

---

# Thermodynamica

---

Inleiding tot de rol van thermodynamica in de moderne fysica

*door*

Prof.dr Johannes F.J. van den Brand

Afdeling Natuurkunde en Sterrenkunde  
Faculteit der Exacte Wetenschappen  
Vrije Universiteit, Amsterdam  
en

Nationaal instituut voor subatomaire fysica (Nikhef), Amsterdam



## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>HET VROEGE HEELAL</b>	<b>7</b>
1.1	Het heelal als een perfecte vloeistof: de energie-impuls tensor . . . . .	8
1.1.1	Energie-impuls tensor voor stof . . . . .	8
1.1.2	Energie-impuls tensor voor een perfecte vloeistof . . . . .	9
1.1.3	Continuïteitsvergelijking . . . . .	10
1.1.4	Eulervergelijking voor een perfecte vloeistof . . . . .	10
1.2	Standaard model van de kosmologie . . . . .	11
1.3	Meebewegende coördinaten . . . . .	12
1.3.1	Geodeten in de FLRW metriek . . . . .	12
1.3.2	Vrijvallende meebewegende waarnemers . . . . .	13
1.3.3	Kosmologische expansie en het verval van de drie-impuls van deeltjes . . . .	13
1.3.4	Roodverschuiving en de wet van Hubble . . . . .	13
1.3.5	Convergeren op de Hubble flow . . . . .	15
1.4	Friedmannvergelijkingen . . . . .	15
1.4.1	Continuïteitsvergelijking . . . . .	16
1.4.2	Continuïteitsvergelijking uit thermodynamische beschouwingen . . . . .	16
1.4.3	Kritische dichtheid . . . . .	16
1.4.4	De terugkijktijd en de leeftijd van het heelal . . . . .	17
1.4.5	Het vlakheidsprobleem . . . . .	17
1.4.6	Afstanden . . . . .	18
1.5	Een klassiek heelal dat bestaat uit stof . . . . .	20
1.6	Uitgewerkte opgaven . . . . .	22
1.6.1	Kritische massadichtheid . . . . .	22
1.6.2	Natuurlijke eenheden . . . . .	22
1.7	Opgaven . . . . .	24
1.7.1	Hubble constante in SI eenheden . . . . .	24
1.7.2	Continuïteitsvergelijking . . . . .	24
1.7.3	Kritische dichtheid . . . . .	24
1.7.4	Klassiek heelal en vergelijking van Euler . . . . .	24
1.7.5	Algemene relativiteitstheorie . . . . .	24
<b>2</b>	<b>THERMODYNAMICA VAN HET VROEGE HEELAL</b>	<b>25</b>
2.1	Thermodynamische toestanden . . . . .	25
2.1.1	Toestandsvariabelen: druk en energiedichtheid . . . . .	25
2.1.2	Toestandsvergelijkingen . . . . .	25
2.1.3	Tijdsevolutie van de schaalfactor, energiedichtheid en druk . . . . .	26
2.2	Thermodynamica van het vroege heelal . . . . .	27
2.2.1	Intermezzo: resumé van de evenwichtsthermodynamica . . . . .	28
2.2.2	Chemische potentiaal . . . . .	30
2.2.3	Energie- en deeltjesdichtheid, en druk voor een gas van fermionen en bosonen	30
2.2.4	Vrijheidsgraden . . . . .	31
2.3	Belangrijke gebeurtenissen in de historie van ons heelal . . . . .	33
2.3.1	Elektrozwakke fase-overgang . . . . .	34
2.3.2	QCD fase-overgang . . . . .	35
2.3.3	Ontkoppelen van neutrino's . . . . .	35
2.4	Entropie . . . . .	36
2.4.1	Resumé van thermodynamica: potentialen en eerste hoofdwet . . . . .	36
2.4.2	Resumé van thermodynamica: entropie en de tweede hoofdwet . . . . .	37

2.4.3	Entropie in een expanderend heelal . . . . .	38
2.4.4	Elektron-positron annihilatie . . . . .	38
2.4.5	Totale entropie van het huidige heelal . . . . .	39
2.4.6	Het begin van dominantie van materie . . . . .	40
2.5	Uitgewerkte opgaven . . . . .	41
2.5.1	Deeltjesdichtheid, energiedichtheid en druk . . . . .	41
2.5.2	Toestandsvergelijking . . . . .	41
2.6	Opgaven . . . . .	42
2.6.1	Toestandsvergelijkingen . . . . .	42
2.6.2	Verlaten van thermodynamisch evenwicht en fase-overgangen . . . . .	42
2.6.3	Evenwichtsthermodynamica en ideale gaswet . . . . .	42
2.6.4	Vrijheidsgraden in het standaard model van de deeltjesfysica . . . . .	42
2.6.5	Relatie tussen temperatuur en tijd in het vroege heelal . . . . .	42
2.6.6	Elektrozwakke fase-overgang . . . . .	42
2.6.7	Entropiedichtheid van het heelal . . . . .	42
<b>3</b>	<b>NUCLEOSYNTHESE</b>	<b>43</b>
3.1	Big Bang nucleosynthese . . . . .	43
3.1.1	De abundantie van $^4\text{He}$ . . . . .	45
3.2	Stervorming . . . . .	47
3.3	Energiehuishouding in sterren . . . . .	48
3.4	Nucleosynthese in sterren . . . . .	51
3.5	Uitgewerkte opgaven . . . . .	55
3.5.1	Productie van $^4\text{He}$ in sterren . . . . .	55
3.5.2	De vorming van ons zonnestelsel . . . . .	55
3.5.3	De proton-proton cyclus . . . . .	56
3.5.4	Kamiokande en supernova SN1987A . . . . .	57
3.6	Opgaven . . . . .	59
3.6.1	De abundantie van $^4\text{He}$ in sterren . . . . .	59
3.6.2	De gravitationele zelfenergie van een ster . . . . .	59
<b>4</b>	<b>STANDAARD ZONNEMODEL</b>	<b>60</b>
4.1	Standaard zonnemodel . . . . .	60
4.1.1	Stermodel met lineaire afhankelijkheid voor de dichtheid . . . . .	63
4.1.2	Stermodel met constante dichtheid . . . . .	64
4.1.3	Eddingtons theorie over het evenwicht van een ster . . . . .	64
4.2	Witte dwergen, supernovae, neutronensterren en zwarte gaten . . . . .	68
4.2.1	Witte dwergen: Fermi druk van een elektronengas . . . . .	68
4.2.2	Relativistisch ontaard elektronengas . . . . .	69
4.2.3	Neutronensterren . . . . .	70
4.3	Uitgewerkte opgaven . . . . .	74
4.3.1	Vrije-val tijd voor sterren . . . . .	74
4.3.2	De Kelvin-Helmholtz tijdschaal voor de zon . . . . .	74
4.4	Opgaven . . . . .	76
4.4.1	Poissonvergelijking voor gravitatie . . . . .	76
4.4.2	Zonneconstante . . . . .	76
4.4.3	Temperatuur van het oppervlak van de zon . . . . .	76
4.4.4	Lane-Emden vergelijking . . . . .	76

<b>5</b>	<b>KOSMISCHE MICROGOLF-ACHTERGRONDSTRALING</b>	<b>77</b>
5.1	Ontdekking van de kosmische microgolf-achtergrondstraling . . . . .	77
5.2	Thermodynamische aspecten van de kosmische achtergrondstraling . . . . .	78
5.2.1	Recombinatie en de Saha vergelijking . . . . .	80
5.2.2	Fotonen ontkoppelen van het plasma . . . . .	81
5.3	Het horizon probleem van de kosmische microgolf-achtergrondstraling . . . . .	82
5.4	Kosmologische inflatie . . . . .	83
5.4.1	De dynamica van kosmologische inflatie . . . . .	84
5.4.2	De vereenvoudigde inflatievergelijkingen . . . . .	86
5.5	Anisotropie in de kosmische microgolf-achtergrondstraling . . . . .	88
5.5.1	De dipoolasymmetrie . . . . .	89
5.5.2	Temperatuurfluctuaties en hoekspectrum . . . . .	89
5.5.3	Intermezzo: de akoestische golffunctie . . . . .	93
5.5.4	Akoestische oscillaties en dichtheidsverstoringen . . . . .	95
5.5.5	Kromming van het heelal . . . . .	98
5.5.6	Kosmologisch parameterschatting met kosmische microgolf-achtergrondstraling . . . . .	99
5.5.7	Polarisatie van de kosmische microgolf-achtergrondstraling . . . . .	99
5.5.8	Sunyaev-Zel'dovich effect . . . . .	100
5.5.9	Sachs-Wolfe effect en geïntegreerd Sachs-Wolfe effect . . . . .	100
5.6	Uitgewerkte opgaven . . . . .	101
5.6.1	Energiedichtheid van het heelal in de vorm van black-body straling . . . . .	101
5.7	Opgaven . . . . .	102
5.7.1	Temperatuurcorrelaties in de kosmische achtergrondstraling . . . . .	102
<b>A</b>	<b>APPENDIX - FUNDAMENTELE CONSTANTEN</b>	<b>103</b>
<b>B</b>	<b>APPENDIX - COÖRDINATENSISTEMEN</b>	<b>104</b>
B.1	Cartesiaanse coördinaten . . . . .	104
B.2	Sferische coördinaten . . . . .	104
B.3	Cilindrische coördinaten . . . . .	104
<b>C</b>	<b>APPENDIX: NUTTIGE WISKUNDIGE UITDRUKKINGEN</b>	<b>105</b>
C.1	Vaak gebruikte formules uit de statistiek . . . . .	105
C.1.1	Fermi-Dirac statistiek . . . . .	105
C.1.2	Bose-Einstein statistiek . . . . .	105
C.1.3	Boltzmann statistiek . . . . .	105
<b>D</b>	<b>APPENDIX: DE ALGEMENE RELATIVITEITSTHEORIE - EEN SAMENVATTING</b>	<b>106</b>
D.1	Pseudo-riemannse variëteit . . . . .	106
D.2	Tensoren en covariante afgeleide . . . . .	108
D.3	Geodeten en kromming . . . . .	111
D.4	Kromming en de riemanntensor . . . . .	112
D.5	Newtoniaanse beschrijving van getijdenkrachten . . . . .	115
D.6	De einsteinvergelijkingen . . . . .	116
D.7	Zwakke gravitatievelden en de newtoniaanse limiet . . . . .	121
D.8	De zwakke-veld limiet van de einsteinvergelijkingen . . . . .	123
D.9	De kosmologische constante . . . . .	124
D.10	Alternatieve relativistische theorieën voor gravitatie . . . . .	126
D.10.1	Scalaire gravitatietheorieën . . . . .	126
D.10.2	Brans - Dicke theorie . . . . .	126

D.10.3 Torsietheorieën . . . . . 127

## Voorwoord

In dit college wordt een inleiding tot de thermodynamica gegeven. Thermodynamica beschrijft processen waarbij transformatie van energie en veranderingen in temperatuur een rol spelen. Ook worden er verbanden gelegd tussen warmte en arbeid. Het is wetenschap, maar ook een belangrijk engineering hulpmiddel nodig voor de beschrijving van energiecentrales, koelkasten, vloeistofstroming, en verbrandingsmotoren. Historisch is thermodynamica vooral een generalisatie van empirische waarnemingen, waarbij de bevindingen zijn vastgelegd in de eerste, tweede en derde wet van de thermodynamica. De logische ontwikkeling van deze wetenschap vereist nog een wet, die de nulde wet van de thermodynamica genoemd wordt. Wij zullen echter de thermodynamische principes zoveel mogelijk uit de kinetische gastheorie afleiden.

Wiskunde speelt een prominente rol in het opzetten van natuurkundige theorieën, en de thermodynamica vormt hierop geen uitzondering. In de behandeling van de diverse onderwerpen zullen we liberaal gebruikmaken van verschillende wiskundige en statistische technieken. De student dient zich te realiseren dat in alle gevallen de nadruk ligt op het begrip van het natuurkundig fenomeen. Overigens neemt de wiskundige complexiteit snel toe als we thermodynamica op het heelal willen toepassen, omdat hierbij het gebruik van de algemene relativiteitstheorie noodzakelijk is. We zullen in dat geval een smal pad uitstippelen waarbij we hopen dat ook studenten zonder een achtergrond in deze theorie, de argumenten kunnen volgen.

Het college ‘*Thermodynamica*’ wordt in 2014 voor het eerst gegeven in het kader van het HOVO (Hoger Onderwijs Voor Ouderen) programma aan de Vrije Universiteit, Amsterdam. Van de studenten wordt voorkennis vereist op het niveau van H.B.S.-B, VWO of Gymnasium. Om tegemoet te komen aan het niveau van de studenten worden diverse onderwerpen, zoals lineaire algebra, nogmaals beknopt behandeld tijdens het college. Verder is de benadering redelijk ‘schools’. Er wordt huiswerk opgegeven en behandeld (en dit telt mee voor het uiteindelijke cijfer). Hierbij dient benadrukt te worden dat een goed begrip van de stof enkel zal volgen uit zelfwerkzaamheid van de student. De opgaven zijn een belangrijk instrument in dit verband, want hierin kan de opgedane kennis worden toegepast, terwijl de opgaven soms ook voor verdieping van de materie zorgdragen. Merk op dat er in dit kader ook een website is ingericht, die bereikt kan worden via <http://www.nikhef.nl/~jo/thermodynamica/>.

Het dictaat is als volgt gestructureerd. Een samenvatting van de moderne kosmologie wordt gepresenteerd in hoofdstuk, terwijl de relevante achtergrond uit de algemene relativiteitstheorie te vinden is in een appendix. Thermodynamische aspecten van het vroege heelal komen aan de orde in hoofdstuk 2. Hierbij concentreren we ons op de diverse faseovergangen. Nucleosynthese van lichte elementen in de Big Bang en van zware elementen in sterren wordt behandeld in hoofdstuk 3. Op thermodynamische gronden laten we zien dat de concentratie  ${}^4\text{He}$  ongeveer 25% moet zijn, hetgeen in uitstekende overeenstemming is met waarnemingen. De structuur van sterren en het standaard model van de zon zijn onderwerpen die worden besproken in hoofdstuk 4. Tenslotte wordt de kosmische microgolf-achtergrondstraling behandeld in hoofdstuk 5. De diverse appendices dienen als achtergrondmateriaal.

Het zal opvallen dat verschillende onderwerpen ontbreken die in een regulier college wel aan de orde komen. De reden hiervoor is dat het volgens de auteurs onvoldoende bijdraagt tot een verdieping van het inzicht, maar enkel leidt tot een verbreding van de kennis. De onderwerpen zijn gekozen om zo snel mogelijk de stof te doorgronden, teneinde direct te komen tot de discussie van de filosofische implicaties en de focus van het moderne wetenschappelijk onderzoek. Dit verklaart ook waarom er relatief veel aandacht wordt besteed aan een didactische inleiding tot de thermodynamica. Overigens is het zo dat het niveau van behandeling van de stof in sommige gevallen overeenkomt met (of zelfs uitstijgt boven) die van een derde-jaars natuurkundestudent.

In de samenstelling van dit dictaat is geput uit diverse bronnen, zoals ‘*Quantum universum - HOVO college 2010*’, Jo van den Brand en Gideon Koekoek; ‘*Thermodynamics*’, Cengel, Boles; ‘*Cosmology*’, Steven Weinberg; ‘*Cosmology, Part III Mathematical Tripos*’, Daniel Baumann; ‘*Cosmology and Particle Astrophysics*’, Lars Bergström en Ariel Goobar; ‘*Physical Foundations of Cosmology*’, V. Mukhanov; ‘*A first course in general relativity*’, Bernard F. Schutz; ‘*General Relativity*’, Robert M. Wald; ‘*General Relativity - An introduction for Physicists*’, M.P. Hobson, G. Efstathiou en A.N. Lasenby; ‘*A Short Course in General Relativity*’, James Foster, J. David Nightingale; ‘*Gravity, Black Holes, and the Very Early Universe - An Introduction to General Relativity and Cosmology*’, Tai L. Chow; ‘*Gravity - An Introduction to Einstein’s General Relativity*’, James B. Hartle; ‘*Einstein’s General Theory of Relativity - with modern applications in cosmology*’, Øyvind Grøn, Sigbjørn Hervik; ‘*An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry*’, Sean M. Carroll; ‘*Particle Astrophysics*’, Donald Perkins; ‘*Kosmologie - Van oerknal via niets tot straling en stof*’, A. Achterberg; ‘*Statistical mechanics, fundamentals and model solutions*’, Dorlas. In sommige gevallen is gebruik gemaakt van relevante review artikelen uit de vakliteratuur. De bronnen worden dan ter plaatse vermeld.

Tenslotte willen de auteurs bij voorbaat aan een ieder dank betuigen die gaat bijdragen aan de verbetering van het voorliggende dictaat. Door vrijelijk uw suggesties door te geven aan de docenten zullen wij deze gebruiken ter verbetering van het lesmateriaal.

