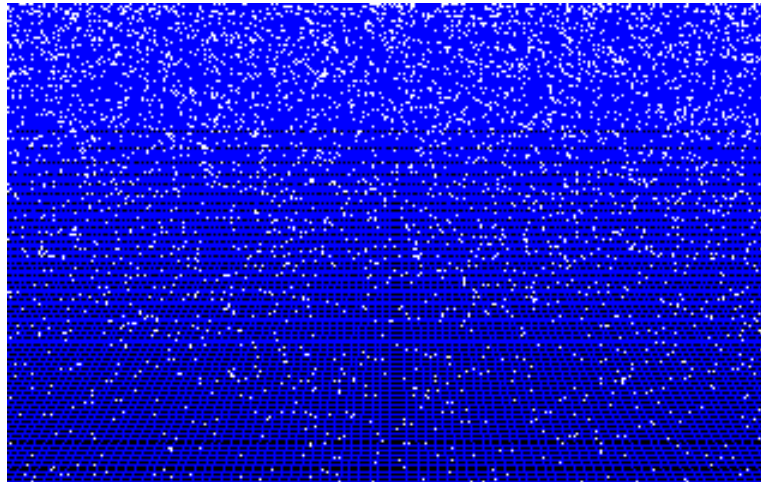


Thermodynamica

rol in de moderne fysica



Jo van den Brand

HOVO: 6 november 2014

Inhoud

- **Kosmologie**
 - Algemene relativiteitstheorie
 - Kosmologie en Big Bang
 - Roodverschuiving
- **Thermodynamica**
 - Fase-overgangen (entropie)
- **Nucleosynthese**
 - Big Bang en synthese in sterren
 - Abondantie van helium-4
- **Standaard zonnemodel**
 - Temperatuur in de zon
- **Kosmische microgolf-achtergrondstraling**
 - Temperatuur en fluctuaties

$$q^u \partial_u q^v - V(q)$$

$$\delta \lambda_B$$

$$\psi_{\nu j}$$

$$g_{\mu} \psi_{\mu}^i$$

$$B + h.c.$$

$$-2g^A P_B S_C + k_{\mu\nu} f^{\mu\nu A}$$

$$+ P_A f^A_{\delta} g^{\delta\gamma} = M_{\alpha\delta} + k_{\Lambda\gamma} f^{\Lambda}_{\delta}$$

$$\delta A_{\mu}^A = f^A_{\mu i} \bar{\epsilon}^i \gamma_{\mu} \lambda_A$$

$$L(q + \frac{1}{4} \omega_{\mu}^{ab} \gamma_{ab}) \epsilon^i - (\partial_{\mu} q^u) \omega_{u j}^i \epsilon^j$$

$$\delta \lambda^A = \delta q^u \epsilon_i P_u^{Ai} + N^A_i \epsilon^i$$

$$\delta q^u = P^u_{A} \bar{\epsilon}^i \lambda^A + P^{u i A} \bar{\epsilon}_i \lambda_A$$

$$N^{(R)}_{(j)i} = \epsilon_{ij} k^{\alpha}_{\Lambda} L^{\Lambda} + P_{\Lambda(j)} \bar{f}^{\Lambda}_{\beta} g^{\alpha\beta}$$

$$S^y = P^y_{\Lambda} L^{\Lambda}$$

$$Y^{A(\alpha)}_{(j)i} = \epsilon_{ji} f^{\Lambda\alpha}$$

$$M_{AB} = M^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\nu} g_{\delta\gamma} k^{\delta}_{\Lambda} f^{\Lambda}_{\beta} + P^{\mu}_{\Lambda} P^{\nu}_{\alpha} f^{\Lambda}_{\beta}$$

$$P^{\beta\delta}_{\alpha}$$

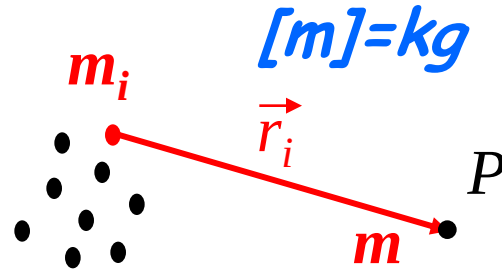
- **Algemene relativiteitstheorie**
 - Vak op zich
 - We hebben enkele resultaten nodig
 - Friedmannvergelijkingen
 - Geodeten
- **Appendix D**
 - Beknopte samenvatting
- **Hoofdstuk 1**
 - Toepassing van ART in kosmologie

Intermezzo: algemene relativiteitstheorie

Gravitatie volgens Newton

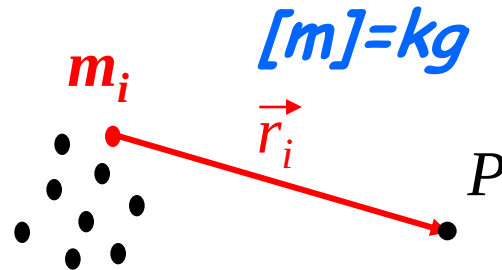
$$G = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = 6.67428 \times 10^{-11} \text{ N (m/kg)}^2.$$

Gravitatiewet:



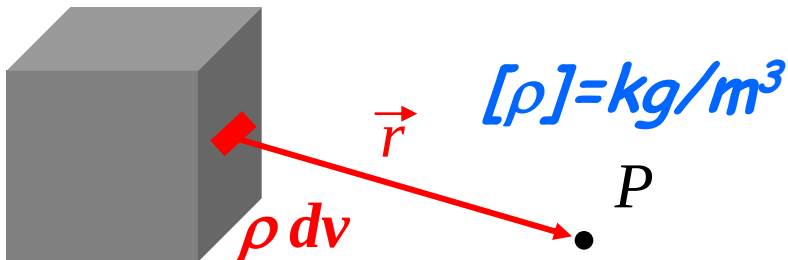
$$\vec{F} = m\vec{g}_P \equiv -G \sum_{i=1}^N \frac{mm_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Diskreet:



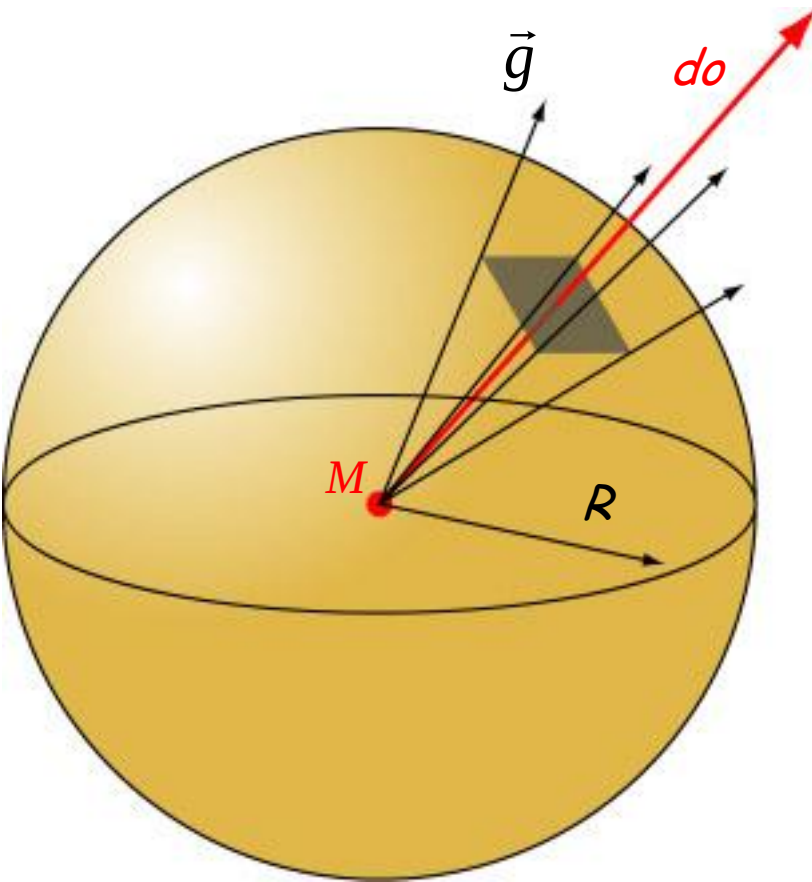
$$\vec{g}_P \equiv -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Continu:



$$\vec{g}_P \equiv -G \int_{\text{volume}} dv \frac{\rho}{r^2} \hat{r}$$

Gravitationele flux



Massa M in het midden van de bol

Flux F_g door het oppervlak van de bol:

$$\begin{aligned} F_g &\equiv \oint_{\text{sphere}} \vec{g} \cdot d\vec{O} = \oint_{\text{sphere}} \frac{-GM}{R^2} dO \quad (\vec{g} // d\vec{O}) \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{-GM}{R^2} R^2 \sin \theta d\varphi d\theta \quad (r \theta \varphi) \\ &= -GM \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = -GM 4\pi = -4\pi GM \end{aligned}$$

