' K_{ij}\left(\vec{r}_1-\vec{r}_1',\vec{r}_2-\vec{r}_2'\right) \\ &\times \int_0^1 d\eta\,\eta J_0\left(\frac{\omega\eta}{c_s}R_{12}'\right)\cos\left(\frac{\omega z_1'}{c_s}\sqrt{1-\eta^2}\right)\cos\left(\frac{\omega z_2'}{c_s}\sqrt{1-\eta^2}\right) \end{aligned}$$

La formula precedente permette di ricavare la correlazione tra le accelerazioni Newtoniane in una coppia qualsiasi di punti, in termini dello spettro delle fluttuazioni puntuali di pressione, facilmente misurabile.

Purtroppo non disponiamo di misure dirette di S_p nel sito, ma valori estratti dalla letteratura [**59**] permettono di concludere che l'effetto dovrebbe essere almeno un paio di ordini di grandezza al di sotto della curva di sensibilitá.

3.4. FENOMENI TURBOLENTI

Prima di considerare qualche problema specifico, è opportuno discutere brevemente delle caratteristiche principali della turbolenza.

Si consideri il flusso turbolento di un fluido incomprimibile. Un flusso turbolento è per sua natura instabile: una piccola perturbazione in genere si amplificherà, a causa della non linearità delle equazioni che ne descrivono il moto. Inoltre risulta da una grande quantità di dati sperimentali che il flusso turbolento di un fluido incomprimibile è rotazionale, cioè che $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ è non nullo, almeno in certe regioni dello spazio. Il sistema di equazioni che definisce questo sistema fisico [**30**] consiste nell'equazione di Navier-Stokes[2]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} \tag{3.4.1}$$

e nella condizione di incomprimibilità:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{3.4.2}$$

Il sistema va ovviamente integrato considerando le condizioni iniziali e le condizioni al bordo opportune. L'equazione di Navier-Stokes contiene probabilmente tutto quello che c'è da sapere sulla turbolenza, tuttavia è essenziale avere un background di osservazioni sperimentali per avere una comprensione accurata del fenomeno poiché non è semplice risolvere analiticamente l'equazione data l'enorme difficoltà dovuta alla sua non linearità. Dei parametri che caratterizzano il flusso stesso, solo la viscosità cinematica $\nu = \eta/\rho$ (η è detta viscosità dinamica) appare nelle equazioni di Navier-Stokes. Le funzioni incognite da determinare sono $\vec{v}$ e p/ρ . Inoltre il flusso dipende, attraverso le condizioni al contorno, dalla forma e dalle dimensioni del corpo che viene inserito nel fluido per rompere l'irrotazionalità del campo di velocità e per innescare quindi la turbolenza. Poiché in genere la forma del corpo è supposta data, le sue proprietà geometriche sono determinate da una dimensione lineare tipica che denotiamo con l. Sia u la velocità tipica del flusso principale del fluido. Ogni flusso è quindi specificato da tre parametri: ν, u ed l. La sola quantità adimensionale che può essere costruita con queste quantità è detta numero di Reynolds R:

$$R = \frac{ul}{\nu} \simeq \frac{|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}|}{|\nu \nabla^2 \vec{v}|} \tag{3.4.3}$$

[2] ν è la viscosità cinematica del fluido.

Il numeratore della (3.4.3) rappresenta il termine di trasporto (termine inerziale), mentre il denominatore è il termine di viscosità. Quando il numero di Reynolds è piccolo ($R \ll 1$), è lecito trascurare le forze di inerzia e quindi le equazioni di Navier-Stokes si linearizzano. Quando al contrario $R \gg 1$ (grandi numeri di Reynolds) sono le forze di inerzia a prevalere su quelle di viscosità. In questi casi si possono avere delle instabilità che conducono a un moto caotico (turbolenza).

Per rendere chiaro il meccanismo di insorgenza della turbolenza, introduciamo brevemente i concetti di simmetrie rotte e di simmetrie ripristinate. Considerazioni di simmetria sono concetti centrali nello studio dei fenomeni di transizione e della turbolenza pienamente sviluppata. Le simmetrie sono gruppi di invarianza continui o discreti relativi ad una determinata teoria dinamica. Sia G un gruppo di trasformazioni che agisce sulle funzioni $\vec{v}(\vec{x},t)$ spazialmente periodiche e non divergenti. G è detto essere gruppo di simmetria delle equazione di Navier-Stokes se, per tutte le $\vec{v}$ che sono soluzioni dell'equazione di Navier -Stokes, e $\forall g \in G$, la funzione $g\vec{v}$ è anche una soluzione.

Le simmetrie note dell'equazione di Navier-Stokes [**34**] sono:

(1) traslazioni spaziali: $(t,\vec{x},\vec{v}) \to (t,\vec{x}+\vec{a},\vec{v})$ con $\vec{a} \in \Re^3$

(2) traslazioni temporali: $(t,\vec{x},\vec{v}) \to (t+\tau,\vec{x},\vec{v})$ con $\tau \in \Re$

(3) trasformazioni di Galileo: $(t,\vec{x},\vec{v}) \to (t,\vec{x}+\vec{V}t,\vec{v}+\vec{V})$ con $\vec{V} \in \Re^3$

(4) parità: $(t,\vec{x},\vec{v}) \to (t,-\vec{x},-\vec{v})$

(5) rotazioni: $(t,\vec{x},\vec{v}) \to (t,R\vec{x},R\vec{v})$ con $R \in SO(3,\Re)$

(6) scaling: $(t,\vec{x},\vec{v}) \to (\lambda^{(1-\alpha)}t,\lambda\vec{x},\lambda^{\alpha}\vec{v}$ con $\lambda \in \Re_+$ e $\alpha \in \Re$.

E' utile sottolineare che la 5. è valida nel limite in cui $l \to \infty$ e che la 6. è valida per $\nu \to 0$, cioè per numeri di Reynolds molto alti.

Si osservi inoltre che la simmetria $\vec{v} \to -\vec{v}$ non è consistente con la equazione di Navier-Stokes, eccetto quando il termine non lineare è trascurabile. Inoltre, diversamente dall'equazione di Eulero, l'equazione di Navier-Stokes non è invariante per inversione temporale. Tale proprietà è riconducibile alla insorgenza di fenomeni dissipativi. Infine si osservi che tutte le simmetrie enumerate, eccetto quella di scaling, non sono altro che conseguenze macroscopiche delle simmetrie fondamentali delle equazioni di Newton che governano il moto molecolare microscopico (in approssimazione classica). Prima di dire cosa succede all'aumentare del numero di Reynolds nel fluido, definiamo in breve il concetto di Rottura Spontanea di Simmetria [**39**].

Risulta che i sistemi macroscopici abbiano in genere un minore livello di simmetria a basse temperature piuttosto che a quelle alte. La simmetria manifestata alle alte temperature è generalmente una proprietà della hamiltoniana microscopica del sistema. In quanto tale, essa non può cessare di esistere quando appare violata. La domanda è, che fine fa? Per esempio, la hamiltoniana microscopica di un ferromagnete è invariante per rotazione. Abbassare la temperatura del sistema sicuramente non cambia questo fatto. Quello che cambia, però, è il modo in cui la simmetria si manifesta. E' naturale assumere che nella più perfetta manifestazione della simmetria, lo stato fondamentale dovrebbe restare invariante sotto trasformazioni di simmetria. In molti casi il sistema possiede molti stati fondamentali fra loro equivalenti che si trasformano l'uno nell'altro sotto la trasformazione di simmetria, ma siccome il sistema può, in realtà, esistere in uno solo di questi stati, la simmetria appare rotta. Questo fenomeno, cioè che lo stato fondamentale del sistema non possiede la stessa simmetria della hamiltoniana, è detto Rottura Spontanea di Simmetria. Venendo finalmente alla turbolenza, si osserva sperimentalmente che quando il numero di Reynolds aumenta, le diverse simmetrie permesse dalle equazioni (e dalle condizioni al contorno) sono successivamente rotte.

Tuttavia, per numeri di Reynolds altissimi, appare una tendenza a ripristinare le simmetrie in senso statistico lontano dai bordi, cioè le simmetrie sono ripristinate in media ma non per ciascuna singola realizzazione del campo di velocità del sistema. La turbolenza a numeri di Reynolds altissimi, quando tutte od alcune delle possibili simmetrie sono ripristinate in senso statistico, è nota come turbolenza pienamente sviluppata (fully developed turbulence [**34**]). La turbolenza pienamente sviluppata è una turbolenza che è libera di svilupparsi senza vincoli imposti. I possibili vincoli sono i bordi, le forze esterne, o la viscosità: si osserva facilmente che le strutture di un flusso di scala confrontabile con le dimensioni del dominio dove il fluido evolve non può essere correttamente definito come "sviluppato". Pertanto nessun fluido reale, anche se ha un numero di Reynolds alto, può essere "pienamente sviluppato" su grandi scale energetiche. Su scale più piccole, tuttavia, la turbolenza sarà pienamente sviluppata se la viscosità non gioca un ruolo diretto nella dinamica di queste scale (il concetto di cascata energetica locale (local energy cascade) nel regime di turbolenza tridimensionale ad alti numeri di Reynolds, implica che le forze inerziali trasferiscono energia dalle grandi scali alle piccole scali senza alcuna sostanziale influenza della viscosità, fino a quando non si arriva alle cosiddette "scale dissipative " dove l'energia cinetica viene infine dissipata dalle forze viscose). Ciò sarà vero se il numero di Reynolds è abbastanza alto così che il "range-inerziale" possa svilupparsi. Dunque è necessario che il flusso non sia soggetto ad alcun vincolo che potrebbe vietare il flusso dall'assumere tutte le simmetrie possibili. Il flusso turbolento a numeri di Reynolds abbastanza grandi è caratterizzato dalla presenza di una variazione disordinata estremamente irregolare della velocità col tempo in ciascun punto. Risulta da evidenze sperimentali che il campo di velocità turbolento ha natura frattale [**41, 44**], in un certo senso analoga a frattali nel senso che gli incrementi della posizione al crescere del tempo sono proporzionali alla potenza $1/2$ dell'incremento di tempo. I fluidi sembrano fornire esempi di campi di velocità frattali, ad esempio nello spazio, nel senso che gli incrementi di velocità sono proporzionali alla potenza $1/3$ dell'incremento di spazio. In un flusso turbolento a numeri di Reynolds molto alti, l'incremento quadratico medio della velocità tra punti a distanza l va approssimativamente con la potenza $2/3$ della distanza [**44**]

$$< \delta v(l)^2 > \sim l^{\frac{2}{3}} \tag{3.4.4}$$

Non si andrà oltre circa la discussione sulla turbolenza e si introdurranno nuovi concetti e teorie sulla turbolenza quando serviranno. Dal punto di vista matematico, il problema centrale della teoria della turbolenza è quello di ottenere le soluzioni statistiche delle equazioni di Navier- Stokes. Le tecniche usuali della meccanica dei fluidi non sono sufficientemente potenti per lo studio della turbolenza . Nella seconda metà del secolo scorso, una formale analogia è stata riscontrata tra la teoria della turbolenza e la teoria quantistica di campo. In entrambi i casi un sistema di campi interagenti è non lineare, teoricamente con un infinito numero di gradi di libertà. Da ciò segue la somiglianza dell'apparato matematico utilizzato in entrambe le teorie. Per esempio il metodo dei grafici di Feynman [**10, 7**] per ricordare le equazioni è anche applicabile alla teoria della turbolenza (grafici ad albero, ecc.). Il nostro approccio allo studio della turbolenza è quello di trattarla con una teoria statistica analitica (Kraichnan-Orszag) connessa a considerazioni di ordine dimensionale e di similarità [**31**].

3.4.1. TURBOLENZA INCOMPRIMIBILE: PROCESSO DI LIGHTHILL. La turbolenza molto debole (very weak turbulence [**45**]) può essere descritta da equazioni dinamiche linearizzate. Consideriamo il caso in cui la turbolenza sia relativamente debole, ma non tale da poter trascurare i termini non lineari nelle sue equazioni dinamiche. In questo contesto considereremo quale principale effetto quadratico, la generazione del suono da parte della turbolenza in un mezzo comprimibile. Infatti la produzione del suono dovuta all'interazione dei vortici turbolenti con se stessi (interazione principale che causa questi effetti del secondo ordine) avviene, ovviamente, solo quando viene presa in considerazione la comprimibilità del mezzo. Come esempio riguardante la generazione di fluttuazioni di densità di massa dovute a fenomeni turbolenti, consideriamo l'equazione d'onda della acustica lineare con un temine di sorgente dovuto alla turbolenza [**30**]:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\delta\rho(\vec{x},t) = -\frac{\rho_0}{c_s^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_i' v_j' \tag{3.4.5}$$

L'equazione (3.4.5) descrive il cosiddetto Processo di Lighthill.