Amsterdam  
4 november 2014



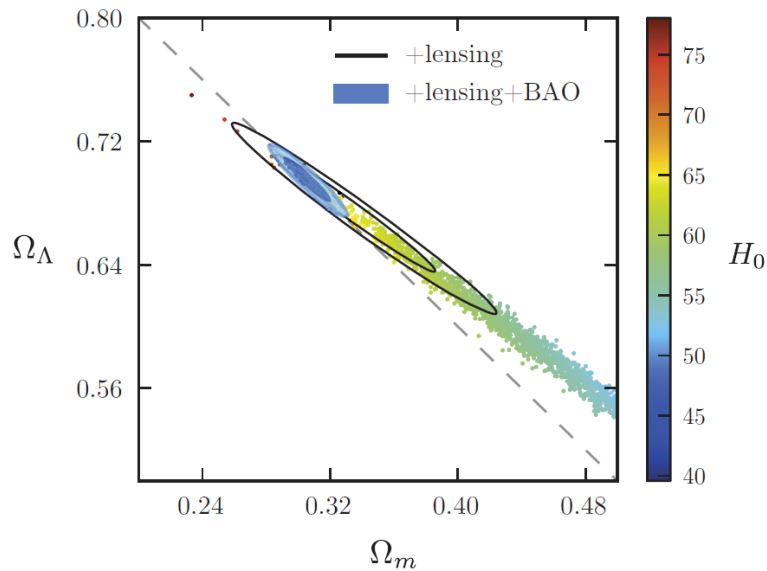
## 1 HET VROEGE HEELAL

Kosmologie werd een serieuze wetenschap nadat Einstein zijn algemene relativiteitstheorie had opgesteld. Als snel bleek dat de oplossingen van de einsteinvergelijkingen voor een isotroop en homogeen heelal niet statisch konden zijn. Friedmann en Lemaître vonden dat het heelal eeuwig expandeert of dat het samentrekt en uiteindelijk ineenstort. In 1929 publiceerde Edwin Hubble dat verre sterrenstelsels snelheden  $v$  hebben die evenredig zijn met hun relatieve afstanden  $d$ , volgens  $v = H_0 \cdot d$ . In deze vergelijking is  $H_0 = 67.80 \pm 0.77$  (km/s)/Mpc de *huidige* waarde van de Hubble constante (inclusief de metingen met de Planck satelliet). Hiermee was het een experimenteel feit dat het heelal niet statisch is.

De dynamica van de oplossingen wordt op *dit* moment voornamelijk bepaald door twee parameters: de massadichtheid van het heelal  $\Omega_M$  en de energiedichtheid  $\Omega_\Lambda$  verbonden met de kosmologische constante (we zullen zien dat op dit moment de bijdrage van straling  $\Omega_R$  verwaarloosd kan worden). Beide parameters zijn dimensieloos en er geldt

$$\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_c}, \quad \text{en} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \quad (1)$$

met  $\rho_c$  de kritische dichtheid die bepaalt of een heelal eeuwig expandeert of dat het uiteindelijk ineenstort voor  $\Lambda = 0$ .



**Figuur 1:** Metingen aan de kosmische microgolf-achtergrondstraling en de structuur van het heelal op grote schaal leiden tot de conclusie dat het heelal een ruimtelijk vlakke geometrie heeft. De energiedichtheid wordt gedomineerd door een kosmologische constante. Image credit: Planck Collaboration: P.A.R. Ade et al., A & A Preprint.

Kosmologen proberen de waarden voor  $H_0$ ,  $\Omega_M$  en  $\Omega_\Lambda$  nauwkeurig te bepalen. Men bestudeert de massaverdeling in het heelal, gebruikt Type-Ia supernovae, Baryon Acoustische Oscillaties, en ook de kosmische microgolf-achtergrondstraling is een belangrijke bron van informatie. De algemene relativiteitstheorie wordt dan toegepast om de dynamica van ruimtetijd te bepalen. Deze benadering wordt *concordance cosmology* genoemd en  $\Lambda$ CDM (Lambda Cold Dark Matter) is de parametrisatie van het Big Bang model. Men vindt voor  $\Omega_0 = \Omega_M + \Omega_\Lambda$

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = \Omega_b + \Omega_c + \Omega_\Lambda = (0.0482 \pm 0.0005) + (0.258 \pm 0.004) + (0.692 \pm 0.010) = 0.998, \quad (2)$$

waarbij de massadichtheid wordt opgesplitst in  $\Omega_b$  voor de bijdrage van baryonen en  $\Omega_c$  voor die van zogenaamde *donkere* materie. We zien dat baryonen slechts een kleine 5% bijdrage leveren. Voor kosmologen bestaan baryonen overigens uit protonen, neutronen en elektronen. Het grootste deel van de dichtheid wordt geleverd door 26% donkere materie en 69% donkere energie. Hiervan kennen we de fysische oorsprong niet.

## 1.1 Het heelal als een perfecte vloeistof: de energie-impuls tensor

Alhoewel de vierimpuls een volledige beschrijving geeft van de energie en impuls van een individueel deeltje, is dat niet bruikbaar voor de beschrijving van systemen die samengesteld zijn uit grote aantallen deeltjes. In plaats van het toekennen van vierimpulsen aan ieder individueel deeltje, kiezen we ervoor om het hele systeem als een vloeistof te beschrijven - een continuüm dat gekarakteriseerd wordt door macroscopische grootheden als druk, dichtheid, entropie en viscositeit. In het algemeen heeft deze vloeistof een bepaald viersnelheidveld.

Één enkel impuls-viervectorveld is onvoldoende om de energie en impuls van de vloeistof te beschrijven, omdat voor de stroming van een vloeistof ook drukverschillen (dus gradiënten) belangrijk zijn. We definiëren een energie-impuls tensor (ook wel de stress tensor genoemd) met componenten  $T^{\mu\nu}$ . Deze symmetrische  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  tensor vertelt ons alles wat we moeten weten van de energie-achtige eigenschappen van een systeem, zoals energiedichtheid, druk, en spanning.

De algemene definitie van  $T^{\mu\nu}$  is dat het de flux<sup>1</sup> voorstelt van vierimpuls  $p^\mu$  door een oppervlak met constante  $x^\nu$ . Beschouw bijvoorbeeld een oneindig klein vloeistofelement in zijn rustsysteem (we gebruiken dan in feite een meebewegend referentiesysteem). Dan is  $T^{00}$  de flux van  $p^0$  (energie) in de  $x^0$  (tijd) richting: het is de energiedichtheid  $\rho$  in het rustsysteem. Op dezelfde manier zien we dat in dit frame  $T^{0i} = T^{i0}$  de impulsdichtheid is. De ruimtelijke componenten  $T^{ij}$  zijn de impulsflux, ofwel de stress, en vertegenwoordigen de krachten tussen aangrenzende volume elementen. Een diagonale term als  $T^{11}$  geeft de  $x$ -component van de kracht die per eenheid oppervlakte door het element wordt uitgeoefend in de  $x$ -richting. We interpreteren dit als de  $x$ -component van de druk ( $P_x$ ). De druk heeft drie dergelijke componenten,  $P_i = T^{ii}$ , in het rustsysteem van de vloeistof.

### 1.1.1 Energie-impuls tensor voor stof

We zullen het bovenstaande concreter maken door 'stof' (engels: dust) als voorbeeld te nemen. Kosmologen hebben de neiging om "stof" als synoniem voor materie te gebruiken. We definiëren stof in de vlakke ruimtetijd als een verzameling deeltjes (met een deeltje bedoelen we in dit verband een heel sterrenstelsel mee) die in rust zijn ten opzichte van elkaar. Het viervector snelheidsveld  $u^\mu(x)$  is de constante viersnelheid van de individuele deeltjes. De componenten zijn hetzelfde op elk punt. We definiëren de flux viervector als

$$N^\mu = nu^\mu, \quad (4)$$

met  $n$  de deeltjesdichtheid gemeten in het rustsysteem. Dan is  $N^0$  de deeltjesdichtheid gemeten in een ander systeem, terwijl  $N^i$  de deeltjesflux is in de  $x^i$ -richting. Verder nemen we aan dat elk deeltje massa  $m$  heeft. In het rustsysteem wordt de energiedichtheid van de stof gegeven door

$$\rho = nm. \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>Merk op dat de flux van een vectorveld  $\vec{V}$  door een oppervlak  $\mathcal{S}$  gegeven wordt door de integraal

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot d\vec{A} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{V} \cdot \hat{n} dA. \quad (3)$$

Merk op dat in de definitie van de energie-impulstensor beschouwen het vectorveld  $p^\mu$  vier-dimensionaal is, en de "oppervlakten" drie-dimensionaal.

Per definitie specificeert de energiedichtheid de stof volledig. Echter  $\rho c^2$  meet de energiedichtheid in het ruststelsel. Hoe zit het met andere systemen? Merk op dat zowel  $n$  als  $m$  de 0-componenten zijn van viervectoren in hun ruststelsel, namelijk  $N^\mu = (n, 0, 0, 0)$  en  $p^\mu = mu^\mu = (mc, 0, 0, 0)$ . We zien dus dat  $\rho c^2$  de  $\mu = 0, \nu = 0$  component is van de tensor  $p^\mu \otimes N^\nu$  gemeten in het ruststelsel. Dit leidt tot de volgende definitie van de energie-impuls tensor voor stof,

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = mn u^\mu u^\nu = \rho u^\mu u^\nu, \quad (6)$$

met  $\rho c^2$  de energiedichtheid in het ruststelsel. We zien dat de druk van het stof in elke richting gelijk is aan nul. Dat klopt ook wel, omdat wij stof gedefinieerd hebben als een verzameling deeltjes zonder random bewegingen.

### 1.1.2 Energie-impuls tensor voor een perfecte vloeistof

Stof is onvoldoende voor een algemene beschrijving van belangrijke fenomenen in de algemene relativiteitstheorie. Hiervoor is het concept van een ‘perfecte vloeistof’ nodig. Een perfecte vloeistof kan volledig worden gespecificeerd door twee grootheden: de energiedichtheid  $\rho$  in het ruststelsel, en een isotrope druk  $P$  in het ruststelsel. De parameter  $P$  geeft de druk in elke richting. Een consequentie van de isotropie is dat  $T^{\mu\nu}$  diagonaal is in het ruststelsel. Verder moeten de diagonale componenten allemaal gelijk zijn:  $T^{11} = T^{22} = T^{33}$ . Er zijn dus slechts twee onafhankelijke parameters en dat is de energiedichtheid  $\rho c^2 = T^{00}$  en de druk  $P = T^{ii}$ . De energie-impuls tensor van een perfecte vloeistof heeft daarmee de volgende vorm in het ruststelsel,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (7)$$

We willen uiteraard een formule die geldig is in elk systeem, een tensorvergelijking, en de algemene vorm van de energie-impuls tensor voor een perfecte vloeistof is dan ook

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (8)$$

Gegeven dat vergelijking (7) de vorm van  $T^{\mu\nu}$  in het ruststelsel is, en dat vergelijking (8) een tensorvergelijking is die in het ruststelsel reduceert tot vergelijking (7), weten we dat we met vergelijking (8) de correcte uitdrukking voor elk coördinatenstelsel hebben gevonden.

Het concept van een perfecte vloeistof is algemeen genoeg om een grote verscheidenheid van vormen van materie te beschrijven. Vervolgens specificeren we de toestandsvergelijking om de evolutie van een dergelijke vloeistof te bepalen. De toestandsvergelijking relateert de druk aan de energiedichtheid,  $P = P(\rho)$ . Stof is een speciaal geval waarvoor  $P = 0$ , terwijl een isotroop gas bestaande uit fotonen  $P = \frac{1}{3}\rho$  heeft (we leiden dit af in sectie 2.1.1; verder stellen we  $c = 1$ ).

Een meer exotisch voorbeeld is de energie van het vacuüm, waarvoor de energie-impuls tensor evenredig is met de metriek,  $T^{\mu\nu} = -\rho_{\text{vacuum}} g^{\mu\nu}$  (we tonen dit in sectie 1.2). Het idee van een energiedichtheid van het vacuüm is zinloos in de speciale relativiteitstheorie, omdat daar de absolute schaal van de energie niet relevant is, alleen de energieverschillen tussen toestanden. In de algemene relativiteitstheorie daarentegen koppelt alle energie aan gravitatie (en veroorzaakt kromming van ruimtetijd), en wordt de mogelijkheid van het bestaan van vacuümenergie een belangrijke beschouwing.

### 1.1.3 Continuïteitsvergelijking

Behalve dat  $T^{\mu\nu}$  symmetrisch is, heeft hij de belangrijke eigenschap dat hij behouden is. Energie- en impulsbehoud worden uitgedrukt door het feit dat de divergentie gelijk is aan nul,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (9)$$

Bovenstaande uitdrukking is een verzameling van vier vergelijkingen, een voor elke waarde van  $\nu$ . De uitdrukking voor  $\nu = 0$  correspondeert met energiebehoud, terwijl  $\partial_\mu T^{\mu k} = 0$  met  $k = 1, 2, 3$  behoud van de  $k$ -de component van de impuls uitdrukt. Laten we dit eens toepassen op de perfecte vloeistof. We vinden dan

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu(\rho + P/c^2)u^\mu u^\nu + (\rho + P/c^2)(u^\nu \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu u^\nu) + \partial^\nu P. \quad (10)$$

Om te analyseren wat deze uitdrukking betekent, is het nuttig om afzonderlijk te beschouwen wat er gebeurt als we een en ander projecteren langs en loodrecht op het viersnelheidsveld  $u^\mu$ . Allereerst merken we op dat de normalisatie  $u_\nu u^\nu = -1$  de volgende identiteit levert,

$$u_\nu \partial_\mu u^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu (u_\nu u^\nu) = 0. \quad (11)$$

Projecteren komt neer op contraheren met  $u_\nu$  en we vinden

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = -\partial_\mu(\rho u^\mu) - P \partial_\mu u^\mu. \quad (12)$$

Als we dit gelijkstellen aan nul vinden we de relativistische vergelijking voor energiebehoud van een perfecte vloeistof. Het ziet er vertrouwd uit in de niet-relativistische limiet, waar geldt

$$u^\mu = (1, v^i), \quad |v^i| \ll 1, \quad P \ll \rho. \quad (13)$$

De laatste vergelijking is aannemelijk, omdat druk alleen van de random bewegingen van de individuele deeltjes komt, en in deze limiet zijn deze bewegingen (net als de beweging van de bulk met  $u^\mu$ ) klein. We vinden dus in niet-relativistische taal

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (14)$$

hetgeen de continuïteitsvergelijking is voor de energiedichtheid.

### 1.1.4 Eulervergelijking voor een perfecte vloeistof

Tenslotte gaan we naar het deel van vergelijking (10) dat loodrecht staat op de viersnelheid. Om een vector loodrecht op  $u^\mu$  te projecteren, moeten we die vermenigvuldigen met de projectie tensor

$$P^\sigma_\nu = \delta^\sigma_\nu + u^\sigma u_\nu. \quad (15)$$

We kunnen controleren dat bovenstaande projectie tensor zijn werk doet door een vector  $V^\mu_{\parallel}$  parallel aan  $u^\mu$  en een andere vector  $W^\mu_{\perp}$  loodrecht op  $u^\mu$  te nemen. We vinden dan

$$\begin{aligned} P^\sigma_\nu V^\nu_{\parallel} &= 0, \\ P^\sigma_\nu W^\nu_{\perp} &= W^\sigma_{\perp}. \end{aligned} \quad (16)$$

Toepassen op  $\partial_\mu T^{\mu\nu}$  levert

$$P^\sigma_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2)u^\mu \partial_\mu u^\sigma + \partial^\sigma P + u^\sigma u^\mu \partial_\mu P. \quad (17)$$

We interpreteren deze vergelijking in de niet-relativistische limiet. Als we de ruimtelijke componenten gelijkstellen aan nul, vinden we

$$\rho [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] + \nabla P + \vec{v}(\partial_t P + \vec{v} \cdot \nabla P) = 0. \quad (18)$$

Merk op dat de laatste paar termen afgeleiden hebben van  $P$  keer de driesnelheid  $\vec{v}$ , waarvan we aannemen dat die klein is. Deze termen zijn verwaarloosbaar ten opzichte van de  $\nabla P$  term. We houden dan over

$$\rho [\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] = -\nabla P, \quad (19)$$

en dit is de vergelijking van Euler uit de vloeistofmechanica.

## 1.2 Standaard model van de kosmologie

De beschrijving van het heelal is gebaseerd op de einsteinvergelijkingen,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad G_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}), \quad (20)$$

waarbij  $R_{\mu\nu}$  de Ricci tensor is,  $g_{\mu\nu}$  de metriek,  $R$  de Ricci scalar,  $\Lambda$  de kosmologische constante en  $T_{\mu\nu}$  de energie-impuls tensor. De einsteintensor  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  en de bijdrage van de kosmologische constante is ondergebracht in de energie-impulstensor  $T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \Lambda g_{\mu\nu}$ . Als dit allemaal wat rauw op uw dak valt, dan stel ik voor dat u het materiaal in appendix D bestudeert (benader me gerust voor eventuele vragen).

Het basisidee achter de einsteinvergelijkingen is dat de aanwezigheid van materie zorgt voor kromming van ruimtetijd. Deze kromming kan wiskundig worden samengevat in de riemannntensor  $R^{\mu}_{\sigma\beta\alpha}$  en haar contracties. De energie- en impulsinhoud van materie en straling wordt in tensorvorm gegeven door  $T_{\mu\nu}$ .

In de beschrijving van het heelal hebben we te maken met veel deeltjes en kunnen we volstaan met een hydrodynamische behandeling van een "vloeistof" van deeltjes. Voor een perfecte vloeistof geldt

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)u^{\mu}u^{\nu} - P g_{\mu\nu}, \quad (21)$$

waarbij  $u$  de viersnelheid van de vloeistof is (met  $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$  in het ruststelsel van de vloeistof),  $P$  de druk en  $\rho$  de energiedichtheid. Merk op dat we kunnen bewijzen dat de covariante divergentie  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ .

We hebben de  $\Lambda$ -term in vergelijking (20) naar de rechterzijde van het  $=$ -teken gebracht en kunnen de uitdrukking dan beschouwen in een vrij-vallend coördinatensysteem (waarvoor geldt  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ). We zien dan dat de  $\Lambda$ -term zich gedraagt als een bijdrage tot de energie-impulstensor van de vorm

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \begin{pmatrix} \rho_{\Lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_{\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_{\Lambda} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Het blijkt dat deze vacuümenergie de eigenschap heeft dat als de energiedichtheid  $\rho_{\Lambda}$  positief is, de druk negatief is. We zullen zien dat deze toestandvergelijking,  $P = -\rho$ , leidt tot een toenemende expansie van het heelal.

Het standaard model van de kosmologie is gebaseerd op de isotrope en homogene einsteinvergelijkingen voor het Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) model. Hiervoor definiëren we het FLRW lijnelement

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (23)$$

met  $k = -1, 0, +1$  een factor die de aard van de kromming van een familie gelijksoortige ruimten bepaalt. Verder is  $a(t)$  de tijdsafhankelijke schaalfactor van het heelal, die samen met  $k$  de volledige tijdsevolutie vastlegt. Voor een perfecte vloeistof is er nu een coördinatenstelsel, het zogenaamde mee-bewegende stelsel (*co-moving frame*), waarin de vloeistof er perfect isotroop uitziet. Het correspondeert met constante waarden voor  $r$ ,  $\theta$  en  $\phi$  in vergelijking (24). Soms is het handig om de zogenaamde *conforme tijd* te gebruiken, waarbij geldt  $d\tau = dt/a(t)$ . We kunnen vergelijking (24) dan schrijven als

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[ d\tau^2 - \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right], \quad (24)$$

en we herkennen dan voor  $k = 0$  het product van een statische minkowskimetriek en een tijdsafhankelijke conforme factor  $a(\tau)$ . Omdat licht langs nul-geodeten beweegt ( $ds = 0$ ) is haar voortplanting in de FLRW-metriek hetzelfde als in de minkowski metriek als we eerst naar conforme tijd transformeren. Overigens is  $k = 0$  een goede aanname omdat uit vergelijking (2) volgt dat het heelal nagenoeg vlak is.

### 1.3 Meebewegende coördinaten

Als we naar de FLRW metriek (23) kijken, dan zien we dat de tien willekeurige functies van ruimtetijd door onze symmetrie-eisen gereduceerd zijn tot één enkele functie van de tijd, de schaalfactor  $a(t)$ , en een krommingsparameter  $k$  (die enkel de waarden  $-1, 0$  of  $1$  kan aannemen). De coördinaten  $x^i \equiv x^1, x^2, x^3$  noemen we *meebewegende coördinaten* en een waarnemer met snelheid  $u^\mu = dx^\mu/ds = (1, 0, 0, 0)$  noemen we een *meebewegende waarnemer*. De tijd  $t$  is de tijd op een meebewegende klok. Voor de *fysische snelheid* geldt

$$v_{\text{fysisch}}^i \equiv \frac{dx_{\text{fysisch}}^i}{dt} = a(t) \frac{dx^i}{dt} + \frac{da}{dt} x^i \equiv v_{\text{pec}}^i + H x_{\text{fysisch}}^i. \quad (25)$$

We zien dat de fysische snelheid twee bijdragen heeft: de zogenaamde *peculiar* snelheid  $v_{\text{pec}}^i \equiv a(t)\dot{x}^i$  en de *Hubble flow*  $H x_{\text{fysisch}}^i$ , met  $H \equiv \dot{a}/a$  de Hubble parameter. De peculiar snelheid is de snelheid die een meebewegende waarnemer meet (dat is dus een waarnemer die drijft op de Hubble flow).

#### 1.3.1 Geodeten in de FLRW metriek

De baan van een vrijvallend deeltje (dat mag in ons beeld een sterrenstelsel zijn) in een gekromde ruimte wordt gegeven door de geodetenvergelijking (421) die we in de appendix hebben afgeleid. Er geldt

$$u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (26)$$

Als er enkel gravitatiekrachten werken op het deeltje, dan leidt de eis dat de verandering van de snelheidsvector  $\nabla \vec{u}$  in de richting van de snelheid  $\vec{u}$  gelijk is aan nul, tot een zo recht mogelijk pad in de gekromde ruimtetijd. In feite is bovenstaande vergelijking het equivalent van de tweede wet van Newton. We schrijven de geodetenvergelijking als

$$u^\alpha \left( \frac{du^\mu}{dx^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\beta \right) = 0. \quad (27)$$

Omdat we de metriek kennen uit vergelijking (23) kunnen we de christoffelsymbolen uitrekenen met vergelijking (409), die we voor het gemak herhalen,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (28)$$

Alle christoffelsymbolen met twee tijdindices zijn gelijk aan nul, dus  $\Gamma_{00}^\mu = \Gamma_{0\beta}^0 = 0$ . Verder geldt

$$\Gamma_{ij}^0 = -\dot{a}/ag_{ij}, \quad \Gamma_{0j}^i = -\dot{a}/a\delta_j^i, \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{ik}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}) \quad (29)$$

en weten we dat de christoffelsymbolen symmetrisch zijn,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$ .

Uit de homogeniteit van de FLWR metriek volgt dat  $\partial_i u^\mu = 0$  en kunnen we vergelijking (27) schrijven als

$$u^0 \frac{du^\mu}{dt} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = -\left(2\Gamma_{0j}^\mu u^0 + \Gamma_{ij}^\mu u^i\right) u^j, \quad (30)$$

waarbij we de christoffelsymbolen hebben ingevuld.

We kunnen uit bovenstaande vergelijking diverse belangrijke conclusies trekken.

### 1.3.2 Vrijvallende meebewegende waarnemers

We zien direct uit vergelijking (30) dat deeltjes die in rust zijn in het meebewegende systeem,  $u^j = 0$ , in rust zullen blijven. In dat geval is uitdrukking aan de rechterzijde van het =-teken gelijk aan nul en vinden we

$$u^j = 0 \quad \rightarrow \quad du^j/dt = 0. \quad (31)$$

Een vrijvallende meebewegende waarnemer blijft een meebewegende waarnemer.

### 1.3.3 Kosmologische expansie en het verval van de drie-impuls van deeltjes

We beschouwen de  $\mu = 0$  component van vergelijking (30), maar stellen niet de eis dat de deeltjes in rust moeten zijn. De eerste term aan de rechterzijde van het =-teken is dan gelijk aan nul, omdat  $\Gamma_{0j}^0 = 0$ . We vinden dus

$$u^0 \frac{du^0}{dt} = -\Gamma_{ij}^0 u^i u^j = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2}. \quad (32)$$

We gebruiken hier de relatie tussen snelheid en vierimpuls  $p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (\frac{E}{c}, \mathbf{p}) = mu^\mu$  en de relatie tussen de componenten van de vierimpuls  $p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$ . Merk op dat voor fotonen geldt dat  $m = 0$ . Er geldt  $p^0 dp^0 = |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}|$  en we schrijven

$$\frac{|\dot{\mathbf{p}}|}{|\mathbf{p}|} = -\frac{\dot{a}}{a} \quad \rightarrow \quad |\mathbf{p}| \propto \frac{1}{a}. \quad (33)$$

We komen tot de belangrijke conclusie dat de drie-impuls van elk deeltje (zowel massaloos als massief) afneemt tijdens de expansie van het heelal.

### 1.3.4 Roodverschuiving en de wet van Hubble

Uit vergelijking (33) volgt dat we voor massaloze deeltjes vinden

$$|\mathbf{p}| = E \propto \frac{1}{a} \quad \text{massaloze deeltjes.} \quad (34)$$

De energie van massaloze deeltjes neemt af met de expansie van het heelal.

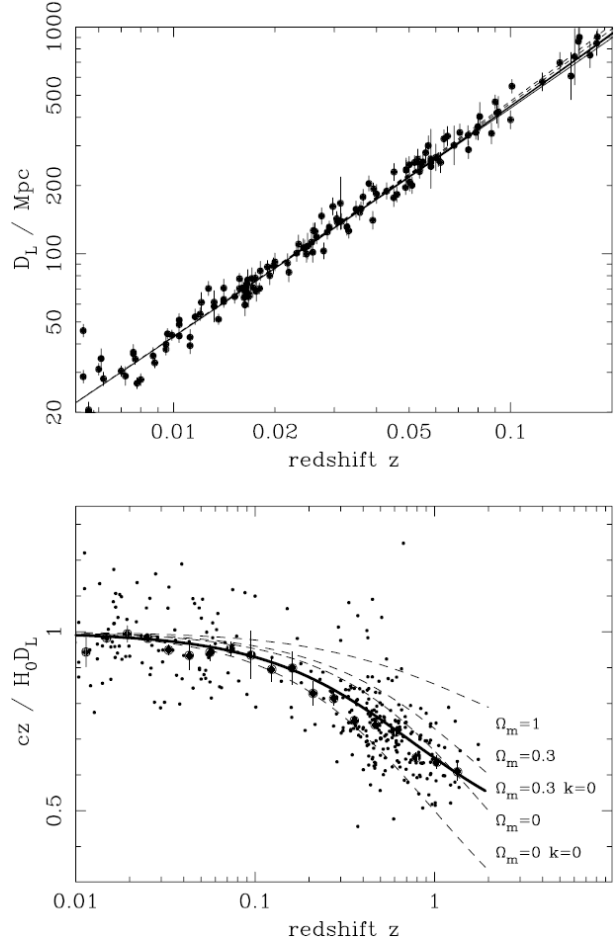
In een quantummechanische beschrijving is de golflengte van licht omgekeerd evenredig met de impuls van het foton,  $\lambda = h/|\mathbf{p}|$ . Omdat volgens vergelijking (34) de fotonimpuls schaaft

met  $a(t)^{-1}$ , zal de golflengte schalen met  $a(t)$ . Licht dat wordt uitgezonden op tijdstip  $t_1$  met golflengte  $\lambda_1$  zal worden waargenomen op tijdstip  $t_0$  met golflengte

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} \lambda_1 = (1+z) \lambda_1. \quad (35)$$

In de tweede stap definiëren we de fractionele golflengteverandering via de roodverschuiving  $z$ , waarbij ook geldt dat  $a(t_0) = 1$ , via

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \rightarrow 1+z = \frac{1}{a(t_1)}. \quad (36)$$



**Figure 2:** *Het supernovae Type Ia Hubble diagram. Boven: de Hubble flow is lineair en uniform voor  $z \ll 1$ . Beneden: op grote schaal wordt de Hubble flow niet-lineair (merk op dat we de lineaire trend er eerst uitgedeeld hebben).*

Voor bronnen die dichtbij staan, mogen we  $a(t_1)$  ontwikkelen in een machtreeks

$$a(t_1) = a(t_0) [1 + (t_1 - t_0)H_0 + \dots], \quad (37)$$

met  $H_0$  de zogenaamde Hubble constante

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (38)$$

Met behulp van vergelijking (36) vinden we dan  $z = H_0(t_0 - t_1) + \dots$ . Voor objecten die dichtbij staan, is  $t_0 - t_1$  gelijk aan de fysische afstand  $d$ , maar dan in eenheden  $c = 1$ . We zien hiermee dat de roodverschuiving lineair toeneemt met de afstand

$$z \approx H_0 d. \quad (39)$$



Dit lineaire gedrag voor nabije sterrenstelsels wordt getoond in Fig. 2. De figuur laat zien dat er op grotere afstanden niet-lineair gedrag optreedt, dat overigens goed beschreven kan worden als er een bijdrage van vacuümenergie wordt meegenomen in het  $\Lambda$ CDM model.

### 1.3.5 Convergeren op de Hubble flow

Voor massieve deeltjes hebben we gevonden dat

$$|\mathbf{p}| = \frac{m|\mathbf{v}|}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2}} \propto \frac{1}{a} \text{ massieve deeltjes.} \quad (40)$$

Hier is  $v^i = dx^i/dt$  de meebewegende peculiar snelheid van de deeltjes (dat is de snelheid ten opzichte van een meebewegend coördinatensysteem) en  $|\mathbf{v}|^2 \equiv g_{ij}v^iv^j$  is de grootte van de fysische peculiar snelheid. Verder hebben we gebruikt dat

$$p^i = mu^i = m \frac{dx^i}{ds} = m \frac{dt}{ds} v^i = \frac{mv^i}{\sqrt{g_{ij}v^iv^j}} = \frac{mv^i}{\sqrt{1-|\mathbf{v}|^2}}. \quad (41)$$

We zien weer dat het meebewegende stelsel een natuurlijk stelsel is. In een heelal dat expandeert, zal een vrij vallende waarnemer tot rust komen in een meebewegend stelsel, zelfs al heeft deze waarnemer een bepaalde beginsnelheid. Vrijvallende waarnemers convergeren op de Hubble flow.

## 1.4 Friedmannvergelijkingen

We gaan uit van de FLRW metriek gegeven in vergelijking (23) en berekenen de christoffelsymbolen. De volgende zijn ongelijk aan nul (verder hebben we weer de symmetrie  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{00}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, & \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta, & & & & \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{03}^3 &= \frac{\dot{a}}{a}, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta. \end{aligned} \quad (42)$$

Voor de Ricci tensor geldt

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma. \quad (43)$$

We vinden

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3\frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{11} &= -\frac{a\ddot{a}+2\dot{a}^2+2k}{1-kr^2}, \\ R_{22} &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2, \\ R_{33} &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2 \theta, \\ R_{\mu\nu} &= 0, \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (44)$$

Voor  $c = 1$  en  $u^\mu u_\mu = 1$ , dus

$$T = T^\mu_\mu = (\rho + P) - 4P = \rho - 3P. \quad (45)$$

In ons meebewegend coördinatenstelsel geldt  $u^\mu = \delta_0^\mu$  en dus

$$u_\mu = g_{\mu\nu} \delta_0^\nu = g_{\mu 0} = \delta_\mu^0 \text{ en } T_{\mu\nu} = (\rho + P) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 - P g_{\mu\nu}. \quad (46)$$

Invullen van dit alles in de einsteinvergelijkingen levert voor de 00-componenten de friedmannvergelijking

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \rightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (47)$$

met

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{en} \quad \rho = \rho_m + \rho_{\text{rad}} + \rho_{\text{vac}}. \quad (48)$$

We kunnen nog een tweede vergelijking afleiden (uit de andere componenten van de einsteinvergelijkingen) en vinden

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi GP. \quad (49)$$

#### 1.4.1 Continuïteitsvergelijking

De covariante divergentie conditie  $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$  kunnen we toepassen op de perfecte vloeistof gegeven in vergelijking (46) en dit levert (zie ook sectie 1.1.3)

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} + P u^\mu_{;\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad (\rho + P) u^\nu_{;\mu} u^\mu = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) P_{,\mu}. \quad (50)$$

De eerste relatie kan gevonden worden door vergelijking (10) te contraheren met  $u_\nu$ . We hebben dit resultaat gebruikt om vervolgens de tweede vergelijking te vinden. We kunnen dit herschrijven tot

$$\rho_{,\mu} u^\mu + (\rho + P) (u^\mu_{;\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\mu} u^\nu) = 0, \quad (51)$$

en met  $u^\mu = \delta_0^\mu$  reduceert dit tot

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (52)$$

Het bovenstaande is de continuïteitsvergelijking en hieraan wordt dus door de friedmannvergelijkingen automatisch voldaan. Het betekent dat onze vloeistofdeeltjes (sterrenstelsels dus) geodeten volgen. Dit hadden we kunnen verwachten, omdat de druk  $P$  enkel een functie van de tijd  $t$  is. Er bestaan geen gradiënten  $\nabla P$  die deeltjes van de geodeten af kunnen drukken.

#### 1.4.2 Continuïteitsvergelijking uit thermodynamische beschouwingen

De combinatie van relaties (47) en (49) levert ook de continuïteitsvergelijk (52), maar dan in de vorm

$$\dot{P} a^3 = \frac{d}{dt} (a^3 [\rho + P]) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} (\rho a^3) = -P \frac{d}{dt} a^3 = -P \frac{dV}{dt}. \quad (53)$$

Hierbij zijn  $\rho$  en  $P$  de totale energiedichtheid en totale druk van de vloeistof. Het volgt dat de verandering in de tijd van de totale energie in volume-element  $V = a^3$  gelijk is aan de arbeid die tijdens de expansie verricht wordt: de druk  $-P$  keer de volume-verandering in de tijd,  $dV/dt$ . We zien hier de eerste wet van de thermodynamica aan het werk in een adiabatisch proces waarbij de entropie niet verandert. Ook blijkt het mogelijk om een temperatuur aan het systeem toe te kennen. We bespreken dit alles in sectie 2.4.

#### 1.4.3 Kritische dichtheid

We kunnen de friedmannvergelijking (47) vereenvoudigen door een kritische dichtheid  $\rho_c = \rho_{\text{kritische dichtheid}}$  te definiëren. Voor een gegeven  $H = \dot{a}/a$  is dat de dichtheid die nodig is om een vlak Universum met  $k = 0$  te verkrijgen. We vinden dan

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (54)$$

Merk op dat dit geen constante is: de kritische dichtheid hangt af van de schaalfactor en daardoor van de tijd. Omdat we de Hubble constante op dit moment  $H_0$  kennen (en ook de constante  $G$ ) kunnen we eenvoudig uitrekenen dat de kritische dichtheid op dit moment ongeveer  $\rho_{c,0} \approx 10^{-26}$

kg/m<sup>3</sup> is; ongeveer 1 proton per kubieke meter. We kunnen de dichtheid ook uitdrukken in termen van de kritische dichtheid als  $\Omega_{i,0} = \rho_{i,0}/\rho_{c,0}$ , met  $i = r, m$  en  $\Lambda$  voor respectievelijk straling, materie, en donkere energie. In analogie definiëren we een dichtheidsparemeter voor de kromming,  $\Omega_{k,0} \equiv -k/(a_0 H_0)^2$ .

