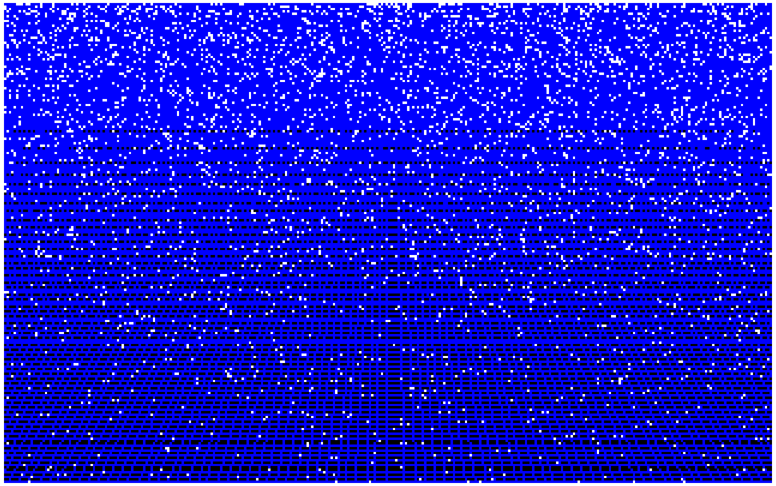
Thermodynamica

rol in de moderne fysica



Jo van den Brand

HOVO: 4 december 2014

jo@nikhef.nl

Inhoud

- Kosmologie
  - Algemene relativiteitstheorie
  - Kosmologie en Big Bang
  - Roodverschuiving
- Thermodynamica
  - Fase-overgangen (entropie)
- Nucleosynthese
  - Big Bang en synthese in sterren
  - Abondantie van helium-4
- Standaard zonnemodel
  - Temperatuur in de zon
- Kosmische microgolf-achtergrondstraling
  - Temperatuur en fluctuaties

Standaard zonnemodel

Standard Solar Model (SSM) is gebaseerd op

- De zon is sferisch symmetrisch
- De zon is in hydrostatisch evenwicht
- Energie wordt overgebracht door straling, convectie en neutrino's
- Fusie van waterstof tot helium is de energiebron

Data voor de zon

Grootheid	Waarde
Gemiddelde afstand	1.496×10^{11} m
Straal	$(6.96432 \pm 54) \times 10^{8}$ m
Massa	$(1.98855 \pm 0.00025) \times 10^{30}$ kg
Gemiddelde dichtheid	1.408×10^{3} kg/m^3
Dichtheid in het centrum	1.622×10^{5} kg/m^3
Ontsnappingssnelheid	617.7 km/s
Rotatiesnelheid (bij de evenaar)	7.189×10^{3} km/uur
Gravitatie (bij de evenaar)	274.0 m/s^2
Temperatuur fotosfeer	5778 K
Temperatuur in het centrum	1.57×10^{7} K
Luminositeit	3.846×10^{26} W

Centripetale versnelling op de equator $a = v^2/R_\odot \approx 5 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$

Sferische symmetrie is een goede aanname $\Rightarrow$ $T(r)$ en $P(r)$

SSM

Druk is som van gasdruk $P_{\rm gas} = \frac{\rho k_B T}{\mu}$ en stralingsdruk $P_{\rm straling} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$

<u>Opgave</u>: bereken de druk in de zon

Dichtheid in de zon: $\rho \approx 10^4 \ {\rm kg/m^3}$

Temperatuur in het centrum van de zon: $T \approx 10^7 \ {\rm K}$

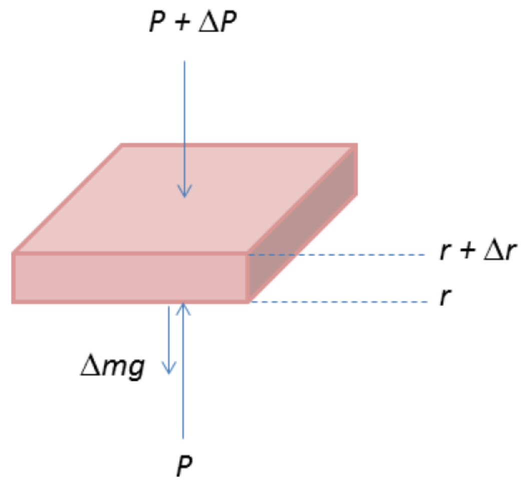
<u>Antwoord</u>: we vinden dan $P_{\rm gas} \approx 1.4 \times 10^{15} \ {\rm N/m^2}$ en $P_{\rm straling} \approx 2.5 \times 10^{12} \ {\rm N/m^2}$