In essentie:

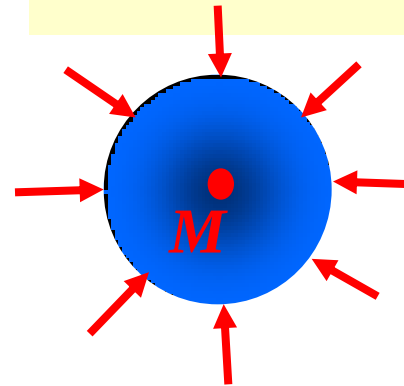
- $g \propto 1/r^2$
- oppervlakte $\propto r^2$

$F_g = -4\pi GM$ geldig voor elk gesloten oppervlak; niet enkel voor een bol met M in het midden!

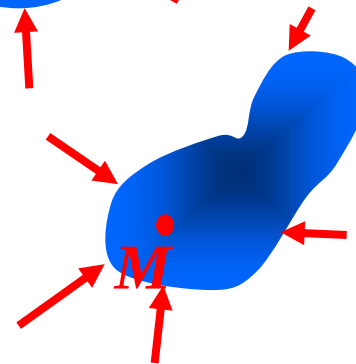
Wet van Gauss

$$F_g \equiv \oint_{\text{oppervlak } O} \vec{g} \cdot d\hat{o} = -4\pi G \sum_{\text{in } V} M_i$$

Massa M omsloten door een boloppervlak

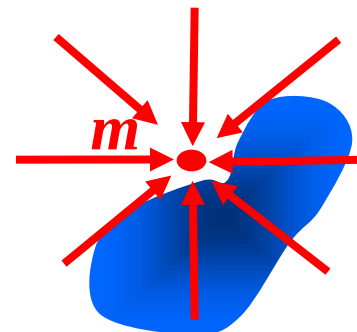


Massa M omsloten door willekeurig oppervlak



$$F_g = -4\pi GM$$

Massa m buiten een willekeurig oppervlak

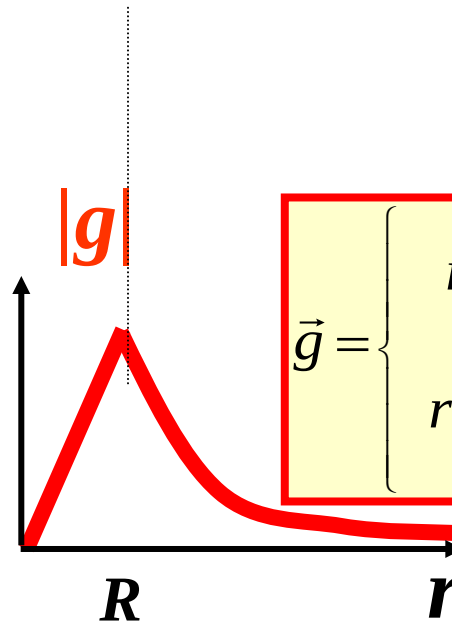
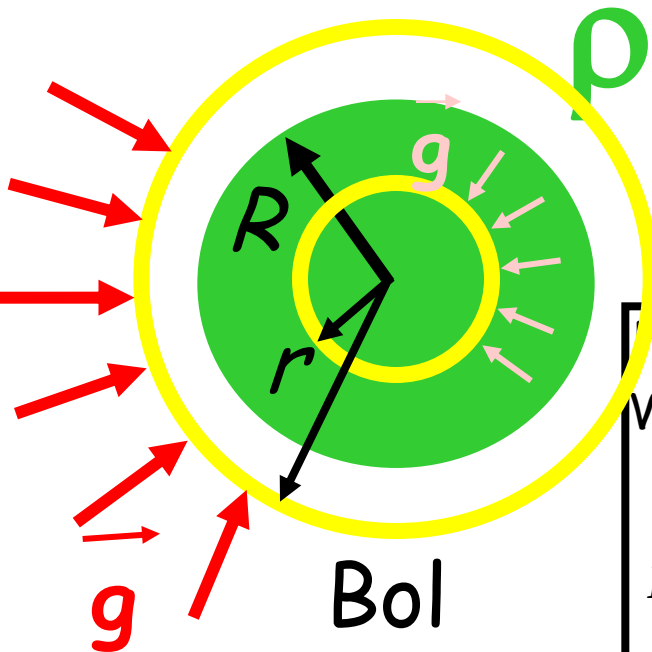


$$F_g = 0$$

Wet van Gauss: een voorbeeld

Bolvolume:

- massaverdeling: ρ kg/m³
- symmetrie: $g \perp$ bol, $g(r)$
- "Gauss box": bolletje



$$\vec{g} = \begin{cases} r \leq R: \vec{g} = -\frac{4\pi G \rho \vec{r}}{3} \\ r \geq R: \vec{g} = -\frac{4\pi G \rho R^3 \hat{r}}{3r^2} \end{cases}$$

Flux: $F_g = 4\pi r^2 g$

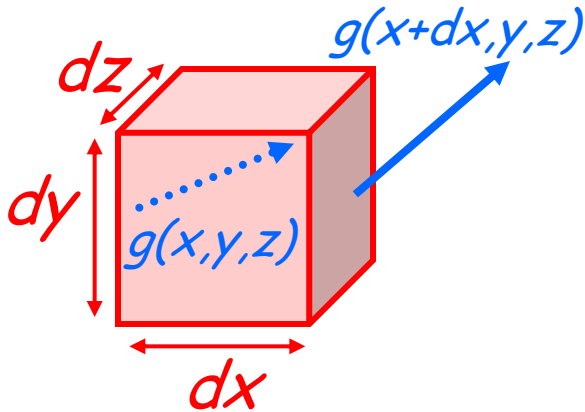
Wet van Gauss:

$$F_g = 4\pi G \sum_{\text{omsloten}} M \Rightarrow \begin{cases} r < R: 4\pi r^2 g = -4\pi G \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Leftrightarrow g = -\frac{4\pi G \rho r}{3} \\ r > R: 4\pi r^2 g = -4\pi G \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Leftrightarrow g = -\frac{4\pi G \rho R^3}{3r^2} \end{cases}$$

Divergentie

Beschouw lokaal de uitdrukking (Gauss):

$$\oint_{\text{oppervlak}} \vec{g} \cdot d\vec{o} = -4\pi G \int_{\text{volume}} \rho dv$$



Compactere notatie via "divergentie":

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} \equiv \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\text{oppervlakje}} \vec{g} \cdot d\vec{o} &= -dxdy \left(g_z(x, y, z+dz) - g_z(x, y, z) \right) + \\ &\quad -dzdx \left(g_y(x, y+dy, z) - g_y(x, y, z) \right) + \\ &\quad -dydz \left(g_x(x+dx, y, z) - g_x(x, y, z) \right) \\ &= -dxdydz \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