We kunnen de friedmannvergelijking (47) nu schrijven als

$$H^2 = H_0^2 (\Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_\Lambda). \quad (55)$$

Hierbij hebben we de index "0" op de dichtheidsparematers vervangen door hoofdletters. Alle dichtheden refereren naar de huidige dichtheid. Ook gebruiken we weer dat  $a_0 \equiv 1$ . In de volgende sectie zullen we zien dat  $\Omega_K \leq 0.01$ . Dit in combinatie met het feit dat de krommingsbijdrage tot de energiedichtheid slechts schaalt met  $a^{-2}$  leidt ertoe dat we deze bijdrage in het vervolg zullen verwaarlozen.

Met vergelijking (36) kunnen we bovenstaande uitdrukking ook schrijven als

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]. \quad (56)$$

Hiermee kunnen we de Hubble parameter bepalen als functie van de roodverschuiving.

#### 1.4.4 De terugkijktijd en de leeftijd van het heelal

Uit de definities van de Hubble parameter en de roodverschuiving vinden we

$$H = \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{a(t)}{a_0} \right) = \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{1}{1+z} \right) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (57)$$

Als we dit combineren met vergelijking (56) vinden we

$$\frac{dt}{dz} = \frac{-(1+z)^{-1}}{H_0 [\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{\frac{1}{2}}}. \quad (58)$$

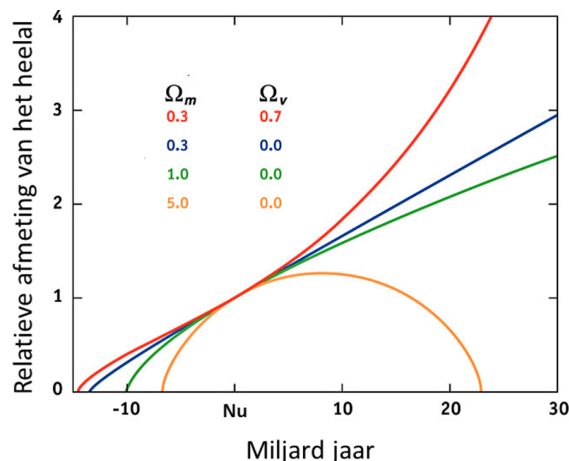
Door dit te integreren vinden we een uitdrukking voor de terugkijktijd; dat is het tijdsverschil tussen het heden op  $t_0$  en de tijd van een gebeurtenis die plaatsvond bij een roodverschuiving  $z$  als functie van  $H_0$ ,  $\Omega_R$ ,  $\Omega_M$ ,  $\Omega_K$  en  $\Omega_\Lambda$ . We vinden

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \int_0^{z_1} \frac{dz}{(1+z) [\Omega_R(1+z)^4 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{\frac{1}{2}}}. \quad (59)$$

We tonen enkele voorbeelden van de evolutie van het heelal in het  $\Lambda$ CDM model in Fig. 3. De limiet  $z \rightarrow \infty$  komt overeen met de keuze  $t_1 = 0$  en levert de huidige leeftijd van het heelal. Op 21 maart 2013 kwam het Europese team wetenschappers dat werkt met de Planck satelliet met de laatste resultaten. Volgens hen is het heelal  $13.798 \pm 0.037$  miljard jaar oud en bevat het 4.8% gewone materie, 25.8% donkere materie en 69.2% donkere energie. De Hubble constante  $H_0$  werd ook gemeten en bedraagt  $67.80 \pm 0.77$  (km/s)/Mpc.

#### 1.4.5 Het vlakheidsprobleem

Metingen wijzen uit dat het heelal tegenwoordig een metriek heeft die extreem vlak is en dus beschreven kan worden met de vlakke FLRW metriek. De meest recente data worden gegeven in vergelijking (2). Hier zullen we laten zien dat de uitdijning van het heelal voorspelt dat de kromming van het heelal steeds kleiner dient te worden:  $\Omega_k \rightarrow 0$  als  $t$  groter wordt. Dit impliceert dat de metriek in het vroege heelal *nog veel meer* geleken heeft op de perfect vlakke FLRW metriek, teneinde de huidige vlakheid te verklaren. Dit staat bekend als het *vlakheidsprobleem*.



**Figuur 3:** Evolutie van het heelal voor verschillende bijdragen van massa en donkere energie dichtheid. Image credit: NASA / WMAP science team.

De vraag is dan ook: "via welk mechanisme is de vroegste waarde van de vlakheid zo dicht bij de perfecte FLRW vlakheid komen te liggen?" Deze vraag kan ontweken worden door *aan te nemen* dat het heelal altijd al precies vlak is geweest. Dit leidt echter tot de vraag *waarom* het heelal begonnen is met precies de kritische dichtheid. Het standaard model van de kosmologie geeft geen antwoord op deze vragen.

We herschrijven de eerste friedmannvergelijking als

$$\frac{3a^2}{8\pi G}H^2 = \rho a^2 - \frac{3kc^2}{8\pi G} \rightarrow \rho_c a^2 - \rho a^2 = -\frac{3kc^2}{8\pi G} \rightarrow (\Omega^{-1} - 1) \rho a^2 = -\frac{3kc^2}{8\pi G}. \quad (60)$$

Rechts van het =-teken staan enkel constanten. Tijdens expansie neemt de dichtheid af (bijvoorbeeld met  $a^{-3}$ ). Sinds de Planck era is  $\rho a^2$  met een factor  $10^{60}$  afgenomen en moet  $(\Omega^{-1} - 1)$  met een factor  $10^{60}$  zijn toegenomen. De experimenten Planck, WMAP en Sloan Digital Sky Survey stellen  $\Omega_0$  op 1 binnen 1% nauwkeurigheid. Dan moet  $|\Omega^{-1} - 1| < 0.01$  en tijdens de Planck era kleiner zijn dan  $10^{-62}$ . Dit staat bekend als het *vlakheidsprobleem*: waarom was de initiële dichtheid van het heelal zo dicht bij de kritische dichtheid? Mogelijke oplossingen zijn inflatie of het antropisch principe.

#### 1.4.6 Afstanden

In de kosmologie gebruiken we diverse uitdrukkingen voor de afstand. Merk op dat sommige van die uitdrukkingen niet overeenkomen met meetbare grootheden. Als we de FLRW metriek gegeven in vergelijking (23) beschouwen, dan is de *metrische* afstand  $d_m$  de afstand waarmee de ruimtehoek  $d\Omega$  wordt vermenigvuldigd. In een vlak heelal ( $k = 0$ ) is de metrische afstand gelijk aan de *meebewegende* (comoving) afstand. De meebewegende afstand  $\chi$  tussen ons en een sterrenstelsel op roodverschuiving  $z$  wordt gegeven door

$$\chi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \quad (61)$$

waarbij de evolutie in roodverschuiving van de Hubble parameter  $H(z)$ , afhangt van de tijdsafhankelijke compositie van het heelal en gegeven wordt door vergelijking (56). Zowel de metrische als de meebewegende afstand is geen observabele.

Als we bronnen hebben waarvan we denken dat we de absolute helderheid<sup>2</sup> (luminositeit  $L$ , de

<sup>2</sup>De helderheid van een ster of sterrenstelsel wordt ook wel aangeduid met lichtkracht of luminositeit.

energie uitgezonden per seconde) kennen, dan kunnen we de waargenomen flux  $F$  (de ontvangen energie per seconde en per eenheid oppervlak) gebruiken om de zogenaamde *luminositeit* afstand  $d_L$  te bepalen. Zo worden bijvoorbeeld Type IA supernovae "standaardkaarsen" genoemd, omdat we denken hun absolute helderheid te kennen. We kunnen een uitdrukking voor  $d_L$  vinden door een bron te beschouwen op een bepaalde meebewegende afstand  $\chi$ . In een statische euclidische ruimte is de relatie tussen absolute helderheid en waargenomen flux,

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2}. \quad (62)$$

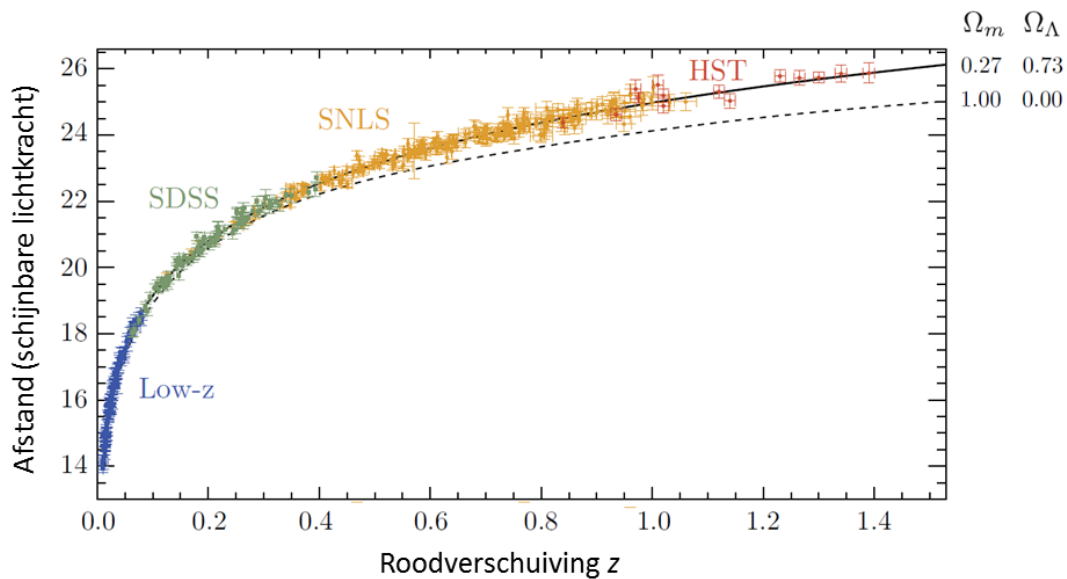
In onze FLRW-ruimte dienen we bovenstaande uitdrukking op de volgende drie manieren te modificeren:

- Als op tijdstip  $t_0$  het licht de aarde bereikt, is het eigenoppervlak een bol met de supernova als centrum en heeft het de waarde  $4\pi d_m^2$ . Een telescoop met apertuur  $A$  neemt dus een fractie licht waar ter grootte  $A/4\pi d_m^2$ .
- Vanwege de roodverschuiving is het aantal fotonen dat per seconde aankomt, een factor  $1/(1+z)$  kleiner dan het aantal fotonen dat per seconde werd uitgezonden.
- De energie  $E_0$  van elk ontvangen foton is vanwege dezelfde roodverschuiving een factor  $1/(1+z)$  lager dan de energie  $E_1$  die het had toen het werd uitgezonden.

De uitdrukking voor de waargenomen flux afkomstig van een bron met helderheid  $L$  op coördinatenafstand  $\chi$  en roodverschuiving  $z$  is

$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2 (1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \rightarrow d_L = d_m(1+z). \quad (63)$$

Met deze definitie is de relatie tussen helderheid, flux en afstand analoog aan die gegeven in



**Figuur 4:** Donkere energie is ontdekt door de afstand en helderheid van Type IA supernovae te meten. Dergelijke bronnen zijn standaardkaarsen en een FLRW-heelal met een dominante bijdrage van donkere energie  $\Omega_\Lambda$  geeft een goede beschrijving van de data.

vergelijking (62) geldig in de euclidische ruimte. Het gebruik van bovenstaande relatie heeft

geleid tot de belangrijke ontdekking van donkere materie en energie. Fig. 4 toont dat een forse bijdrage van donkere energie vereist is voor een goede beschrijving van de supernovae Type IA data met het  $\Lambda$ CDM model.

Soms maken we gebruik van objecten waarvan we de fysische afstand  $D$  kennen. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de fluctuaties in de kosmische microgolf-achtergrondstraling. Laten we weer aannemen dat er zich een object op meebewegende afstand  $\chi$  bevindt en dat de fotonen die we vandaag waarnemen werden uitgezonden op tijd  $t_1$ . Een astronoom kan nu de grootte van de hoek  $\delta\theta$  meten. In een euclidische ruimte zou de afstand  $d_A$  dan gegeven worden door

$$d_A = \frac{D}{\delta\theta}, \quad (64)$$

en deze draagt de naam *hoek-diameter afstand*. De FLRW-metriek in vergelijking (23) geeft

$$D = a(t_1) d_m \delta\theta = \frac{d_m}{1+z} \delta\theta \quad (65)$$

als relatie tussen de fysische transversale grootte van het object en de bijbehorende hoekafmeting aan de hemel. We vinden

$$d_A = \frac{d_m}{1+z}. \quad (66)$$

## 1.5 Een klassiek heelal dat bestaat uit stof

In het volgende geven we ter illustratie een klassieke beschrijving van een heelal dat gevuld is met stof. We doen deze simplistische studie om meer inzicht te krijgen in de friedmannvergelijking en gebruiken als model een drukloze vloeistof die beweegt volgens de bewegingswetten en gravitatie van Newton. De stof heeft uniforme dichtheid  $\rho(t)$  en is in een toestand van uniforme expansie. De enige kracht die werkzaam is, is gravitatie. Dit betekent dat de plaatsvector  $\mathbf{r}$  van een stofdeeltje op een gegeven tijd  $t$  beschreven kan worden met de relatie

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{c}, \quad (67)$$

met  $\mathbf{c}$  een constante vector die bepaald wordt door de beginpositie van het stofdeeltje. We nemen de afgeleide

$$\dot{\mathbf{r}} = H(t)\mathbf{r}, \quad (68)$$

met  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ . We zien ook nu weer dat de stof een Hubble constante  $H(t)$  heeft die geassocieerd is met de schaalfactor  $a(t)$ .

De continuïteitsvergelijking luidt (zie vergelijking (357))

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\dot{\mathbf{r}}) = 0. \quad (69)$$

Hieruit volgt  $\dot{\rho} + 3\rho H = 0$ , of  $a\dot{\rho} + 3\dot{a}\rho = 0$ . We kunnen dit integreren en vinden

$$\rho a^3 = \text{constant}. \quad (70)$$

We gebruiken nu weer de conventie dat we de huidige periode in het heelal aanduiden met subscript 0 en schrijven bovenstaande relatie als

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3. \quad (71)$$

De vergelijking van Euler voor een vloeistof heeft de vorm (zie ook sectie 1.1.4)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla \right) \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (72)$$

met  $\mathbf{F}$  de kracht per massa-eenheid. Met  $\dot{\mathbf{r}} = H(t)\mathbf{r}$  reduceert dat tot

$$\left(\dot{H} + H^2\right)\mathbf{r} = \mathbf{F}. \quad (73)$$

De kracht  $\mathbf{F}$  ontstaat ten gevolge van gravitatie en voldoet aan  $\nabla \cdot \mathbf{F} = -4\pi G\rho$ . Als we de divergentie nemen van vergelijking (73) vinden we

$$3\left(\dot{H} + H^2\right) = -4\pi G\rho. \quad (74)$$

We schrijven weer  $H = \dot{a}/a$  en vinden

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho. \quad (75)$$

Bovenstaande uitdrukking is precies gelijk aan de relativistische vergelijking (47). We gebruiken de uitdrukking voor  $\rho$  uit vergelijking (71) en vullen dat in. Dit levert

$$2\ddot{a} + \frac{A^2}{a^2} = 0, \quad \text{met } A^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3}. \quad (76)$$

We vermenigvuldigen met  $\dot{a}$  en integreren. We vinden dan

$$\dot{a}^2 + k = \frac{A^2}{a}, \quad (77)$$

met  $k$  een integratieconstante. In de friedmann-modellen kan  $k$  enkel de waarden 0 en  $\pm 1$  aannemen. We vragen ons af wat de betekenis van  $k$  is in ons met stof gevuld newtoniaanse heelal. Dat wordt duidelijk als we vergelijking (77) beschouwen als een vergelijking voor de energie van het complete heelal. We herschrijven de uitdrukking als

$$\dot{a}^2 - \frac{A^2}{a} = -k, \quad (78)$$

waarbij we de term  $\dot{a}^2$  herkennen als een kinetische energie, terwijl  $-A^2/a$  een maat is voor de potentiële energie. De totale energie wordt gegeven door  $-k$ . Als  $k = -1$ , dan is de totale energie positief en heeft het heelal een overschot aan kinetische energie en zal het eeuwig expanderen. Voor  $k = 0$  is de totale energie gelijk aan nul en is de kinetische energie voldoende om het heelal te laten expanderen, maar er geldt  $\dot{a} \rightarrow 0$  en  $a \rightarrow \infty$  voor  $t \rightarrow \infty$ . Tenslotte, voor  $k = 1$  heeft het heelal onvoldoende energie voor continue expansie. Het expandeert tot  $\dot{a} = 0$  (dat treedt op als  $a = A^2$ ) en daarna contraheert het heelal weer.

## 1.6 Uitgewerkte opgaven

### 1.6.1 Kritische massadichtheid

Gebruik de mechanica van Newton om te laten zien dat een deeltje met massa  $m$  buiten een bolvormig volume van het heelal dat expandeert met snelheid  $v = H_0 d$  kan ontsnappen aan de gravitationele aantrekking, als de dichtheid  $\rho_M \leq \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ .

*Antwoord:* Voor een testdeeltje met precies de ontsnappingsnelheid kunnen we de wet van behoud van energie schrijven als

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{d} = 0, \quad (79)$$

waarbij de eerste term de kinetische energie en de tweede term de gravitationele potentiële energie is ten gevolge van de massa  $M$  binnen de bol met straal  $d$ . Als het testdeeltje ontsnapt naar oneindig, dan zijn zowel de kinetische als potentiële energie gelijk aan nul.