Questo fenomeno consiste nel riscaldamento fornito dal rumore acustico generato dalla presenza di un flusso turbolento del fluido . Si può affermare che la turbolenza (o meglio le fluttuazioni della velocità turbolenta) eccita il suono [**40**]. Si vogliono evidenziare due punti importanti che sono impliciti nella (3.4.5):

(1) essa è stata ricavata ipotizzando di avere a che fare con la turbolenza comprimibile. Una differenza fondamentale tra la turbolenza comprimibile e la turbolenza incomprimibile è la seguente: variazioni nel campo di velocità implicano variazioni nella densità locale del fluido. Le fluttuazioni nella densità produrranno variazioni locali della pressione che guideranno l'emissione delle onde sonore. Per la turbolenza incomprimibile, invece, cambiamenti nella pressione non producono variazioni di densità.

(2) nel termine di sorgente sono presenti esclusivamente le parti fluttuanti del campo di velocità turbolento ($\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$ dove $\vec{u}$ è il campo di velocità medio e $\vec{v}'$ il campo di velocità fluttuante). La quantitá $\rho v'_i v'_j$ é detta sforzo di Reynolds. La porzione laminare del flusso, se ne esiste una, non gioca alcun ruolo nel generare le fluttuazioni turbolenti che sono irradiate sotto forma di rumore in questo processo.

In realtà, per motivi di complessità analitica, non risolveremo l'equazione (3.4.5), ma studieremo la più semplice :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\delta p(\vec{x},t) = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j \tag{3.4.6}$$

dove abbiamo considerato il termine di sorgente dovuto alla turbolenza incomprimibile, pur tuttavia mantenendo la comprimibilità nel mezzo in cui si propagano le onde sonore [**30**].

L'equazione (3.4.6) è stata ricavata trascurando gli effetti legati alla viscosità ed alla conducibilità termica. Inoltre si è assunto che le fluttuazioni di velocità incomprimibile $\vec{v}'$ siano piccole paragonate alla velocità media del suono c_s. L'equazione (3.4.6) può allora essere considerata come l'equazione che descrive la generazione del suono da parte di una turbolenza con piccolo numero di Mach $M = U/c_s$ (U è una scala caratteristica di velocità del sistema) e non semplicemente da una turbolenza che si avvicina al periodo finale di decadimento.

L'equazione (3.4.6) conduce ad un certo numero di importanti conseguenze. Per esempio il secondo membro dell'equazione è una combinazione di derivate del secondo ordine del campo $V_{ij}(\vec{x})$, il che significa che, in assenza di contorno solido, la generazione di onde sonore da parte della turbolenza è equivalente alla radiazione emessa da un insieme di quadrupoli acustici (e non dalle usuali sorgenti dipolari acustiche). Pertanto segue che se non ci sono contorni, a piccoli numeri di Mach la turbolenza non rappresenta una sorgente efficiente del suono. Supporremo che il "rumore acustico" sia generato in un volume contornato ("turbulent region") del fluido in cui avvengono fluttuazioni di velocità, mentre il mezzo che circonda questo volume è supposto in quiete (regione molto più estesa di quella turbolenta , "radiation region"). Per risolvere la (3.4.6) applichiamo la teoria statistica analitica della turbolenza. Inoltre per rendere i calcoli fattibili, supponiamo di avere a che fare con la turbolenza pienamente sviluppata, omogenea, isotropa e stazionaria. La turbolenza è detta omogenea se tutte le quantità costruite con un set di n punti $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ (in istanti $t_1, \cdots, t_n$) sono invarianti sotto qualsiasi traslazione del set. In particolare si ha [**32**]:

$$< u_{\alpha_1}(\vec{x}_1, t_1) \cdots u_{\alpha_n}(\vec{x}_n, t_n) > = < u_{\alpha_1}(\vec{x}_1 + \vec{y}, t_1) \cdots u_{\alpha_n}(\vec{x}_n + \vec{y}, t_n) > \tag{3.4.7}$$

dove $< \cdots >$ è l'usuale valore di aspettazione sull'ensemble.

La turbolenza è stazionaria se tutte le quantità medie che coinvolgono gli n istanti $(t_1, \cdots, t_n)$ sono invarianti sotto qualsiasi traslazione temprale. In particolare [**32**]:

$$< u_{\alpha_1}(\vec{x}_1, t_1) \cdots u_{\alpha_n}(\vec{x}_n, t_n) > = < u_{\alpha_1}(\vec{x}_1, t_1 + \tau) \cdots u_{\alpha_n}(\vec{x}_n, t_n + \tau) > \tag{3.4.8}$$

Infine la turbolenza omogenea si dice isotropa se tutte le quantità medie che riguardano un insieme di n punti $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n)$ (agli istanti $t_1, \cdots, t_n$) sono invarianti sotto una qualsiasi rotazione arbitraria.

Si potrebbe discutere sul fatto che non c'è alcun flusso turbolento che sia isotropo oppure omogeneo su grandi scale. L'isotropia e la omogeneità possono essere discutibili perfino a piccole scale. Tuttavia queste ipotesi ci permettono di sfruttare facilmente le teorie statistiche analitiche, semplificando enormemente le equazioni del moto. Tali teorie sono estremamente potenti nel senso che ci permettono di avere a che fare con forti non linearità quando lo spostamento dall'ipotesi di gaussianità non è grande. Il punto di vista sviluppato qui è che queste tecniche descrivono in modo soddisfacente la dinamica di un flusso turbolento tridimensionale a piccole scale. Il prezzo di questa semplificazione è il divario tra la situazione studiata teoricamente e quella che può essere realizzata in pratica. L'omogeneità implica che la turbolenza è uniforme nello spazio ed il concetto della stazionarietà può essere descritta come omogeneità nel tempo. L'isotropia implica che non ci sono direzioni privilegiate. Non può esserci alcuna velocità media in un campo isotropo, poiché ciò implicherebbe immediatamente una direzione privilegiata. I campi turbolenti isotropi ed omogenei possono essere relativamente semplici ma sono anche piuttosto irreali (non fisici). Nei campi reali l'energia deriva da qualche gradiente medio di pressione, di temperatura o di massa, e pertanto questi campi devono essere anisotropi. Inoltre, poiché questi campi saranno soggetti ad opportune condizioni ai bordi che implicano che devono essere necessariamente disomogenei. Nonostante tutto ciò, si utilizzeranno come ipotesi di lavoro quelle di considerare la turbolenza pienamente sviluppata, omogenea, isotropa e stazionaria. Ciò detto procediamo alla manipolazione della equazione (3.4.6).

Nello spazio di Fourier questa equazione diventa:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c_s^2}\right) \delta\tilde{p}(\vec{k}, \omega) = \rho_0 k_i k_j \tilde{V}_{ij}(\vec{k}) \tag{3.4.9}$$

con

$$V_{ij}(\vec{k}) = \int_V d^3\vec{x}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} v_i(\vec{x}) v_j(\vec{x}) \tag{3.4.10}$$

dove V è il volume occupato dal fluido turbolento e ρ_0 ne è la densità media. Si ha, quindi:

$$\delta\tilde{p}(\vec{k},\omega) = \frac{\rho_0 c_s^2}{(\omega^2 - c_s^2 k^2)} k_i k_j \tilde{V}_{ij}(\vec{k}) \tag{3.4.11}$$

e dunque lo spettro di rumore associato alla fluttuazione di pressione diventa nello spazio di Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_p(\vec{k},\omega) &= < \delta\tilde{p}(\vec{k},\omega)\delta\tilde{p}^*(\vec{k},\omega) > \\ &= \frac{\rho_0^2 c_s^4}{(\omega^2 - c_s^2 k^2)^2} k_i k_j k_l k_m < \tilde{V}_{ij}(\vec{k}) \tilde{V}_{lm}^*(\vec{k}) > \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

cioè in conclusione:

$$\tilde{S}_p(\vec{k},\omega) = \frac{\rho_0^2 c_s^4}{(\omega^2 - c_s^2 k^2)^2} k_i k_j k_l k_m C_{ijlm}(\vec{k}) \tag{3.4.13}$$

con

$$C_{ijlm}(\vec{k}) =< \tilde{V}_{ij}(\vec{k}) \tilde{V}_{lm}^*(\vec{k}) > \tag{3.4.14}$$

Il problema è calcolare la quantità $C_{ijlm}(\vec{k})$:

$$C_{ijlm}(\vec{k}) = \int_V d^3\vec{x} \int_V d^3\vec{x}'\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} B^{(4)}_{ij,lm}(\vec{x},\vec{x}') \tag{3.4.15}$$

dove la quantità

$$B^{(4)}_{ij,lm}(\vec{x},\vec{x}') =< v_i(\vec{x}) v_j(\vec{x}) v_l(\vec{x}') \vec{v}_m(\vec{x}') > \tag{3.4.16}$$

è nota in meccanica statistica dei fluidi col nome di momento statistico tensoriale [**31**]. Nel caso più generale i momenti stocastici di un dato campo vettoriale stocastico rappresentano tensori di ordine k , che hanno la forma:

$$B^{(k)}_{ij\cdots p}(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n) \tag{3.4.17}$$

Condizioni limite addizionali imposte sul campo coinvolgono nuove condizioni di simmetria dei tensori. Le condizioni di omogeneità e di isotropia sono di particolare interesse poiché, in pratica, si considereranno esclusivamente tali campi. Tuttavia, perfino senza queste condizioni speciali, la forma del momento statistico $B^{(k)}_{ij\cdots p}$ non può essere arbitrario, poiché deve avere caratteristiche di trasformazioni tensoriali.

$B^{(4)}_{ij,lm}(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n)$ è un tensore del quarto ordine a due punti (two-points moment). Come ipotesi di lavoro assumiamo inoltre che i campi $v_i(\vec{x})$ siano campi di velocità stocastici gaussiani. Sotto queste ipotesi si ha (analogamente a quanto si ha applicando il teorema di Wick in teoria dei campi quantistici [**10**]):

$$\begin{aligned} < v_i(\vec{x})v_j(\vec{x})v_l(\vec{x}')v_m(\vec{x}') > &= < v_i(\vec{x})v_j(\vec{x}) >< v_l(\vec{x}')v_m(\vec{x}') > \\ &+ < v_i(\vec{x})v_l(\vec{x}') >< v_j(\vec{x})v_m(\vec{x}') > \\ &+ < v_i(\vec{x})v_m(\vec{x}') >< v_j(\vec{x})v_l(\vec{x}') > \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Inoltre, dalla teoria della turbolenza [**33**], risulta che:

$$< v_i(\vec{x})v_j(\vec{x}) >= \frac{2}{3}\delta_{ij}\int_0^{+\infty} dk E(k) \tag{3.4.19}$$

e

$$< v_i(\vec{x})v_j(\vec{x}') >= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \tag{3.4.20}$$

dove $E(k)$ è lo spettro energetico di Kolmogorov, che nell'intervallo $k_0 \ll k \ll k_\nu$ puó essere scritto nella forma:

$$E(\vec{k}) = K_0 \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \tag{3.4.21}$$

L'intervallo di validità di questa espressione è definita da $k_0 \sim 2\pi/L$, dove L è la dimensione lineare del volume di fluido turbolento, e da $k_\nu = R^{3/4}/L = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$. K_0 è detta costante di Kolmogorov.

La grandezza ε rappresenta la quantità totale di dissipazione di energia per mezzo delle forze viscose:

$$\varepsilon = \int_0^{+\infty} 2\nu E(k) dk \tag{3.4.22}$$

Lo spettro di $E(k)$ fornito è proprio quello relativo al range inerziale; ciò è lecito poiché stiamo trattando un problema di turbolenza ed essa è dovuta ai modi inerziali ($k_0 \ll k \ll k_\nu$) mentre il moto dei modi dissipativi ($k_\nu \ll k \ll k_\nu^{'}$, $k_\nu^{'}$ scala viscosa) è sempre laminare (il compito dei modi dissipativi è di assorbire energia dai modi inerziali e dissiparla).