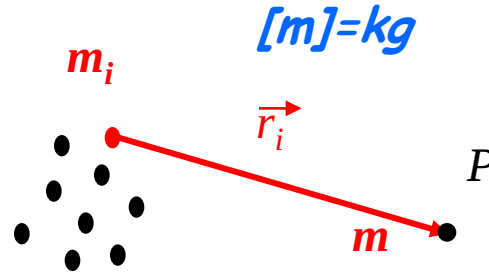
$$4\pi G \int_{\text{volumetje}} \rho dv = 4\pi G dxdydz \rho(x, y, z)$$

Dus:

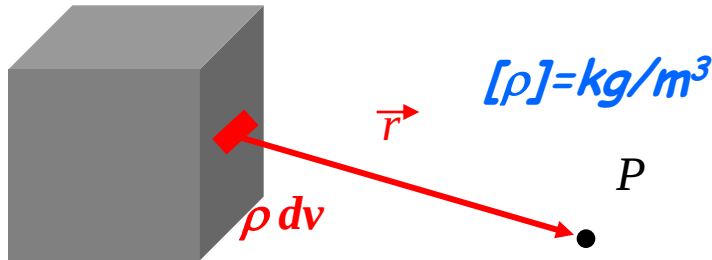
$$\oint_{\text{oppervlakje}} \vec{g} \cdot d\vec{o} = -4\pi G \int_{\text{volumetje}} \rho(\vec{r}) dv \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r})$$

Gravitatiepotentiaal – Poissonvergelijking

Gravitatiekracht:



$$\vec{F} = m\vec{g}_P \equiv -G \sum_{i=1}^N \frac{mm_i}{r_i^2} \hat{r}_i = -m\nabla\Phi(\vec{r})$$



$$\vec{g}_P \equiv -G \int_{\text{volume}} dv \frac{\rho}{r^2} \hat{r} = -\nabla\Phi(\vec{r})$$

$$\vec{g}(\vec{r}) \equiv -\nabla\Phi(\vec{r})$$

$$\int_{\text{volume}} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} dv = \oint_{\text{oppervlak}} \vec{g} \cdot d\vec{o} = -4\pi G \int_{\text{volume}} \rho dv \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G \rho$$

$$-\nabla \cdot \vec{g}(\vec{r}) = \nabla \cdot \nabla\Phi(\vec{r}) = \nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(\vec{r})$$

Algemene relativiteitstheorie

- Newtons gravitatie

$$\nabla^2\Phi(\vec{r})=4\pi G\rho(\vec{r})$$

- Einsteins gravitatie

Ruimtetime is een gekromd pseudo-Riemannse variëteit met een metriek met signatuur $(-,+,+,+)$

Het verband tussen materie en kromming van ruimtetime wordt gegeven door de Einsteinvergelijkingen

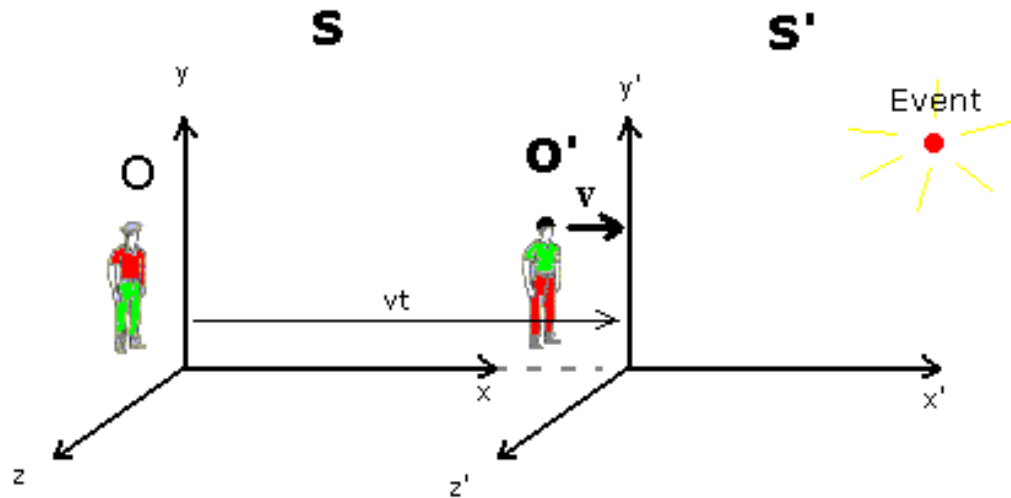
$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

Eenheden: $c = 1$ en soms $G = 1$

Speciale relativiteitstheorie

Transformation of Coordinates

Transformaties laten ds^2 invariant



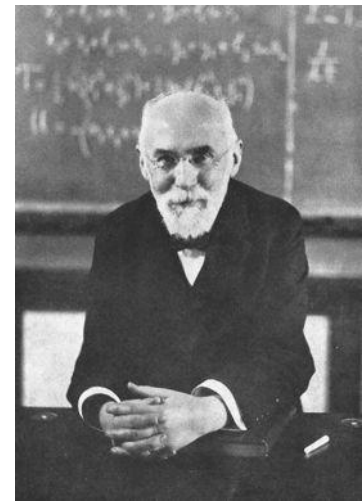
Lorentz 1902

Waarnemers in S en S' bewegen met snelheid v t.o.v. elkaar. Systemen vallen samen op $t = t' = 0$.

Waarnemer in S kent (x, y, z, t) toe aan het event.

Waarnemer in S' kent (x', y', z', t') toe aan hetzelfde event.

Wat is het verband tussen de ruimtetijd coördinaten voor dit zelfde event?



Lorentztransformaties

$$\begin{aligned}\text{i.} \quad & x' = \gamma(x - vt) \\ \text{ii.} \quad & y' = y \\ \text{iii.} \quad & z' = z \\ \text{iv.} \quad & t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Lorentztransformatie

$$\begin{aligned}\text{i'}. \quad & x = \gamma(x' + vt') \\ \text{ii'}. \quad & y = y' \\ \text{iii'}. \quad & z = z' \\ \text{iv'}. \quad & t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)\end{aligned}$$

Inverse transformatie
(snelheid v verandert van teken)

Viervectoren

Positie-tijd viervector x^μ , met $\mu = 0, 1, 2, 3$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Lorentztransformaties

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$



$$x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1)$$

$$x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0)$$

$$x^{2'} = x^2$$

$$x^{3'} = x^3$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c}$$

Viervectoren

Lorentztransformaties

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\x^{1'} &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\x^{2'} &= x^2 \\x^{3'} &= x^3\end{aligned}$$

In matrixvorm

$$\begin{aligned}x^{0'} &= \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 + \Lambda_2^0 x^2 + \Lambda_3^0 x^3 \\x^{1'} &= \Lambda_0^1 x^0 + \Lambda_1^1 x^1 + \Lambda_2^1 x^2 + \Lambda_3^1 x^3 \\x^{2'} &= \Lambda_0^2 x^0 + \Lambda_1^2 x^1 + \Lambda_2^2 x^2 + \Lambda_3^2 x^3 \\x^{3'} &= \Lambda_0^3 x^0 + \Lambda_1^3 x^1 + \Lambda_2^3 x^2 + \Lambda_3^3 x^3\end{aligned}$$



$$x^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$



$$x^{\mu'} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu}$$

algemeen geldig

met

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lorentzinvariantie

Ruimtetime coordinaten zijn
systeem afhankelijk

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

Invariantie voor

$$I \equiv (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2$$

Net als r^2 voor rotaties in R3

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Analoog zoeken we een uitdrukking als

$$\sum_{\mu=0}^3 x^{\mu} x^{\mu}$$

Hiervoor schrijven we de invariant I
als een dubbelsom

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$$

Met metrische tensor

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Co- en contravariante vectoren

Contravariante viervector

$$x^\mu \text{ (index up)}$$

Covariante viervector

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$$

Invariant

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad \Rightarrow \quad I = x_\mu x^\mu$$

Dit is de uitdrukking die we zochten.