We gebruiken nu de wet van Hubble,  $v = H_0 d$  en  $M = \frac{4}{3}\pi\rho_c d^3$  en vinden dan de uitdrukking voor de kritische massadichtheid

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (80)$$

Invullen van de waarden voor  $H_0$  en  $G$  levert

$$\rho_0 = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}, \quad (81)$$

waarbij het gebruikelijk is om de Hubble constante te verwerken in de dimensieloze parameter  $h = H_0/(100 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc})$ .

Merk op dat vergelijking (80) ook afgeleid kan worden uit de algemene relativiteitstheorie.

### 1.6.2 Natuurlijke eenheden

We kiezen eenheden zodanig dat de vergelijkingen er zo eenvoudig mogelijk uitzien. Hiertoe kiezen we

$$c = \hbar = 1. \quad (82)$$

Dit betekent dat alle grootheden met dimensies kunnen worden uitgedrukt in termen van energie, eV. Als we weer de waarden willen hebben in SI eenheden, dienen we geschikte machten van  $\hbar$  en  $c$  te gebruiken in de uiteindelijke uitdrukkingen. Hiervoor kunnen we een dimensionele analyse toepassen.

*Opgave a):* Schrijf Newtons gravitatieconstante in termen van de Planckmassa.

*Antwoord:* In SI eenheden hebben we

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}. \quad (83)$$

We proberen dit nu te schrijven als een product  $\hbar^\alpha c^\beta m_{\text{Pl}}^\gamma$ , waarbij de constanten  $\alpha$ ,  $\beta$  en  $\gamma$  bepaald worden door de eis dat deze combinatie dezelfde dimensie heeft als die van  $G$ . Dit definieert de Planckmassa, zodat geldt

$$G = \frac{\hbar c}{m_{\text{Pl}}^2}, \quad (84)$$

met numerieke waarde

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 1.211 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2, \quad (85)$$

of als we weer  $c = 1$  gebruiken, vinden we

$$m_{\text{Pl}} = 1.211 \times 10^{19} \text{ GeV}. \quad (86)$$



Dit is een enorme massa, zelfs ten opzichte van de massa van het Higgs boson (126 GeV) en die van de top quark (175 GeV).

*Opgave b):* Voor een discussie van thermodynamica in het vroege heelal, is het gebruikelijk om temperatuur te meten in eenheden van energie of massa. Dit betekent dat we dan eenheden kiezen waarvoor de constante van Boltzmann  $k_B = 1$ . Hoeveel graden Kelvin komt overeen met een temperatuur van 1 MeV?

*Antwoord:* We vinden  $1 \text{ MeV} = 1.1605 \times 10^{10} \text{ K}$ .

## 1.7 Opgaven

### 1.7.1 Hubble constante in SI eenheden

Bepaal de waarde van enkele astronomische grootheden in SI eenheden.

*Opgave a)*: Bepaal de waarde van de huidige Hubble constante in SI eenheden

*Opgave b)*: Bepaal 1 Mpc in SI eenheden

*Opgave c)*: Bepaal 1 lichtjaar in SI eenheden

*Opgave d)*: Bepaal  $H_0$  in SI eenheden

### 1.7.2 Continuïteitsvergelijking

Geef een afleiding van vergelijking (53).

### 1.7.3 Kritische dichtheid

Leid vergelijking (54) af en bereken de kritische dichtheid van het huidige heelal.

### 1.7.4 Klassiek heelal en vergelijking van Euler

Ga uit van vergelijking  $\dot{\rho} + 3\rho H = 0$  voor een klassiek heelal en laat zien dat  $3\ddot{a}/a = -4\pi G\rho$ .  
Hint: gebruik de vergelijking van Euler.

### 1.7.5 Algemene relativiteitstheorie

Deze opgaven zijn bedoeld als oefening voor studenten met een achtergrond in de algemene relativiteitstheorie. Het geeft verdieping, maar is niet nodig voor een goed begrip van het college.

*Opgave a)*: Toon aan dat de christoffelsymbolen symmetrisch zijn:  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$ .

*Opgave b)*: Geodeten: geef een afleiding van vergelijking (30).

*Opgave c)*: Continuïteitsvergelijking: geef een afleiding van vergelijking (50).

## 2 THERMODYNAMICA VAN HET VROEGE HEELAL

### 2.1 Thermodynamische toestanden

#### 2.1.1 Toestandsvariabelen: druk en energiedichtheid

Druk wordt gedefinieerd als de hoeveelheid impuls die per seconde een oppervlakte-element  $dA$  met normaalvector  $\hat{\mathbf{n}}$  passeert. Stel we hebben deeltjes in een denkbeeldige doos. We beschouwen de wand waarvan de normaalvector langs de positieve  $x$ -richting wijst. Deze wand heeft een oppervlak  $A$  en de druk is de kracht gedeeld door dat oppervlak  $P = F/A = (dp/dt)/A$ . We beschouwen eerst het geval waarbij alle deeltjes in de positieve  $x$ -richting bewegen, waarbij ze allemaal impuls met waarde  $p = |\mathbf{p}|$  hebben, terwijl de deeltjesdichtheid  $n$  is. Gedurende tijd  $dt$  zullen de deeltjes in het volume  $Av(p)dt$  met de wand botsen, en dit aantal botsende deeltjes is  $dN = nAv(p)dt$ . Als een deeltje elastisch tegen de wand botst, dan is de impulsoverdracht  $2p$ . De totaal overgedragen impuls is dan  $dp = (2p)dN = (2p) \times nAv(p)t$ . De druk is dan  $P = \frac{F}{A} = 2npv(p)$ . Voor een isotrope deeltjesverdeling beweegt gemiddeld  $1/6$ -deel van de deeltjes in de positieve  $x$ -richting, terwijl als de deeltjes verschillende impulsen hebben, we dienen te integreren over de impulsverdeling. Dit levert voor de druk

$$P = \int_0^\infty \frac{1}{3} p v(p) n(p) dp. \quad (87)$$

Overigens zullen we verderop in de tekst de integraties over de hoeken netjes doen. Hier wil ik iets anders laten zien, namelijk de relatie tussen druk en de (kinetische) energiedichtheid.

Voor niet-relativistische deeltjes geldt  $v = p/m$  en vinden we

$$P = \int_0^\infty \frac{1}{3} p \left(\frac{p}{m}\right) n(p) dp = \int_0^\infty \frac{1}{3} (2E_{\text{kin}}) n(p) dp = \frac{2}{3} \rho_{\text{kin}}. \quad (88)$$

We zien dat de kinetische energiedichtheid evenredig is met de druk,  $\rho_{\text{kin}} = 3P/2$ .

Voor ultra-relativistische deeltjes geldt  $v = c$  en  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc$ , en vinden we

$$P = \int_0^\infty \frac{1}{3} p c n(p) dp = \int_0^\infty \frac{1}{3} E n(p) dp = \frac{\rho}{3}. \quad (89)$$

We zien dat voor ultra-relativistische deeltjes, zoals fotonen, geldt voor de energiedichtheid  $\rho = 3P$ .

Beide relaties zijn algemeen geldig, onafhankelijk van de impulsdistributie! Merk op dat we de interacties tussen de deeltjes verwaarloosd hebben en we nemen in feite dus aan dat er deeltjesinteracties zijn om thermisch evenwicht te bereiken, maar dat die zwak genoeg zijn om verwaarloosd te mogen worden.

#### 2.1.2 Toestandsvergelijkingen

In het algemeen kunnen we een eenvoudige relatie tussen  $\rho$  en  $P$  gebruiken die we de toestandsvergelijking noemen. We schrijven dan

$$\rho = \alpha \cdot P, \quad (90)$$

met  $\alpha$  een constante. Voor niet-relativistische materie wordt  $\rho$  gedomineerd door de rustenergie  $mc^2$ , die groot is ten opzichte van de druk  $P$  (want de druk is evenredig met de snelheid in het kwadraat voor  $v \ll c$ ). We kunnen dan aannemen dat de vloeistof drukloos is en  $\alpha = 0$ . We noemen dit "stof". Voor straling geldt  $v \approx c = 1$  en  $P = \rho/3$ , omdat de druk gemiddeld wordt

over drie ruimtelijke richtingen. Er geldt dan  $\alpha = 1/3$ . Voor vacuümenergie geldt  $P = -\rho$  en dus  $\alpha = -1$ . Voor  $\rho = \alpha P$  vinden we uit vergelijking (52)

$$\rho = \text{const} \cdot a^{-3(1+\alpha)}. \quad (91)$$

De relatie voor behoud van energie geeft dan

$$\dot{\rho} + 3(1 + \alpha)H\rho = 0, \quad (92)$$

waarbij we weer  $H = \dot{a}/a$  gebruiken.

We vinden dat voor een door straling gedomineerd heelal (dat was gedurende de eerste paar duizend jaar het geval) geldt

$$\rho \propto \frac{1}{a^4} \quad \text{door straling gedomineerd}, \quad (93)$$

terwijl voor een heelal dat door materie wordt gedomineerd geldt dat

$$\rho \propto \frac{1}{a^3} \quad \text{door materie gedomineerd}. \quad (94)$$

Dit gedrag voor  $\rho$  is betrekkelijk eenvoudig te begrijpen. Stabiele materie, zoals baryonen, wordt niet spontaan gecreëerd of geannihileerd. Een dichtheid gegeven op een bepaald moment neemt echter af, omgekeerd evenredig met de volume-factor  $a^3(t)$ , naarmate de schaalfactor  $a(t)$  in de tijd toeneemt. Voor fotonen is er additionele factor  $a(t)$ , omdat de energie van elk foton afneemt door roodverschuiving ten gevolge van de kosmische expansie. De kosmologische constante tenslotte geeft een schaal-onafhankelijke bijdrage tot de energiedichtheid, zodat geldt

$$\rho \propto \text{const} \quad \text{door vacuum energie gedomineerd}. \quad (95)$$

### 2.1.3 Tijdsevolutie van de schaalfactor, energiedichtheid en druk

Als we het verschil nemen tussen vergelijking (47) en (49), vinden we

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P). \quad (96)$$

We kunnen deze uitdrukking samen met de toestandsvergelijking (90) gebruiken om de tijdsevolutie van de schaalfactor te bepalen. We maken de Ansatz  $a \propto t^\beta$  (goed voor kleine  $t$ , maar niet noodzakelijkerwijs een uitdrukking die asymptotisch correct is) en vullen die in bovenstaande uitdrukking in. Dit levert

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}. \quad (97)$$

Hiermee vinden we de tijdsevolutie van de schaalfactor

$$a(t) \propto \sqrt{t} \quad \text{door straling gedomineerd}, \quad (98)$$

terwijl voor een heelal dat door materie wordt gedomineerd geldt dat

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad \text{door materie gedomineerd}. \quad (99)$$

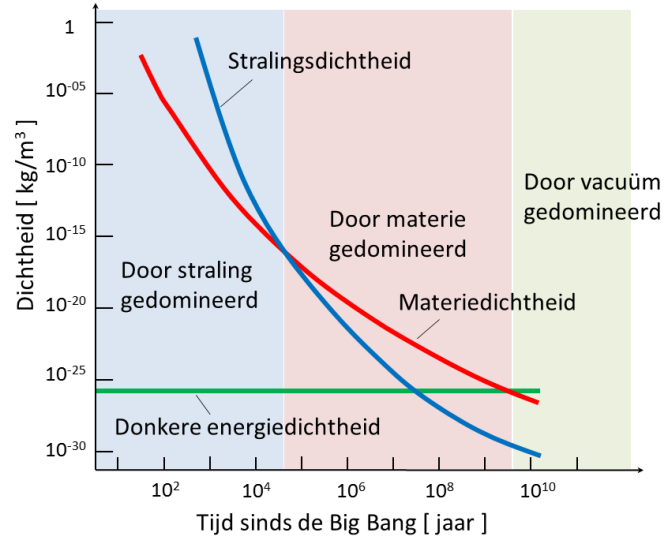
We zien dat voor een heelal dat door straling of materie wordt gedomineerd, de energiedichtheid in beide gevallen kwadratisch afneemt in de tijd  $\rho(t) \propto t^{-2}$ .

De kosmologische constante leidt tot een exponentiële groei van de schaalfactor volgens

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad \text{door vacuum energie gedomineerd}. \quad (100)$$

Het is niet mogelijk om een analytische uitdrukking te geven voor een willekeurig mengsel van materie, straling en vacuümenergie. De evolutie van de schaalfactor kan in dat geval echter numeriek worden bepaald.

Fig. 5 toont de evolutie van de verschillende bijdragen tot de energiedichtheid van het heelal. We zien dat als we maar voldoende ver terug gaan in de tijd, straling de dynamica van het heelal zal domineren.



**Figure 5:** Evolutie van de bijdragen van straling, materie en donkere energie tot de energiedichtheid van het heelal.

Bovenstaande relaties tonen expansie van het heelal. Als we deze expansie terug in de tijd extrapoleren dan levert dit een toestand met oneindige dichtheid en temperatuur in het verleden. Deze singulariteit kan niet met de huidige fysische modellen beschreven worden voor tijden kleiner dan de Planck tijd. We noemen deze singulariteit de Big Bang en recente metingen geven een schatting van de leeftijd van het heelal van 13.798 miljard jaar. Het is opmerkelijk dat we deze leeftijd weten met een nauwkeurigheid van 37 miljoen jaar.

## 2.2 Thermodynamica van het vroege heelal

We gaan nu thermodynamica bedrijven in een heelal dat expandeert. We dienen hierbij de microscopische vrijheidsgraden te begrijpen die nodig zijn om de thermodynamica te behandelen in termen van de statistische mechanica van een groot aantal elementaire deeltjes en quanta. Het is belangrijk dat er een groot aantal interacties tussen de bouwstenen optreedt, zodat we een verandering in thermodynamische toestand mogen beschrijven als een reeks van toestanden in thermodynamisch evenwicht. We mogen dan thermodynamische grootheden als temperatuur  $T$ , druk  $P$ , entropiedichtheid  $s$  gebruiken om de toestand op tijdstip  $t$  te beschrijven. Als het heelal bestaat uit bouwstenen met dichtheid  $n$  (aantal deeltjes per volume-eenheid) en typische relatieve snelheid  $v$ , dan vinden de interacties plaats door botsingen met werkzame doorsnede  $\sigma$ . De interactiesnelheid  $\Gamma$  per deeltje is dan  $\Gamma = n \langle \sigma v \rangle$ . Voor een thermodynamische behandeling eisen we

$$\Gamma \gg H. \quad (101)$$

Merk op dat de deeltjesdichtheid sneller met de temperatuur afneemt (en dus met toenemende tijd) dan de Hubble parameter. Dit betekent dat in sommige epochen bepaalde deeltjes thermodynamisch evenwicht zullen verlaten. Hun deeltjesdichtheid wordt dan "bevroren" en de dichtheid zal dan enkel afnemen door de expansie van het heelal. We zullen dit mechanisme is

enig detail bestuderen, omdat het een groot deel van de deeltjesinhoud van ons huidig heelal verklaart.

### 2.2.1 Intermezzo: resumé van de evenwichtsthermodynamica

We beschouwen een ijl gas dat bestaat uit een mengsel deeltjes van soort  $i$ . We gebruiken de benadering dat de interacties tussen deeltjes zwak zijn, en schrijven de bezettingsgraad van elke toestand  $f_i(\mathbf{p})$  als

$$f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/k_B T} \pm 1}, \quad (102)$$

met energie  $E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}$  in het algemeen een functie van de impuls, chemische potentiaal  $\mu_i$  en temperatuur  $T$ . Het min-teken is voor deeltjes die voldoen aan Bose-Einstein statistiek (bosonen) en het plus-teken voor deeltjes die voldoen aan Fermi-Dirac statistiek (fermionen die het Pauli uitsluitingsprincipe gehoorzamen). Het wordt algemeen aangenomen dat we de chemische potentiaal mogen verwaarlozen in het vroege heelal (later meer hierover).

Een elementaire beschouwing uit de quantummechanica waarbij we de Schrödingervergelijking oplossen voor een deeltje "in een doos" geeft de volgende discrete verzameling eigenwaarden voor de impulsoperator,

$$\mathbf{p} = \frac{h}{L} (n_1 \hat{\mathbf{x}} + n_2 \hat{\mathbf{y}} + n_3 \hat{\mathbf{z}}), \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (103)$$

met  $h$  de constante van Planck. De toestandsdichtheid in impulsruimte (dat is het aantal toestanden /  $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ ) is dus  $\frac{L^3}{h^3} = \frac{V}{h^3}$ . De dichtheid van toestanden tussen impuls met waarde  $p$  en  $p + dp$  en per volume-eenheid is dan

$$g(p)dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} dp, \quad (104)$$

waarbij  $g_s$  het *statistisch gewicht* wordt genoemd (voor fotonen bijvoorbeeld  $g_\gamma = 2$ ).

Als we de deeltjesdichtheid voor impulsen tussen  $p$  en  $p + dp$  willen weten, dan dienen we de bezettingsgraad gegeven door vergelijking (102) te vermenigvuldigen met de dichtheid van de toestanden gegeven door vergelijking (104). Dat levert

$$n(p)dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/kT} \pm 1} dp. \quad (105)$$

De totale deeltjesdichtheid vinden we door over alle impulsen te integreren,

$$n = \int_0^\infty n(p)dp \quad (106)$$

Bij relatief lage temperatuur en  $mc^2 \gg E - \mu \gg kT$  schrijven we

$$v(p) \approx \frac{p}{m}, \quad E = mc^2 + E_{\text{kin}} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} \quad (107)$$

en kunnen we vergelijking (105) vereenvoudigen tot

$$n(p)dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} e^{-\left(mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \mu\right)/kT} dp = A p^2 e^{-p^2/2mkT} dp, \quad (108)$$

waar we alle constanten verzameld hebben in  $A = g_s \frac{4\pi}{h^3} \exp[-(mc^2 - \mu)/kT]$ . De deeltjesdichtheid  $n = N/V$  is dan

$$n = \int_0^\infty n(p)dp = \int_0^\infty A p^2 e^{-p^2/2mkT} dp = A (2mkT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx, \quad (109)$$

met  $x^2 = p^2/2mkT$ . We vinden (zie appendix C)

$$n = A(2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = g_s \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(mc^2 - \mu)/kT}. \quad (110)$$

Merk op dat deze vergelijking ons de mogelijkheid biedt om de chemische potentiaal te bepalen als we de temperatuur en dichtheid van een gas kennen.