Pertanto, tenendo conto delle equazioni (3.4.18),(3.4.19),(3.4.20),(3.4.21), la quantità $C_{ijlm}(\vec{k})$ diventa:

$$\begin{aligned} C_{ijlm}(\vec{k}) &= \frac{4}{9}\delta_{ij}\delta_{lm}\left(\int_{k_0}^{k_\nu} dk E(k)\right)^2 \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}' \, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \\ &+ \frac{4}{9}(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}' \, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \left(\int_{k_0}^{k_\nu} dk E(k) \frac{\sin kl}{kl}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

dove $l = |\vec{x}' - \vec{x}|$. Per comodità di notazione, poniamo:

$$I^{(1)}_{k_0 k_\nu}(\vec{k}) = \left(\int_{k_0}^{k_\nu} dk E(k)\right)^2 \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}' \, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \tag{3.4.24}$$

$$I^{(2)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) = \int d^3\vec{x} \int d^3\vec{x}'\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}'-\vec{x})} \left(\int_{k_0}^{k_\nu} dk E(k) \frac{\sin kl}{kl} \right)^2 \tag{3.4.25}$$

dunque:

$$C_{ijlm}(\vec{k}) = \frac{4}{9}\delta_{ij}\delta_{lm} I^{(1)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) + \frac{4}{9}(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) I^{(2)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) \tag{3.4.26}$$

e quindi :

$$k_i k_j k_l k_m C_{ijlm}(\vec{k}) = \frac{4}{9} k^4 \left(I^{(1)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) + 2 I^{(2)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) \right) \tag{3.4.27}$$

Sostituendo la (3.4.27) nella (3.4.13), si ha:

$$S_p(\vec{k},\omega) = \frac{4}{9}\rho_0^2 c_s^4 \left(I^{(1)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) + 2 I^{(2)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) \right) \frac{k^4}{(\omega^2 - c_s^2 k^2)^2} \tag{3.4.28}$$

Però, dallo studio svolto sull'acustico risulta che (si tratta della (3.3.12) letta nello spazio di Fourier):

$$< \tilde{a}_i(\vec{k},\omega)\tilde{a}_j^*(\vec{k},\omega) >= \left(\frac{4\pi G}{c_s^2} \right)^2 \frac{k_i k_j}{k^4} S_p(\vec{k},\omega) \tag{3.4.29}$$

dove la (3.4.29) esprime la funzione di correlazione associata alla fluttazione di accelerazione nello spazio di Fourier in termini dello spettro di pressione descritto nello spazio delle frequenze. Sostituendo l'espressione per lo spettro di pressione (3.4.28) nella (3.4.29), si ha dunque:

$$< \tilde{a}_i(\vec{k},\omega)\tilde{a}_j^*(\vec{k},\omega) >= \frac{4}{9}(4\pi\rho_0 G)^2 \left(I^{(1)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) + 2 I^{(2)}_{k_0k_\nu}(\vec{k}) \right) \frac{k_i k_j}{(\omega^2 - c_s^2 k^2)^2} \tag{3.4.30}$$

A questo punto non resta che calcolare gli integrali $I^{(1)}(\vec{k})$ e $I^{(2)}(\vec{k})$.

Per quanto riguarda il primo si ha esplicitamente

$$I^{(1)}_{k_0 k_\nu}(\vec{k}) = \frac{9}{4} K_0^2 \varepsilon^{4/3} \left(k_\nu^{-2/3} - k_0^{-2/3} \right)^2 \frac{16\pi^2}{k^6} \left[\sin(kL) - kL\cos(kL) \right]^2$$

Riguardo al secondo anzitutto é possibile riscriverlo nella forma

$$I^{(2)}_{k_0 k_\nu}(\vec{k}) = \frac{4\pi \left(\frac{4}{3}\pi L^3 \right) K_0^2 \varepsilon^{4/3}}{k} \int_0^L dl\, l^{7/3} \sin(kl) \left(\int_{k_0 l}^{k_\nu l} d\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha^{8/3}} \right)^2$$

L'integrale in α si puó esprimere esattamente in termini di funzioni Γ incomplete, e la rimanente espressione puó essere integrata numericamente per una data scelta di L e R. I risultati, che non riportiamo, mostrano che l'effetto é almeno tre ordini di grandezza al di sotto della curva di sensibilitá.

3.5. FENOMENI CONVETTIVI

Se c'è equilibrio meccanico in un fluido in un campo gravitazionale ($\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$), la distribuzione di temperatura può dipendere solo dalla altitudine z: $T = T(z)$. Se la distribuzione di temperatura non soddisfa questa condizione, ma è una funzione delle altre coordinate pure, allora l'equilibrio meccanico nel fluido non è possibile. Inoltre, anche se $T = T(z)$ l'equilibrio meccanico potrebbe non essere ancora possibile se il gradiente di temperatura verticale è diretto in giù e se la sua grandezza supera un certo valore ($-dT/dz < g\beta T/c_p$, dove $\beta = V^{-1}(\partial V/\partial T)_p$ è il coefficiente di dilatazione termico e c_p il calore specifico a pressione costante).

L'assenza di equilibrio meccanico risulta dall'apparire di correnti interne nel fluido, correnti che tendono a mescolare il fluido ed a portarlo ad una temperatura costante. Un tale moto in un campo gravitazionale è chiamato convezione libera (free convection [**37, 30**]). Pertanto la convezione riguarda lo studio di moti generati da differenze di densità dovute a variazioni di temperatura. Si noti bene che la convezione è un fenomeno nettamente diverso dal fenomeno della conduzione termica (trasferimento di energia per differenza di temperatura). Si ha conduzione quando il trasferimento avviene attraverso un mezzo materiale senza che nel mezzo vi sia trasferimento (cioè movimento macroscopico) di materia. Se il corpo è solido. Il moto di agitazione termica di ogni molecola avviene attorno ad una posizione di equilibrio che la molecola non può abbandonare. Quando vi è trasmissione di calore per conduzione, le molecole più calde (più energetiche) comunicano parte della loro energia alle molecole più fredde (meno energetiche), senza però che ciascuna di esse lasci la posizione media che essa occupa all'interno del solido. Se il sistema termodinamico è un fluido (un gas o un liquido), allora in generale il trasferimento di calore è accompagnato anche da movimenti macroscopici di materia; alla conduzione del calore si accompagna allora anche la convezione. La convezione prevede dunque un massiccio trasferimento di materiale nel fluido a causa delle differenze di densità prodotte dalle differenze di temperature. Questo fenomeno non è un fenomeno di agitazione molecolare ma è dovuto ad una condizione macroscopica di instabilità. In sistemi termodinamici quali quelli rappresentati dai fluidi, la convezione può rappresentare addirittura il meccanismo dominante di trasmissione di calore. Dopo aver spiegato in breve il significato di convezione, consideriamo in dettaglio alcuni fenomeni associati alla generazione di rumore Newtoniano atmosferico.

3.5.1. PREMESSA. Le fluttuazioni di densità di massa d'aria che circondano le massa test possono produrre il cosiddetto rumore Newtoniano, cioè fluttuazioni della forza gravitazionale subita dalle masse test. I principali processi fisici che possono produrre disomogeneità di densità d'aria sono la compressione meccanica e l'espansione termica e la variazione temporale della densità può essere generata sia dal moto d'onda che dal trasporto termico o meccanico, pertanto c'è una vasta gamma di fenomeni da prendere in considerazione. Un semplice calcolo delle disomogeneità di densità prodotte dalla compressione meccanica e dall'espansione termica mostra che nel primo la variazione di densità relativa $\delta\rho/\rho$ è proporzionale al quadrato del numero di Mach

M [**44**]:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{\text{Meccanico}} \simeq \left(\frac{\delta u}{c_s}\right)^2 \equiv M^2 \tag{3.5.1}$$

dove δu è la variazione di velocità tipica e c_s è la velocità del suono, mentre nel secondo caso:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{\text{Termico}} \simeq \left(\frac{\delta T}{T} - \frac{\delta p}{p}\right) \simeq \frac{\delta T}{T} \tag{3.5.2}$$

dove δT e δP sono rispettivamente le variazioni di temperatura e di pressione. Ipotizzando ragionevolmente che $\delta u = 10\text{m}/\text{sec}$ e $\delta T = 3K$, stimiamo che le fluttuazioni di densità sono:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{\text{Meccanico}} \simeq 10^{-3}, \qquad \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{\text{Termico}} \simeq 10^{-2} \tag{3.5.3}$$

pertanto gli effetti termici dovrebbero essere dominanti rispetto agli effetti meccanici nelle giornate serene.

Gli effetti puramente termici (cioè le disomogeneità di densità prodotte da fenomeni termici) possono essere separati in due classi principali:

(1) effetti atmosferici debolmente instabili
(2) effetti atmosferici fortemente instabili .

I primi effetti sono associati alla formazione di celle convettive ed alla ascensione di bolle convettive, i secondi effetti riguardano la formazione di uno strato turbolento, la cosiddetta convezione turbolenta pienamente sviluppata di Rayleigh-Bénard.

Studiamo questi due effetti introducendo modelli fisici opportuni. Il modello fisico utilizzato si basa sull'ipotesi che la velocità caratteristica del vento u_0 sia al di sotto dei 15-20 m/sec (il che si verifica quasi sempre) e che pertanto la compressione meccanica dell'aria sia trascurabile rispetto alla compressione termica. Questa ipotesi introduce una significativa semplificazione nelle equazioni del moto che governano il fluido, equazioni che nella forma di Boussinesq possono essere scritte in termini della velocità $\vec{v}$ e delle fluttuazioni di temperatura $\delta T = T - < T >$come [**30**]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v} - \beta \delta T \vec{g} \tag{3.5.4}$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\delta T = \chi \nabla^2 \delta T \tag{3.5.5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \tag{3.5.6}$$

dove $\beta^{-1} =< T >\simeq 300K$ è il coefficiente di dilatazione termica del fluido, $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \mathrm{m}^2/\mathrm{sec}$ è la viscosità cinematica e $\chi = 10^{-5} \mathrm{m}^2/\mathrm{sec}$ è la conducibilità termometrica dell'aria. Il sistema (3.5.4),(3.5.5),(3.5.6) stabilisce semplicemente che il campo di velocità $\vec{v}$ è governato dalla equazione di Navier-Stokes con un termine di buoyancy (spinta di Archimede), che il campo di fluttuazione di temperatura è trasportato e diffuso a velocità v e che la compressione meccanica è trascurabile. L'equazione di Boussinesq sarà usata qui solo come base fisica del nostro ragionamento, ma non sarà fornita alcuna soluzione esplicita del sistema. Tuttavia nello studio della convezione turbolenta pienamente sviluppata, si utilizzeranno risultati noti che si basano sulla analisi statistica delle soluzioni del problema.

La stabilità meccanica di uno strato atmosferico è controllata dalla quantità $\gamma_z = -\partial < T > /\partial z$, il gradiente termico verticale medio. In una atmosfera "stabile", piccole fluttuazioni locali di temperatura causano forze di buoyancy (la buoyancy è l'azione della gravità sulle differenze di densità), ma l'oscillazione della massa d'aria è attenuata dal raffreddamento adiabatico della massa d'aria ascendente. Indicando con γ_{ad} gradiente termico verticale provato dalla massa d'aria ascendente, la stabilità meccanica dell'atmosfera si esprime semplicemente mediante la disuguaglianza $\gamma_z < \gamma_{\mathrm{ad}}$.

L'atmosfera stabile o debolmente instabile rappresenta la condizione fisica per la formazione delle bolle convettive, cioè delle bolle d'aria calda ascendenti. Quando γ_z è maggiore di γ_{ad}, l'atmosfera instabile è caratterizzata dalla presenza di celle convettive, che diventano instabili e si rompono in strutture più piccole quando γ_z aumenta. Infine, in giornate veramente serene con $\gamma_z \gg \gamma_{\text{ad}}$ si entra in un regime altamente caotico in cui viene raggiunto uno strato di contorno (turbulent boundary layer [**30**]) con spessore variabile da 50 m ad alcuni Km .