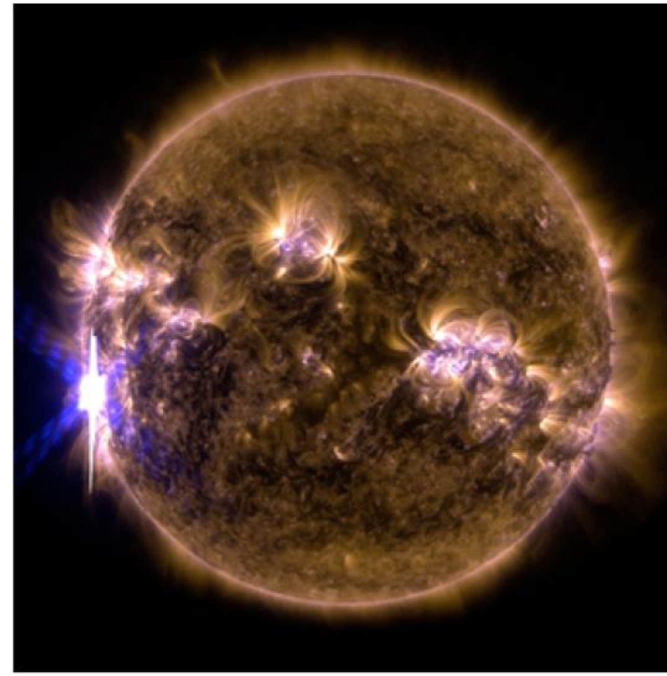
We zien dat stralingsdruk verwaarloosbaar is

SSM: hydrostatisch evenwicht

Thermisch evenwicht tussen gasdruk en gravitatie

Beschouw een sferische schil





Kracht op de bodem $F_{\text{bodem}} = P(r)A$

Kracht op de bovenkant $F_{\text{top}} = -(P + \Delta P)A$

Gravitatiekracht op het element $F_{\text{gravitatie}} = -\Delta mg \Rightarrow F_{\text{gravitatie}} = -\rho A h g$

$\Delta r = h$

Hydrostatisch evenwicht $P(r)A - (P + \Delta P)A - \rho A h g = 0$

Lokale gravitatieversnelling $g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \rho g = -\rho \frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{P\mu}{kT}\frac{GM(r)}{r^2}$$

We gebruiken de ideale gaswet $PV = NkT \rightarrow P = \rho kT/\mu$

SSM: massa – straal relatie en energiebehoud

Massa binnen een bol met straal *r* is *M(r)*

Massa van een sferische schil $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$

Massa-straal relatie $\dfrac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho = 4\pi r^2 \dfrac{P\mu}{kT}$

Er gelden de randvoorwaarden $M(r) = 0 \text{ als } r = 0$ en $M(r) = M_\odot \text{ als } r = R_\odot$

Evenwicht: energie binnen een element is constant tussen *r* en *r + dr*

Flux door buitenoppervlak = flux *L* door binnenoppervlak + vermogen *dL* in schil

Dit geeft $L + dL = L + 4\pi r^2 \epsilon \rho dr$

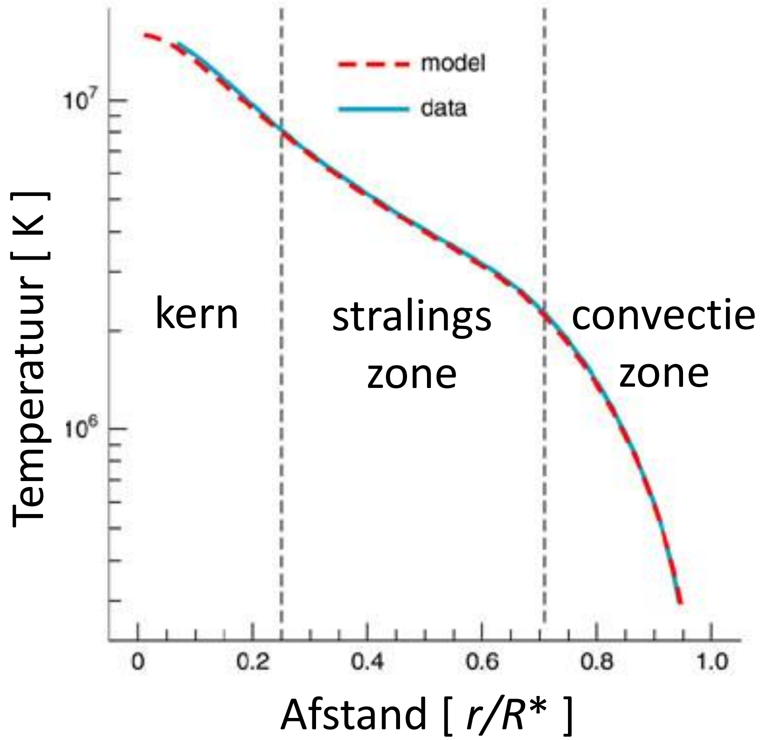
intrinsieke energieproductie [W/kg]

luminositeit [J/s]

$$\Rightarrow \quad \frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \rho = 4\pi r^2 \epsilon \frac{P\mu}{kT}$$