De metriek is nu ingebouwd in de notatie!

Deze notatie wordt ook gebruikt voor niet-cartesische systemen en gekromde ruimten (Algemene Relativiteitstheorie)

Viervectoren

Viervector a^μ (contravariant)
transformeert als x^μ

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

$$a^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu} a^\nu$$

We associeren hiermee een
covariante viervector

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

Ruimte componenten
krijgen een minteken

Ook geldt

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$$

Invariant

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$$

Scalar product

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu$$



$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Er geldt

$$a^2 \equiv a \cdot a = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2$$

If $a^2 > 0$, a^μ is called *timelike*
If $a^2 < 0$, a^μ is called *spacelike*
If $a^2 = 0$, a^μ is called *lightlike*

Snelheid

Snelheid van een deeltje t.o.v. het LAB: afstand gedeeld door tijd
(beide gemeten in het LAB)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

Proper snelheid: afstand in LAB gedeeld door eigentijd (gemeten met klok van het deeltje)

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$$

vierversnelheid

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Een hybride grootheid. Er geldt

$$\boldsymbol{\eta} = \gamma \mathbf{v}$$

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{(1/\gamma)dt} = \gamma c$$



$$\eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$$

Er geldt

$$\eta_\mu \eta^\mu = \gamma^2(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2$$

Impuls en energie

Klassieke impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Indien behouden in S dan niet in S'

Definieer relativistische impuls als

$$p^\mu = m\eta^\mu$$

Ruimtelijke componenten

$$\mathbf{p} = m\boldsymbol{\eta} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Tijdachtige component

$$p^0 = \gamma mc$$

Definieer relatv. energie

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \left. \vphantom{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \right\} p^0 = \frac{E}{c}$$

Energie-impuls viervector

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right)$$



$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

Energie

Taylor expansie levert

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Rustenergie van deeltje

Klassieke kinetische energie

Merk op dat enkel veranderingen in energie relevant zijn in de klassieke mechanica!

Relativistische kinetische energie

$$T \equiv mc^2(\gamma - 1) = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Massaloze deeltjes (snelheid altijd c)

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$



$$E = |\mathbf{p}|c$$

$$E = h\nu$$

Traagheid van gasdruk

- SRT: als gasdruk toeneemt, dan is het moeilijker om een gas te versnellen (de inertia neemt toe)
- Oefen kracht F uit, versnel tot snelheid $v \ll c$

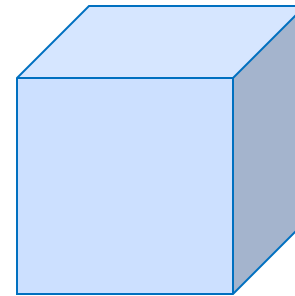
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho Vv^2$$

- SRT: Lorentzcontractie maakt de doos kleiner

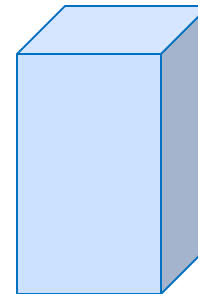
$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = -P\Delta V$$

- Energie nodig om het gas te versnellen

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - P\Delta V = \frac{1}{2}\rho Vv^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}PV = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)v^2V$$



Volume V
Dichtheid ρ
Druk P



$$\Delta L = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}L$$

Extra inertia door gasdruk

Energie-impuls tensor: `stof`

- Energie nodig om gas te versnellen

Afhankelijk van het referentiesysteem

0 – component van vier-impuls

$$E = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) v^2 V$$

- Beschouw `stof`

Verzameling deeltjes die in rust zijn t.o.v. elkaar

Constance viersnelheid

$$U^\mu(x) \quad \text{Flux viervector} \quad N^\mu = n U^\mu$$

↑

- Rustsysteem

- n en m zijn 0-components van viervectoren

Deeltjedichtheid in rustsysteem

Massadichtheid in rustsysteem $\rho = nm$

Energiedichtheid in rustsysteem ρc^2

- Bewegend systeem

- N^0 is de deeltjesdichtheid
- N^i deeltjes flux in de x^i – richting

$$N^\mu = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p^\mu = m U^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ρc^2 is de $\mu = 0, \nu = 0$ component van tensor $p \otimes N$

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = mn U^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu$$

Het gas is drukloos!

Energie-impuls tensor: perfecte vloeistof

- Perfecte vloeistof (in rustsysteem)

- Energiedichtheid ρ
- Isotrope druk P

- In rustsysteem

- Tensor uitdrukking (geldig in alle systemen)

$$T^{\mu\nu} \text{ diagonaal, met } T^{11} = T^{22} = T^{33}$$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

We hadden $T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$

Probeer $T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

We vinden

$$T_{\text{fluid}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}$$

In additie

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

Componenten van $T_{\mu\nu}$ zijn de flux van de μ^{th} impulscomponent in de ν^{th} richting

In GR is er geen *globaal* begrip van energiebehoud

Einsteins vergelijkingen vs Newton:

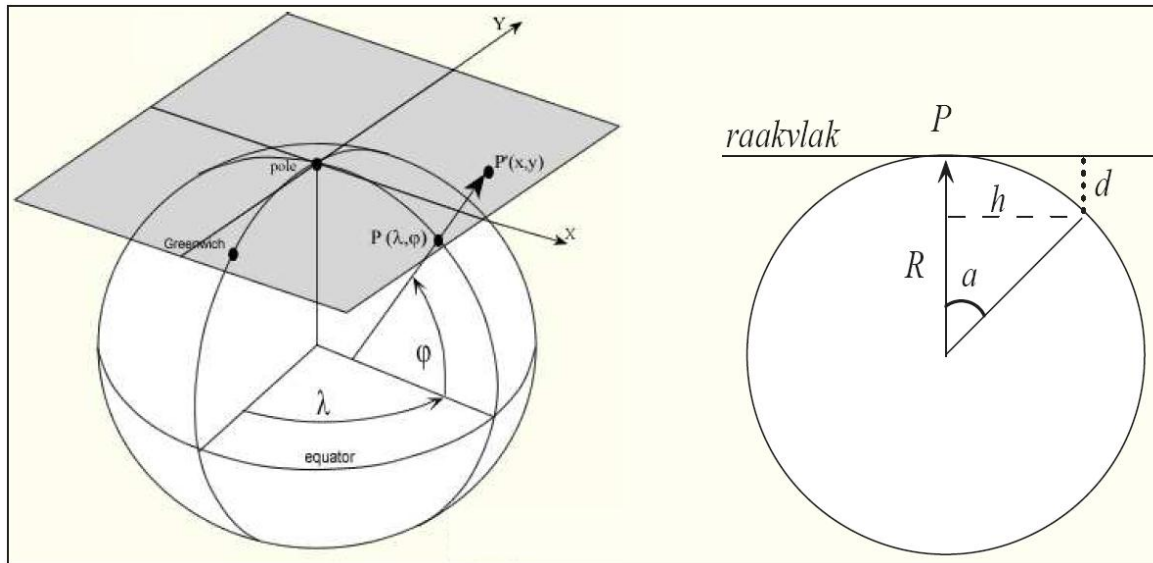
$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Lokaal Lorentz Frame – LLF

We beschouwen gekromde ruimtetijd

Op elk event P in ruimtetijd kunnen we een LLF kiezen:

- we vallen vrij (geen gravitatie effecten volgens het *equivalentieprincipe* (EP))
- in LLF hebben we dan een minkowskimetriek



$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$g_{jk} = \delta_{jk} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{x}|^2}{R^2}\right)$$

Lokaal euclidisch

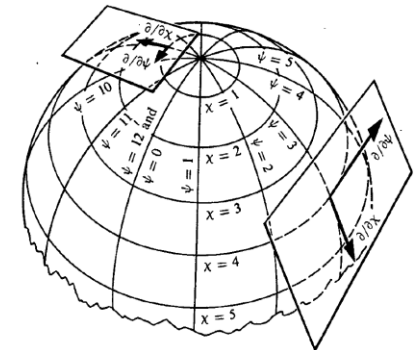
LLF in gekromde ruimtetijd

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{voor alle } \alpha, \beta;$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = 0 \quad \text{voor alle } \alpha, \beta, \gamma;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) \neq 0.$$

