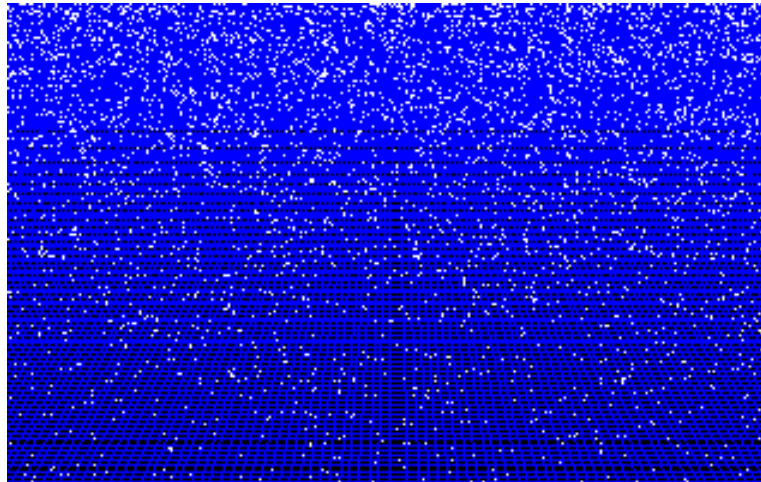


Thermodynamica

rol in de moderne fysica



Jo van den Brand

HOVO: 13 november 2014

Inhoud

- **Kosmologie**
 - Algemene relativiteitstheorie
 - Kosmologie en Big Bang
 - Roodverschuiving
- **Thermodynamica**
 - Fase-overgangen (entropie)
- **Nucleosynthese**
 - Big Bang en synthese in sterren
 - Abondantie van helium-4
- **Standaard zonnemodel**
 - Temperatuur in de zon
- **Kosmische microgolf-achtergrondstraling**
 - Temperatuur en fluctuaties

Energiedichtheid in heelal

Heelal bestaat uit

koude materie: atomen, molekulen, aarde, sterren, donkere materie, *etc.*

straling: fotonen van sterren, fotonen van CMB, neutrino's, *etc.*

kosmologische constante: donkere energie, vacuum energie, quintessence veld, *etc.*

Voor elk van deze soorten energie en materie geldt dat er een verband tussen energiedichtheid en druk bestaat

Toestandsvergelijking $P(t) = n\rho(t)$ volgt uit friedmannvergelijkingen

Energiedichtheid: energie gedeeld door fysisch volume

Fysisch volume bepaald door $a^3(t)$

Koude materie $\rho(t) = \frac{A}{a^3(t)}$ Hoeveelheid materie constant (= A) en wordt niet omgezet naar andere soorten energie

Straling $\rho(t) = \frac{A}{a^4(t)}$ Extra afname t.g.v. kosmologische roodverschuiving
 $E = h\nu = \hbar\omega = (2\pi\hbar c)/\lambda$ evenredig met schaafactor

Kosmologische constante $\rho(t) = \rho_c = \text{const.}$ Neemt niet af tijdens uitdijen of krimpen van heelal

Heelal gedomineerd door koude materie

Koude materie $\rho(t) = \frac{A}{a^3(t)}$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 &= + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= - \frac{4\pi G}{3c^2} (3P(t) + \rho(t)). \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{a}^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{A}{a(t)}, \\ \ddot{a}(t) &= - \frac{4\pi G}{3c^2} (1 + 3n) \frac{A}{a^2(t)}. \end{aligned}$$

Bepaal constante n $\Rightarrow$ differentieer 1e FV $2\ddot{a}(t) = - \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{A}{a^2(t)}$

invullen in 2e FV $-\frac{4\pi G}{3c^2} A = - \frac{4\pi G}{3c^2} (1 + 3n) A$

$\Rightarrow n = 0, P = 0$

Er geldt $a(t)\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} A,$

$a^2(t)\ddot{a}(t) = - \frac{4\pi G}{3c^2} A.$

$\Rightarrow a(t) = Bt^{2/3}$

Hieruit volgt ook direct $\dot{a}(t) > 0$ en $\ddot{a} < 0$

Heelal gedomineerd door straling

Straling $\rho(t) = \frac{A}{a^4(t)}$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 &= + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= - \frac{4\pi G}{3c^2} (3P(t) + \rho(t)). \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = 1/3 \text{ en dus } P(t) = \frac{A}{3} \frac{1}{a^4(t)}$$

Er geldt $\begin{aligned} a^2(t)\dot{a}^2(t) &= + \frac{8\pi G}{3c^2} A, \\ a^3(t)\ddot{a}(t) &= - \frac{8\pi G}{3c^2} A. \end{aligned} \Rightarrow a(t) = B\sqrt{t}$

Hieruit volgt ook direct $\dot{a}(t) > 0$ en $\ddot{a} < 0$

Uitdijing van een stralingsgedomineerd heelal gaat sneller

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{2} B t^{-\frac{1}{2}}$$

Heelal gedomineerd door Λ

Kosmologische constante $\rho(t) = \rho_c = \text{const.}$

Voor normale straling en materie neemt dichtheid af als energie over groter volume wordt uitgesmeerd

Eigenschap van ruimtetijd zelf (driekwart van alle energie is van deze vorm!)

Friedmannvergelijkingen leveren $n = -1$

Druk is negatief!!!

$$P(t) = -\rho(t) = -\rho_c = \text{const.}$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_c, \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_c. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho_c} t}$$

Uitdijing is exponentieel en verloopt steeds sneller

Friedmannvergelijkingen

Friedmann – Lemaitre – Robertson – Walker metriek. Er geldt

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\Sigma^2 \quad d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2, \quad \text{where } d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Einsteinvergelijkingen $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ geven friedmannvergelijkingen



$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p.$$

Zonder kosmologische constante wordt

FV - 1

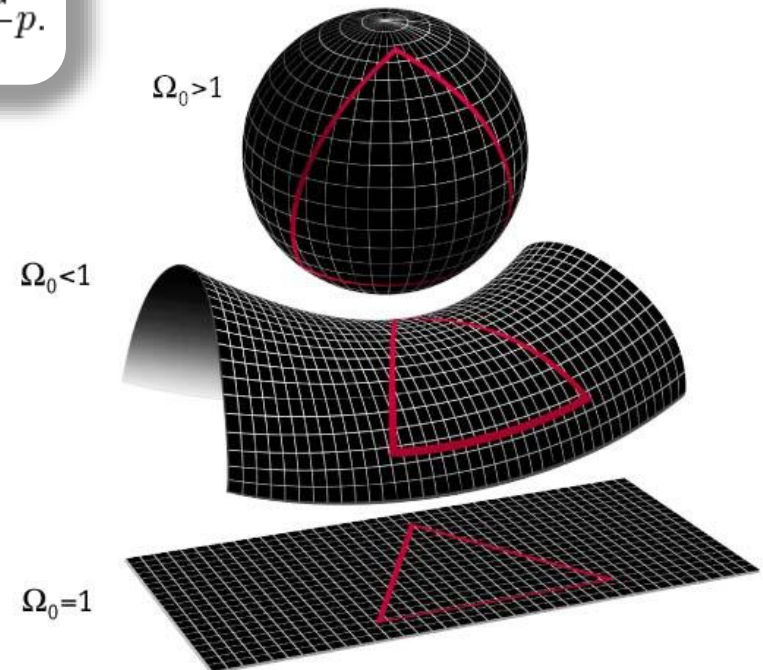
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