3.5.2. BOLLE CONVETTIVE. Quando i raggi solari colpiscono il suolo, lo strato d'aria adiacente viene riscaldato. Lentamente l'aria si espande, diventa meno densa e più leggera ed eventualmente si allontana dallo strato del suolo riscaldato per formare una bolla d'aria ascendente isolata. La bolla sale nell'atmosfera. Quando la bolla sale si espande trovando una pressione atmosferica decrescente, raffreddandosi. Eventualmente la salita della bolla è fermata dal raffreddamento dell'aria che la circonda o dall'incontro con uno strato d'aria più caldo (inversione termica). Poi l'aria sul bordo della bolla sale più lentamente di quella al centro a causa dell'intrappolamento da parte dell'aria più fredda che la circonda, la bolla acquista un moto ad anello vorticoso mentre sale. Per semplificare la trattazione analitica del problema, supponiamo che la dimensione lineare della bolla termica sia molto più piccola della sua distanza da ciascuna delle masse test. In questo caso possiamo trascurare ogni descrizione dettagliata della densità della bolla, a patto che siano assenti perturbazioni significative di densità dovute alla deformazione della bolla nella banda di frequenze considerata(1-15 Hz). Il processo di formazione delle bolle può essere diviso in due passi caratterizzati da scali temporali caratteristiche: fase di nucleation della bolla, dell'ordine di decine di secondi, e la fase di salita, caratterizzata da scale temporali più piccole. Per quanto ci riguarda, poiché siamo interessati alla banda di frequenza compresa tra i 1- 15 Hz, ci limitiamo alla seconda fase. Il moto ascendente della bolla con temperatura interna media T_B immersa nell'atmosfera di temperatura media $< T >$ è guidato dall'accelerazione ascensionale $a_{\text{buoiancy}} = \beta g(T_B - < T >) = g(T - < T >)/ < T >$.

Inoltre, mentre sale, la bolla subisce l'espansione adiabatica e la forza di attrito che noi approssimiamo con la formula di Stokes $a_{\text{attrito}} = 6\pi\nu r v_z(t)$, essendo r e $v_z(t)$ il raggio medio e la componente verticale effettiva della velocità, rispettivamente. L'equazione del moto approssimata del centro di massa bolla ascendente può essere scritta come:

$$\frac{\partial v_z(t)}{\partial t} = g\left\{\frac{T_B[z(t)]- < T > [z(t)]}{< T > [z(t)]}\right\} - 6\pi\nu r v_z(t) \tag{3.5.7}$$

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t} = v_z(t) \tag{3.5.8}$$

$$T_B[z(t)] = T_B[0] - \gamma_{\text{ad}} z(t) \tag{3.5.9}$$

dove γ_{ad} è il gradiente termico verticale adiabatico ($\gamma_{\text{ad}} \simeq 10^{-2} K/m$ per l'atmosfera secca), z è l'altezza della bolla e $< T > (z)$ rappresenta l'andamento medio in z della temperatura. Tuttavia ad una analisi più approfondita, ci si accorge che è possibile effettuare delle semplificazioni drastiche in condizioni atmosferiche standard quando è presente un gradiente termico verticale γ_z non troppo grande. In realtà, quando γ_z è paragonabile o più bassa di γ_{ad}, non solo la forza di attrito è di almeno un ordine di grandezza inferiore rispetto alla forza archimedea ad altezze z ragionevoli ma la variazione del termine di buoyancy con l'altezza è trascurabile rispetto al termine stesso e così:

$$\frac{\partial v_z(t)}{\partial t} = \frac{T_B[0]- < T > [0]}{< T > [0]} g \equiv \alpha g \tag{3.5.10}$$

I valori di r e di α dipendono fortemente dalle condizioni atmosferiche effettive, tuttavia valori ragionevoli variano tra qualche metro ed alcune decine di metri, mentre α varia tra 3×10^{-3} a 3×10^{-2}. Dunque l'equazione (3.5.10) può essere applicata in condizioni atmosferiche stabili o debolmente instabili ($\gamma_z \simeq \gamma_{\rm ad}$) per descrivere il moto del centro di massa della bolla termica ascendente di dimensioni lineari r a distanze $R \gg r$ dalle masse test. Ricordo che l'effetto delle fluttuazioni di densità di masse atmosferiche $\delta\rho(\vec{x},t)$ su ciascuna delle quattro masse test di riferimento che sono sospese alle torri di sospensione, può essere valutato calcolando la forza di Newton:

$$\vec{a}(\vec{x},t) = -G\int d^3\vec{x}'\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\delta\rho(\vec{x}',t) \tag{3.5.11}$$

dove $\vec{x}$ è la posizione effettiva della massa test.

Le masse test sono disposte in modo da formare i due bracci dell'interferometro orientati nelle direzioni x e y e poiché vengono rivelate solo le variazioni di lunghezze relative del cammino della luce, siamo interessati semplicemente sia alla componente x che y dell' accelerazione (o meglio della fluttuazione di accelerazione). Indicando con $h(t)$ la differenza relativa della lunghezza dei bracci (vedi Sezione 3.2):

$$h(t) = \frac{1}{L}\left[(x_2^{(m_1)} - x_2^{(m_2)}) - (x_1^{(m_4)} - x_1^{(m_3)})\right] \tag{3.5.12}$$

possiamo collegare la derivata seconda di $h(t)$ all'accelerazione Newtoniano delle masse test:

$$\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{L}\left[(a_2^{(m_1)} - a_2^{(m_2)}) - (a_1^{(m_4)} - a_1^{(m_3)})\right] \tag{3.5.13}$$

Supponendo che le dimensioni delle bolle siano più piccole della loro distanza dalle masse test, l'integrazione relativa alla equazione (3.5.11) è semplice e per una singola bolla posizionata in $\vec{x}(t)$ si riduce a:

$$\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{L}\frac{4\pi G\rho_0}{3}r^3\alpha\left[\frac{x_2 - x_2^{(m_1)}}{|\vec{x}-\vec{x}^{(m_1)}|^3} - \frac{x_2 - x_2^{(m_2)}}{|\vec{x}-\vec{x}^{(m_2)}|^3} - \frac{x_1 - x_1^{(m_4)}}{|\vec{x}-\vec{x}^{(m_4)}|^3} + \frac{x_1 - x_1^{(m_3)}}{|\vec{x}-\vec{x}^{(m_3)}|^3}\right] \tag{3.5.14}$$

dove $\alpha = (T_B[0] - < T > [0]) / < T > [0]$ è la variazione di densità relativa delle bolle ascendenti, T_B è la temperatura media interna delle bolle, r è il raggio medio delle bolle e $\vec{x}^{(m_1)} = (0, L, 0)$, $\vec{x}^{(m_2)} = (0, l, 0)$, $\vec{x}^{(m_3)} = (l, 0, 0)$ e $\vec{x}^{(m_4)} = (L, 0, 0)$ sono le posizioni delle masse test.

A causa della grande lunghezza L dei bracci dell'interferometro, la maggior parte delle bolle rivelanti sono localizzate sia in prossimità delle masse test terminali sia vicino a quelle centrali, pertanto possiamo parlare di "bolle terminali" e di "bolle centrali". Per quanto riguarda le bolle centrali, possiamo semplificare un poco l'equazione (3.5.14) trascurando la distanza delle masse test di riferimento dall'origine del sistema di coordinate, $l \simeq 6\,m \ll L$, e supponendo di considerare solo bolle ad una distanza da ciascuna delle due masse test che supera i 10 m. Poiché siamo interessati al calcolo dell' ampiezza spettrale del rumore Newtoniano atmosferico, calcoleremo la trasformata di Fourier di $h(t)$, $\tilde{h}(\omega) = \int dt\, h(t) e^{i\omega t}$. Come detto prima faremo una distinzione tra bolle "terminali" e quelle "centrali", e la differenza tra loro consiste nel diverso peso delle componenti x e y della posizione della bolla $x(t)$. Consideriamo la massa test posizionata in $\vec{x}^{(m_4)} = (L, 0, 0)$, e le masse test centrali prese insieme in $\vec{x}^{(m_2, m_3)} = (0, 0, 0)$.

Mentre per la prima dovrebbe essere considerata la componente x dell' accelerazione gravitazionale, per la seconda si ha a che fare con una differenza tra le componenti x e y. Per semplificare le notazioni, ci spostiamo in un sistema di riferimento in cui la massa test più vicina alle bolle reali coincide con l'origine degli assi coordinati. Per le masse test terminali, la direzione x è scelta essere parallela al braccio dell'interferometro. Con queste notazioni, la trasformata di Fourier di $h(t)$ nel caso di bolle "terminali" e "centrali" diventa:

$$\tilde{h}_{\text{terminal}}(\omega) = \frac{4\pi}{3} \frac{G}{L\omega^2} \rho_0 r^3 \alpha \int_0^{\infty} dt \, \frac{x e^{i\omega t}}{\left[x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha g t^2\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{3.5.15}$$

$$\tilde{h}_{\text{central}}(\omega) = \frac{4\pi}{3}\frac{G}{L\omega^2}\rho_0 r^3\alpha\int_0^\infty dt\,\frac{(x-y)e^{i\omega t}}{\left[x^2+y^2+\left(\frac{1}{2}\alpha g t^2\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{3.5.16}$$

dove $(x,y,0)$ è la posizione iniziale della bolla nel sistema di riferimento scelto. Gli integrali (3.5.15) e (3.5.16) sono fortemente semplificati supponendo di essere nell'ipotesi che $\omega > \sqrt{2\alpha g/R}$, cioè nell'ipotesi che ω sia nella banda di frequenza dei 1-15 Hz. In questo caso gli integrali diventano:

$$\tilde{h}_{\text{terminal}}(\omega) = \frac{4\pi}{3}\frac{G}{L\omega^2}\rho_0 r^3\alpha\frac{x}{R^3}\frac{1}{\omega} \tag{3.5.17}$$

$$\tilde{h}_{\text{central}}(\omega) = \frac{4\pi}{3}\frac{G}{L\omega^2}\rho_0 r^3\alpha\frac{(x-y)}{R^3}\frac{1}{\omega} \tag{3.5.18}$$

dove $R = \sqrt{x^2+y^2}$ è la distanza iniziale tra la bolla e la massa test più vicina.

Con i seguenti valori di riferimento dei parametri caratterizzanti le bolle: $\alpha_{\text{rif}} = 10^{-2}$, $r = 5m$, $R = 30m$ si ottiene il valore limite delle equazioni (3.5.17) e (3.5.18) con $f = \omega/(2\pi) > 10^{-2}\,Hz$, valore ben al di sotto delle frequenze analizzate. Ponendo $\tilde{h}_{\text{bolle}}(f) \equiv h(\omega)$ e $\xi = 1/(6\pi^2)G/L\rho_0 \simeq 4\times 10^{-16} MKS$, le (3.5.17) e (3.5.18) diventano:

$$\tilde{h}_{\text{terminal}}(f) = \xi r^3\alpha\frac{x}{R^3}\frac{1}{f^3} \tag{3.5.19}$$

$$\tilde{h}_{\text{central}}(f) = \xi r^3\alpha\frac{(x-y)}{R^3}\frac{1}{f^3} \tag{3.5.20}$$

e per bolle con α, r e R di cui sopra, posizionate vicino ad una costruzione terminale in $y = 0$, $x = R = 30m$, si ha infine:

$$\tilde{h}_{\text{bolle}}(f) \simeq 5\times 10^{-19}\frac{1}{f^3} \tag{3.5.21}$$

3.5.3. CONVEZIONE TURBOLENTA DI RAYLEIGH-BENARD. Lo studio delle proprietà statistiche delle soluzioni del sistema (3.5.4), (3.5.5), (3.5.6) sia in un contesto teorico che numerico, mostra che le funzioni di correlazione dei campi di velocità e di temperatura si semplificano notevolmente all'interno del cosiddetto "range inerziale" della turbolenza pienamente sviluppata. Per approfondire questo risultato fondamentale, introduciamo le cosiddette funzioni di struttura [**30**]:

$$C_{ij}^{(\nu)}(\vec{r}) = < \delta v_i(\vec{r})\,\delta v_j(\vec{r}) >$$

$$C_\theta(\vec{r}) = < \delta\theta(\vec{r})\,\delta\theta(\vec{r}) >$$

dove:

$$\begin{aligned}
\delta v_i(\vec{r}) &= v_i(\vec{x}+\vec{r}) - v_i(\vec{x}) \\
\delta\theta(\vec{r}) &= \delta T(\vec{x}+\vec{r}) - \delta T(\vec{x}) \\
\theta &= \delta T = T - < T >
\end{aligned}$$

Si noti che $C^{(\nu)}$e C_θ non dipendono da $\vec{x}$ a causa della invarianza per traslazioni spaziali (in senso statistico) nel centro dell' atmosfera (cioè lontano dai bordi). Da una analisi di scaling di $C^{(v)}$ e C_θ tramite le equazioni di Boussinesq, risulta che lo scaling delle funzioni di struttura è governato da 3 scale:

(1) l, la dimensione "macroscopica" del sistema, cioè la dimensione del vortice più grande. In fisica dell'atmosfera essa è tipicamente di 100m.