Op analoge wijze kunnen we uit vergelijkingen (87) en (108) een uitdrukking voor de druk afleiden. We vinden

$$P = \frac{2}{3} \int_0^\infty A p^2 \frac{p^2}{2m} e^{-p^2/2mkT} dp = \frac{A}{3m} \int_0^\infty p^4 e^{-p^2/2mkT} dp = \frac{A}{3m} (2mkT)^{5/2} \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx. \quad (111)$$

De laatste integraal levert  $3\sqrt{\pi}/8$  en we vinden

$$P = \frac{A\sqrt{\pi}}{8m} (2mkT)^{\frac{5}{2}}. \quad (112)$$

Als we vergelijking (112) delen door vergelijking (110), vinden we

$$P/n = kT \rightarrow P = nkT \quad (113)$$

en dit is de bekende toestandsvergelijking voor een ideaal gas.

Het is ook interessant om te beschouwen wat de benading  $mc^2 \gg E - \mu \gg kT$  fysisch betekent. Hiervoor gebruiken we vergelijking (110)

$$n = g_s \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(mc^2 - \mu)/kT} \quad (114)$$

en constateren we dat voor  $E - \mu \approx mc^2 \gg kT$  de laatste exponentiële term veel kleiner is dan 1. Dit betekent dat

$$n \ll \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \equiv n_Q, \quad (115)$$

waar we de quantumconcentratie  $n_Q$ , ook wel kritische dichtheid genaamd, hebben gedefinieerd (we nemen even aan dat  $g_s = 1$ ). Merk op dat de term tussen haakjes,  $2\pi mkT/h^2$ , gerelateerd is aan de De Broglie golflengte. Elk deeltje heeft namelijk een typische kinetische energie ter grootte  $p^2/2m \approx kT$  en dus een impuls  $p \approx (2mkT)^{1/2}$ . De bijbehorende De Broglie golflengte is dan

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{\sqrt{2mkT}}. \quad (116)$$

Hiermee kunnen we onze benadering gegeven door vergelijking (115) herschrijven als

$$n \ll \left( \frac{\pi}{\lambda^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi^{3/2}}{\lambda^3}. \quad (117)$$

Omdat de gemiddelde afstand  $d$  tussen de deeltjes schaalt met  $d \sim n^{-1/3}$ , betekent bovenstaande vergelijking dat

$$d \gg \lambda. \quad (118)$$

We eisen dus in onze benadering dat de afstand tussen deeltjes beduidend groter moet zijn dan de De Broglie golflengte. Als dat het geval is, dan kunnen we het golfkarakter van deeltjes verwaarlozen en gedragen ze zich als klassieke puntdeeltjes. Ze volgen dan een Maxwell-Boltzmann verdeling.

Merk op dat fotonen nooit een Maxwellverdeling zullen hebben, omdat hun chemische potentiaal gelijk is aan nul. Verder zien we dat de De Broglie golflengte kleiner is voor lichtere deeltjes, zodat de kritische dichtheid voor quantumgedrag kleiner is voor lichte deeltjes. Lichte deeltjes zoals elektronen zijn dan ook de eerste soort die de kritische dichtheid bereikt en quantumverschijnselen vertoont.

### 2.2.2 Chemische potentiaal

De distributies bevatten de chemische potentiaal  $\mu$  als variabele, die de respons van het systeem op een verandering van het aantal deeltjes karakteriseert. De chemische potentiaal wordt gedefinieerd als de afgeleide van de entropie naar het aantal deeltjes, bij constant volume en energie,

$$\mu \equiv -T \left( \frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V}. \quad (119)$$

De entropie van het systeem verandert volgens

$$dS = \frac{dU + PdV - \mu dN}{T}, \quad (120)$$

en  $\mu dN$  wordt ook wel de chemische arbeid genoemd. Volgens de tweede wet van de thermodynamica verloopt de reactie in de richting van lagere chemische potentiaal. Chemisch evenwicht wordt bereikt als de som van de chemische potentialen van de reagerende deeltjes gelijk is aan de som van de chemische potentialen van de producten. De reactiesnelheden in de voorwaartse en achterwaartse reacties zijn dan gelijk.

Stel dat deeltjes van soort (1) reageren met deeltjes van soorten (2), (3) en (4) volgens de reactie  $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ . Dan geldt voor chemisch evenwicht

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4. \quad (121)$$

Als we reacties met fotonen beschouwen, dan zien we dat het aantal fotonen niet behouden hoeft te zijn, zoals bijvoorbeeld in dubbele Compton verstrooiing  $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma + \gamma$ . Deze reactie kan bij hoge temperatuur optreden in evenwicht. Dus dient te gelden dat

$$\mu_\gamma = 0. \quad (122)$$

Dit betekent ook dat als de chemische potentiaal van een deeltje  $X$  gelijk is aan  $\mu_X$ , de chemische potentiaal van het corresponderende antideeltje  $\bar{X}$  gelijk is aan

$$\mu_{\bar{X}} = -\mu_X. \quad (123)$$

Thermisch evenwicht wordt bereikt voor deeltjes die zowel in kinetisch als in chemisch evenwicht zijn. De verschillende soorten deeltjes delen dan dezelfde temperatuur  $T_i = T$ .

### 2.2.3 Energie- en deeltjesdichtheid, en druk voor een gas van fermionen en bosonen

Een ander belangrijk gegeven is het aantal interne vrijheidsgraden  $g_i$  van de deeltjes, omdat elke vrijheidsgraad een onafhankelijke bijdrage levert tot de deeltjesdichtheid, energiedichtheid, druk, enzovoort. In het standaard model van de deeltjesfysica heeft het foton twee polarisatietoestanden en dus geldt  $g_\gamma = 2$ . Neutrino's hebben enkel één polarisatietoestand en dus  $g_\nu = 1$ , terwijl voor elektronen en muonen  $g_{e,\mu} = 2$ . Hetzelfde geldt voor de anti-deeltjes.

Met deze definities vinden we voor de deeltjesdichtheid

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int f_i(\mathbf{p}) d^3p, \quad (124)$$



voor de energiedichtheid

$$\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int E_i(\mathbf{p}) f_i(\mathbf{p}) d^3p, \quad (125)$$

en de druk

$$P_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E_i(\mathbf{p})} f_i(\mathbf{p}) d^3p. \quad (126)$$

Merk op dat we de factor  $p^2/3E$  in bovenstaande formule kunnen vinden als we in vergelijking (87) de snelheid  $v(p)$  schrijven als  $v = pc/E$ , hetgeen ook relativistisch correct is. Verder werken we met natuurlijke eenheden waarin  $\hbar = c = k_B = 1$  (zie de uitgewerkte opgaven); we zien dan bijvoorbeeld dat  $1/h^3 \rightarrow 1/(2\pi)^3$ .

We kunnen bovenstaande integralen uitrekenen (zie appendix C) in de ultra-relativistische benadering (waarbij  $T/m \gg 1$ ) en vinden (zie ook de uitgewerkte opgaven)

$$\rho_{\text{Rel}} = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E^3}{e^{E/T} \pm 1} dE = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{7}{8} \left( \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 \right), & \text{Fermi Dirac} \end{cases} \quad (127)$$

$$n_{\text{Rel}} = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{3}{4} \left( \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3 \right), & \text{Fermi Dirac} \end{cases} \quad (128)$$

met  $\zeta(x)$  de Riemann zeta functie, waarvoor geldt  $\zeta(3) = 1.20206\dots$ . De gemiddelde energie van een relativistisch deeltje volgt uit  $\rho/n$  en dat levert

$$\langle E \rangle_{\text{BE}} \approx 2.70 \cdot T, \quad \text{en} \quad \langle E \rangle_{\text{FD}} \approx 3.15 \cdot T. \quad (129)$$

Voor fotonen met massa  $m_\gamma = 0$  en  $g_\gamma = 2$  vinden we de Stefan Boltzmann relatie  $\rho_\gamma = \sigma T^4$  voor de elektromagnetische zwarte straler, met

$$\sigma = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.670400 \times 10^{-8} \text{ Js}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}. \quad (130)$$

## 2.2.4 Vrijheidsgraden

We gaan nu de bijdragen tot de totale energie en deeltjesdichtheid bepalen voor alle soorten deeltjes die een rol hebben gespeeld in het vroege heelal. Omdat vergelijkingen (183) laten zien dat de bijdragen van niet-relativistische soorten bij toenemende temperatuur relatief onderdrukt zijn, is het een goede benadering om enkel de relativistische deeltjes te beschouwen die bij een bepaalde temperatuur in evenwicht zijn. De energiedichtheid heeft in dat geval de vorm van de Stefan Boltzmann vergelijking

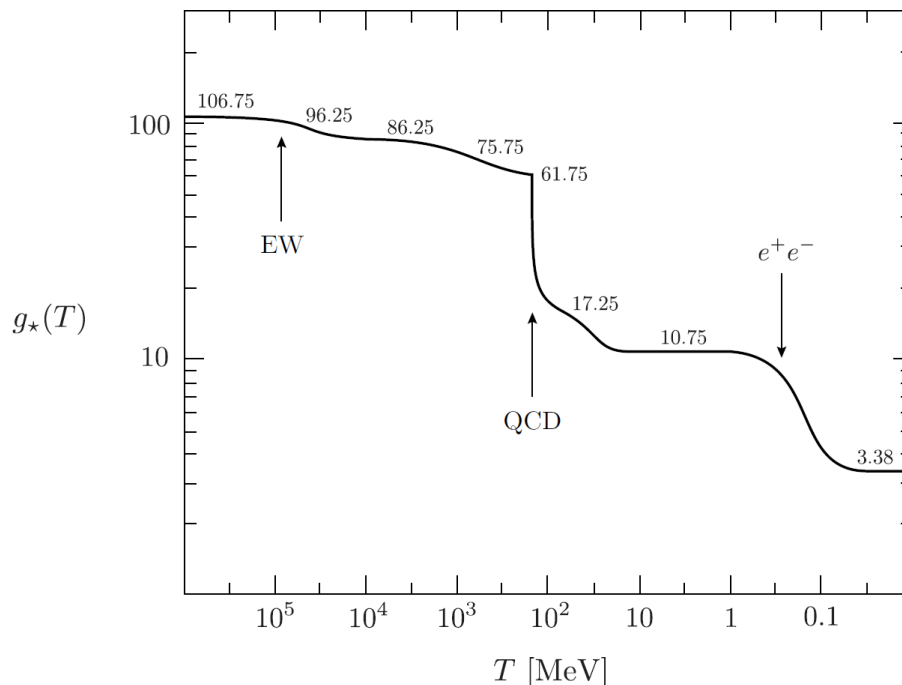
$$\rho_{\text{Rel}} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}(T) T^4, \quad (131)$$

$$P_{\text{Rel}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{Rel}}(T) = \frac{\pi^2}{90} g_{\text{eff}}(T) T^4.$$

De factor  $g_{\text{eff}}(T)$  telt het totale aantal interne vrijheidsgraden (zoals spin, kleur, enzovoort) van de relativistische deeltjes in thermisch evenwicht bij temperatuur  $T$  (waarvan de massa dus  $m_i \ll T$ ). De uitdrukking voor  $g_{\text{eff}}$  brengt ook de factor  $7/8$  voor fermionen in rekening (zie vergelijking (127)).

In Fig. 6 tonen we het aantal relativistische vrijheidsgraden als functie van de temperatuur voor het standaard model van de deeltjesfysica. Er is een scherpe afname van het aantal vrijheidsgraden bij een temperatuur van ongeveer 150 MeV. Dit correspondeert met de quark-hadron

fase-overgang. In de figuur nemen we een QCD schaal van 150 MeV. Merk op dat deze aanname model-afhankelijk is. We krijgen een andere transitie als we 450 MeV zouden aannemen voor de QCD schaal. We zien dat bij hoge temperatuur het aantal vrijheidsgraden het hoogst is.



**Figuur 6:** De temperatuurevolutie van het aantal relativistische vrijheidsgraden voor het standaard model van de deeltjesfysica.

We stoppen de curve bij 1 TeV, want bij nog hogere temperaturen wordt  $g_{\text{eff}}$  modelafhankelijk. In bijvoorbeeld het minimale SU(5) model dienen we 24 toestanden toe te voegen voor de  $X$  en  $Y$  ijkbosonen, nog eens 24 voor de adjoint Higgs en dan nog eens 6 voor de  $\bar{5}$  Higgs. Dat betekent dat voor  $T > m_X$  in het minimale SU(5) model zouden we  $g_{\text{eff}} = 160.75$  hebben. In een supersymmetrisch model zal dat op zijn minst verdubbelen.

We berekenen nu  $g_{\text{eff}}(1 \text{ TeV})$  voor een temperatuur van 1 TeV. Bij deze temperatuur zijn alle deeltjes van het standaard model van de deeltjesfysica relativistisch en in thermisch evenwicht. Het totaal aantal interne vrijheidsgraden van de fermionen bedraagt 90 en voor de ijk- en Higgsbosonen 28. Hiermee vinden we

$$g_{\text{eff}}(T = 1 \text{ TeV}) = 28 + \frac{7}{9} \cdot 90 = 106.75. \quad (132)$$

Naarmate het heelal expandeert en afkoelt, zal de interactiesnelheid voor bepaalde deeltjes kleiner worden dan de Hubble expansiesnelheid. Deze deeltjes ontkoppelen dan van de rest van het primordiale plasma. We zullen later zien dat deze deeltjes een lagere temperatuur kunnen hebben dan bijvoorbeeld de fotonen, terwijl ze dan nog steeds relativistisch kunnen zijn. Nadat bijvoorbeeld de neutrino's ontkoppelden, werden ze niet meer beïnvloed door thermische opwarming van fotonen. We kunnen dit in beschouwing nemen door een specifieke temperatuur  $T_i$  voor elke soort relativistische deeltjes te introduceren. Het totaal aantal effectieve vrijheidsgraden  $g_{\text{eff}}$  wordt dan

$$g_{\text{eff}} = \sum_{i=\text{bosonen}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermionen}} g_j \left( \frac{T_j}{T} \right)^4. \quad (133)$$

We substitueren deze uitdrukking in de friedmannvergelijking (47) en vinden voor een door straling gedomineerd vroeg en vlak ( $k = 0$ ) heelal

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{Rel}} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}} T^4 = 2.76 \frac{g_{\text{eff}}}{m_{\text{Pl}}^2} T^4. \quad (134)$$

of wel

$$H = 1.66 \sqrt{g_{\text{eff}}} \frac{T^2}{m_{\text{Pl}}}. \quad (135)$$

Bovenstaande uitdrukking is een van de belangrijkste vergelijkingen voor de fysica van het vroege heelal. Voor een door straling gedomineerd heelal geldt (zie vergelijking (98)),

$$a(t) = a(0) \sqrt{t} \quad \text{door straling gedomineerd.} \quad (136)$$

Hiermee kunnen we de Hubble parameter schrijven als

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \quad \text{door straling gedomineerd} \quad (137)$$

en in combinatie met vergelijking (135), vinden we de relatie tussen tijd en temperatuur in het vroege door straling gedomineerde heelal,

$$t = 0.30 \frac{m_{\text{Pl}}}{\sqrt{g_{\text{eff}}}} \frac{1}{T^2} \approx \left( \frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 \text{ sec.} \quad (138)$$

Het vroege heelal vormt een belangrijke epoch met diverse fase-overgangen, zoals foton- en neutrino-ontkoppeling, en nucleosynthese. Dit zullen we vervolgens bespreken.

### 2.3 Belangrijke gebeurtenissen in de historie van ons heelal

In de geschiedenis van ons heelal vonden er diverse overgangen plaats en we geven een overzicht in tabel 1. In de volgende secties zullen we de verschillende transities kort bespreken.

Table 1: *Belangrijke gebeurtenissen in de thermische geschiedenis van het heelal.*

Gebeurtenis	tijd $t$	roodverschuiving $z$	temperatuur $T$
Elektrozwakke transitie	20 ps	$10^{15}$	100 GeV
QCD phase transitie	20 $\mu$ s	$10^{12}$	150 MeV
Neutrino's ontkoppelen	1 s	$6 \times 10^9$	1 MeV
Elektron-positron annihilatie	6 s	$2 \times 10^9$	500 keV
Big Bang nucleosynthese	3 min	$4 \times 10^8$	100 keV
Straling - materie transitie	60 kjaar	3400	0.75 eV
Recombinatie	260 - 380 kjaar	1100 - 1400	0.26 - 0.33 eV
CMB ontkoppeling	380 kjaar	1000 - 1200	0.23 - 0.28 eV
Reionisatie	100 - 400 Mjaar	11 - 30	2.6 - 7.0 meV
Donkere energie - materie transitie	9 Gjaar	0.4	0.33 meV
Heden	13.7 Gjaar	0	0.24 meV

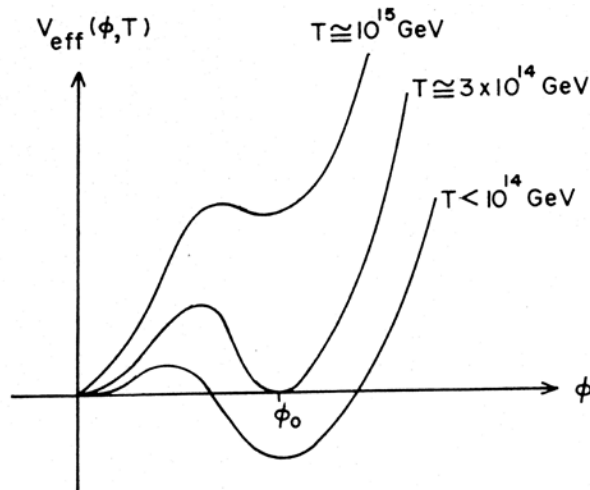
We beginnen de discussie van de geschiedenis van het heelal bij een energie van 1 TeV. Het heelal was toen een paar picoseconden oud en de temperatuur was voldoende hoog voor de creatie van alle soorten elementaire quarks, leptonen en bosonen, plus hun antideeltjes. We denken de

natuurkunde op deze energieschaal te kunnen begrijpen op basis van het standaard model van de deeltjesfysica.