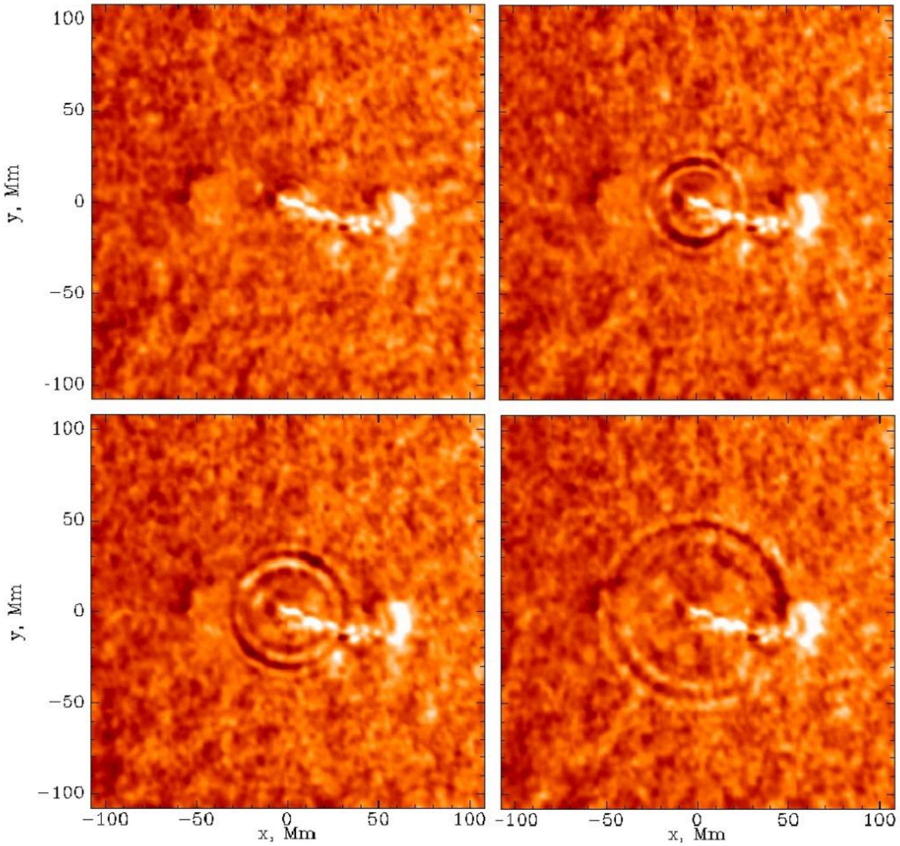
Randvoorwaarden $L = 0 \text{ voor } r = 0$ en $L = L_\odot \text{ voor } r = R_\odot$