Kritische dichtheid: voor gegeven H
de dichtheid waarvoor $k = 0$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

$$10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$$

Dichtheid / kritische dichtheid: Ω



Kritische dichtheid

Beschouw een testdeeltje m en bereken de ontsnappingsnelheid

Behoud van energie volgens Newton $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{d} = 0$

Beschouw een bolvormig volume van het heelal dat expandeert met $v = H_0 d$

Massa binnen dit volume $M = \frac{4}{3}\pi\rho_c d^3$

Het deeltje zal net ontsnapping als ρ de kritische dichtheid is

Daarvoor geldt $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

Hetzelfde resultaat vonden we met de algemene relativiteitstheorie

Invullen van H_0 en G levert $\rho_0 = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$

Met definitie $h = H_0 / (100 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc})$

Friedmannvergelijkingen

Friedmannvergelijking 1 kan herschreven worden

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} &= \frac{8\pi G}{3}\rho \\ \rho_c &= \frac{3H^2}{8\pi G} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{3a^2}{8\pi G}H^2 &= \rho a^2 - \frac{3kc^2}{8\pi G} \\ \rho_c a^2 - \rho a^2 &= -\frac{3kc^2}{8\pi G} \end{aligned} \quad \boxed{(\Omega^{-1} - 1)\rho a^2 = \frac{-3kc^2}{8\pi G}}$$

Rechts staan enkel constanten. Tijdens expansie neemt dichtheid af ($\sim a^3$)

Sinds Planck era is de ρa^2 met factor 10^{60} afgenomen

$(\Omega^{-1} - 1)$ moet met factor 10^{60} zijn toegenomen

Planck en Sloan Digital Sky Survey stellen Ω_0 op 1 binnen 1%

Dan is $|\Omega^{-1} - 1| < 0.01$ en tijdens Planck era kleiner dan 10^{-62}

Vlakheidsprobleem: waarom was de initiële dichtheid van het Heelal zo dicht bij de kritische dichtheid?

Oplossingen: Anthropisch principe of inflatie (ρa^2 neemt snel toe in korte tijd)

Evolutie van het heelal

Friedmannvergelijking $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \rightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$

Herschrijven als $H^2 = H_0^2 (\Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_\Lambda)$

 $H^2 = H_0^2 [\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]$

Er geldt

$$H = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{a(t)}{a_0} \right) = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{1}{1+z} \right) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}$$

 $\frac{dt}{dz} = \frac{-(1+z)^{-1}}{H_0 [\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{\frac{1}{2}}}$

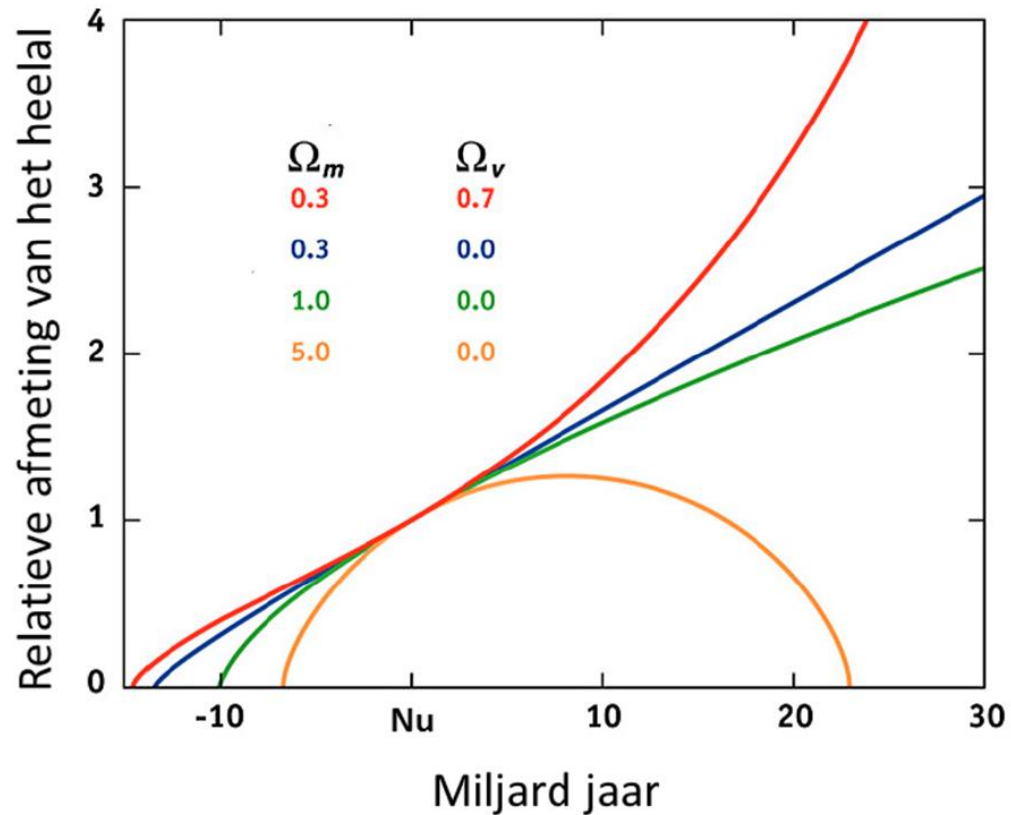
Leeftijd van het heelal

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \int_0^{z_1} \frac{dz}{(1+z) [\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{\frac{1}{2}}}$$

Evolutie van het heelal

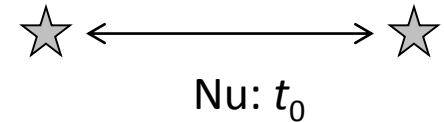
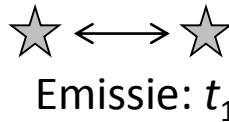
We vinden: $t = t(z)$
We weten: $1 + z = 1/a$ } $a = a(t)$

De figuur toont enkele voorbeelden



Afstanden in FLRW metriek

Meebewegende afstand χ



Er geldt:

$$\chi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

Neem aan dat we de *absolute* helderheid L van een bron kennen (standaardkaars)

In euclidische ruimte geldt voor de *waargenomen* flux $F = \frac{L}{4\pi\chi^2}$

In FLRW ruimte gelden de volgende modificaties:

- Als op tijdstip t_0 het licht de aarde bereikt, is het eigenoppervlak een bol met de supernova als centrum en heeft het de waarde $4\pi d_m^2$. Een telescoop met apertuur A neemt dus een fractie licht waar ter grootte $A/4\pi d_m^2$.
- Vanwege de roodverschuiving is het aantal fotonen dat per seconde aankomt, een factor $1/(1+z)$ kleiner dan het aantal fotonen dat per seconde werd uitgezonden.
- De energie E_0 van elk ontvangen foton is vanwege dezelfde roodverschuiving een factor $1/(1+z)$ lager dan de energie E_1 die het had toen het werd uitgezonden.