Op elk punt $\mathcal{P}$ is de raakruimte vlak



Tensorcalculus

Afgeleide van een vector

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$$

α is 0 - 3

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \quad \text{Stel } \beta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu \quad \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \vec{e}_\alpha \quad \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \right) \vec{e}_\alpha$$

Notatie

$$V^\alpha_{;\beta} \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \quad \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = V^\alpha_{,\beta}$$

Covariante afgeleide

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = V^\alpha_{;\beta} \vec{e}_\alpha$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensorveld $\nabla \vec{V}$

met componenten $(\nabla \vec{V})^\alpha_\beta = (\nabla_\beta \vec{V})^\alpha = V^\alpha_{;\beta}$

Kromming en parallel transport

Parallele lijnen snijden in een gekromde ruimte
(Euclides vijfde postulaat geldt niet)

Parallel transporteren van een vector $\vec{V}$

- projecteer raakvector na elke stap op het lokale raakvlak
- rotatie hangt af van kromming en grootte van de lus

Riemanntensor

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu})$$

Onafhankelijke componenten: 20

Krommingstensor van Ricci $R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}$

Riccikromming (scalar) $R = R^{\alpha}_{\alpha}$

Einsteintensor $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$

Bianchi identiteiten $G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$

Energie – impuls tensor

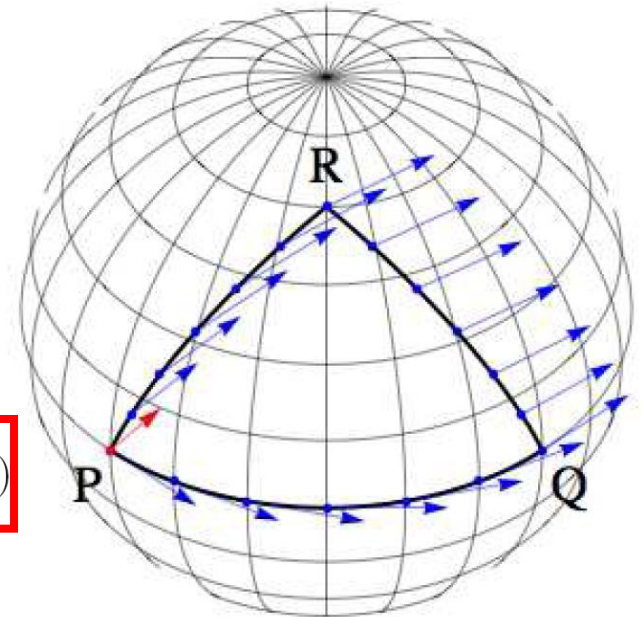
$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$



$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}$$

Einsteinvergelijkingen

Materie vertelt ruimtetijd hoe te krommen



Geodeten

Parallel transporteren $U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0$

Geodeet: lijn, die zo recht als mogelijk is $\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0$

Componenten van de viersnelheid $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

Geodetenvergelijking

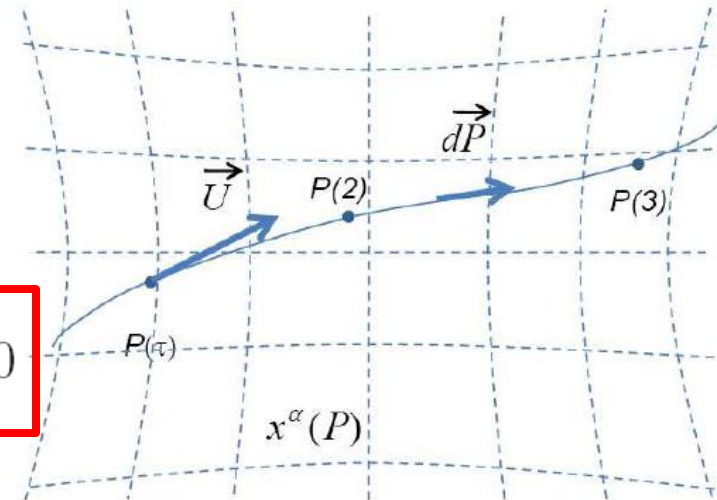
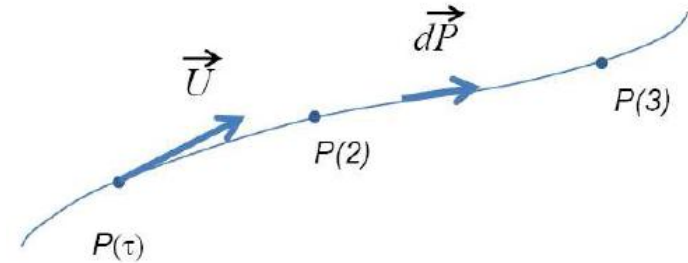
$$U^\alpha_{;\mu} U^\mu = 0 \rightarrow (U^\alpha_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu) U^\mu = 0$$

$$\underbrace{\underbrace{U^\alpha_{,\mu}}_{\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\mu}} \underbrace{U^\mu}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \underbrace{U^\nu}_{\frac{dx^\nu}{d\tau}} \underbrace{U^\mu}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}}}_{\frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0}$$

Vier gewone tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor de coördinaten $x^0(\tau)$, $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ en $x^3(\tau)$
Gekoppeld via de connectiecoëfficiënten

Twee randvoorwaarden $x^\alpha(\tau = 0)$

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau}(\tau = 0) = U^\alpha(0)$$



Ruimtetime bepaalt de beweging van materie

Einde intermezzo

Relativistische kosmologie

Theorie van de oerknal:
ontstaan van ruimtetijd,
het heelal dijt uit

Waarneembaar deel van het heelal valt
binnen de lichtkegel van de waarnemer

Er zijn grenzen aan het waarneembaar gebied:
de deeltjeshorizon

In de toekomst ziet hij meer van het heelal

Twee stelsels in tegenovergestelde richting en
op grote afstand van de waarnemer

Stelsels hebben geen tijd gehad om te
communiceren

Dit is het Big Bang scenario zonder inflatie



Isotropie van heelal

ART is voldoende voor beschrijving van Big Bang:

sterke en zwakke WW enkel op femtometers

sterrenstelsels en andere materie elektrisch neutraal

Nachthemel ziet er in elke richting hetzelfde uit op een schaal groter dan 100 Mpc

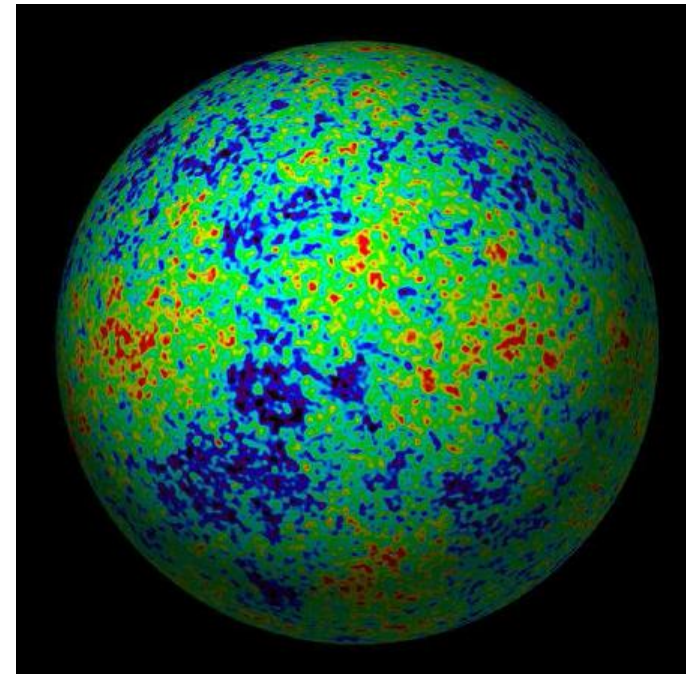
Kosmische microgolf achtergrondstraling (CMBR)