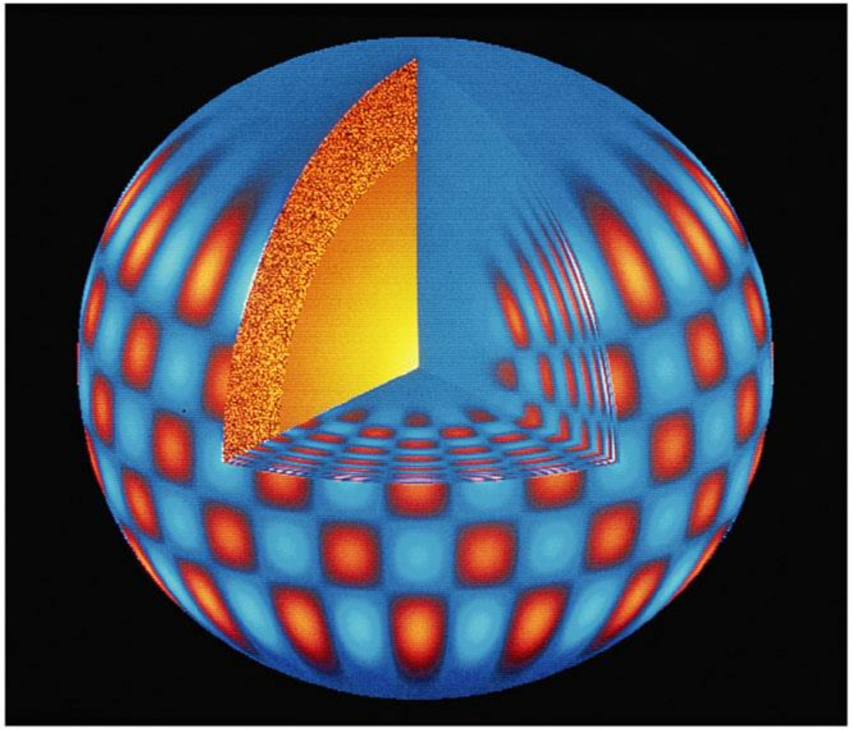
SSM: resultaten



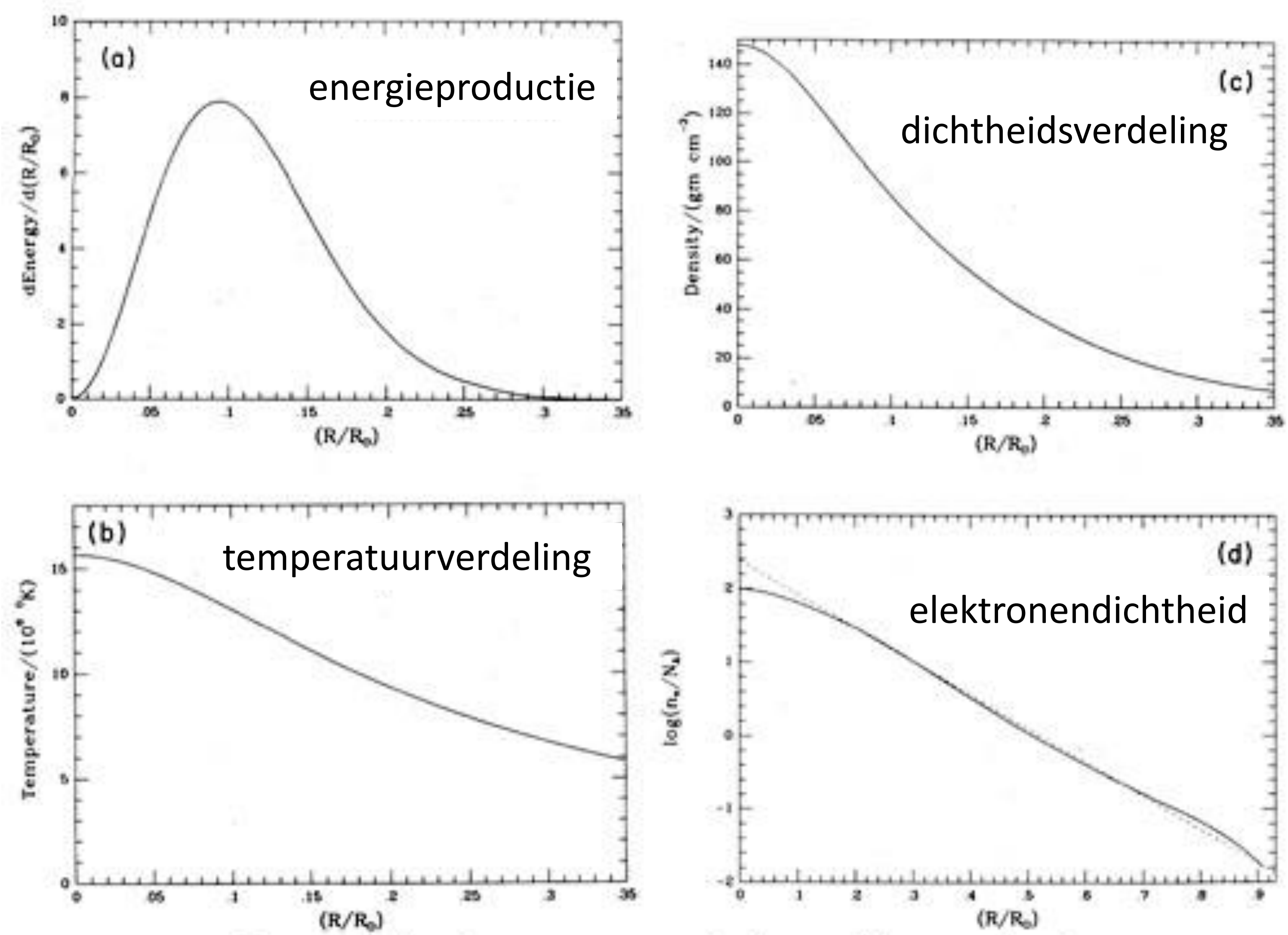
Helioseismologie

Flare veroorzaakt seismische golf





SSM: resultaten



Energy production, temperature, density, and electron density

Model: lineaire dichtheid-straal relatie

Neem aan dat $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R_\star}\right)$

dichtheid in het centrum van de ster

Hydrostatisch evenwicht $\boxed{\rho g = \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R_\star}\right)}$

