

DE BROGLIE

Opgave 1: Bepaal de versnelspanning die nodig is om een elektron een de Broglie-golflengte van $1 \text{ \AA}$ te geven. Dit correspondeert met de grootte van de inter-atoomafstanden van een kristal.

Oplossing: De kinetische energie van het elektron is gelijk aan de elektrostatische energie,

$$\frac{p^2}{2m} = eV, \quad (1)$$

met p, m en e respectievelijk de impuls, massa en lading van het elektron. De versnelspanning wordt gerepresenteerd door V . De de Broglie golflengte λ staat met de impuls in verband volgens

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (2)$$

met h de constante van Planck. Hiermee vinden we voor de versnelspanning

$$\begin{aligned} V &= \frac{p^2}{2me} \\ &= \frac{h^2}{2m \cdot \lambda^2 \cdot e} \\ &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \cdot (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (10^{-10} \text{ m})^2 \cdot (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})} \\ &= 151 \text{ V}. \end{aligned} \quad (3)$$

Merk op dat de kinetische energie van 151 eV klein is ten opzichte van de massa van het elektron, $m = 511 \text{ keV}$, en dat het gebruik van de niet-relativistische uitdrukking voor de kinetische energie dus gerechtvaardigd is.

Opgave 2: Bereken de de Broglie-golflengte van een thermisch neutron met een energie van $0,05 \text{ eV}$.

Oplossing: De kinetische energie van een zogenaamd thermisch neutron wordt gegeven door $\frac{3}{2}kT$, met k de constante van Boltzmann en T de temperatuur. We zien dat een energie van $0,05 \text{ eV}$ overeen komt met een temperatuur van

$$\begin{aligned} T &= \frac{2E}{3k} \\ &= \frac{2 \cdot (0,05 \text{ eV})}{3k} \\ &= \frac{2 \cdot (0,05 \text{ eV}) \cdot (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})}{2 \cdot (1,38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1})} \\ &= 387 \text{ K}. \end{aligned} \quad (4)$$

We berekenen allereerst de energie van dit neutron. Er geldt

$$\frac{p^2}{2m_n} = E_n = 0,05 \text{ eV} = (0,05 \text{ eV}) \cdot (1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) = 8,0 \times 10^{-21} \text{ J}. \quad (5)$$

Er geldt voor de impuls

$$p = \sqrt{2m_n E_n} = \sqrt{2 \cdot (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}) \cdot (8,0 \times 10^{-21} \text{ J})} = 5,2 \times 10^{-24} \text{ kg m/s.} \quad (6)$$

Voor de de Broglie golflengte vinden we

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}}{5,2 \times 10^{-24} \text{ kg m/s}} = 1,28 \times 10^{-10} \text{ m.} \quad (7)$$

Opgave 3: Bereken de energie van een proton met een golflengte van 0,5 fm (1 fm = 10^{-15} m = 10^{-5} Å = 1 fermi).

Oplossing: De impuls van het proton wordt gegeven door

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}}{0,5 \times 10^{-15} \text{ m}} = 1,32 \times 10^{-18} \text{ kg m/s.} \quad (8)$$

De totale energie (inclusief rustenergie) volgt uit

$$E^2 = p^2 c^2 + m_p^2 c^4 \rightarrow E = \sqrt{p^2 c^2 + m_p^2 c^4} \quad (9)$$

en dus

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{(1,32 \times 10^{-18} \text{ kg m/s})^2 \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 + (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})^2 \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})^4} \\ &= 4,23 \times 10^{-10} \text{ J.} \end{aligned} \quad (10)$$

De totale energie is dus

$$E = \frac{(4,23 \times 10^{-10} \text{ J}) \cdot 10^{-6}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 2.642 \text{ MeV} \quad (11)$$

en hiervan is $2.642 - 938 = 1.704$ MeV de kinetische energie (938 MeV correspondeert met de rustenergie van het proton - $E_{\text{rust}} = m_p c^2$).

Opgave 4: Als je een object wilt observeren dat 2,5 Å groot is, wat is dan de minimum energie van het foton dat gebruikt kan worden?

Oplossing: Het oplossend vermogen van een microscoop is besproken op bladzijde 15 van de presentatie over het twee-spleten experiment (zie website). Daar vonden we voor de onzekerheidsrelatie

$$\Delta x \Delta p \approx h. \quad (12)$$

Deze relatie volgt ook uit vergelijking (64) op bladzijde 22 in het dictaat, $\Delta x \Delta k \approx 2\pi$. Het verband tussen impuls en golfgetal is $p = \hbar k$ en dus geldt $\Delta p = \hbar \Delta k$. Invullen levert weer vergelijking (12).