$T \approx 2.725$ K zwarte straler binnen 50 ppm

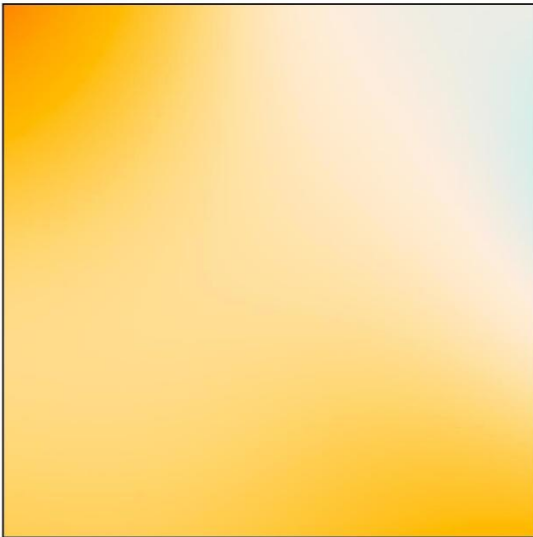
isotroop binnen 10 ppm

Voorspeld door Gamow

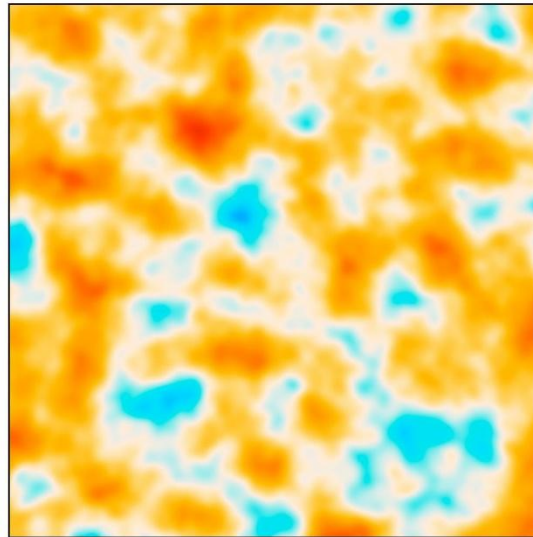
Ontdekt door Penzias en Wilson (1965)



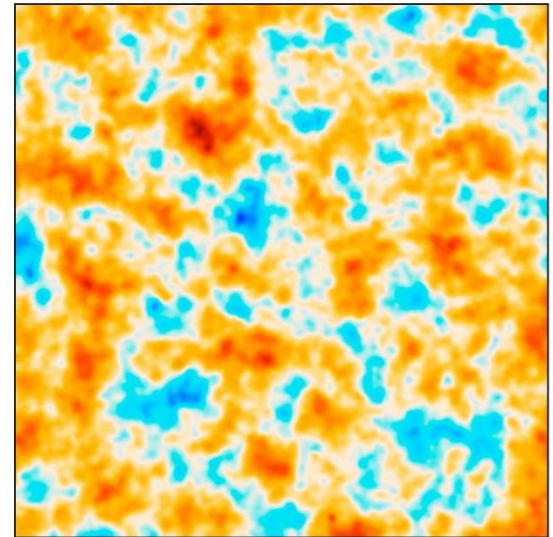
Kosmische microgolf-achtergrondstraling



COBE



WMAP



Planck

Isotropie van heelal: CMBR en Planck

Temperatuurverdeling in
galactische coördinaten

Straling van 380.000 jaar >BB
daarvoor H-atoom instabiel

T-variaties: Sachs-Wolfe effect:
gravitationele roodverschuiving

Conclusies: Planck

leeftijd 13.789 ± 0.037 Gjaar

diameter > 78 Gly

gewone materie: $4.82 \pm 0.05\%$

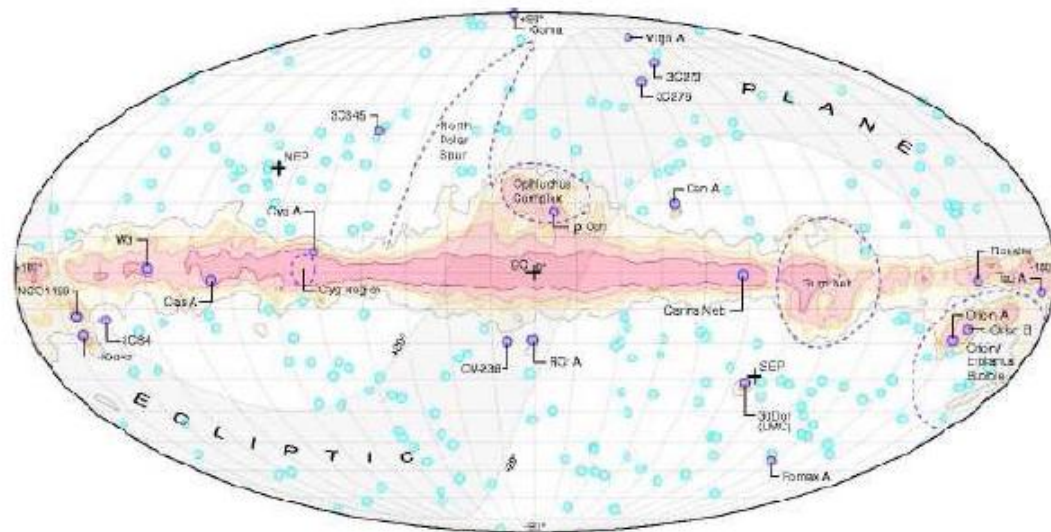
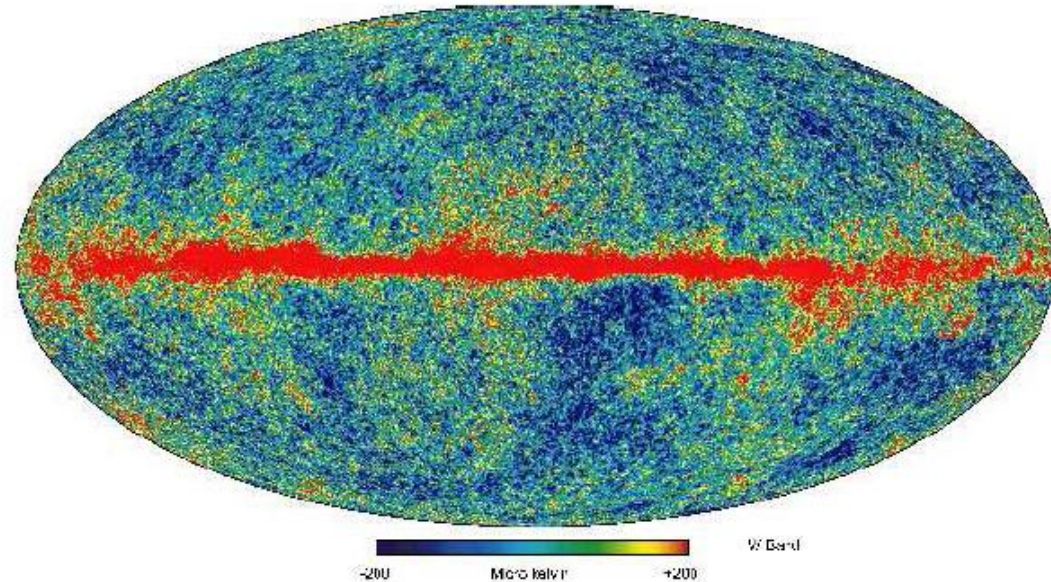
donkere materie: $25.8 \pm 0.4\%$

donkere energie: $69.2 \pm 1.0\%$

consistent met inflatiemodel

$H_0 = 67.80 \pm 0.77$ km/s/Mpc

eeuwige expansie



Isotropie van heelal: materieverdeling

Galaxy Redshift Survey: SDDS

> 1 miljoen objecten (sterrenstelsels)