(2) l_B, la scala di Bolgiano, cioè la scala al di sotto della quale l'intermittenza (cioè una serie di eventi fortemente non lineari) scompare.

(3) d, la "scala di Kolmogorov" o "scala di dissipazione", cioè la dimensione del vortice più piccolo. Essa rappresenta la scala minima al di sotto della quale i vortici semplicemente

si dissipano senza rompersi in vortici di dimensione più piccola. In fisica dell'atmosfera essa è tipicamente dell'ordine dei mm.

Il range inerziale per la turbolenza di Rayleigh-Bénard è il range di scala dove i termini non lineari presenti nelle equazioni di Boussinesq dominano, cioè $d \ll r \ll l$. Per scrivere lo scaling per le funzioni di struttura, decomponiamo $C_{ij}^{(v)}$ nelle componenti longitudinale e trasversale rispetto ad r:

$$C_{ij}^{(v)} = C_{\parallel}^{(v)}(r)\,\frac{r_i r_j}{r^2} + C_{\perp}^{(v)}(r)\left(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}\right)$$

dove $C_{\parallel}^{(v)}(r)$ e $C_{\perp}^{(v)}(r)$ sono le componenti parallele e perpendicolari ed utilizzando la condizione di incomprimibilità esse risultano collegate dalla relazione:

$$C_{\perp}^{(v)}(r) = \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}\left(r^2 C_{\parallel}^{(v)}(r)\right)$$

Nella "regione di scaling di Bolgiano", $l_B < r \ll l$, lo scaling in r delle funzioni di struttura può essere scritto come [**43**]:

$$\begin{aligned} C_{\parallel}^{(v)}(r) &\sim (\beta g)^{4/5}\,\xi_{\chi}^{2/5}\,r^{6/5} \\ C_{\theta}(r) &\sim (\beta g)^{-2/5}\,\xi_{\chi}^{4/5}\,r^{2/5} \end{aligned}$$

mentre nella "regione di scaling di Kolmogorov", $d \ll r < l_B$, lo scaling è [**43**]:

$$\begin{aligned} C_{\parallel}^{(v)}(r) &\sim \varepsilon_{v}^{2/3}\,r^{2/3} \\ C_{\theta}(r) &\sim \varepsilon_{\chi}\varepsilon_{v}^{-1/3} r^{2/3} \end{aligned}$$

dove ε_ν e ε_χ sono rispettivamente la mean rate of energy dissipation e la mean rate of temperature dissipation:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\nu &= \frac{1}{2}\nu\int d^3\vec{x}\,(\partial_i v_j+\partial_j v_i)^2\\ \varepsilon_\chi &= \frac{1}{2}\chi\int d^3\vec{x}\,(\vec{\nabla}\,\delta T)^2\end{aligned}$$

ed infine la scala di Bolgiano l_B e la scala di Kolmogorov d risultano essere:

$$\begin{aligned}l_B &= \varepsilon_\nu^{5/4}\varepsilon_\chi^{-3/4}(\beta g)^{-3/2}\\ d &= (\varepsilon_\nu/\nu^3)^{1/4}\end{aligned}$$

La funzione di correlazione della perturbazione di densità $\delta\rho=\rho-<\rho>$,

$$<\delta\rho(\vec{x})\delta\rho(\vec{x}+\vec{r})>\simeq\frac{1}{<T>^2}<\delta T(\vec{x})\delta T(\vec{x}+\vec{r})>$$

che rappresenta l'informazione principale che dovrebbe essere ricavata dal modello in studio e può essere facilmente derivata dalla conoscenza della funzione di struttura C_θ:

$$<\delta T(\vec{x})\delta T(\vec{x})>-<\delta T(\vec{x})\delta T(\vec{x}+\vec{r})>=\frac{1}{2}C_\theta(r) \tag{3.5.22}$$

Per risolvere l'equazione (3.5.22), introduciamo la densità spettrale della fluttuazione di temperatura $G_\theta(k)$ **[45]**:

$$C_\theta(r)=<\delta T(\vec{x})\delta T(\vec{x}+\vec{r})>=\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}G_\theta(k)$$

e facendo la trasformata di Fourier dell'equazione (3.5.22), si trova (V.I Tatarskyii): CHECK

$$G_\theta(k)=\frac{2\pi}{k^2}\int dr\,\frac{\sin kr}{kr}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}C_\theta(r)\right) \tag{3.5.23}$$

Applicando l'equazione (3.5.23) alle leggi di scala delle fluttuazioni di temperatura, si ha:

$$\begin{aligned} G_\theta(k)_{\text{Bolgiano}} &\simeq 4.6 B_\theta^2 k^{-\frac{17}{5}} \\ G_\theta(k)_{\text{Kolmogorov}} &\simeq 8.2 K_\theta^2 k^{-\frac{11}{3}} \end{aligned}$$

dove $B_\theta^2 \equiv (\beta g)^{-2/5} \varepsilon_\chi^{4/5}$ e $K_\theta^2 \equiv \varepsilon_\chi \varepsilon_\nu^{-1/3}$.

Stime teoriche dei parametri ε_ν e ε_χ e di conseguenza della lunghezza di Bolgiano l_B sono molto difficili da effettuare nell'atmosfera aperta. Tuttavia alcune stime approssimative possono essere effettuate con l'aiuto dell'analisi dimensionale. Tanto per cominciare sottolineiamo prima che, per costruzione, i risultati dell'analisi dimensionale su sistemi stocastici sono da riferirsi alla cosiddetta approssimazione di "campo medio" e pertanto sono escluse correzioni dovute alla intermittenza [**44**]. Quindi ci limitiamo alla situazione fisica in cui avviene solo lo scaling di Kolmogorov. La stima di ε_ν e di ε_χ basata sulla analisi dimensionale utilizza semplicemente l'uguaglianza in senso statistico dei termini $\vec{v}((\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v})$ e $\nu(\vec{v}\nabla^2\vec{v})$ e dei termini $\delta T((\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\delta T)$ e $\chi(\delta T\nabla^2\delta T)$ (vedi il sistema di Boussinesq). Usando $v \simeq v_0$, $\vec{v}\cdot\vec{\nabla} \simeq v_0/h$, $\delta T \simeq \Delta T$, $|\vec{\nabla}\delta T| \simeq \Delta T/h$, dove v_0 e ΔT sono le cosiddette fluttuazioni di velocità e di temperatura a "grande scala" e h è la profondità del turbulent boundary layer [**44**], si trova:

$$\varepsilon_\nu \simeq \frac{v_0^3}{h}, \qquad \varepsilon_\chi \simeq \frac{(\Delta T)^2 v_0}{h}$$

e pertanto la costante K_θ^2 diventa:

$$K_\theta^2 \simeq (\Delta T)^2 h^{-2/3}$$

Le fluttuazioni di temperatura e di velocità a larga scala possono essere valutate grazie al gradiente termico verticale

$$\gamma_z \equiv -\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{\text{equilibrio}}$$

che è il gradiente verticale del campo di temperatura di equilibrio, ed allo spessore h dello turbulent boundary layer:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T &\simeq \gamma_z h \\ v_0 &\simeq \sqrt{\beta g \Delta T h} = \sqrt{\beta g \gamma_z h^2} \end{aligned}$$

così che la costante K_θ^2 può essere scritta come:

$$K_\theta^2 \simeq \gamma_z^2 h^{4/3}$$

Valori tipici del gradiente termico verticale in giornate serene sono $10^{-2}K/m < \gamma_z < 10^{-1}K/m$ (l'atmosfera è fortemente instabile quando $\gamma_z > (\gamma_z)_{\text{adiabatico}}$, con $(\gamma_z)_{\text{adiabatico}} = 9.8 \times 10^{-3}K/m$) e lo spessore dello strato turbolento varia tra 50 m e qualche Km, così che un set rappresentativo di valori di v_0, ΔT e K_θ^2 può essere ottenuto utilizzando $\gamma_z = 5 \times 10^{-2}K/m$ e $h = 150\,m$:

$$\begin{aligned} (\Delta T)_{\text{rif}} &= 7.5\,K \\ (v_0)_{\text{rif}} &= 6.2\,m/s \\ (K_\theta^2)_{\text{rif}} &= 0.9\,m^{-2/3}K^2 \end{aligned}$$

Misure sperimentali ottenute con aeroplani e palloni d'aria confermano che le fluttuazioni di temperatura mostrano una legge di scala tipo quelle di Kolmogorov

$$C_\theta(r) = K_\theta^2\, r^{2/3}$$

Infine, tipici valori di K_θ^2 sono principalmente siti nel range $10^{-3}m^{-2/3}K^2 < K_\theta^2 < 1m^{-2/3}K^2$, con possibili grandi deviazioni che dipendono dalle condizioni atmosferiche locali. Nel calcolo del rumore Newtoniano è anche importante la dipendenza temporale della funzione di correlazione.Utilizzeremo sia le funzioni di correlazione delle trasformate di Fourier delle fluttuazioni di temperatura $\delta T(\vec{k},\omega)$:

$$\tilde{F}(\vec{k},\omega) \equiv < \delta\tilde{T}(\vec{k},\omega)\delta\tilde{T}^*(\vec{k},\omega) >$$

sia le funzioni di correlazione nella rappresentazione "mista":

$$\tilde{F}(\vec{x},\vec{y},\omega) = < \delta\tilde{T}(\vec{x},\omega)\delta\tilde{T}^*(\vec{y},\omega) >$$

che saranno stimate utilizzando la cosiddetta "approssimazione FTA" (Frozen Turbulence Approximation) [**45, 31**]. Per chiarire cosa significhi l'approssimazione FTA, osserviamo per prima cosa, che i vortici di dimensione tipica del range inerziale interagiscono tra loro in due modi dinamicamente differenti. L'interazione di vortici della stessa dimensione produce la frammentazione del vortice e pertanto un trasporto di energia cinetica a scale più piccole (la cosiddetta cascata energetica di Richardson) [**43**]. Questo tipo di interazione è chiamata "interazione dinamica" tra i fisici della turbolenza e la sua frequenza caratteristica è:

$$\omega_D(k) \simeq \varepsilon_\nu^{1/3} k^{2/3}$$

dove k è il numero d'onda dei modi interagenti. I vortici di dimensioni differenti interagiscono in modo completamente differente: il vortice più piccolo è “spazzato” nel campo di velocità localmente omogeneo del vortice di larga scala ed avvengono solo effetti cinematici (interazione cinematica o interazione di sweeping). Poiché l'effetto principale dell'interazione tra un piccolo vortice nel range inerziale e i grandi vortici è quindi uno spostamento Doppler dovuto allo sweeping, la frequenza caratteristica dell'interazione cinematica è:

$$\omega_C(k) \simeq v_o k \simeq \left(\frac{\varepsilon_\nu}{h}\right)^{1/3} k$$

così che, ben all'interno del range inerziale, l'interazione cinematica è predominante rispetto a quella dinamica:

$$\frac{\omega_C(k)}{\omega_D(k)} \simeq (kh)^{1/3} \gg 1$$

In compenso il contenuto rilevante in frequenza dei campi $\vec{v}$, δT nel bel mezzo del range inerziale è collegato tramite uno spostamento Doppler alla dimensione del vortice. Quindi l'approssimazione FTA assume semplicemente che per vortici nel range inerziale la frequenza della velocità e la frequenza dei campi di temperatura è direttamente collegata al numero d'onda:

$$\omega(k) = v_o k$$

e la funzione di correlazione a due punti $\tilde{F}(\vec{k}, \omega)$ si riduce a:

$$\tilde{F}(\vec{k}, \omega) = 2\pi\delta(\omega - v_0 k) G_\theta(k)$$

e per mezzo della trasformata di Fourier segue che:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\vec{x}, \vec{y}; \omega) &\equiv <\delta\tilde{T}(\vec{x}, \omega)\delta\tilde{T}^*(\vec{y}, \omega)> \\
&= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \tilde{F}(\vec{k}, \omega) \\
&= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int k^2 G_\theta(k) \frac{\sin(k|\vec{x}-\vec{y}|)}{k|\vec{x}-\vec{y}|} 2\pi\delta(\omega - v_o k) dk
\end{aligned}$$

dunque:

$$\tilde{F}(\vec{x}, \vec{y}; \omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\overline{k}(\omega)}{v_0} G_\theta[\overline{k}(\omega)] \frac{\sin(\overline{k}(\omega)|\vec{x}-\vec{y}|)}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

dove $k(\omega) = \omega/v_0$ in approssimazione FTA. La validità dell'approssimazione FTA dipende dai limiti reali della banda di frequenza in cui stimare il rumore Newtoniano. Poiché siamo interessati alla banda di frequenza 1-15 Hz, usando la velocità di grande scala di riferimento $v_0 = 6.2\, m/s$ e lo spessore del boundary layer $h = 150\, m$ nell'equazione $\omega(k) = v_0 k$, troviamo che $k \in [1, 15]\, m^{-1}$, cosicché deve essere:

$$\frac{\omega_C(k)}{\omega_D(k)} \in [5, 15]$$

In conclusione, l'approssimazione FTA sembra essere valida in tutta la banda spettrale analizzata e specialmente nella parte delle alte frequenze. A questo punto non ci resta che calcolare lo spettro di rumore Newtoniano $S_h(\omega)$.