We vinden

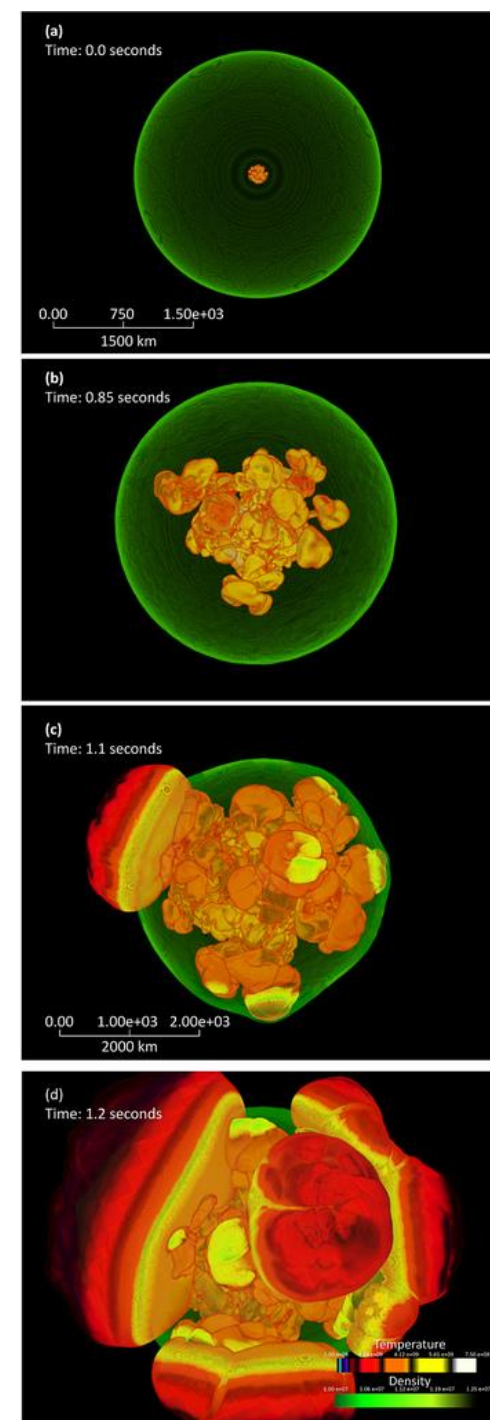
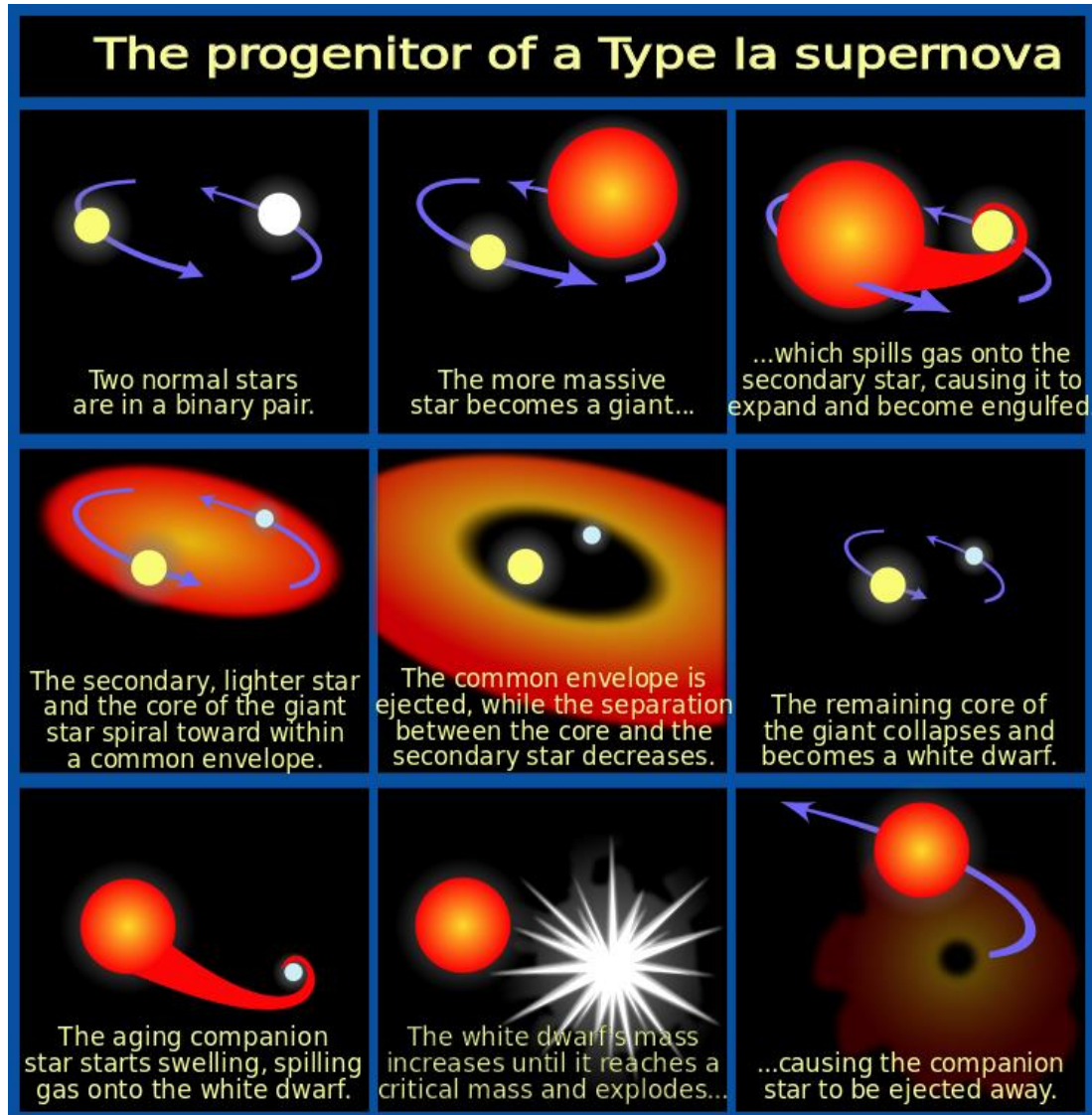
$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2 (1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \rightarrow d_L = d_m(1+z)$$