Massa-straal relatie $\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho = 4\pi r^2 \frac{P\mu}{kT} \Rightarrow dM = 4\pi\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R_\star}\right) r^2 dr$

Integreren levert $M(r) = \pi r^3 \rho_0 \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R_\star}\right)$

Normeren op de totale massa van de ster $\boxed{M_\star = \pi R_\star^3 \rho_0 \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}\pi R_\star^3 \rho_0}$

Dit geeft $M(r) = M_\star \left(\frac{r}{R_\star^3}\right)^3 \left(4 - \frac{3r}{R_\star}\right)$

Invullen in $\Rightarrow \frac{dP}{dr} = -\pi G \rho_0^2 r \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R_\star}\right)\left(1 - \frac{r}{R}\right)$

Integreren levert $P(r) = \frac{5\pi G}{36}\rho_0^2 R_\star^2 \left(1 - \frac{24r^2}{5R_\star^2} + \frac{28r^3}{5R_\star^3} - \frac{9r^4}{5R_\star^4}\right)$ $\quad P(r = R_\star) = 0$

Elimineer centrale dichtheid met $\Rightarrow \boxed{P_0 = P(r=0) = \frac{5G}{4\pi}\frac{M_\star^2}{R_\star^4}}$

Ideale gaswet $(T = \mu m_p P/\rho k_B)$ $\quad T(r) = \underbrace{\frac{5\pi G\mu m_p}{36 k_B}\rho_0 R_\star^2}_{20\ \text{miljoen K}} \left(1 + \frac{r}{R_\star} - \frac{19r^2}{5R_\star^2} + \frac{9r^3}{5R_\star^3}\right)$

Theorie van Eddington

Aanname: ster is een gasbol die voldoet aan de ideale gaswet $P_{\rm G} = \frac{R}{M}\rho T$

Totale druk $P = P_{\rm gas} + P_{\rm straling}$ met $P_{\rm gas}/P = \beta$ (constant)

Bose-Einstein gas $\rho_{\rm Rel} = \frac{g_i}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{E^3}{e^{E/T}\pm 1}dE = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30}g_i T^4, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{7}{8}\left(\frac{\pi^2}{30}g_i T^4\right), & \text{Fermi Dirac} \end{cases}$

Dit levert $P = \frac{R\rho T}{\beta M} = \frac{aT^4}{3(1-\beta)}$

Elimineer *T*, dit geeft $P = \kappa\rho^{4/3}$ (voorbeeld van een *polytroop*)

Adiabatische index $\gamma = 4/3$

Polytrope index *n* volgt uit $\gamma = (n+1)/n$

Gravitatiepotentiaal voldoet aan Poissonvergelijking

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = -4\pi G\rho$$

Bewijs: beschouw gravitatiekracht van sferische schil met dikte *dr*

$$-\frac{GM(r)dM(r)}{r^2} \quad \text{met} \quad M(r) = 4\pi\int_0^r \rho r^2 dr$$

Theorie van Eddington

Kracht per oppervlakte-eenheid $-g(r)\rho(r)dr = -\frac{GM(r)\rho(r)dr}{r^2}$

gravitatieversnelling [m/s^2]

Deze kracht ondervindt weerstand door toename van de gasdruk

$$dP = -g\rho dr = \rho d\phi$$

gravitatiepotentiaal $g = -\frac{d\phi}{dr}$

Als we $d\phi/dr = -g$ nog eens naar *r* differentieren vinden we (einde bewijs)

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} = -4\pi G\rho$$

Invullen van $P = \kappa\rho^{4/3}$ en integreren levert $\phi = 4\kappa\rho^{1/3} + \text{constante}$

Hiermee vinden we druk en dichtheid als functie van de gravitatiepotentiaal $\rho = \left(\frac{\phi}{4\kappa}\right)^3$ en $P = \frac{1}{4}\rho\phi$

Invullen in de poissonvergelijking levert de differentiaalvergelijking voor ϕ

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + \alpha^2\phi^3 = 0, \text{ met } \alpha^2 = \frac{\pi G}{16\kappa^3}$$

Numeriek op te lossen met randvoorwaarden $\phi|_{r=R_\odot} = 0$ en $\left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{r=0} = 0$

Lane-Emden vergelijking

We hebben $$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + \alpha^2\phi^3 = 0, \text{ met } \alpha^2 = \frac{\pi G}{16\kappa^3}$$

Definieer $$u = \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{en} \quad z = \alpha\phi_0 r \longrightarrow \rho = \rho_0 u^3$$