Poiché la lunghezza di correlazione della fluttuazione di densità l_{corr} è dello stesso ordine di grandezza dello spessore del boundary layer turbolento [**37**] e così $l_{\text{corr}} \simeq h \ll L$, si puó semplificare la formula (3.2.6) ponendo:

$$\begin{aligned} < \tilde{a}^{(1)} \tilde{a}^{(2)} > = < \tilde{a}^{(1)} \tilde{a}^{(3)} > = < \tilde{a}^{(1)} \tilde{a}^{(4)} > &= 0 \\ < \tilde{a}^{(2)} \tilde{a}^{(4)} > = < \tilde{a}^{(3)} \tilde{a}^{(4)} > &= 0 \end{aligned}$$

Per semplificare i calcoli, assumiamo che le masse di riferimento siano disposte nel centro della costruzione e, poiché la distanza tra le masse m_2 e m_3 è più piccola della loro distanza dai bordi della costruzione, supponiamo che le masse siano sovrapposte.

Tenendo conto di queste semplificazioni e usando l'isotropia locale della funzione di correlazione delle fluttuazioni di densità, la $S_h(\omega)$ diventa:

$$S_h(\omega) = \frac{1}{L^2 \omega^4} (2A_T + 2A_C - 2B_C)$$

dove

$$
\begin{aligned}
A_T &= <\tilde{a}_y^{(1)}\tilde{a}_y^{(1)*}> \\
A_C &= <\tilde{a}_y^{(2)}\tilde{a}_y^{(2)*}> \\
B_C &= <\tilde{a}_y^{(2)}\tilde{a}_x^{(3)*}>
\end{aligned}
$$

Iniziamo col calcolo dei termini A. Per semplificare i calcoli numerici che bisogna svolgere, approssimiamo le forme delle costruzioni a mezza sfera con le masse test al centro, sfera il cui raggio R è la radice quadratica media delle dimensioni della costruzione. Con queste semplificazioni, la componente x della trasformata di Fourier della accelerazione della massa test può essere espressa come:

$$\tilde{a}_x(\omega) = G\int d^3\vec{x}\,\delta\tilde{\rho}(\vec{x},\omega)s(z)e^{-z/h}s(\vec{x}\cdot\vec{x}-R^2)\frac{x}{(\vec{x}\cdot\vec{x})^{3/2}}$$

cioè

$$\tilde{a}_x(\omega) = \int d^3\vec{x}\,\frac{\delta\tilde{\rho}(\vec{x},\omega)}{\rho_0}K_x(\vec{x})$$

dove $\delta\tilde{\rho}(\vec{x},\omega)$ è la trasformata di Fourier di $\delta\rho(\vec{x},t)$ rispetto alla variabile t e

$$
\begin{aligned}
K_x(\vec{x}) &= G\rho_0\frac{x}{(\vec{x}\cdot\vec{x})^{3/2}}s(z)e^{-z/h}s(\vec{x}\cdot\vec{x}-R^2) \\
K_y(\vec{x}) &= G\rho_0\frac{y}{(\vec{x}\cdot\vec{x})^{3/2}}s(z)e^{-z/h}s(\vec{x}\cdot\vec{x}-R^2)
\end{aligned}
$$

dove $s(z)$ è la step function (funzione a gradino o funzione di Heaviside) e $\rho_0 \simeq 1\mathrm{Kg}/m^3$è la densità media dell'aria, mentre il cutoff esponenziale $e^{-z/h}$ è stato introdotto per tenere conto dello spessore h del boundary layer turbolento [**37**]. A causa dell'identità approssimata $<(\delta\rho/\rho_0)^2>=<(\delta T/T_0)^2>$, $S_h(\omega)$ può essere calcolato usando la funzione di correlazione $\tilde{F}(\vec{x},\vec{y};\omega)$:

$$<\tilde{a}_x(\omega)\tilde{a}_x^*(\omega)>=\int d^3\vec{x}\int d^3\vec{y}\,K_x(\vec{x})K_x(\vec{y})\frac{1}{T^2}\tilde{F}(\vec{x},\vec{y};\omega)$$

così che

$$< \tilde{a}_x(\omega)\tilde{a}_x^*(\omega) >= \frac{1}{(2\pi)^2 v_0}\bar{k}^2(\omega)\frac{G_\theta[\bar{k}(\omega)]}{T^2}\int d\Omega_k \left|\tilde{K}_x[\vec{k}(\omega)]\right|^2$$

dove $\tilde{K}_x$ è la trasformata di Fourier di K_x e $d\Omega_k$ è la misura dell'angolo solido. L'integrale

$$I_{xx}[k(\omega)] \equiv \int d\Omega_k \left|K_x(\vec{k})\right|^2$$

dipende dalla dimensione della costruzione, così che possiamo distinguere tra costruzione centrale e costruzione terminale semplicemente calcolando I_{xx} con le giuste dimensioni $R_{\text{centrale}} \simeq 15\,m$ e $R_{\text{terminale}} \simeq 8\,m$, rispettivamente. Possiamo scrivere A_{centrale} e $A_{\text{terminale}}$ come:

$$\begin{aligned} A_C(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2 v_0}\bar{k}^2(\omega)\frac{G_\theta[\bar{k}(\omega)]}{T^2} I_{xx}^{R_C}[\bar{k}(\omega)] \\ A_T(\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^2 v_0}\bar{k}^2(\omega)\frac{G_\theta[\bar{k}(\omega)]}{T^2} I_{xx}^{R_T}[\bar{k}(\omega)] \end{aligned}$$

Il calcolo del termine B_{centrale} è simile e differisce da A solo per una diversa integrazione spaziale:

$$B_C(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2 v_0}\bar{k}^2(\omega)\frac{G_\theta[\bar{k}(\omega)]}{T^2} I_{xy}^{R_C}[\bar{k}(\omega)]$$

dove

$$I_{xy}^{R_C}[\bar{k}(\omega)] \equiv \int d\Omega_k \tilde{K}_x(\vec{k})\tilde{K}_y^*(\vec{k})$$

è nullo per ragioni di simmetria. Utilizzando il calcolo numerico risulta che gli integrali $I_{xx}(k)$ mostrano un comportamento complesso per $kR \simeq 1$, mentre per grandi k assumono la forma $I_{xx}(k) \sim 13G^2\rho_0^2/k$. I risultati possono essere parametrizzati come:

$$I_{xx}^R(k) = G^2\rho_0^2 J_{xx}^R(k)$$

dove le funzioni $J_{xx}^{R_C}$, $J_{xx}^{R_T}$ sono mostrate in Figura 3.5.1.

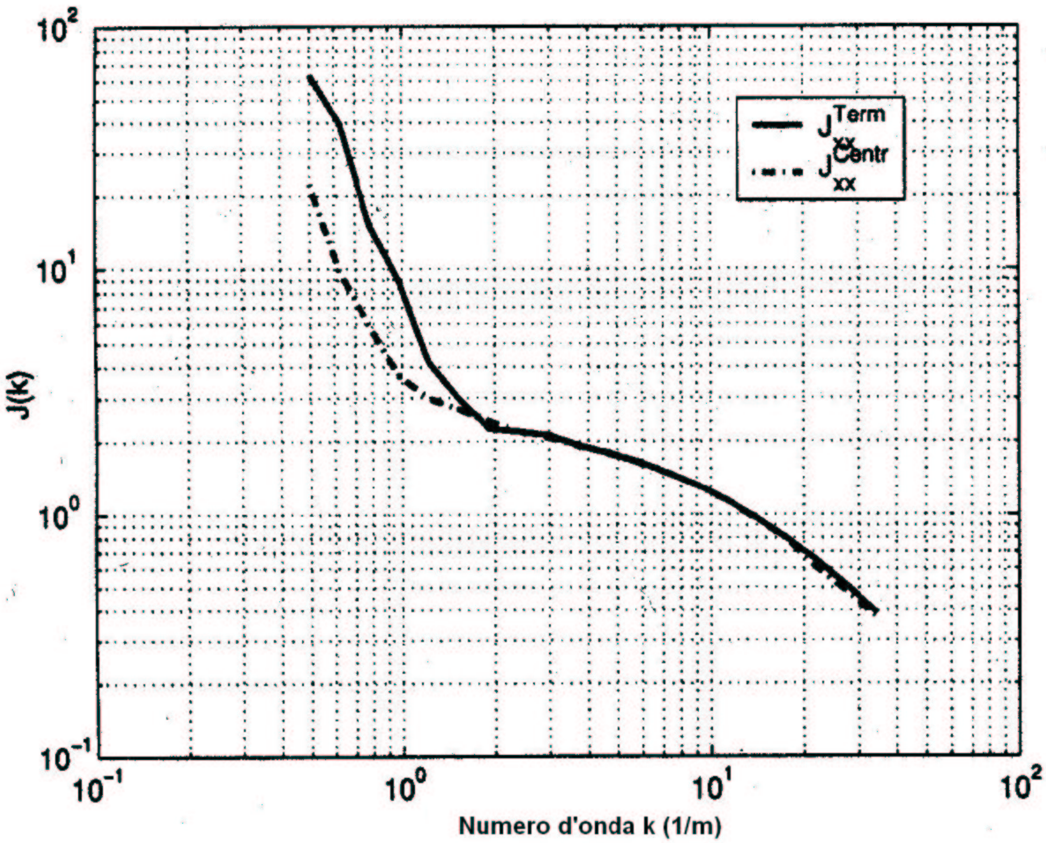

FIGURA 3.5.1. Andamento in k delle funzioni J. I grafici in figura sono stati ottenuti ponendo un cutoff verticale (rappresentato dallo spessore del turbulent layer) pari a $h = 150$ m.

Pertanto si ha :

$$S_h(\omega) = \frac{2}{(2\pi)^2 v_0 \omega^4} \bar{k}^2(\omega) G^2 \rho_0^2 \frac{G_\theta[\bar{k}(\omega)]}{T^2 L^2} \left(J_{xx}^{R_T}(k) + J_{xx}^{R_C}(k) \right) \tag{3.5.24}$$

Il risultato espresso dalla equazione (3.5.24) può essere ulteriormente semplificato in un range di frequenze per cui è soddisfatta la legge di potenza

$$I_{xx}(k) \simeq 45 G^2 \frac{\rho_0^2}{k^{4/3}}$$

cioè per $\omega \gg v_0/R_{\text{terminale}}$. In questo caso $S_h(\omega)$ si riduce a:

$$\tilde{S}_h(f) = \xi K_\theta^2 v_0^{5/3} \frac{1}{f^7}$$

con

$$\xi = 2 \times 2 \times 8.2 \times 45 G^2 \rho_0^2 \frac{T_0^2 L^2}{(2\pi)^{27/3}} \simeq 5.3 \times 10^{-37}$$

Per concludere, l'ampiezza spettrale $\tilde{h}(f) = \sqrt{S_h(f)}$, che è la più comune rappresentazione dell'ampiezza del rumore dell'interferometro, può essere scritta come:

$$\tilde{h}(f) = \frac{4}{(2\pi)^{\frac{23}{6}}} G\rho_0 \frac{K_\theta}{TL} v_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{f^{\frac{17}{6}}} \sqrt{J_{xx}^{R_T}\left(\frac{2\pi f}{v_0}\right) + J_{xx}^{R_C}\left(\frac{2\pi f}{v_0}\right)}$$

oppure, per $f \gg v_0/(2\pi R_T)$,nella forma semplificata:

$$\tilde{h}(f) = 7 \times 10^{-19} \left(\frac{K_\theta\,\mathrm{K}}{\mathrm{m}^{1/3}}\right) \left(\frac{v_0\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \frac{1}{f^{\frac{7}{2}}}$$

3.5.4. Conclusioni. Le principali sorgenti di rumore nel range di frequenze 1-15 Hz sono il rumore sismico, il rumore termico, e il rumore Newtoniano sismico. Nella Figura 3.5.2 viene riportato il grafico del rumore Newtoniano atmosferico dovuto alla convezione turbolenta di Rayleigh-Bénard e degli altri rumori rivelanti.