helderheidsafstand d_L

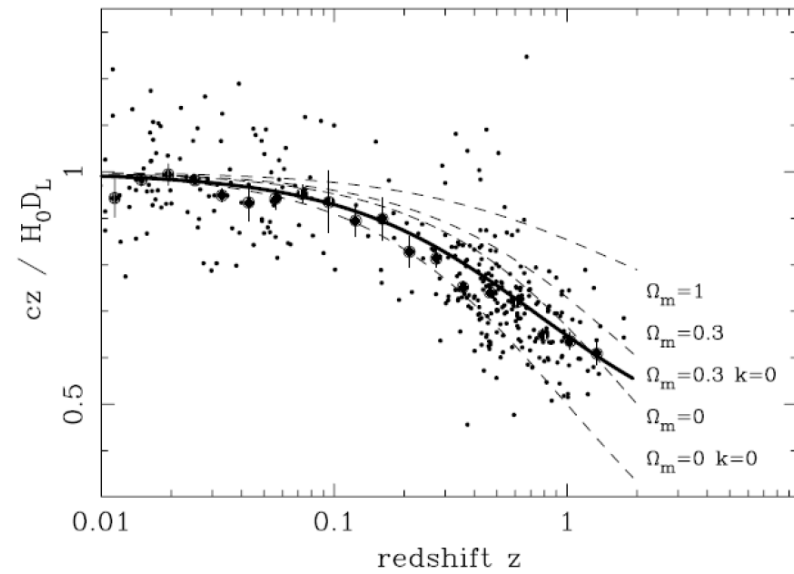
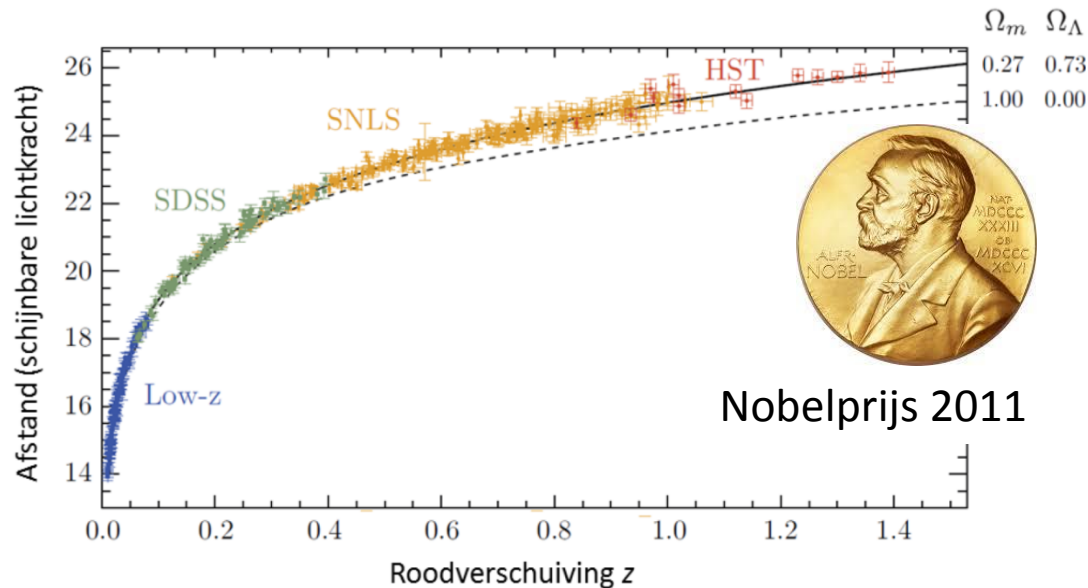
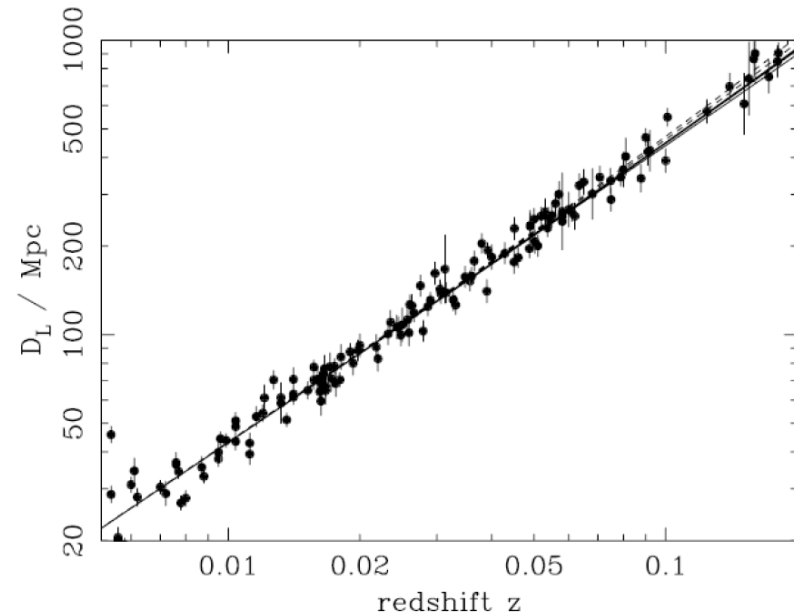
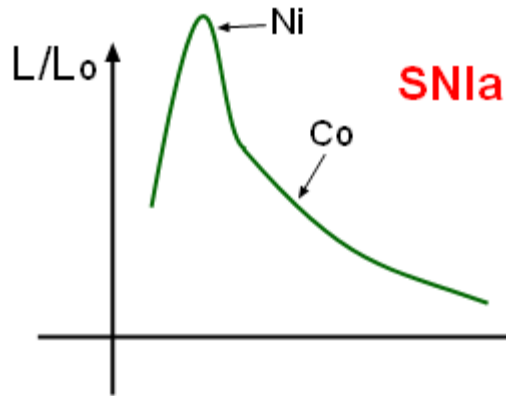
Supernovae Type IA

Supernovae Type IA zijn standaardkaarsen



Supernovae Type IA

Supernovae Type IA zijn standaardkaarsen

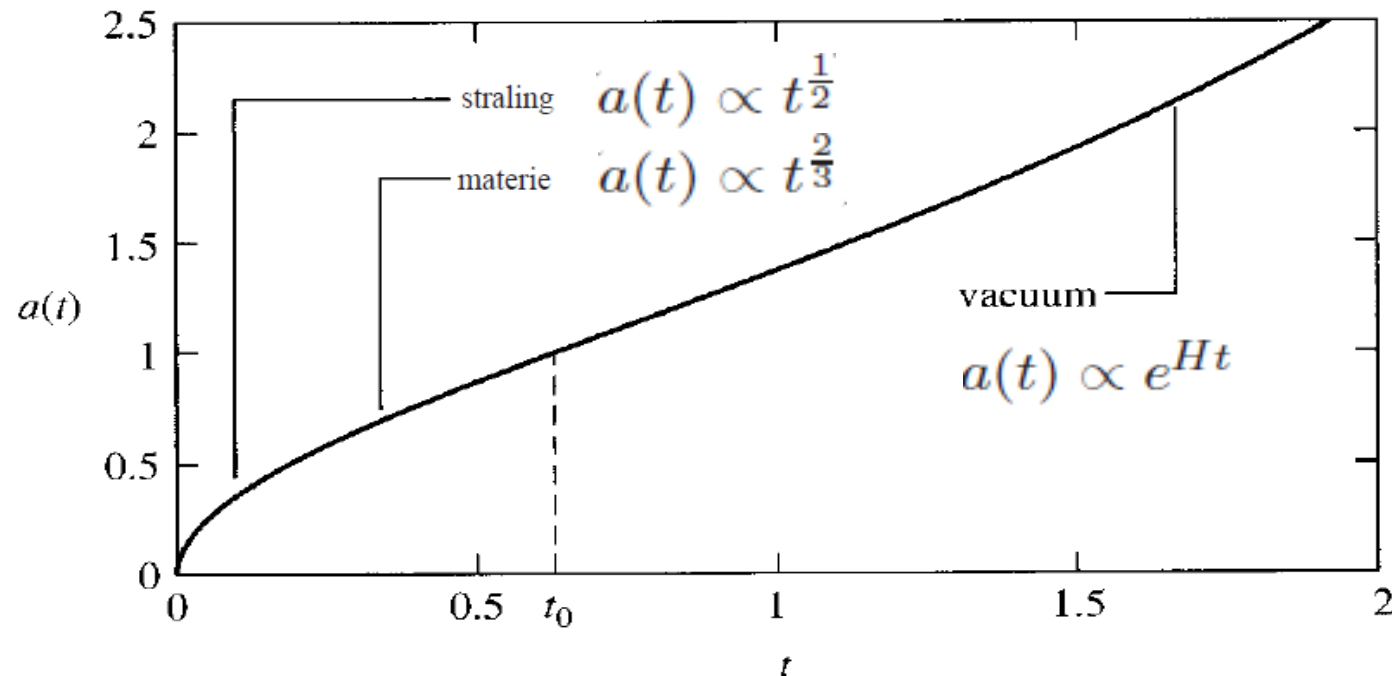


Standaardmodel van de kosmologie

Evolutie heelal voor vlakke FRW model.

