

Tentamen: Quantummechanica

Docent: J. F. J. van den Brand
Datum verzending: 3 December 2006
Datum retour: 31 December 2006
Datum uitslag: 8 Januari 2007

- Vermeld Uw naam op elke pagina.
- Het is toegestaan om literatuur te raadplegen.
- Motiveer Uw resultaat teneinde een maximale score te bereiken.
- Antwoorden opsturen naar Prof.dr J.F.J. van den Brand, Faculteit der Exacte Wetenschappen, kamer T2.69, de Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam.

Opgave 1) Beschouw de golffunctie $\Psi(x, t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$, met A , λ en ω positieve en reële constanten.

Opgave 1a) Normeer Ψ .

Opgave 1b) Bepaal de verwachtingswaarden voor x en x^2 .

Opgave 1c) Bepaal de standaarddeviatie van x . Maak een schets van $|\Psi|^2$ als functie van x , en markeer de punten ($\langle x \rangle + \sigma$) en ($\langle x \rangle - \sigma$) teneinde te illustreren in welk opzicht σ een maat is voor de spreiding in x . Wat is de waarschijnlijkheid dat het deeltje zich bevindt buiten deze range?

Opgave 2) Een deeltje met massa m is in de toestand $\Psi(x, t) = Ae^{-a[(mx^2/\hbar)+it]}$.

Opgave 2a) Bepaal A .

Opgave 2b) Voor welke potentiaal $V(x)$ is Ψ een oplossing van de Schrödingervergelijking?

Opgave 2c) Bereken de verwachtingswaarden van x , x^2 , p en p^2 .

Opgave 2d) Bepaal σ_x en σ_p . Is het product hiervan consistent met de onzekerheidsrelatie?

Opgave 3. Er geldt

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Opgave 3a) Verifieer dat $\mathbf{T}$ hermitisch is.

Opgave 3b) Vind de eigenwaarden (merk op dat deze reël zijn).

Opgave 3c) Vind en normeer de eigenvectoren (merk op dat deze orthogonaal zijn).

Opgave 3d) Wat is de determinant?

Opgave 4. Een elektron bevindt zich in de spintoestand

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Opgave 4a) Bereken de normalisatie constante A .

Opgave 4b) Bepaal de verwachtingswaarden $\langle s_x \rangle$, $\langle s_y \rangle$ en $\langle s_z \rangle$.

Opgave 4c) Bereken de onzekerheden σ_{s_x} , σ_{s_y} en σ_{s_z} .

Hint: Gebruik het gegeven dat de onzekerheid σ_A van een observabele A gegeven is door vergelijking

$$\sigma_A^2 = \langle (\hat{A} - \langle A \rangle) \psi | (\hat{A} - \langle A \rangle) \psi \rangle. \quad (3)$$

Opgave 4d) Vergewis U ervan dat Uw antwoorden consistent zijn met de drie onzekerheidsrelaties voor spinimpulsmoment.

Opgave 5. Ultrakoude neutronen hebben typisch een temperatuur van $T = 1 \text{ mK}$ en kunnen, net zoals een gas met dezelfde temperatuur, in een vat opgesloten worden. De levensduur van een neutron bedraagt $\tau = 886.7 \pm 1.9 \text{ s}$.

Opgave 5a) Hoe groot is de gemiddelde kinetische energie van deze neutronen, $\langle T \rangle$ in [eV]?

Opgave 5b) Hoe groot is de gemiddelde snelheid, $\langle v \rangle$ in $[m/s]$?

Opgave 5c) Hoe groot is de De Broglie golflengte, $\hbar$ in $[m]$?

Opgave 5d) Teneinde de levensduur van het neutron te bepalen wordt in een experiment een aantal van 10^4 neutronen in een vat opgeslagen. Hoeveel neutronen bevinden zich 10 minuten later nog in het vat, indien men de verliezen aan de wanden verwaarloost? (In werkelijkheid is deze aanname onjuist; dit vormt de grootste moeilijkheid voor een dergelijk experiment. Alle verliezen dienen met grote nauwkeurigheid gemeten en/of geminimaliseerd te worden.)

Opgave 5e) Hoe vaak dient een dergelijke meting herhaald te worden, zodat de halfwaardetijd van het neutron met een statistische nauwkeurigheid van 2 promille bepaald kan worden?