We beginnen met een situatie waarbij we aannemen dat de verschillende deeltjes in thermisch evenwicht zijn. Naarmate de expansie voortschrijdt en de temperatuur daalt, vervallen in minder dan  $10^{-23}$  seconden de meest massieve deeltjes zoals de top quark, de  $W$  en  $Z$  ijkbosonen van de elektrozwakke interactie, en het Higgs deeltje. Voor tijden waarbij  $kT \ll mc^2$  (met  $m$  de massa van de betreffende deeltjes), kunnen deze deeltjes niet meer gecreëerd worden. Deze fase-overgang noemt men de *elektrozwakke transitie*.

### 2.3.1 Elektrozwakke fase-overgang

Bij voldoende hoge energie zijn alle deeltjes van het standaard model massaloos. Voor temperaturen  $T \gg T_{\text{kritisch}}$  heeft de Higgs potentiaal slechts één minimum, namelijk  $V(0) \approx 10^{14}$  GeV bij  $\phi = 0$ . Het heelal heeft een hoge mate van symmetrie en kan relatief eenvoudig beschreven worden. Naarmate de temperatuur daalt (zie Fig. 7) verschijnt er een tweede minimum bij  $\phi = \phi_0$  en voor voldoende lage temperaturen wordt dit het "echte" minimum. De natuur kiest



**Figuur 7:** De potentiële energie van het Higgs veld  $\phi$  voor verschillende temperaturen.

nu één mogelijke realisatie van minimale potentiële energie en deze zogenaamde spontane breking van de symmetrie genereert de massa's van de elementaire deeltjes. Vervolgens zullen de top quarks met massa 175 GeV als eerste annihileren, waarbij het belangrijk is te bedenken dat deze annihilatie pas compleet is als de temperatuur gedaald is tot ongeveer  $T \approx \frac{1}{6}m_{\text{top}}$ . De reden is dat we te maken hebben met distributiefuncties, waarbij er nog steeds een fractie deeltjes met hoge energieën bestaat. Daarna zullen het Higgs boson en de  $W^\pm$  en  $Z$  bosonen annihileren. Het aantal effectieve vrijheidsgraden  $g_{\text{eff}}$  is nu gedaald van de oorspronkelijke 106.75 tot 86.25. Vervolgens annihileren het bottom quark, gevolgd door het charm quark en het tau lepton, waarna  $g_{\text{eff}} = 61.25$  en het plasma een temperatuur van  $T \approx 1$  GeV bereikt.

We kunnen de tijd uitrekenen waarop deze gebeurtenis plaatsvond, door gebruik te maken van vergelijking (138) en vinden 20 ps na de Big Bang. De roodverschuiving waarop deze gebeurtenis plaatsvond kan bepaald worden uit

$$T_{\text{gebeurtenis}} = T_0(1 + z_{\text{gebeurtenis}}), \quad (139)$$

waarbij  $T_0 = 2.7$  K ( $2.4 \times 10^{-4}$  eV) de temperatuur van het heelal op dit moment is. We vinden dan dat de elektrozwakke transitie plaatsvond bij een roodverschuiving  $z = 10^{15}$ .

### 2.3.2 QCD fase-overgang

Bij een temperatuur van  $T \approx 150$  MeV ondergaat materie de zogenaamde QCD fase-transitie. Voor energieën hoger dan 150 MeV zijn de quarks asymptotisch vrij, terwijl voor lagere energieën de sterke interacties tussen quarks en gluonen belangrijk worden. Hierdoor is het voor quarks energetisch voordeliger om gebonden toestanden van drie quarks (zogenaamde baryonen) of van een quark-antiquark paar (mesonen) te vormen. Baryonen en mesonen vormen de hadronen en dit worden nu onze nieuwe vrijheidsgraden.

Het proton en neutron zijn de lichtste baryonen en behoren tot de fermionen, terwijl de drie pionen  $\pi^\pm$  en  $\pi^0$  de lichtste mesonen en bosonen zijn. Voor temperaturen beneden de QCD fase-transitie zijn enkel de pionen relativistisch. De energiedichtheid van straling wordt dan gedomineerd door pionen, elektronen, muonen, neutrino's en fotonen. Er geldt dan

$$g_{\text{eff}}^* = 2 + 3 + \frac{7}{8} \times (4 + 4 + 6) = 17.25 \quad \text{voor } T \text{ net onder de QCD transitie.} \quad (140)$$

Vrij snel na de QCD-transitie, zullen de pionen en muonen annihilieren ( $g_{\text{eff}}^* \rightarrow 10.75$ ). Daarna annihilieren elektronen en positronen.

### 2.3.3 Ontkoppelen van neutrino's

We hebben tot nu toe aangenomen dat alle deeltjes dezelfde temperatuur hebben, omdat de interacties tussen deeltjes voor thermisch evenwicht zorgen. Nu is dat het geval voor de zwakke wisselwerking als de temperatuur hoog is, bijvoorbeeld voor energieën in de buurt van de massa's van de  $W^\pm$  en  $Z$  bosonen. Bij lagere temperaturen zal het aantal interacties onder invloed van de zwakke wisselwerking echter snel afnemen en zullen de neutrino's ontkoppelen van het plasma. We kunnen de temperatuur waarbij dit gebeurt uitrekenen door te bepalen wanneer de interactiesnelheid  $\Gamma$  kleiner wordt dan de expansiesnelheid  $H$ .

Neutrino's koppelen door deeltjesreacties aan het thermisch reservoir van het oerplasma als

$$\nu_e + \bar{\nu}_e \leftrightarrow e^- + e^+, \quad \text{en} \quad e^- + \bar{\nu}_e \leftrightarrow e^- + \bar{\nu}_e. \quad (141)$$

De wisselwerking is elektrozwak en wordt overgebracht door  $W$  en  $Z$  deeltjes met een massa  $m_W \approx 80$  GeV en  $m_Z \approx 91$  GeV. De werkzame doorsnede voor de zwakke wisselwerking is voor lage energie ( $s \ll m_W^2$ ) evenredig met  $G_F^2 s / m_W^4$ , waarbij in deze uitdrukking  $G_F \approx 1.17 \times 10^{-5}$  GeV $^{-2}$  de constante van Fermi is. Verder stelt  $s = E_{\text{totaal}}^2$  het kwadraat van de totale inkomende energie in het zwaartepunt voor (een van de zogenaamde Mandelstam variabelen). Voor relativistische deeltjes geldt dus  $s \propto T^2$  en kunnen we de interactiesnelheid  $\Gamma = \sigma |\mathbf{v}| c$  schrijven als

$$\Gamma_{\text{zwak}} \approx \frac{G_F^2 T^5}{m_W^4}, \quad (142)$$

waarbij we gebruiken dat  $|\mathbf{v}| = c = 1$  en  $n \approx T^3$ . We zien dat de interactiesnelheid snel afneemt naarmate de temperatuur daalt. Terwijl het heelal expandeert en koelt neemt de interactiesnelheid af en wordt deze op een gegeven tijd onvoldoende om de Hubble expansie bij te houden. We kunnen dit tijdstip vinden door de interactiesnelheid te vergelijken met de expansiesnelheid  $H$  gegeven door vergelijking (135) en vinden

$$\frac{\Gamma}{H} \approx \frac{G_F^2 m_{\text{Pl}} T^3}{m_W^4}. \quad (143)$$

Neutrino's ontkoppelen als deze verhouding kleiner wordt dan 1 en dat levert

$$T_{\text{ontkop}} \approx \left( \frac{m_W^4}{G_F^2 m_{\text{Pl}}} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 4 \text{ MeV}. \quad (144)$$

Nadat de neutrino's ontkoppelen, bewegen ze als vrije deeltjes en ondergaan ze de algemene Hubble expansie. Dit betekent dat net als voor fotonen, hun energieën roodverschuiven met een factor  $a/a_{\text{ontkop}}$ . Neutrino's hebben dus een thermische Fermi-Dirac verdeling van een zwarte straler met een effectieve temperatuur gegeven door

$$T_\nu = T_{\text{ontkop}} \frac{a_{\text{ontkop}}}{a} \propto \frac{1}{a}. \quad (145)$$

Tijdens de verdere expansie van het heelal zal de temperatuur van de neutrino's niet gelijk blijven aan die van de fotonen. Dit heeft te maken met behoud van entropie en dat zullen we in de volgende sectie bespreken.

## 2.4 Entropie

### 2.4.1 Resumé van thermodynamica: potentialen en eerste hoofdwet

Een thermodynamisch systeem wordt beschreven door een aantal thermodynamische parameters (ook wel toestandsvariabelen of toestandfuncties genoemd), zoals temperatuur, druk, volume, interne energie, enthalpie en entropie. Deze parameters zijn typisch niet onafhankelijk van elkaar en het aantal onafhankelijke parameters wordt gegeven door de dimensie  $D$  van de toestandruimte (bijvoorbeeld  $D = 2$  voor een mono-atomisch gas). De thermodynamische toestand en de waarde van de toestandsvariabelen zijn een eigenschap van het betreffende systeem en hangen enkel van de huidige toestand van het systeem af en dus niet van de manier waarop die toestand bereikt werd. Dit in tegenstelling tot mechanische arbeid en warmte, die we procesvariabelen noemen en die afhangen van het specifieke pad dat gevolgd werd om van de evenwichtstoestand in het begin te komen tot die aan het eind van het proces.

We kunnen het bovenstaande illustreren met het voorbeeld van een mono-atomisch gas, waarbij we het systeem continu van toestand veranderen. Hierbij volgt het systeem een "pad" in de toestandruimte. We kunnen dit pad specificeren door de waarden van toestandsparameters te geven, terwijl het systeem het pad volgt. Stel we meten zowel de druk  $P(t)$  als het volume  $V(t)$  gedurende de tijd dat het systeem van de evenwichtstoestand in het begin (dus op tijdstip  $t = t_0$ ) verandert tot die aan het eind ( $t = t_1$ ). De arbeid die verricht wordt door het systeem van tijd  $t_0$  tot  $t_1$  is

$$W(t_0, t_1) = \int_{\text{toestand 0}}^{\text{toestand 1}} P dV = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \frac{dV(t)}{dt} dt. \quad (146)$$

Het is duidelijk dat om deze arbeid te kunnen berekenen, we de functies  $P(t)$  en  $V(t)$  voor het hele pad dienen te kennen. Arbeid is dan ook een voorbeeld van een procesvariabele.

Stel dat we daarentegen geïnteresseerd zijn in de som van de arbeid en de integraal  $VdP$  over het pad. In dat geval dienen we

$$U(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \frac{dV(t)}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} V(t) \frac{dP(t)}{dt} dt = P(t_1)V(t_1) - P(t_0)V(t_0) \quad (147)$$

uit te rekenen. We hebben nu te maken met de exacte differentiaal van de functie  $PV$  en daarom kunnen we de integraal uitdrukken als het verschil in de waarden van het product  $P(t)V(t)$  op de integratiegrenzen. Het product  $PV$  is daarom een toestandsfunctie van het systeem (gerelateerd aan het begrip enthalpie).

Een thermodynamische potentiaal is een scalaire grootte die we kunnen gebruiken om de thermodynamische toestand van een systeem te vertegenwoordigen. De bekendste thermodynamische potentiaal is de interne energie  $U$  van een systeem. Deze stelt de energie van de configuratie van conservatieve krachten in een systeem voor. De interne energie  $U$  karakteriseert het vermogen

van een systeem om arbeid te verrichten plus het vermogen om warmte af te geven. Stel dat een systeem expandeert in een fictief quasistatisch proces, dan is de arbeid die het systeem verricht op haar omgeving gelijk aan  $PdV$ , terwijl er door de omgeving warmte  $\delta Q$  wordt toegevoegd aan het systeem. We schrijven voor de eerste hoofdwet van de thermodynamica<sup>3</sup> dan

$$dU = \delta Q - PdV. \quad (148)$$

De eerste hoofdwet definieert thermodynamische energie, ook wel interne energie  $U$  genaamd, en stelt energiebehoud in thermodynamische processen voor.

#### 2.4.2 Resumé van thermodynamica: entropie en de tweede hoofdwet

Het concept van energie dat in de eerste hoofdwet gebruikt wordt, geeft echter geen verklaring van de waarneming dat natuurlijke processen een voorkeursrichting in de tijd hebben. Dit is de rol van de tweede hoofdwet van de thermodynamica: natuurlijke processen verlopen slechts in één richting en zijn niet omkeerbaar. Warmte vloeit bijvoorbeeld spontaan van warme naar koude plaatsen en niet omgekeerd (behalve wanneer arbeid op het systeem wordt verricht). Teneinde dit fenomeen te kunnen verklaren, wordt het begrip entropie ingevoerd in de klassieke thermodynamica. We schrijven voor een fictief omkeerbaar proces

$$dS \equiv \frac{\delta Q}{T} \quad \text{en} \quad \Delta S \geq \int \frac{\delta Q}{T}. \quad (149)$$

Terwijl de integraal van  $\delta Q$  afhankelijk van het pad is, is de integraal  $\int \frac{\delta Q}{T}$  pad-onafhankelijk. Entropie is een toestandspotentiaal.

Entropie  $S(V, T)$  wordt meestal geïntroduceerd door de definitie van haar differentiaal

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} [d(\rho(T)V) + P(T)dV]. \quad (150)$$

We herkennen vergelijking (148) in bovenstaande uitdrukking, indien we  $\delta Q = TdS$  gebruiken. De coëfficiënten die optreden voor  $dT$  en  $dV$  zijn functies die vergeleken kunnen worden met de algemene uitdrukking van een differentiaal

$$dS(V, T) = \frac{\partial S(V, T)}{\partial V} dV + \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} dT. \quad (151)$$

Dit levert

$$\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} = \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T)) \quad \text{en} \quad \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT}. \quad (152)$$

Vervolgens stellen we tweede afgeleiden gelijk

$$\frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial T \partial V} \quad (153)$$

en vinden

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T)) \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT} \right). \quad (154)$$

We kunnen dit vereenvoudigen tot

$$\frac{dP(T)}{dT} = \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T)). \quad (155)$$

<sup>3</sup>Merk op dat er in de literatuur verschillende conventies gebruikt worden voor het teken voor de arbeid. Dit heeft met de keuze te maken of arbeid *door* het systeem of door de omgeving *op* het systeem wordt verricht. Merk verder op dat een exacte differentiaal wordt aangeduid met  $d$ , terwijl veranderingen in arbeid en warmte worden aangegeven met het symbool  $\delta$ , omdat arbeid en warmte geen beschrijving van de toestand geven.

We vullen bovenstaande uitdrukking in in de definitie (vergelijking (150)) van entropie en vinden

$$dS(V, T) = \frac{1}{T} d[(\rho(T) + P(T)) V] - \frac{V}{T^2} (\rho(T) + P(T)) dT, \quad (156)$$

hetgeen we integreren om te kunnen laten zien dat de entropie  $S(V, T)$ , op een integratieconstante na, gegeven wordt door

$$S(V, T) = \frac{V}{T} (\rho(T) + P(T)). \quad (157)$$

### 2.4.3 Entropie in een expanderend heelal

Het is instructief om vergelijking (53) te beschouwen

$$a^3 \frac{dp(T)}{dt} = \frac{d}{dt} [a^3 (\rho(T) + P(T))] \quad (158)$$

en dit te combineren met vergelijking (155). We vinden dan

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a^3}{T} [\rho(T) + p(T)] \right) = 0. \quad (159)$$

Als we het volume  $V$  associeren met  $a^3(t)$  en het resultaat vergelijken met uitdrukking (157), vinden we dat entropie behouden is in het volume  $a^3(t)$ . Er geldt  $S(T)$  is constant.