Aanname: energie gelijk verdeeld over straling, materie en vacuum

Conclusies Λ CDM model



Continuïteitsvergelijking

Beschouw klein “vloeistofelement”

Massastroom door linkervlak $\partial_t m_x = \rho u_x dy dz$

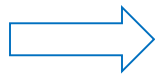
Massastroom door rechtervlak (gebruik Taylor-expansie

$$\partial_t m_{x+dx} = \partial_t m_x + \left. \frac{\partial(\partial_t m_x)}{\partial x} \right|_x dx + \dots = \rho u_x dy dz + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz$$

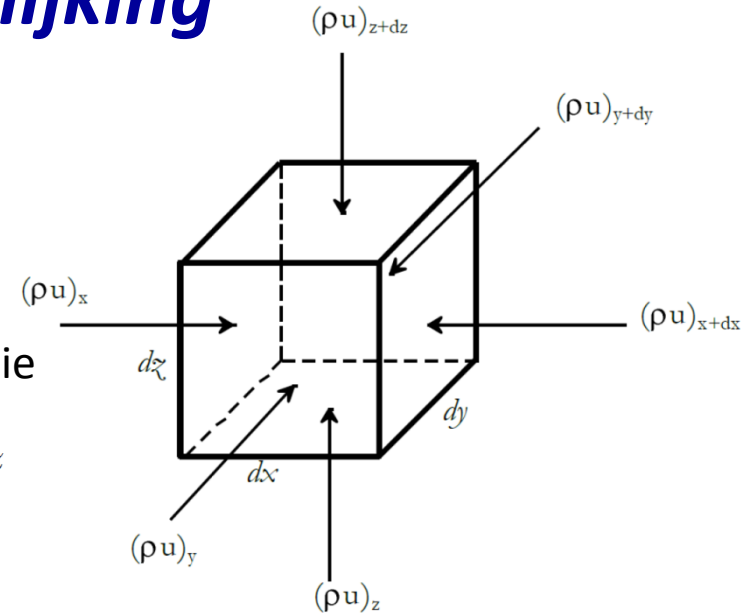
Combineer alle vlakken

$$\partial_t m_{\text{totaal}} = \left(-\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \partial_t m \, dx dy dz$$

Gebruik de divergentie-operator



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{r}) = 0$$



Dit is de *continuïteitsvergelijking*: als de dichtheid in het element verandert, dan stroomt er vloeistof door de wanden van het element

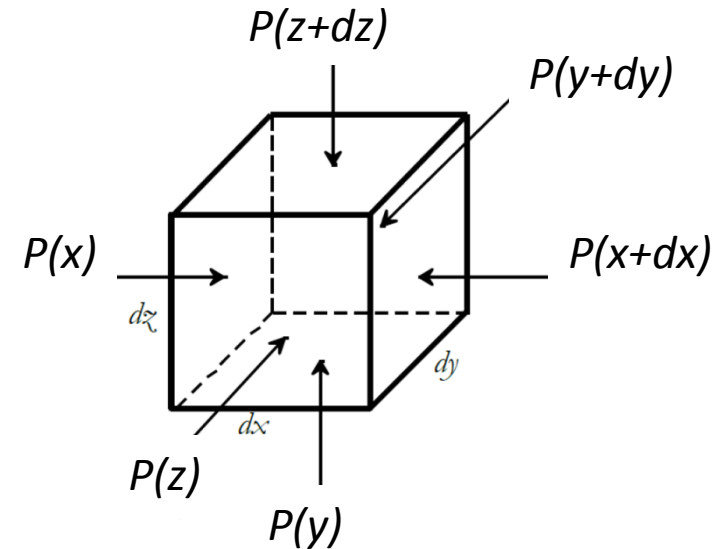
Vergelijking van Euler

Beschouw kracht op een “vloeistofelement”

Kracht op linkervlak $f(x) = P(x)dydz$

Druk op rechtervlak (gebruik Taylor-expansie)

$$P(x + dx) = P(x) + \frac{\partial P}{\partial x}dx + \dots$$



Schrijf druk als $P = P_0 + p$

We vinden $df_x = -\frac{\partial}{\partial x} (P_0 + p) dx dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \rightarrow d\mathbf{f} = -\nabla p dV,$

Tweede wet van Newton $d\mathbf{f} = dm \mathbf{a} = dm \frac{d\mathbf{u}}{dt}$ en $dm = \rho dV \rightarrow \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0$

Kettingregel $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} u_z + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$

Wet van Euler



$$\rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla P$$

Dit geeft de versnelling van een vloeistofelement door krachten ten gevolge van drukverschillen

Een klassiek heelal

Neem aan dat we te maken hebben met een klassiek heelal dat bestaat uit “stof”

Stof heeft uniforme dichtheid $\rho(t)$

Het heelal ondergaat uniforme expansie $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{c}$ (met $\mathbf{c}$ de beginpositie)

Dan geldt $\dot{\mathbf{r}} = H(t)\mathbf{r}$ met Hubble parameter $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$

De continuïteitsvergelijking $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \dot{\mathbf{r}}) = 0$

Hieruit volgt $\dot{\rho} + 3\rho H = 0 \implies a\dot{\rho} + 3\dot{a}\rho = 0$

Integreren levert $\rho a^3 = \text{constant}$

In relatie tussen huidige waarde, vinden we $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$

De vergelijking van Euler $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\right) \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ (met $\mathbf{F}$ de kracht per massa-eenheid)

Met $\dot{\mathbf{r}} = H(t)\mathbf{r} \implies \left(\dot{H} + H^2\right) \mathbf{r} = \mathbf{F}$

Er geldt $\nabla \cdot \mathbf{F} = -4\pi G\rho$

$\left. \begin{array}{l} \left(\dot{H} + H^2\right) \mathbf{r} = \mathbf{F} \\ \nabla \cdot \mathbf{F} = -4\pi G\rho \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\left(\dot{H} + H^2\right) = -4\pi G\rho \\ H = \dot{a}/a \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho \end{array} \right.$

Net als friedmannvergelijkingen

Een klassiek heelal

Voor klassiek heelal dat bestaat uit “stof”

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho$$

Gebruik $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$

We vinden $2\ddot{a} + \frac{A^2}{a^2} = 0$, met $A^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3}$

Vermenigvuldig met $\dot{a}$ en integreer $\Rightarrow \dot{a}^2 + k = \frac{A^2}{a}$
↑
integratieconstante

Beschouw dit als een vergelijking voor de energie van het heelal

$$\dot{a}^2 - \frac{A^2}{a} = -k$$

Kinetische energie ↑ ↑ ↑ Totale energie: $k = -1, 0, \text{ of } 1$ (friedmann)
Potentiele energie

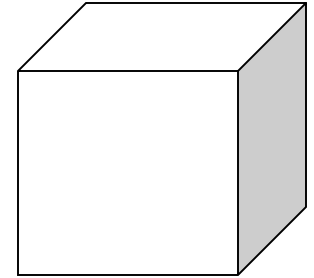
Thermodynamica van het vroege heelal

Druk

Beschouw gas met deeltjesdichtheid $n = N/V$ in denkbeeldige doos

Druk: hoeveelheid impuls die per second een oppervlakte-element dA met normaalvector $\mathbf{n}$ passeert