We hebben nu $\Delta x = 2,5 \times 10^{-10} \text{ m}$. Teneinde dit object te kunnen observeren hebben we deeltjes met een minimum impuls nodig van

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta x} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}}{2,5 \times 10^{-10} \text{ m}} = 2,65 \times 10^{-24} \text{ kg m/s.} \quad (13)$$

De energie van het foton volgt uit

$$E = pc = (2,65 \times 10^{-24} \text{ kg m/s}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 7,9 \times 10^{-16} \text{ J.} \quad (14)$$

Dit komt overeen met

$$E = \frac{7,9 \times 10^{-16} \text{ J}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 4,96 \text{ keV.} \quad (15)$$

Opgave 5: Bereken opgave 4 nogmaals, maar nu voor elektronen in plaats van fotonen.

Oplossing: Voor elektronen geldt ook weer dat

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta x} = 2,65 \times 10^{-24} \text{ kg m/s.} \quad (16)$$

De bijbehorende energie volgt uit

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{(2,65 \times 10^{-24} \text{ kg m/s})^2}{2 \cdot (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 3,9 \times 10^{-18} \text{ J.} \quad (17)$$

Dit komt overeen met

$$E = \frac{3,9 \times 10^{-18} \text{ J}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 24 \text{ eV.} \quad (18)$$

Opgave 6: Thermische neutronen vallen in op een NaCl (zout) kristal (interatomaire afstand $2,81 \text{ \AA}$). De neutronen ondergaan eerste-orde diffractie aan de Braggvlakken onder een hoek van 20° . Wat is de energie van deze neutronen?

Oplossing: Voor Braggse diffractie geldt de relatie

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad (19)$$

met d de roosterconstante van het kristal, θ de diffractiehoek en n de orde van diffractie. Voor eerste-orde diffractie geldt dat $n = 1$. Invullen levert voor de golflengte,

$$\lambda = 2d \sin \theta = 2 \cdot (2,81 \times 10^{-10} \text{ m}) \cdot \sin 20^\circ = 1,92 \times 10^{-10} \text{ m.} \quad (20)$$

De impuls van de neutronen is dan

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}}{1,92 \times 10^{-10} \text{ m}} = 3,45 \times 10^{-24} \text{ kg m/s.} \quad (21)$$

De kinetische energie van deze neutronen bedraagt

$$E_n = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{(3,45 \times 10^{-24} \text{ kg m/s})^2}{2 \cdot (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 3,55 \times 10^{-21} \text{ J.} \quad (22)$$

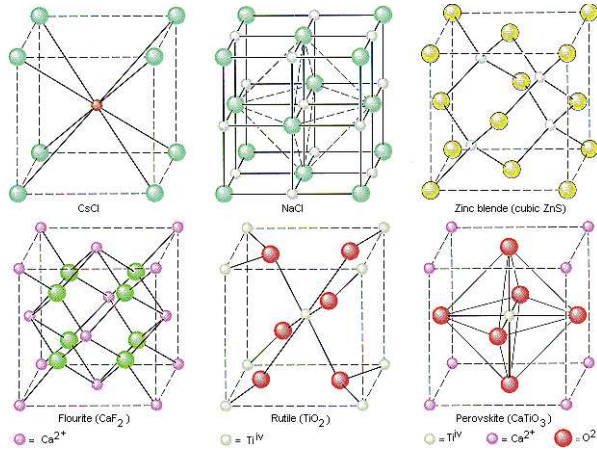
Dit komt overeen met

$$E = \frac{3,55 \times 10^{-21} \text{ J}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 0,022 \text{ eV.} \quad (23)$$

Opgave 7: Bepaal de interatomaire afstand voor een NaCl kristal als de dichtheid van NaCl gelijk is aan $2,16 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ en de atoomgewichten voor natrium en chloor gelijk zijn aan 23,00 en 35,46, respectievelijk.

Oplossing: Om deze vraag te kunnen beantwoorden, dienen we het kristalrooster van NaCl te begrijpen. Zoals figuur 1 toont, zijn er diverse kristalroosters. Het rooster van NaCl is kubisch. Het atoomgewicht van NaCl bedraagt

$$M_{\text{NaCl}} = 23,00 + 35,46 = 58,46. \quad (24)$$



Figuur 1: *Overzicht van diverse kristalroosters.*

Dit betekent dat 58,46 gram van het zout, $N_A = 6,022 \times 10^{23}$ NaCl moleculen bevat. Hierbij is N_A het getal van Avogadro.