In binnengebied: gaten, knopen en draden

Op grote schaal isotroop

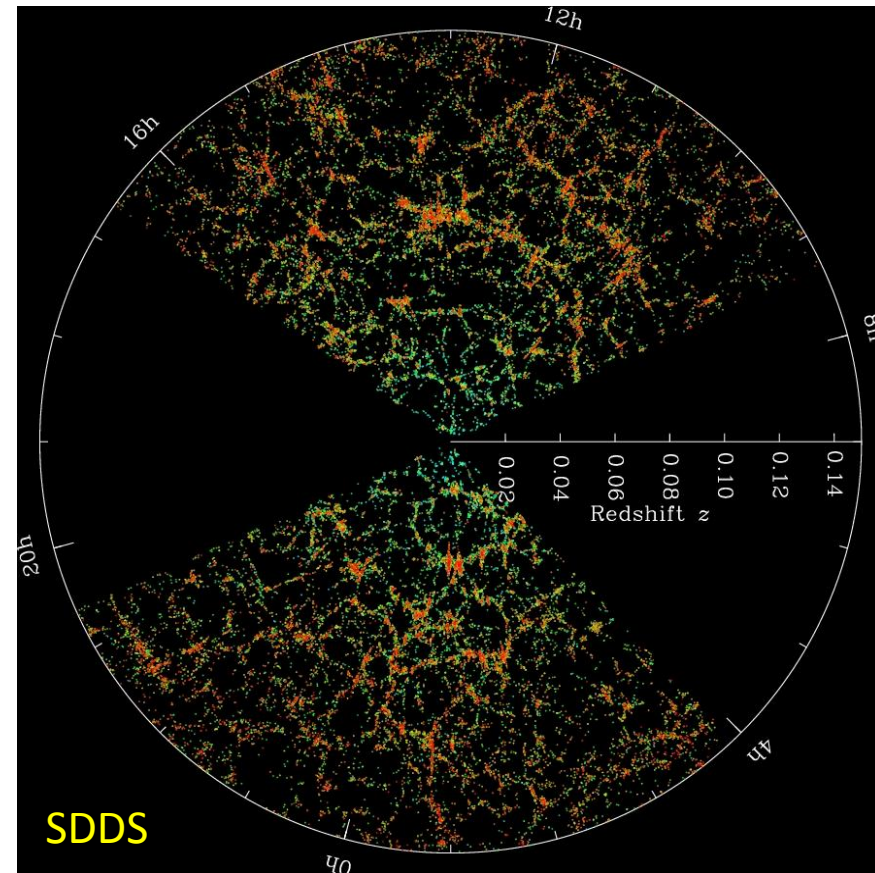
Aanname: aarde neemt
geen speciale plaats in



Heelal ziet er hetzelfde
uit vanuit elke positie



Homogeniteit



Kosmologisch principe: combinatie van isotropie en homogeniteit

Energie en materie gelijkmatig verdeeld op schaal groter dan 100 Mpc

Materieverdeling: SDSS

Zie <http://www.sdss.org/>

Kosmologisch principe en metriek

Metriek die consistent is met KP kent geen voorkeursrichting of voorkeurspositie (dan heeft de energieverdeling dat ook niet)

Voorbeeld: Schwarzschildmetriek is isotroop, maar niet homogeen

Voorbeeld: Minkowskimetriek is isotroop en homogeen

echter oplossing van Einsteinvergelijkingen voor een leeg heelal

Voeg tijdafhankelijkheid toe aan Minkowskimetriek (dat is consistent met KP)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}$$

Schaalfactor $a(t)$

Vlakke Robertson – Walker metriek

Voor het lijn-element geldt

voor waarnemer die afstanden

wil meten ($dt = 0$)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 + a^2(t) dy^2 + a^2(t) dz^2 \\ &= a^2(t) dx^i dx_i \\ &= a^2(t) d\vec{x}^2, \end{aligned}$$

Eindige afstand

$$\begin{aligned} S &= \int a(t) d\vec{x} \\ &= a(t) \int d\vec{x}. \end{aligned}$$

Coördinatenafstand $d\vec{x}$

Snelheid waarmee heelal uitdijt $\dot{a}(t)$

Kosmologische roodverschuiving

Lichtstraal volgt een lichtachtig pad
(neem aan langs x-richting)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Lichtstraal uitgezonden op t_e (emissie) en ontvangen op t_o

Afgelegde coördinaatafstand R tussen emissie en ontvangst

$$R = \int_0^R dx = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)}$$

Beschouw zender op grote coördinaatafstand R van ontvanger

Zender stuurt 2 pulsen met tijdverschil δt_e

Ontvanger meet δt_o tijdverschil (groter want heelal dijt uit)

Coördinaatafstand verandert niet (meebewegend stelsel – comoving frame)

$$\Rightarrow c \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \quad \text{met} \quad \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o+\delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o+\delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = 0$$

Neem aan δt_e en δt_o zo klein dat $a(t)$ constant

$$\Rightarrow \frac{\delta t_o}{\delta t_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$$

Er geldt dus kosmologische roodverschuiving

$$1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \quad (\Delta\lambda/\lambda \equiv z)$$

Wet van Hubble

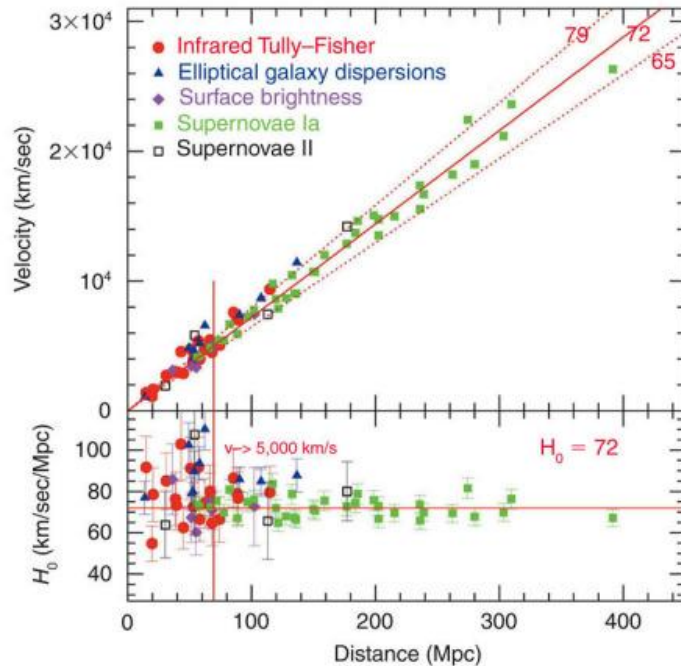
Roodverschuiving in spectra

Hubble's orginele data

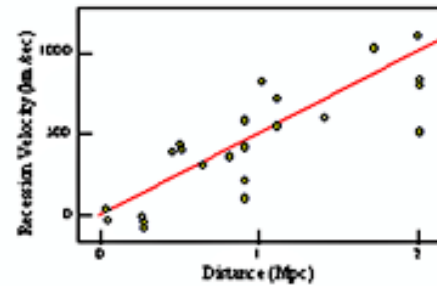
Standaardkaarsen

Cepheid variabelen

Supernovae Ia



Hubble's Data (1929)