Beschouw wand met $\mathbf{n}$ in positieve x-richting met oppervlak A



Druk $P = F/A = (dp/dt)/A$

Stel: alle deeltjes bewegen in x-richting met impuls $p = |\mathbf{p}|$

In tijd dt botsen deeltjes in volume $Av(p)dt$ met de wand

Dat zijn $dN = nAv(p)dt$ deeltjes

Impulsoverdracht per botsing $2p$

Totale impulsoverdracht $dp = (2p)dN = (2p) \times nAv(p)dt$

Druk is dan $P = \frac{F}{A} = 2npv(p)$

Voor isotrope verdeling beweegt gemiddeld 1/6-deel in de positieve x-richting

In het algemeen hebben deeltjes een impulsverdeling $n(p)$



$$P = \int_0^{\infty} \frac{1}{3} p v(p) n(p) dp$$

Druk en dichtheid

Druk van een gas

$$P = \int_0^\infty \frac{1}{3} p v(p) n(p) dp$$

Niet-relativistische deeltjes: $v = p/m$

Dit levert
$$P = \int_0^\infty \frac{1}{3} p \left(\frac{p}{m} \right) n(p) dp = \int_0^\infty \frac{1}{3} (2E_{\text{kin}}) n(p) dp = \frac{2}{3} \rho_{\text{kin}}$$

Druk is evenredig met de *kinetische* energiedichtheid $\rho_{\text{kin}} = 3P/2$

Voor ultra-relativistische deeltjes: $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc$

Dit levert
$$P = \int_0^\infty \frac{1}{3} p c n(p) dp = \int_0^\infty \frac{1}{3} E n(p) dp = \frac{\rho}{3}$$

Druk is evenredig met de energiedichtheid $\rho = 3P$

Bijvoorbeeld fotonen

Algemeen geldige relaties: onafhankelijk van de impulsverdeling

Toestandvergelijkingen

Toestandvergelijking $\rho = \alpha \cdot P$

↑
constante

Niet-relativistische materie: ρ wordt gedomineerd door rustmassa $mc^2 \gg P$

⇒ Vloeistof is dan drukloos: $\alpha = 0$

We noemen dit stof ("dust")

Voor straling geldt $P = \rho/3$ en $\alpha = 1/3$

Voor vacuum-energie $P = -\rho$ en dus $\alpha = -1$

Continuïteitsvergelijking $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0$ en $\dot{\rho} + 3(1 + \alpha)H\rho = 0$

Invullen levert $\rho = \text{const} \cdot a^{-3(1+\alpha)}$

We vinden weer voor straling $\rho \propto \frac{1}{a^4}$ en materie $\rho \propto \frac{1}{a^3}$

Tijdsevolutie schaalfactor

Friedmannvergelijkingen leveren $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$

Ansatz $a \propto t^\beta$

We vinden $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}$

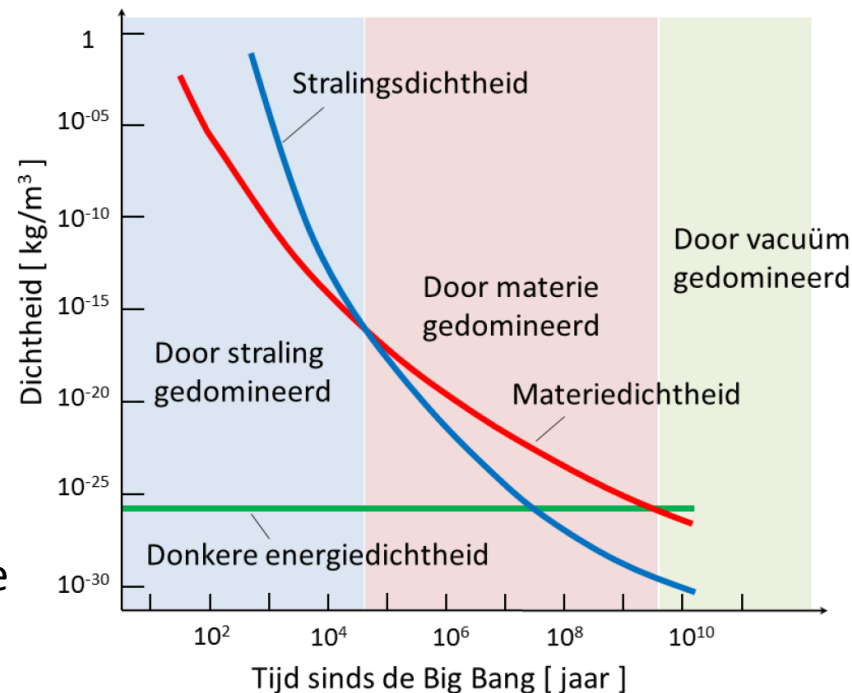
Voor een door straling gedomineerd heelal vinden we $a(t) \propto \sqrt{t}$

Voor materie gedomineerd $a(t) \propto t^{2/3}$

In beide gevallen $\rho(t) \propto t^{-2}$

Kosmologische constante levert $a(t) \propto e^{Ht}$

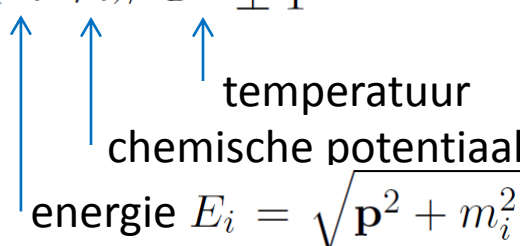
Het is niet mogelijk een analytische oplossing te geven voor een willekeurig mengsel van materie straling en vacuumenergie



Intermezzo: evenwichtsthermodynamica

Beschouw ijl mengsel van deeltjes van soort i

Bezettingsgraad van toestanden $f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/k_B T} \pm 1}$



 energie $E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}$

 chemische potentiaal

 temperatuur

Bose-Einstein statistiek min-teken, Fermi-Dirac plus-teken

Quantumtoestanden: beschouw deeltjes in een “doos”

Dit levert $\mathbf{p} = \frac{h}{L} (n_1 \hat{\mathbf{x}} + n_2 \hat{\mathbf{y}} + n_3 \hat{\mathbf{z}})$, $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

Dichtheid van toestanden ($\# / \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$) is $g(p) dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} dp$



 statistisch gewicht

Deeltjesdichtheid tussen p en $p + dp$ is $n(p) dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/k_B T} \pm 1} dp$

Totale deeltjesdichtheid $n = \int_0^\infty n(p) dp$

Intermezzo: gas bij relatief lage T

Beschouw gas met $mc^2 \gg E - \mu \gg kT$

$$\longrightarrow v(p) \approx \frac{p}{m}, \quad E = mc^2 + E_{\text{kin}} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Dan geldt $n(p)dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/kT} \pm 1} dp$

$$\longrightarrow n(p)dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} e^{-\left(mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \mu\right)/kT} dp = A p^2 e^{-p^2/2mkT} dp$$

$$A = g_s \frac{4\pi}{h^3} \exp[-(mc^2 - \mu)/kT]$$

Deeltjesdichtheid is dan

$$n = \int_0^\infty n(p)dp = \int_0^\infty A p^2 e^{-p^2/2mkT} dp = A (2mkT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$$