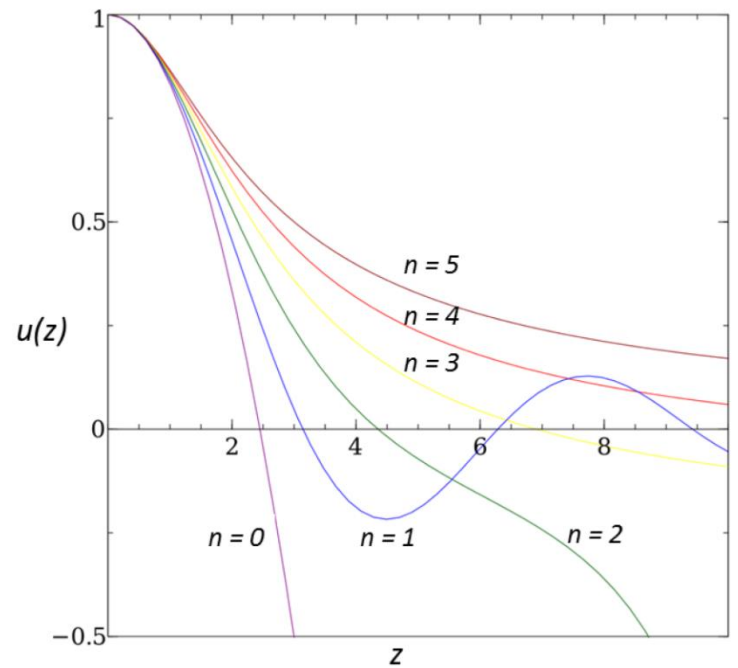
centrale dichtheid

Dan geldt $$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{du}{dz} + u^3 = 0, \text{ met } u(0) = 1 \text{ en } \left.\frac{du}{dz}\right|_{z=0} = 0$$

Dit is de Lane-Emden vergelijking $\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{du}{dz}\right) = -u^n$ (met index 3)

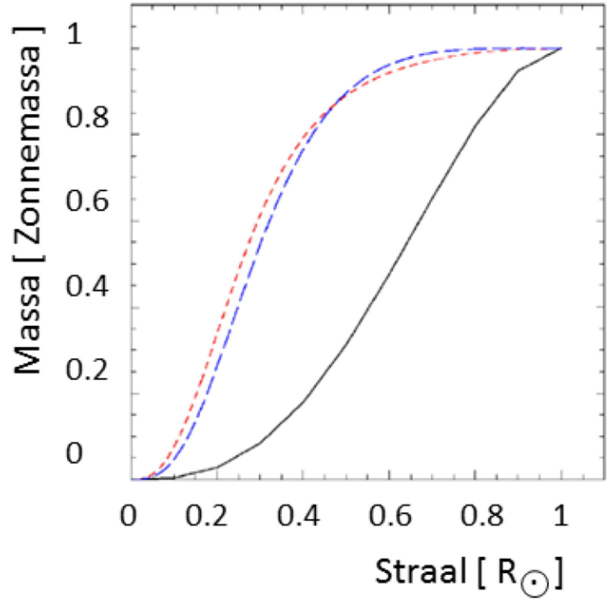
Oplossing hangt enkel van *n* af

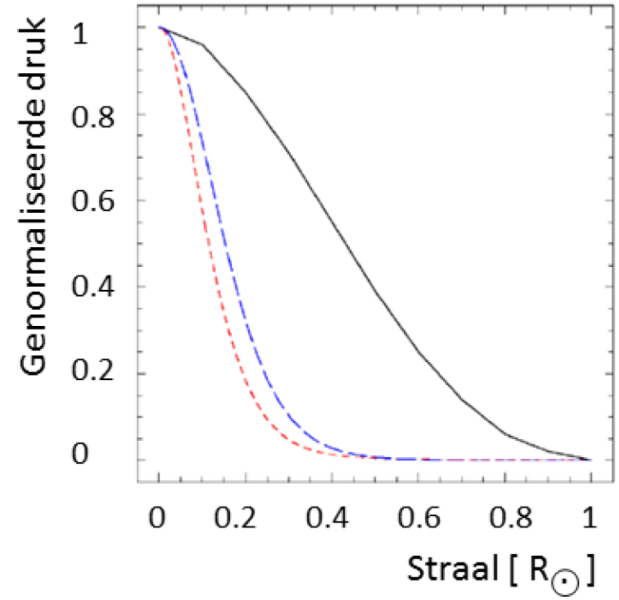
Geen analytische oplossing voor *n = 3*



Model van Eddington

We vinden voor *n = 3*





Op de rand van de ster $g = \dfrac{GM_\star}{R_\star^2} = -\dfrac{d\phi}{dr}\bigg|_{r=R_\star} \longrightarrow \alpha = \dfrac{1}{GM_\star}\left(-z^2\dfrac{du}{dz}\right)_{u=0}$