Figuur 2 toont dat NaCl een kubisch kristalrooster heeft, waarbij de eenheidscel een ribbe heeft met lengte $2d$, waarbij d de gezochte roosterconstante is. Er bevinden zich 8 moleculen (in feite Cl-ionen) op de hoekpunten van de eenheidscel. Echter, elk van deze moleculen is onderdeel van 8 zulke kubussen. Deze moleculen tellen dus voor $(8 \times \frac{1}{8}) = 1$. Verder heeft de eenheidskubus nog 6 moleculen die zich in het centrum van de zijvlakken bevinden. Elk van deze moleculen wordt door 2 kubussen gedeeld. Deze moleculen tellen dus voor $(6 \times \frac{1}{2}) = 3$. We vinden hiermee dat de eenheidscel een dichtheid heeft van

$$\begin{aligned}
 \rho_{\text{kubus}} &= \frac{\text{massa van } (8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 1 + 3 =) 4 \text{ NaCl moleculen}}{\text{celvolume} = (2d)^3} \\
 &= \frac{58,46 \times 4 \text{ amu}}{8d^3} \\
 &= \frac{58,46 \cdot (1,66 \times 10^{-27} \text{ kg})}{2d^3} \\
 &= \frac{9,7 \times 10^{-26} \text{ kg}}{2d^3},
 \end{aligned} \tag{25}$$

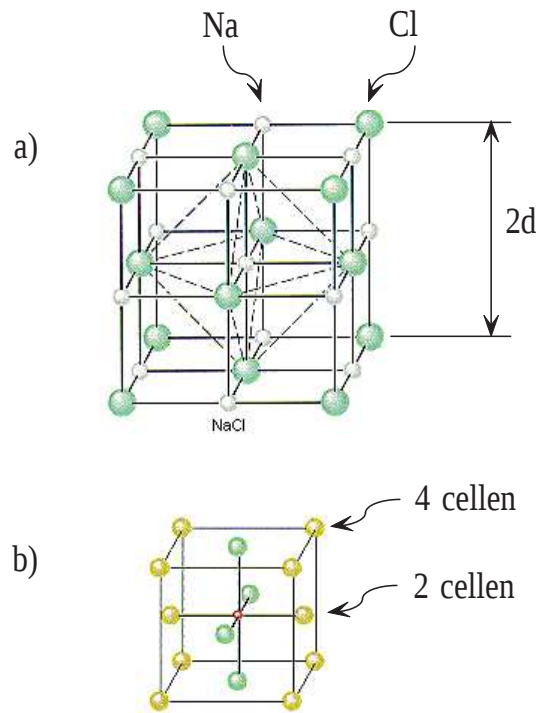
met d de roosterconstante. De dichtheid van de kubus dient gelijk te zijn aan de dichtheid van NaCl en we vinden voor de roosterconstante

$$d = \sqrt[3]{\frac{9,7 \times 10^{-26} \text{ kg}}{2 \cdot (2,16 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)}} = 2,82 \times 10^{-10} \text{ m}. \tag{26}$$

Opgave 8: Bepaal de fotonflux van een bundel monochromatisch licht met een golflengte van $3.000 \text{ \AA}$ en een intensiteit van $3 \times 10^{-14} \text{ W/m}^2$.

Oplossing: De fotonflux is het aantal fotonen per oppervlakte- en per tijdeenheid. De energie van een foton met een golflengte van $3.000 \text{ \AA}$ bedraagt

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,6 \times 10^{-34} \text{ Js}) \cdot (3 \times 10^8 \text{ m/s})}{3,0 \times 10^{-10} \text{ m}} = 6,62 \times 10^{-19} \text{ J}. \tag{27}$$



Figuur 2: Het rooster van NaCl. We zien dat de 8 moleculen die zich op de hoekpunten bevinden, onderdeel zijn van 8 cellen. Verder zijn de 6 moleculen in het midden van de zijvlakken, onderdeel van 6 cellen.

De fotonflux die overeenkomt met een intensiteit van $3 \times 10^{-14} \text{ W/m}^2$ bedraagt

$$\dot{N} = \frac{3 \times 10^{-14} \text{ W/m}^2}{6,62 \times 10^{-19} \text{ J}} = 4,5 \times 10^4 \text{ Hz/m}^2. \quad (28)$$

Maak zoveel mogelijk opgaven. De correct gemaakte opgaven worden als credit bij het tentamen gebruikt (maximum 25 %).