$\uparrow x^2 = p^2/2mkT$

We vinden $n = A (2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = g_s \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(mc^2 - \mu)/kT} \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}_{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}$

Evenzo vinden we voor de druk

$$P = \frac{2}{3} \int_0^\infty A p^2 \frac{p^2}{2m} e^{-p^2/2mkT} dp = \frac{A}{3m} \int_0^\infty p^4 e^{-p^2/2mkT} dp = \frac{A}{3m} (2mkT)^{5/2} \underbrace{\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx}_{3\sqrt{\pi}/8}$$

Intermezzo: gas bij relatief lage T

Deeltjesdichtheid $n = A (2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = g_s \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(mc^2 - \mu)/kT}$

Druk $P = \frac{A\sqrt{\pi}}{8m} (2mkT)^{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow P/n = kT \rightarrow \boxed{P = nkT}$

Dit is de toestandsvergelijking voor een ideaal gas

Interpretatie: beschouw $n = g_s \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\underbrace{(mc^2 - \mu)/kT}_{E - \mu \approx mc^2 \gg kT}}$

$\Rightarrow n \ll \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \equiv n_Q$

↑
quantumconcentratie

Deeltje met energie $p^2/2m \approx kT \Rightarrow p \approx (2mkT)^{1/2}$

De Broglie golflengte $\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{\sqrt{2mkT}} \Rightarrow n \ll \left(\frac{\pi}{\lambda^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi^{3/2}}{\lambda^3}$

Als de gemiddelde afstand $d \sim n^{-1/3} \gg \lambda$ groter is dan de De Broglie golflengte, gedragen ze zich als klassieke puntdeeltjes

Druk voor een fermion/boson gas

Deeltjesdichtheid $n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int f_i(\mathbf{p}) d^3p$

Energiedichtheid $\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int E_i(\mathbf{p}) f_i(\mathbf{p}) d^3p$

Druk $P_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E_i(\mathbf{p})} f_i(\mathbf{p}) d^3p$

Ultra-relativistische benadering

$$\rho_{\text{Rel}} = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E^3}{e^{E/T} \pm 1} dE = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{7}{8} \left(\frac{\pi^2}{30} g_i T^4 \right), & \text{Fermi Dirac} \end{cases}$$

$$n_{\text{Rel}} = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{3}{4} \left(\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3 \right), & \text{Fermi Dirac} \end{cases}$$

Gemiddelde energie ρ/n per relativistisch deeltje $\langle E \rangle_{\text{BE}} \approx 2.70 \cdot T$
 $\langle E \rangle_{\text{FD}} \approx 3.15 \cdot T$

Fotogas $m_\gamma = 0$ en $g_\gamma = 2$ heeft energiedichtheid $\rho_\gamma = \sigma T^4$

$$\uparrow \sigma = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.670400 \times 10^{-8} \text{ Js}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Vrijheidsgraden

Energiedichtheid en druk

$$\rho_{\text{Rel}} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}(T) T^4$$

$$P_{\text{Rel}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{Rel}}(T) = \frac{\pi^2}{90} g_{\text{eff}}(T) T^4$$

↑ telt het aantal vrijheidsgraden

Standaard model van de deeltjesfysica

Modelafhankelijk boven 1 TeV

Neutrino's hebben andere T dan fotonen

Definieer

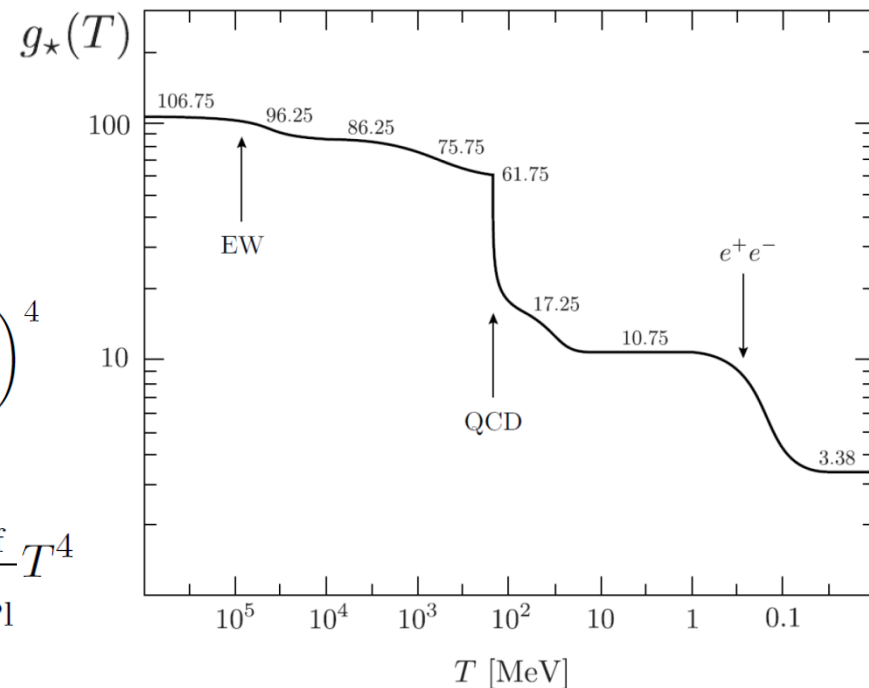
$$g_{\text{eff}} = \sum_{i=\text{bosonen}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermionen}} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^4$$

Friedmannvergelijking

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{Rel}} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}} T^4 = 2.76 \frac{g_{\text{eff}}}{m_{\text{Pl}}^2} T^4$$

$$\Rightarrow H = 1.66 \sqrt{g_{\text{eff}}} \frac{T^2}{m_{\text{Pl}}}$$

Straling $a(t) = a(0) \sqrt{t} \Rightarrow H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \Rightarrow$



$$t = 0.30 \frac{m_{\text{Pl}}}{\sqrt{g_{\text{eff}}} T^2} \approx \left(\frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 \text{ sec.}$$