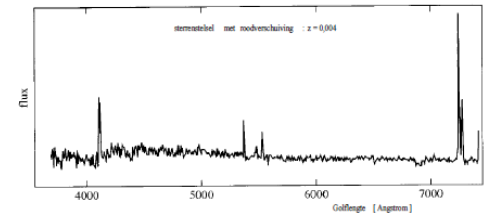
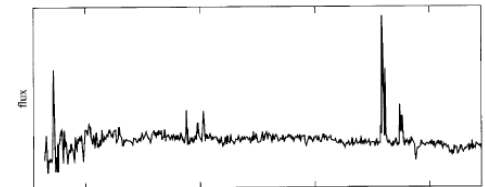
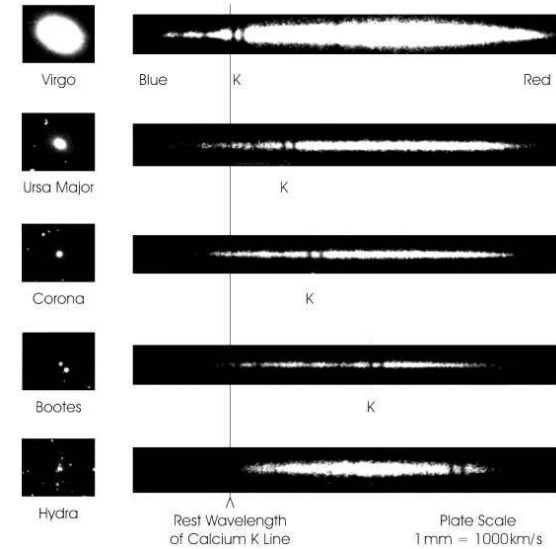


Expansie van het heelal

Spectrum van een ster als de zon



Spectrum van een ster als de zon, op 1 miljard lichtjaar



Wet van Hubble

Kosmologische roodverschuiving $1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$

Voor sterren die niet te ver weg staan ($a \approx \text{constant}$) geldt

$$a(t_e) \approx a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o)$$

$$\Rightarrow 1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \approx \frac{a(t_o)}{a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o)} \approx 1 + \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}(t_o - t_e), \quad (\text{gebruik } (1+x)^m \approx 1+mx)$$

$$\Rightarrow z \approx \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)} \text{cd} \quad \text{Hubble constante}$$

$$H(t_o) = 70,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

$$H(t_o) = 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

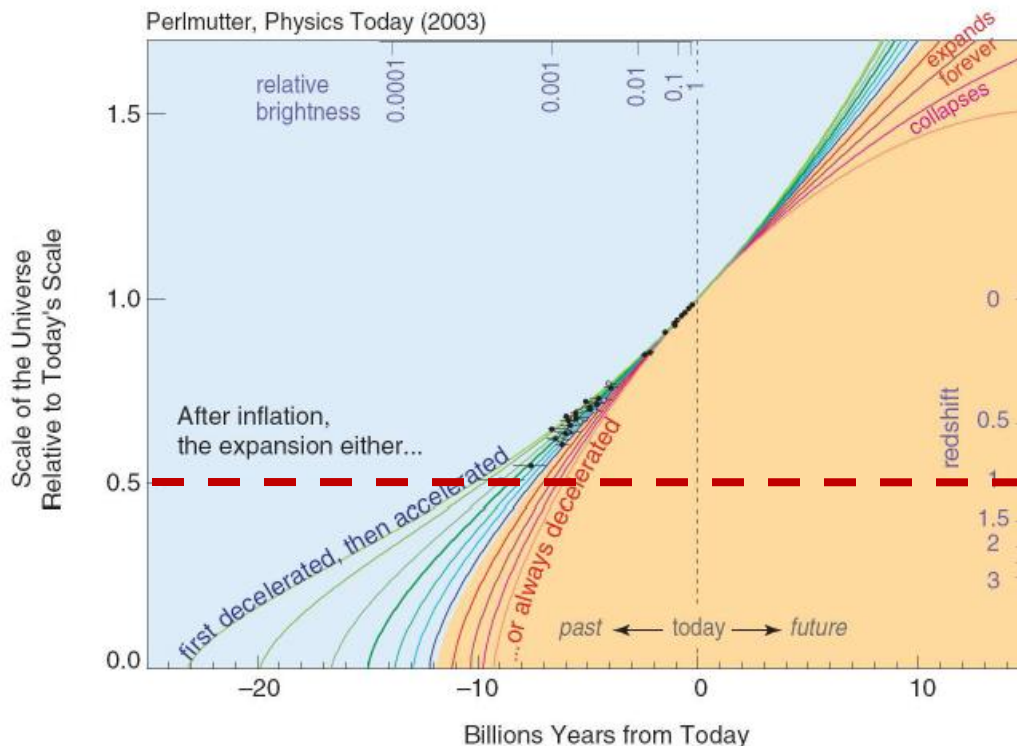
Kosmologische roodverschuiving:

heden $\rightarrow z = 0$

10 Gyr geleden $\rightarrow z = 1$

$z = 1 \rightarrow$ heelal half zo groot

Hubble constante is niet constant!



Friedmannvergelijkingen

Wat is de exacte vorm van de functie voor de schaalfactor $a(t)$?

Metriek volgt uit Einsteinvergelijkingen voor correcte energie-impulstensor $T_{\mu\nu}$

Complicatie: tijdafhankelijkheid metriek heeft invloed op $T_{\mu\nu}$ (e.g. ballonmodel en P)

Kosmologisch principe:

geen plaatsafhankelijkheid
perfecte vloeistof

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu} \quad \rho \text{ nu als energiedichtheid}$$

Gebruik CMRF



$$U^\mu = (c, 0, 0, 0)$$

Bereken Riccitenor en

Riemannscalar voor

Robertson-Walker metriek

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad R = -6 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 6 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}.$$

$$R_{ij} = -\left(2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)\right)\delta_{ij},$$

Invullen van R_{mn} , R en $T_{\mu\nu}$ in
Einsteinvergelijkingen



Relaties (twee) tussen schaalfactor,
druk en energiedichtheid

$$\text{Voor } \begin{array}{l} \mu = 0, \nu = 0 \\ \mu = i, \nu = i \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}P(t) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(3P(t) + \rho(t)\right). \end{array} \right\}$$

Oerknal en friedmannvergelijkingen

Dichtheid en druk zijn positieve grootheden (voor ons bekende materie en velden)

Dan $\ddot{a}(t)$ negatief volgens
$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (3P(t) + \rho(t))$$

Uitdijingsnelheid neemt af in de tijd

Volgens experiment, $\dot{a}(t_{\text{nu}}) > 0$ dijt heelal nu uit



Schaalfactor $a(t)$ heeft ooit de waarde nul aangenomen

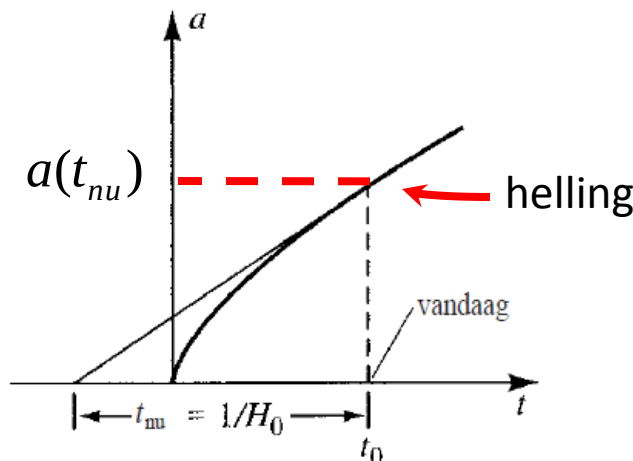
Friedmannvergelijkingen voorspellen

alle materie en energie ooit opgesloten in volume $V = 0$

ruimtetijd is begonnen als *singulariteit* met oneindige energiedichtheid

generieke conclusie voor alle oplossingen van friedmannvergelijkingen

Leeftijd van het heelal



$$\dot{a}(t_{\text{nu}}) = \frac{a(t_{\text{nu}})}{t_{\text{nu}}} \Rightarrow t_{\text{nu}} = \frac{a(t_{\text{nu}})}{\dot{a}(t_{\text{nu}})} \approx \frac{1}{H}$$

Leeftijd van het heelal < 15 Gjaar