We hadden $u = \dfrac{\phi}{\phi_0}$ en $z = \alpha\phi_0 r$

Ook geldt $z_1 = z|_{u=0} = 6.895$ en $-z_1^2\frac{du}{dz}|_{u=0} = 2.018$

We vinden $\phi_0 = \dfrac{1}{\alpha R_\star}\, z|_{u=0}$

Temperatuur in de ster $T_0 = \dfrac{\beta M}{\rho_0 R} P_0 = \dfrac{\beta M}{4R}\phi_0$

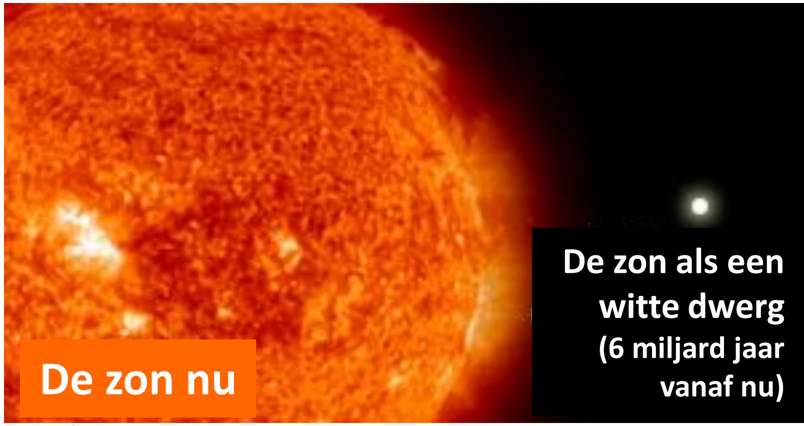
Voor centrum zon $T_\odot = 2 \times 10^7 \text{ K}$

Witte dwerg: Fermi druk van elektrongas

Pauli principe: systeem met N_e elektronen bevat spinparen waarvan impulsen minstens $\Delta p_{\mathrm{minimum}}$ verschillen

Grootste impuls (3D) in minstens $N_e^{\frac{1}{3}} \Delta p_{\mathrm{minimum}}$

Maximale onzekerheid in positie van een elektron is *2R**



Heisenberg: minimale impuls p_x is dan $\Delta p_{\mathrm{minimum\ x}} = \frac{h}{2R}$

We vinden $< K >_{\mathrm{gemiddeld}} = 3 \frac{\left(N_e^{\frac{1}{3}} \Delta p_{\mathrm{minimum\ x}}\right)^2}{2m_e} = N_e^{\frac{2}{3}} \frac{3h^2}{8m_e R^2}$

Dit levert een gasdruk via $PV = Nk_BT$ en $k_BT = \frac{2}{3} < K >_{\mathrm{gemiddeld}}$

$$P_{\mathrm{Fermi}} = \frac{2}{3}\frac{N}{V} < K >_{\mathrm{gemiddeld}} = \frac{h^2 N_e^{\frac{5}{3}}}{8m_e V R^2}$$

Gebruik $P = \frac{5GM^2}{4\pi R^4}$ en $M = \frac{1}{2}N_e\mu \approx m_p N_e$ en $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$R = \frac{3h^2}{40GMm_e m_p} N_e^{\frac{2}{3}}$$

Voor $M = M_\odot$ vinden we *R = 0.9R*$_{\mathrm{Aarde}}$

Met $R \sim V^{\frac{1}{3}}$ en $\rho = m_p N_e / V$ vinden we de Fermi toestandsvergelijking $P_{\mathrm{Fermi}} = \beta \rho^{\frac{5}{3}}$

Relativistisch ontaard elektrongas

Witte dwergen zijn waargenomen

Ultra-relativistisch ontaard elektronengas $E = |\mathbf{p}|c$

Vul alle energieniveaus tot de Fermi-energie

We vinden $P = \dfrac{hcN_e^{\frac{4}{3}}}{3RV}$

Gebruik weer $P = \dfrac{5GM^2}{4\pi R^4}$

We vinden $\dfrac{hcN_e^{\frac{4}{3}}}{4\pi R^4} = \dfrac{5GM^2}{4\pi R^4}$

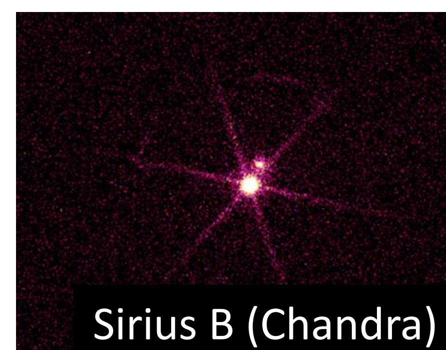
Merk op: de straal van de ster valt eruit!