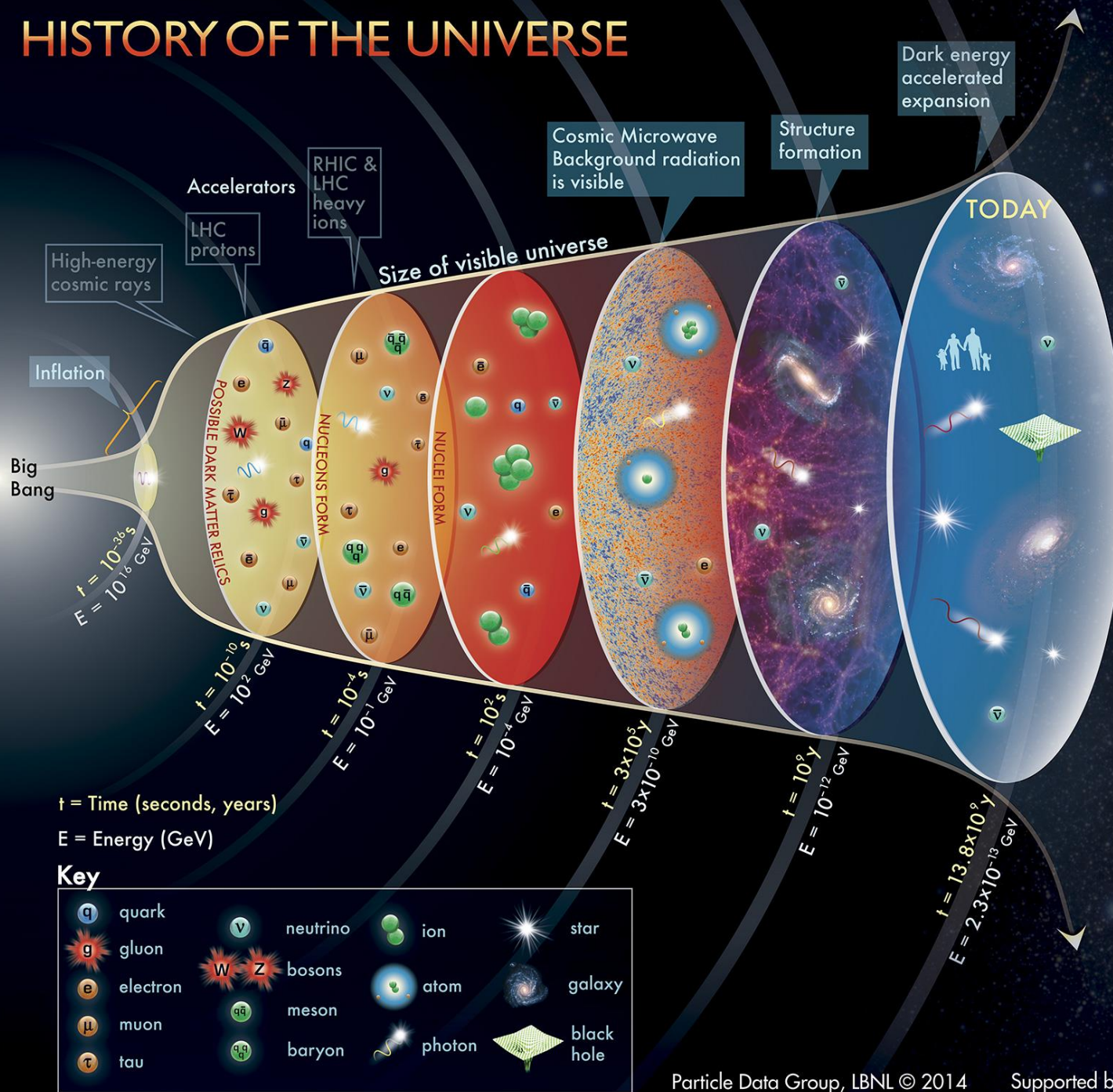
Historie van het heelal

Fase-overgangen treden op bij bepaalde temperaturen

Table 1: *Belangrijke gebeurtenissen in de thermische geschiedenis van het heelal.*

Gebeurtenis	tijd t	roodverschuiving z	temperatuur T
Elektrozwakke transitie	20 ps	10^{15}	100 GeV
QCD phase transitie	20 μ s	10^{12}	150 MeV
Neutrino's ontkoppelen	1 s	6×10^9	1 MeV
Elektron-positron annihilatie	6 s	2×10^9	500 keV
Big Bang nucleosynthese	3 min	4×10^8	100 keV
Straling - materie transitie	60 kjaar	3400	0.75 eV
Recombinatie	260 - 380 kjaar	1100 - 1400	0.26 - 0.33 eV
CMB ontkoppeling	380 kjaar	1000 - 1200	0.23 - 0.28 eV
Reionisatie	100 - 400 Mjaar	11 - 30	2.6 - 7.0 meV
Donkere energie - materie transitie	9 Gjaar	0.4	0.33 meV
Heden	13.7 Gjaar	0	0.24 meV

HISTORY OF THE UNIVERSE



Elektrozwakke overgang

Het Higgs-veld

Bij hoge temperaturen zijn deeltjes massaloos

Na 10^{-23} s vervallen top-quark, W , Z en H bosonen

Voor tijden met $kT \ll mc^2$ kunnen deze deeltjes niet meer gecreëerd worden: de EZ transitie

We kunnen uitrekenen wanneer dit gebeurt
(gebruik $T = m_{\text{Higgs}}/6$)

$$t = 0.30 \frac{m_{\text{Pl}}}{\sqrt{g_{\text{eff}}} T^2} \approx \left(\frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 \text{ sec.}$$

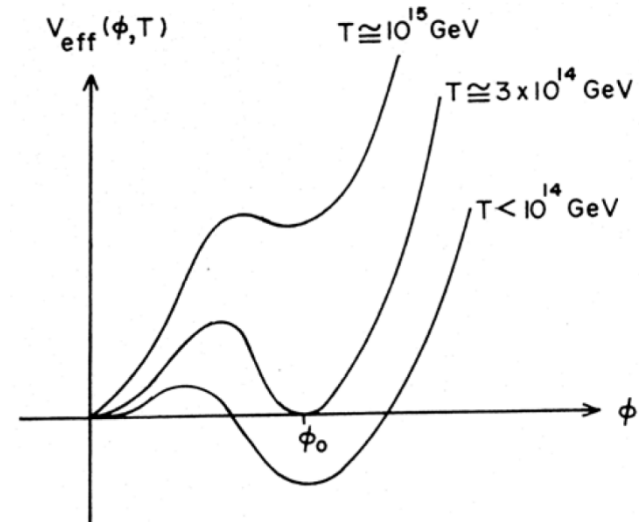
We vinden 20 ps na de Big Bang

We vinden de roodverschuiving uit $T_{\text{gebeurtenis}} = T_0(1 + z_{\text{gebeurtenis}})$

→ $z = 10^{15}$

↑ huidige temperatuur is 2.7 K

We kunnen ook uitrekenen hoe groot de schaalfactor toen was, want $1 + z = 1/a$



QCD fase-overgang

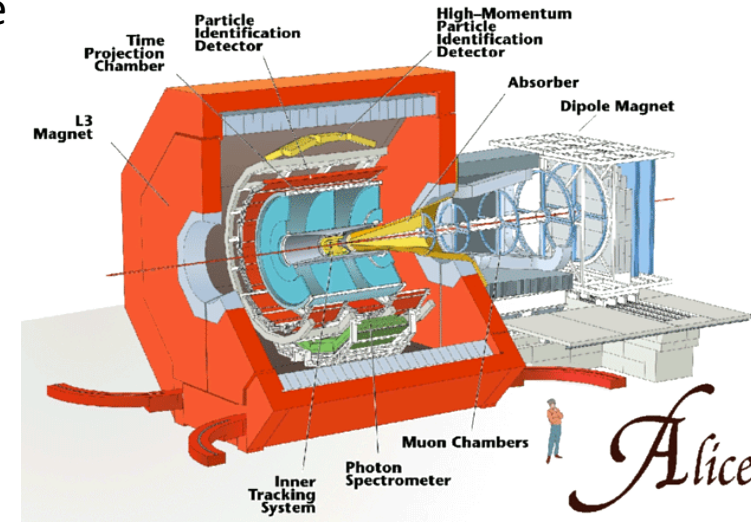
Bij 150 MeV ondergaat materie de QCD fase-transitie

Vrije quarks raken gebonden in hadronen

Aantal vrijheidsgraden verandert

$$g_{\text{eff}}^* = 2 + 3 + \frac{7}{8} \times (4 + 4 + 6) = 17.25$$

↑ ↑
fotonen pionen



Treedt op 20 us na de Big Bang, bij $z = 10^{12}$

ALICE experiment bij LHC: ρ en P (lattice QCD)