Poiché il rumore Newtoniano atmosferico dipende fortemente dalle condizioni meteorologiche effettive, si riportano tre curve, una relativa alle "condizioni di riferimento base" (in genere in prima serata nelle giornate d'estate), una alle "condizioni di turbolenza moderata" (in genere nella tardi mattinata e nel tardi serata nei giorni d'estate o nei giorni di autunno-primavera) ed, infine, a “condizioni di alta turbolenza” (giornate fortemente solari in estate), che vengono definite nella figura con "reference", "worst", "best", rispettivamente. Come risulta chiaro dalla figura, il rumore

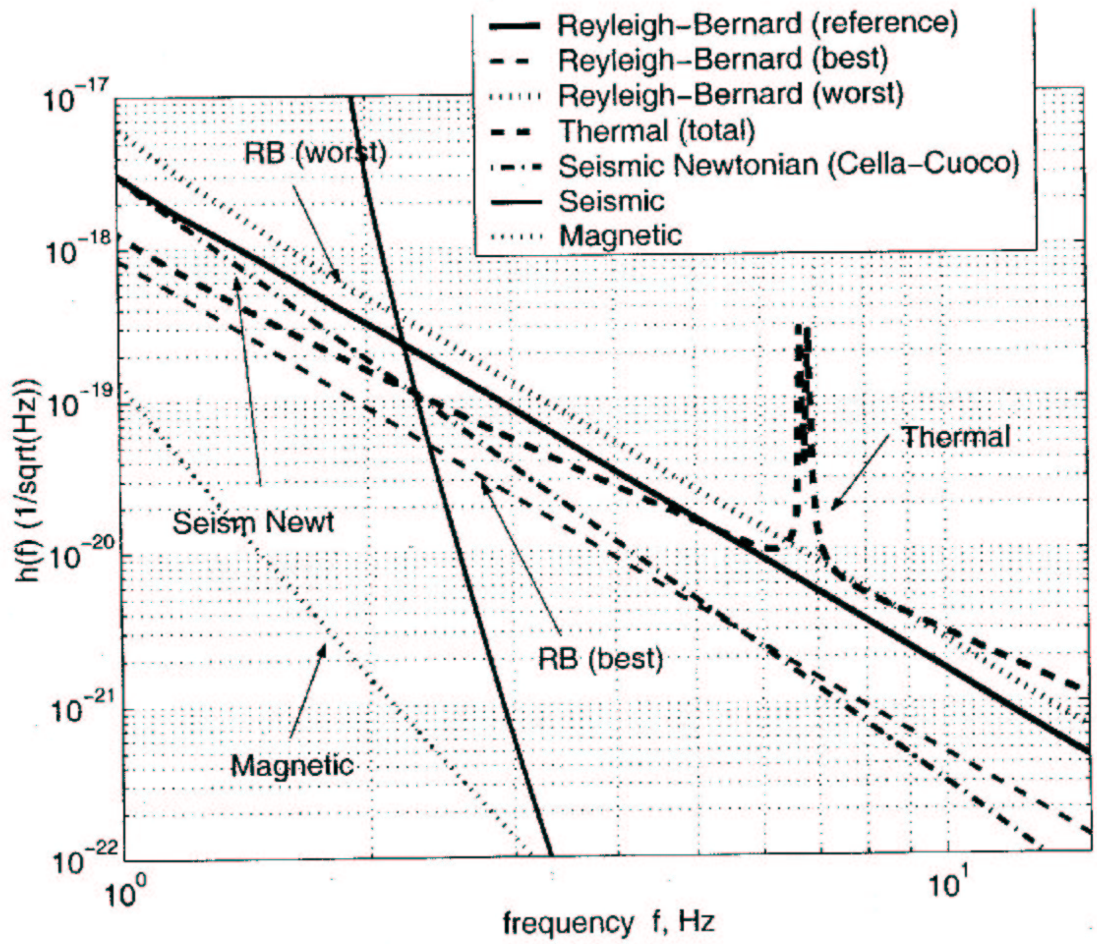

FIGURA 3.5.2. Ampiezze spettrali del Newtoniano atmosferico. Le tre ampiezze spetttrali del Newtoniano atmosferico si riferiscono ai parametri riportati nella Tabella 1.

Newtoniano atmosferico di Rayleigh-Bénard è leggermente più alto del rumore sismico ed è paragonabile al rumore termico, perfino nella banda di frequenza nei 5-15 Hz. Il calcolo del rumore Newtoniano atmosferico che è descritto in queste pagine si applica in condizioni atmosferiche in cui sia presente una alta insolazione e in cui è quindi raggiunto il regime di turbolenza sviluppata di Rayleigh-Bénard. In più si suppone che non sia presente alcun vento meccanico forte.

Caso	γ_z (K/m)	h (m)	v_0 (m/s)	K_θ^2 $(m^{-2/3}K^2)$
reference	0.05	150	6.2	0.9
best	0.03	100	3.2	0.4
worst	0.033	300	10	2.2

TABELLA 1. Parametri utilizzati per il calcolo delle ampiezze spettrali.

I risultati dovrebbero essere più accurati nel range di "alta" frequenza della analizzata di 1-15 Hz, dove l'approssimazione FTA funziona particolarmente bene. Il confronto tra il rumore Newtoniano atmosferico da Rayleigh-Bénard e la principali sorgenti di tra i 1-15 Hz mostra che il rumore Newtoniano atmosferico è paragonabile al rumore termico ed al rumore Newtoniano sismico e, nelle giornata fortemente solari, può rappresentare la principale sorgente di rumore nella banda di frequenza 5-15Hz. Nel nostro modello, l'ampiezza spettrale del rumore Newtoniano atmosferico dipende da due indicatori di stati atmosferici misurabili v_0 e K_θ^2, dove il primo rappresenta il valore medio della velocità del vento su larga scala, mentre il secondo è il coefficiente della funzione di correlazione termica su piccola scala. v_0 può essere facilmente controllato attraverso un insieme di anemometri, mentre K_θ^2 attraverso una campionatura spaziale di fluttuazioni di temperature.

Dalla Figura 3.5.3 risulta che anche l'effetto delle bolle convettive puó essere rilevante, nello stesso range di frequenza. A questo punto è necessario osservare che tutte le stime date soffrono della mancanza di precise misure sperimentali, e quindi soffrono di un margine di incertezza sistematica.

Si vuole sottolineare che l'importanza di tali stime diventa particolarmente importante se si utilizza un rivelatore interferometrico gravitazionale ad alta tecnologia, tecnologia che prevede principalmente l'utilizzo di tecniche di raffreddamento termico e di tecniche di miglioramento dell'ottica dell'interferometro, tecniche atte a migliorarne la sensibilità a basse frequenze, $f \in [1,15]Hz$, ed ad abbassare il rumore termico in questo range, rumore termico che rappresenta attualmente l'ostacolo principale da superare. Le tecniche criogeniche possono giocare un ruolo fondamentale per il raggiungimento dell'obiettivo finale, cioè quello del miglioramento della sensibilità del detector di alcuni ordini di grandezza nella banda di interesse. Ad oggi l'uso della criogenia per ridurre il

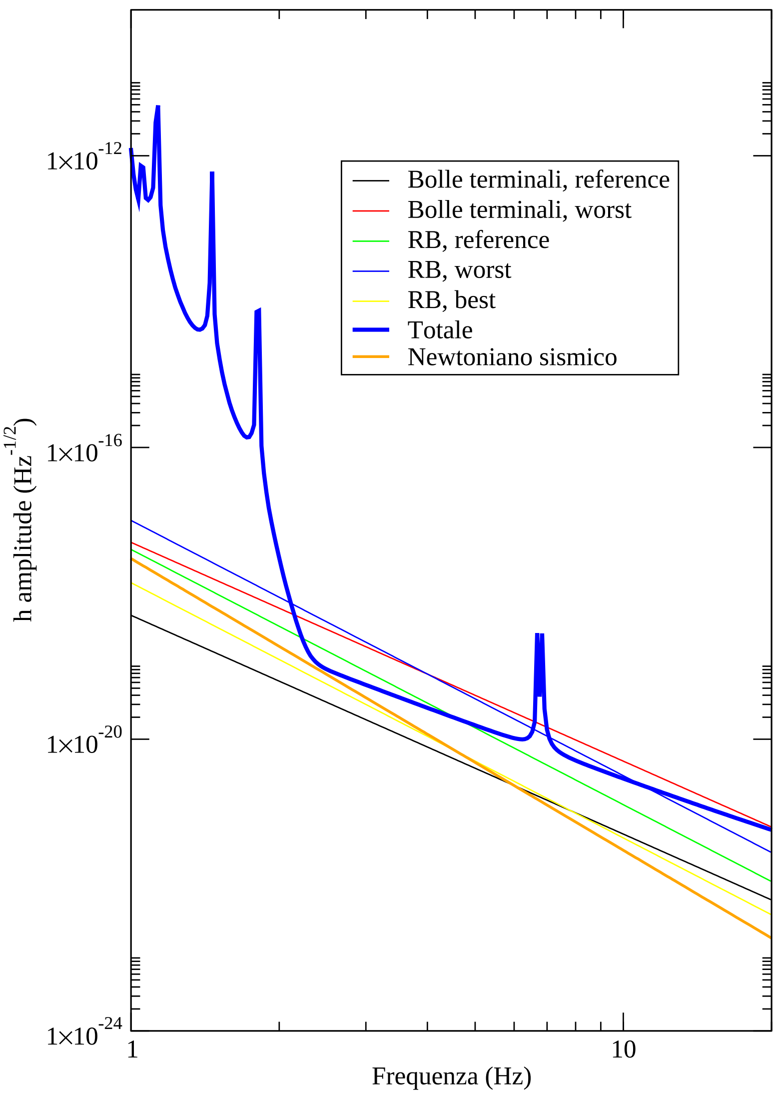

FIGURA 3.5.3. Ampiezze spettrali per la convezione di Rayleigh Bernard e per la bolla convettiva, confrontate con la sensibilità totale e con il Newtoniano sismico. Per le bolle convettive i parametri utilizzati sono

	α	r (m)	R (m)
reference	10^{-2}	5	30
worst	2×10^{-2}	10	40

mentre per la convezione di Rayleigh Bernard sono stati usati

	$v_0\ (m/s)$	$K_\theta\ m^{-1/3}K$
reference	6.2	0.95
worst	10	1.48
best	3.2	0.63

rumore termico per mezzo della riduzione della temperatura e per mezzo dell'aumento del fattore di qualità Q è stato ampiamente applicato ai rivelatori interferometrici a massa risonante. Si ricorda che per un rivelatore a massa risonante risulta che la componente spettrale della forza agente sulla massa risonante è [**46**]

$$\tilde{F} = \sqrt{\frac{4k_B T M \omega_0}{Q}} \frac{N}{\sqrt{Hz}}$$

e dunque bisogna ridurre il fattore T/Q per ridurre il rumore termico. Tuttavia il raffreddamento degli specchi è reso complicato a causa dell'indispensabile utilizzo di laser ad alta potenza, laser che incide sugli elementi ottici. Infatti la sensibilità delle antenne interferometriche avanzate di prossima generazione dovrà basarsi su una potenza di luce eccezionalmente alta, dell'ordine dei Megawatts, in modo che la differenza della lunghezza dei bracci dell'interferometro sia resa più evidente. Ovviamente ci sono parecchi problemi collegati all'utilizzo di lasers di tale potenza quali il lensing termico, le fluttuazioni dell'indice di rifrazione indotte termicamente , la foto-rifrazione e la birifrangenza [**17**] indotta termicamente. Pertanto l'apparato ottico dell'esperimento deve essere scelto in modo tale da minimizzare la portata di questi effetti spuri. Specchi e sospensioni ad alta conducibilità termica (in modo da evitare deformazioni indotte termicamente) e a bassa perdita ottica sono in piena fase di studio; l'utilizzo di materiali ad alta conducibilità termica potrebbe limitare il fattore di qualità e generare effetti di rumore termo-ottico. Queste questioni necessitano di ulteriori approfondimenti. Un problema addizionale collegato al processo di cooling è dato dal rumore meccanico prodotto dal sistema refrigeratore medesimo. Infatti il bagno di liquido criogenico (elio liquido) introduce una nuova sorgente di rumore meccanico (ebollizione, vibrazioni nei tubi) che rende necessario l'uso di filtri meccanici di più elevata attenuazione rispetto a quelli usati nelle antenne a temperatura ambiente. Fortunatamente è possibile trarre importanti informazioni su questi problemi dagli esperimenti già condotti con rivelatori a massa risonante. Pertanto per testare l'uso della criogenia bisogna considerare in dettaglio i seguenti fattori [**27**]:

- Definizione della strategia di cooling, il che implica la ottimizzazione della propagazione del calore attraverso le sospensioni ed il monitoraggio del rumore meccanico indotto dall'apparato criogenico.
- Studio delle proprietà ottiche di materiali principali in funzione della temperatura.
- Studio delle perdite elastiche degli specchi e delle sospensioni in funzione della temperatura.
- Studio della contaminazione degli specchi dovuta all'incollamento di molecole del gas residuo sulla superficie fredda dello specchio. Questo ultimo punto è particolarmente importante. La tecnologia dell'alto vuoto e gli studi sulla contaminazione sono di particolare interesse poiché sono di casa in qualsiasi interferometro.
  - E' necessario un alto vuoto (circa 10^{-8} mbar) per minimizzare la possibilità che fluttuazioni statistiche della pressione possano modulare la fase dei fasci di luce.
  - Deve essere mantenuto un bassissimo livello di contaminazione per evitare il pericolo di inquinamento delle superfici degli specchi, perfino dopo anni di funzionamento.
  - Dovrebbero essere eliminate le particelle di polvere poiché esse potrebbero contaminare gli specchi ed anche perché queste particelle, precipitando lungo il fascio laser , potrebbero simulare un segnale gravitazionale.

Infine può essere presa in considerazione la possibilità di misurare direttamente il rumore termico e quindi correggere l'output del rivelatore tenendo conto di tale misura.

Raggiunti tali progressi e quindi raggiunto un elevatissimo grado di raffinatezza nelle tecniche di misure, il rumore Newtoniano atmosferico rappresenterà il nuovo limite da superare alle basse frequenze per la sensibilità di tali interferometri avanzati. Per ovvi motivi in questo lavoro di tesi viene considerato un numero esiguo di possibili sorgenti di rumore Newtoniano atmosferico. Particolari movimenti bruschi e repentini di corpi in prossimità dell'ambiente circostante l'interferometro, fluttuazioni atmosferiche di qualsiasi natura, rappresentano solo alcuni esempi di fenomeni che potrebbero essere degni oggetti di studio per rivelatori di prossima generazione. In questo senso c'è bisogno di ulteriori approfondimenti circa i possibili modelli dinamici atmosferici di interesse e le possibili simulazioni al calcolatore di tali modelli medesimi. Eliminare del tutto questo rumore è in pratica impossibile poiché dovremmo eliminare il movimento di qualsiasi corpo massivo che crea questi campi di perturbazione che accelerano debolmente le masse-test, tuttavia è possibile limitare alcune manifestazioni di tale rumore opportunamente mediante semplici accorgimenti. Per esempio è possibile recintare la costruzione che contiene l'interferometro prevenendo il fatto che un oggetto possa avvicinarsi troppo (qualche decina di metri) alle masse test. Oppure è possibile tener conto di potenziali sorgenti di segnali spuri (per esempio onde d'urto atmosferiche) nel rivelatore interferometrico gravitazionale usando sensori ambientali. Bisogna solo porre microfoni acustici al di fuori delle costruzioni e nei pressi dei recinti ad alto vuoto delle masse-test. Se questi sensori rivelano un cambiamento un cambiamento di pressione superiore a qualche millibar su scale temporali di 50-100 millisecondi, allora c'è da aspettarsi la presenza di segnali spuri di ampiezza adimensionale dell'ordine di circa $h \simeq 10^{-22}$ nella banda di frequenza dei 10-20 Hz. A questo punto, mediante opportune tecniche di sottrazione, la quantità dei dati che contengono il possibile segnale impuro può essere scartata. Lo studio dettagliato di queste tecniche va al di la degli scopi di questa tesi. In conclusione è fortemente auspicabile che la futura generazione di interferometri ultracriogenici sia dotata di sistemi di monitoraggio dell'ambiente e di rivelazione infrasonica, sistemi facilmente sfruttabili per vietare tali segnali spuri dovuti al rumore Newtoniano atmosferico.

Ringraziamenti. Sinceri ringraziamenti vanno a tutti coloro che hanno contribuito a rendere questi miei anni universitari più semplici ed interessanti, non solo da un punto di vista accademico. Un ringraziamento particolare va ad Andrea, Christian, Domenico, Enzo, Fedele, Filippo, Joe, Mauro F., Mauro R., Michele B., Michele G., Michele S., Nico, Paolo F., Raffaele e Vincenzo.

Ringrazio il mio relatore, Prof. Carlo Bradaschia, e soprattutto il Dott. Giancarlo Cella senza il prezioso aiuto del quale sarebbe stato molto più difficile portare a compimento il lavoro di tesi presso il progetto VIRGO.

Ringrazio profondamente i miei genitori e dedico questa tesi ai miei nonni tutti, in particolare alla mia carissima nonna Filomena che magari starà guardandomi da qualche parte là su in cielo, ciao nonna.

"So perché ci sono così tante persone che amano tagliare la legna. In questa attività si vedono subito i risultati."

Albert Einstein

Bibliografia

[1] Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology, John Wiley and Sons.

[2] Landau-Lifsits, Teoria dei Campi, Editori Riuniti.

[3] Hans C. Ohanian e Remo Ruffini, Gravitazione e Spazio-Tempo, edizione Zanichelli.

[4] Guido Pizzella, Fisica Sperimentale del Campo Gravitazionale, La Nuova Italia Scientifica.

[5] Peter R. Saulson, Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors, World Scientific.

[6] Landau-Lifsits, Fisica Statistica (volume I e volume II), Editori Riuniti.

[7] J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley series in advanced physics.

[8] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko, Geometrie delle superfici, dei gruppi di trasformazioni e dei campi, Editori Riuniti.

[9] Albert Einstein, Il Significato della Relatività, Edizioni Boringhieri.

[10] A. Di Giacomo, Lezioni di Fisica Teorica, Edizioni ETS.

[11] E. Fabri, Argomenti di Cosmologia e Astrofisica Relativistica , Università di Pisa, Dipartimento di Fisica.

[12] V. Ferrari, Gravitational Sources, Appunti presentati alla Virgo-Sigrav school on gravitational waves, Maggio 2002.

[13] C.W. Misner, K.S. Thorne, Gravitation, W. H. Freeman and Company, New York.

[14] S.W. Hawking, W. Israel, General Relativity, Cambridge University Press.

[15] Robert M. Wald, General Relativity, The University of Chicago Press.

[16] Clifford M.Will, Theory and Experiment in gravitational physics, Cambridge University Press.

[17] S. Tolansky, An Introduction to Interferometry, Longmans Press.

[18] M.Francon, Optical Interferometry, Academic Press.

[19] E. Arimondo, Lezioni di Struttura della Materia, Edizioni ETS.

[20] Edward Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, Princeton University Press.

[21] N. G. Van Kampen, Stochastic Processes in Physics and Chemistry, North-Holland Publishing Company.

[22] Nelson Wax, Noise and Stochastic Processes, Dover Publications Inc. , New York

[23] Ming Chen Wang and Uhlenbeck G.E. , On Theory of Brownian Motion II, Reviews of Modern Physics, vol. 17, No.2 and 3.

[24] Siegmund Brandt, Statistical and Computational Methods in Data Analysis , North -Holland Publishing Company.

[25] Steven M. Kay, Fundamentals of Statistical Signal Processing, volume II, Detection Theory, Prentice Hall PTR.

[26] David G. Blair, The Detection of Gravitational Waves, Cambridge University Press.

[27] M. Barone, G. Calamai, M. Mazzoni , R. Stanga, F. Vetrano, Experimental Physics of Gravitational Waves, World Scientific.

[28] Beccaria et. al., Relevance of Newtonian Seismic Noise for Virgo Interferometer Sensitivity, Classical and Quantum Gravity 15 (1998) 3339-3362.

[29] Teviet Creighton, Tumbleweeds and Airborne Gravitational Noise Sources for Ligo, Classical and Quantum Gravity (2000) 0007050.

[30] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Butterworth-Heinemann, Oxford.

[31] S. Panchev, Random Functions and Turbulence, Pergamon Press.

[32] Marcel Leisieur, Turbulence in Fluids, Kluwer Academic Publishers.

[33] D.C. Leslie, Developments in the Theory of Turbulence, Clarendon Press.

[34] Uriel Frish, Turbulence, Cambridge University Press, Oxford.

[35] J. Lighthill, Waves in Fluids, Cambridge University Press.

[36] L.M. Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics, MacMillan and Company Limited.

[37] R. Byron, W.E. Stewart, E. N. Lightfoot, Transport Phenomena, John Wiley and Sons, Inc.

[38] Jurg Frohlich, Scaling and Self-Similarity in Physics, Birkhauser Edition.

[39] Kerson Huang, Meccanica Statistica, edizione Zanichelli.

[40] Steven N. Shore, An Introduction to Astrophysical Hydrodinamics, Academic Press, Inc.

[41] Jens Feder, Fractals, Plenum Press.

[42] Sergey A. Pomanenko and Emil Wolf, Universal structure of field correlation within a fluctuating medium, Physical Reviw E, volume 65, 016602.

[43] F. Toschi, Anomalous Scaling in Turbulence and in Turbulence Models, Ph. D. Thesis University of Pisa, 1998.

[44] G. Gallavotti, Ipotesi per una introduzione alla meccanica dei fluidi, Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche, gruppo di fisica matematica, 52, 1996.

[45] A. S. Monin, A.M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics (volume 2), MIT Press, Cambridge 1975.

[46] G.Frossati, Cryogenics for resonant gravitational wave detectors, Appunti presentati alla Virgo-Sigrav school on gravitational waves, Maggio 2002.

[47] Lev D. Landau e Evgenij M. Lifsits, Teoria dell'elasticità, Editori Riuniti.

[48] D.J. Achenson, Elementary Fluid Dynamics, Clarendon Press, Oxford.

[49] Gerard't Hooft, Il mondo subatomico, Editori Riuniti.

[50] John D. Jackson, Elettrodinamica Classica, Zanichelli.

[51] Carlo Bernardini, Orlando Ragnisco, Paolo Maria Santini, Metodi Matematici della Fisica, La Nuova Italia Scientifica.

[52] Philip M. Morse and Herman Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill,Inc.

[53] I. S. Gradshtein and I. M. Ryzhhik, Tables of integrals, series and products", Academic Press

[54] Peter R. Saulson, Terrestrial gravitational noise on a gravitational wave antenna, Phys. Rev. D 30, 732 (1984)

[55] S .Braccini et al., Measurement of the virgo superattenuator performances for seismic noise suppressio. Virgo internal report.

[56] A. Abramovici, W. E. Althouse, R.W.P. Drever, Y. Gursel, S.Kawamura, F.J. Raab, D. Shoemaker, L.Siewers, R.E. Spero, K.S. Thorne, R.E. Vogt, R. Weiss, et al., Science 256(5055),325 (1992).

[57] R.De Salvo, A.Gaddi G.Gennaro, L. Holloway, G. Losurdo, and J. Winterflood, Pre-isolator stage for Virgo, Virgo Note NTS 096/034, Virgo INFN, Sezione di Pisa, May 1996.

[58] W. Baade e F. Zwicky, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 20, 254 (1934)

[59] E.S. Posmentier, J. Geophys. Res. 79 (12),1755 (1974).