Een relativistische witte dwerg heeft een unieke massa, de Chandrasekhar massa

$$M_{\mathrm{Ch}} = \left(\frac{hc}{3G}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\frac{m_{\mathrm{Pl}}^3}{m_p^2}\right) \approx 1.4 M_\odot$$

Toestandsvergelijking $P = \beta\rho^{\frac{4}{3}}$

Sirius B (Hubble)



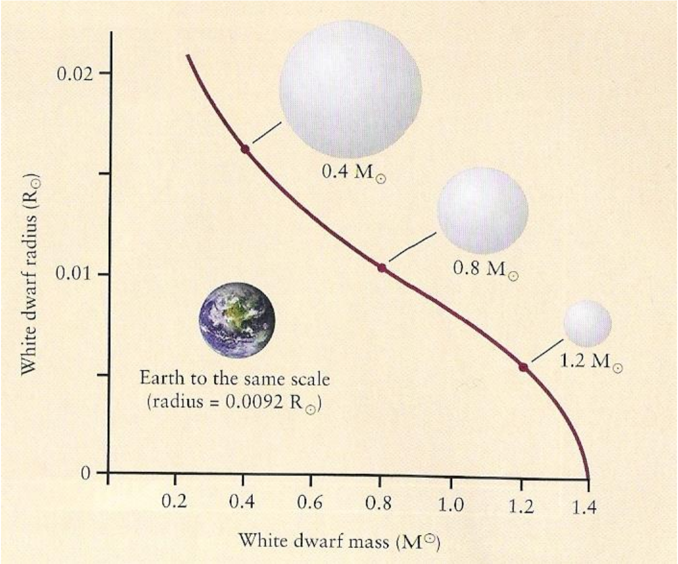
Sirius B (Chandra)

Neutronenster

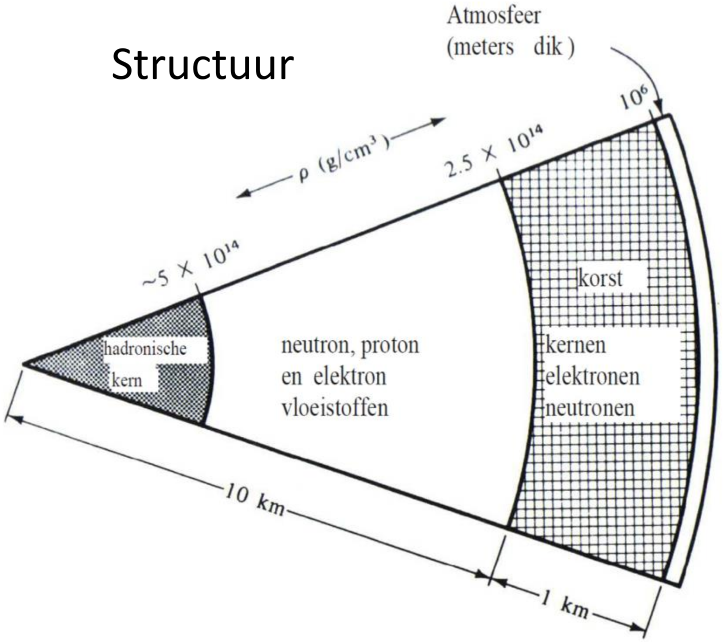
Ster kan eindigen als witte dwerg, neutronenster, zwart gat, of volledig fragmenteren

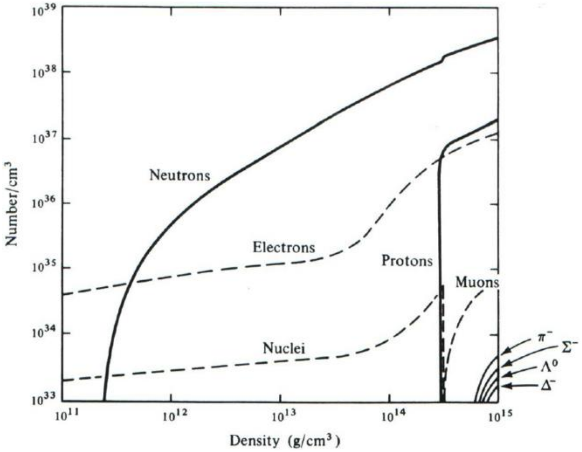
Neutronenster: fermigas van neutronen

"Atoomkern" ter grootte van Amsterdam



Structuur





De Krab-nevel

Chandra: X-rays

Hubble