Het is nuttig om het begrip entropiedichtheid  $s(T)$  in te voeren en er geldt

$$s(T) \equiv \frac{S(V, T)}{V} = \frac{\rho(T) + P(T)}{T}. \quad (160)$$

In het vroege heelal waarin energiedichtheid  $\rho$  en druk  $P$  gedomineerd worden door relativistische deeltjes met toestandsvergelijking  $P = \rho/3$ , vinden we met vergelijking (134) voor de entropiedichtheid

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{\text{eff}}^s T^3, \quad (161)$$

waarbij  $g_{\text{eff}}^s$  gedefinieerd is als

$$g_{\text{eff}}^s = \sum_{i=\text{bosonen}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermionen}} g_j \left( \frac{T_j}{T} \right)^3. \quad (162)$$

Omdat zowel  $s$  als  $n_\gamma$  afhangen van  $T^3$  is er een eenvoudige relatie tussen entropiedichtheid en deeltjesdichtheid. Er geldt

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \rightarrow s = \frac{\pi^4}{45\zeta(3)} g_{\text{eff}}^s n_\gamma \approx 1.8 g_{\text{eff}}^s n_\gamma. \quad (163)$$

### 2.4.4 Elektron-positron annihilatie

Behoud van entropie voor deeltjes in thermisch evenwicht luidt

$$g_{\text{eff}}^s (aT)^3 = \text{const} \quad (164)$$

en hieruit volgt

$$T \approx (g_{\text{eff}}^s)^{-1/3} a^{-1}. \quad (165)$$

Na ontkoppelen ziet de neutrino-verdeling er nog steeds uit alsof er thermisch evenwicht is, tenminste zolang  $g_{\text{eff}}^s$  niet verandert. Het is echter zo dat  $g_{\text{eff}}^s$  verandert als elektronen en positronen



niet-relativistisch worden en annihilieren volgens  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ . Dit gebeurt bij een temperatuur van ongeveer 1 MeV, omdat beneden deze temperatuur het inverse proces  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  kinematisch niet meer mogelijk is (omdat de rustmassa van een elektron-positron paar 1.02 MeV is).

We berekenen het aantal vrijheidsgraden voor en na  $e^+e^-$  annihilatie. Neutrino's zijn al ontkoppeld, zodat bij temperaturen boven 1 MeV enkel  $e^+$ ,  $e^-$  en  $\gamma$  de relativistische deeltjes zijn die in thermisch evenwicht verkeren. Dit geeft

$$(g_{\text{eff}}^s)_{\text{voor ontkoppeling}} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} + 2 = \frac{11}{2}, \quad (166)$$

terwijl na ontkoppeling slechts de fotonen in thermisch evenwicht zijn. Dus geldt

$$(g_{\text{eff}}^s)_{\text{na ontkoppeling}} = 2. \quad (167)$$

De totale entropie voor de deeltjes in evenwicht is behouden,

$$\left(g_{\text{eff}}^s (aT)^3\right)_{\text{voor ontkoppeling}} = \left(g_{\text{eff}}^s (aT)^3\right)_{\text{na ontkoppeling}}, \quad (168)$$

en dat impliceert

$$(aT)_{T \leq 1 \text{ MeV}} = \left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}} (aT)_{T \geq 1 \text{ MeV}} \approx 1.4 (aT)_{T \geq 1 \text{ MeV}}. \quad (169)$$

We zien dat er entropie wordt overgedragen van de  $e^+$  en  $e^-$  die ontkoppelen naar de fotonen. Dat noemen we *reheating* (terwijl de temperatuur niet toeneemt, maar slechts minder snel afneemt voor fotonen vanwege de entropie-overdracht). De reeds ontkoppelde neutrino's profiteren niet van deze reheating. Zij volgen gewoon de roodverschuivingsrelatie waardoor geldt  $(aT_\nu)_{\text{voor ontkoppeling}} = (aT_\nu)_{\text{na ontkoppeling}}$ . We kunnen zeggen dat de neutrino-entropie afzonderlijk behouden is na ontkoppeling. Dit betekent ook dat er een verschil in temperatuur is voor neutrino's en fotonen na  $e^+e^-$  ontkoppeling. Er geldt

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma. \quad (170)$$

Omdat we de temperatuur van de kosmische microgolf-achtergrond fotonen gemeten hebben ( $T_\gamma \approx 2.73 \text{ K}$ ), verwachten we dat er een kosmische neutrino-achtergrond bestaat, die een Fermi-Dirac energiespectrum heeft met een temperatuur  $T_\nu = 1.95 \text{ K}$ . Tot dusver zijn fysici er niet in geslaagd het bestaan van deze kosmische neutrino-achtergrond aan te tonen.

#### 2.4.5 Totale entropie van het huidige heelal

De totale entropie en energiedichtheid van de straling in het heelal wordt op dit moment gegeven door de bijdragen van fotonen en de drie soorten neutrino's ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  en  $\nu_\tau$ ). We nemen aan dat de neutrino's massaloos zijn en vinden

$$g_{\text{eff}}^{\text{totaal}}(\text{vandaag}) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} = 3.36 \quad (171)$$

en

$$g_{\text{eff}}^s(\text{vandaag}) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right) = 3.91. \quad (172)$$

Als we aannemen dat neutrino's massa hebben, dan zijn ze op dit moment naar alle waarschijnlijkheid niet-relativistisch.

De totale huidige stralingsenergiedichtheid in equivalente massadichtheid

$$\rho_{R\gamma} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}^{\text{totaal}} T^4 = 8 \times 10^{-34} \text{ g/cm}^3, \quad (173)$$

hetgeen correspondeert met een bijdrage  $\Omega = \rho/\rho_{\text{kritisch}}$  van

$$\Omega_{R\gamma} h^2 = 4 \times 10^{-5}. \quad (174)$$

We concluderen dat straling in de dynamica van het huidige heelal geen rol van betekenis speelt.

#### 2.4.6 Het begin van dominantie van materie

Nadat de relativistische deeltjes ontkoppeld zijn, neemt hun bijdrage tot de energiedichtheid af met  $a^{-4}$ , omdat  $\rho \propto T^4$  en  $aT = \text{const}$ . Voor niet-relativistische materie wordt de energiedichtheid echter gegeven door

$$\rho_{\text{materie}} \equiv \rho_m = m_{\text{nonRel}} \cdot n_{\text{nonRel}} \quad (175)$$

en voor een stabiel deeltje (zoals een baryon) geldt  $n_{\text{nonRel}} \propto a^{-3} \propto T^3$ . Daarom zal het universum uiteindelijk door materie gedomineerd worden. De vraag is "wanneer is dat gebeurd?" We geven de huidige materiedichtheid aan met  $\rho_M$  en schrijven de huidige bijdrage van materie tot de energiedichtheid als

$$\rho_M = 1.9 \times 10^{-29} \Omega_M h^2 \text{ g/cm}^3. \quad (176)$$

Voor willekeurige tijden geldt dan

$$\rho_m = \rho_M \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 = \rho_M (1+z)^3, \quad (177)$$

als we de gebruikelijke uitdrukking voor de roodverschuiving  $1+z = a_0/a$  gebruiken. Op dezelfde manier vinden we de tijdsafhankelijkheid van de energiedichtheid van straling  $\rho_r$  uit  $\rho_R$ , de huidige waarde van deze dichtheid,

$$\rho_r = \rho_R \left( \frac{g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}^{\text{nu}}} \right) (1+z)^4. \quad (178)$$

We kunnen hiermee het tijdstip vinden waarop de energiedichtheid van materie gelijk was aan die van straling. Dan geldt

$$\rho_m = \rho_r \rightarrow (1+z_{\text{gelijk}}) \propto \frac{\rho_M}{\rho_R} = 2.3 \times 10^4 \Omega_M h^2 \rightarrow T_{\text{gelijk}} = T_0 (1+z_{\text{gelijk}}) = 5.5 \Omega_M h^2 \text{ eV}. \quad (179)$$

We kunnen roodverschuiving relateren aan de leeftijd van het heelal die ermee overeenkomt met

$$t(z) \approx \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}, \quad (180)$$

waarbij de relatie geldig is voor roodverschuivingen kleiner dan ongeveer 1000. Hiermee vinden we dat het heelal door materie gedomineerd was voor tijden na

$$t_{\text{gelijk}} \approx \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_M^{-1/2} (1+z_{\text{gelijk}})^{-3/2} \approx 1.9 \times 10^3 / (\Omega_M h^2)^2 \text{ jaar}. \quad (181)$$

Als we de recente meetgegevens invullen ( $\Omega_M = 0.306$  en  $h = 0.678$ ), vinden we dat materie dominantie begon op ongeveer 60.000 jaar na de Big Bang. De start van materie-dominantie was belangrijk voor de formatie van structuur in het heelal.

## 2.5 Uitgewerkte opgaven

### 2.5.1 Deeltjesdichtheid, energiedichtheid en druk

De deeltjesdichtheid, energiedichtheid en druk voor elke soort deeltjes worden gegeven door vergelijkingen (124), (125) en (126).

*Opgave:* Geef de afleiding van vergelijkingen (127).

*Antwoord:* Merk op dat de distributiefuncties enkel van  $|\mathbf{p}|$  afhangen. We kunnen daarom schrijven  $d^3p = p^2 dp d\Omega$  met  $p \equiv |\mathbf{p}|$ . De integratie over de ruimtehoek  $d\Omega$  geeft dan een factor  $4\pi$ . Verder gebruiken we de relatie tussen de energie en impuls van een deeltje,  $E_i^2 = p^2 + m_i^2$ , waaruit volgt  $p dp = E_i dE_i$ . We vinden hiermee

$$d^3p = 4\pi \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE. \quad (182)$$

In de relativistische limiet  $T/m \gg 1$  kunnen we de restmassa's  $m_i$  verwaarlozen en vinden we vergelijkingen (127).

In de niet-relativistische limiet  $T/m \ll 1$  kunnen we de integralen analytisch oplossen en vinden we voor zowel Fermi Dirac als Bose Einstein deeltjes

$$n_{\text{NRel}} = g_i \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T}}, \quad \rho_{\text{NRel}} = m \cdot n_{\text{NRel}}, \quad \text{en} \quad p_{\text{NRel}} = T \cdot n_{\text{NRel}} \ll \rho_{\text{NRel}}. \quad (183)$$

Niet-relativistisch geldt  $\langle E \rangle = m + 3T/2$  en in SI eenheden correspondeert dit met  $\langle E \rangle = mc^2 + 3k_B T/2$ . We zien dat een puntdeeltje naast rustenergie  $mc^2$  ook een gemiddelde thermische energie  $3k_B T/2$  heeft.

### 2.5.2 Toestandsvergelijking

Laat zien dat vergelijking (91) een oplossing is van vergelijking (53). Leid uitdrukking (92) af.

*Antwoord:* We starten met vergelijking (53) en nemen de afgeleide naar de tijd. Dat levert

$$\dot{\rho} a^3 = -3(1 + \alpha) \rho a^2 \dot{a}, \quad (184)$$

hetgeen we kunnen omschrijven tot

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \alpha) \frac{\dot{a}}{a} = -3(1 + \alpha) H. \quad (185)$$

Integreren levert

$$\ln \rho = -3(1 + \alpha) \ln a + \text{const}. \quad (186)$$

Exponentiëren levert de gevraagde relatie

$$\rho = \text{const} \cdot a^{-3(1+\alpha)}. \quad (187)$$

Merk op dat voor stof geldt dat  $\alpha = 0$  en voor straling  $\alpha = 1/3$ . Voor donkere energie in de vorm van een kosmologische constante geldt  $\alpha = -1$ .

## 2.6 Opgaven

### 2.6.1 Toestandsvergelijkingen

Leid vergelijkingen (91) en (92) af. Laat zien dat de schaalfactor gerelateerd is aan de toestandsvergelijking via

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}. \quad (188)$$

### 2.6.2 Verlaten van thermodynamisch evenwicht en fase-overgangen

Leg uit dat de deeltjesdichtheid sneller met de temperatuur afneemt (en dus met toenemende tijd) dan de Hubble parameter. Dit betekent dat in sommige epochen bepaalde deeltjes thermodynamisch evenwicht zullen verlaten. Hun deeltjesdichtheid wordt dan "bevroren" en de dichtheid zal dan enkel afnemen door de expansie van het heelal.

### 2.6.3 Evenwichtsthermodynamica en ideale gaswet

Leid vergelijkingen (110) en (112) af. Laat zien dat dit de uitdrukking voor een ideaal gas oplevert.

### 2.6.4 Vrijheidsgraden in het standaard model van de deeltjesfysica

Tel het aantal vrijheidsgraden in het standaard model voor een temperatuur van 1 TeV.

### 2.6.5 Relatie tussen temperatuur en tijd in het vroege heelal

Laat zien dat vergelijking (138), voor de relatie tussen tijd en temperatuur in het vroege door straling gedomineerde heelal, inderdaad gegeven wordt door

$$t = 0.30 \frac{m_{\text{Pl}}}{\sqrt{g_{\text{eff}}} T^2} \approx \left( \frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 \text{ sec}. \quad (189)$$

### 2.6.6 Elektrozwakke fase-overgang

Laat zien dat de elektrozwakke fase-overgang 20 ps na de Big Bang plaatsvond.

### 2.6.7 Entropiedichtheid van het heelal

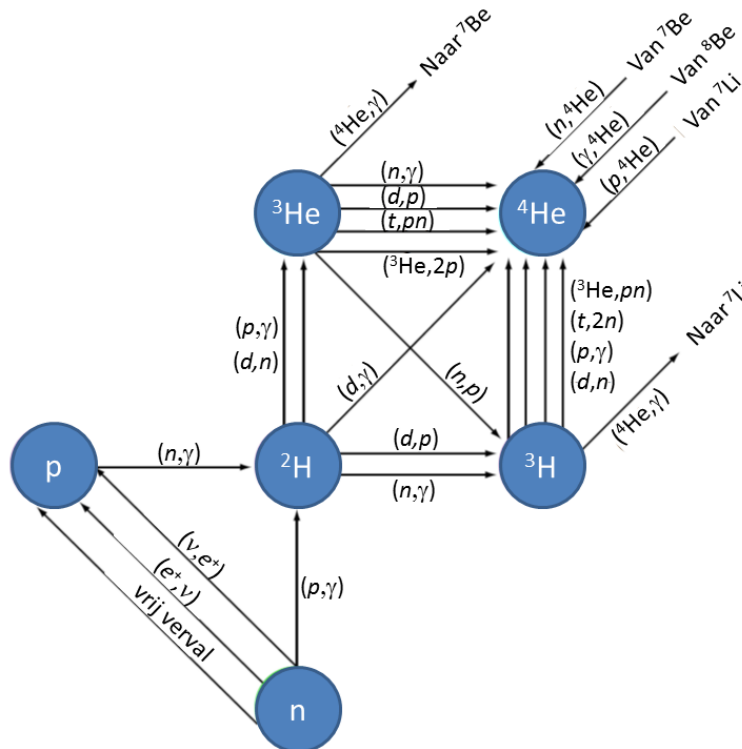
Leid vergelijking (161) af.

### 3 NUCLEOSYNTHESE

Nucleosynthese betekent het bouwen van kernen van de elementen die in de natuur voorkomen. We zullen zien dat de lichte kernen  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  en  $^7\text{Li}$  voornamelijk geproduceerd zijn in de Big Bang. De elementen tot ijzer zijn geproduceerd in kernfusie processen in sterren, terwijl de elementen zwaarder dan ijzer gesynthetiseerd zijn in supernovae.

#### 3.1 Big Bang nucleosynthese

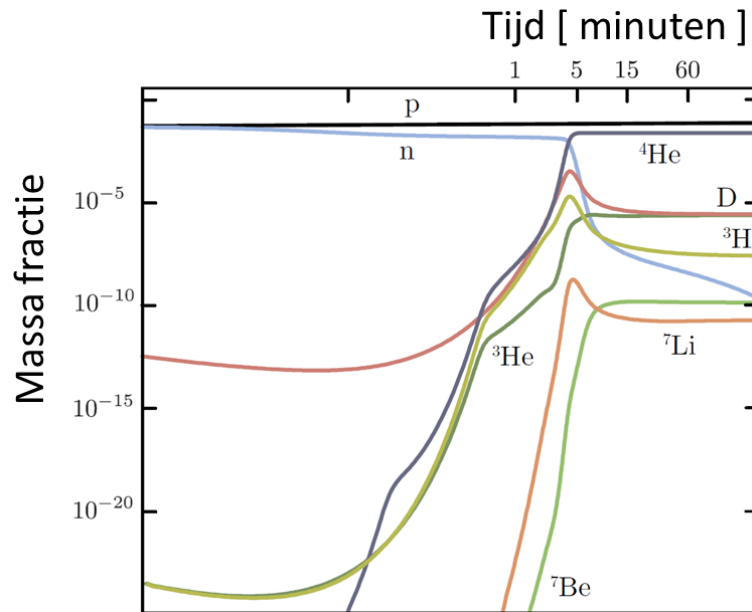
In het voorafgaande hebben we een globaal beeld gevormd van de geschiedenis van het heelal: het Standaard Model van de kosmologie. We zullen dit nu in woorden samenvatten. Het heelal is ongeveer  $10^{10}$  jaar oud en is vanaf zijn ontstaan aan het uitdijen, waardoor de energie per foton altijd is blijven afnemen. Het is stralingsgedomineerd ( $a(t) \propto \sqrt{t}$ ) begonnen. Quarks smolten samen tot baryonen na ongeveer  $10^{-4}$  seconden, baryonen smolten samen tot atoomkernen na ongeveer 100 seconden en elektronen werden gebonden aan deze atoomkernen na ongeveer  $10^5$  jaar. Dat gebeurde overigens op ongeveer hetzelfde moment dat het heelal overging van stralingsgedomineerd naar materiegedomineerd ( $a(t) \propto t^{3/2}$ ). In de resterende tijd tot tegenwoordig, zijn de sterren, nevels en planeten gevormd.



**Figuur 8:** Big Bang nucleosynthese is gebaseerd niet-lineaire numerieke thermodynamische berekeningen van diverse gekoppelde kanalen.

Primordiale nucleosynthese geeft een verklaring voor het feit dat het heelal bestaat uit ongeveer 25% massafractie  $^4\text{He}$  en kleine fracties  $^3\text{He}$ , deuterium D, en  $^7\text{Li}$ . De rest bestaat uit waterstof. Dit wordt gezien als een van de fundamenteën van de Big Bang kosmologie. Het wordt aangenomen dat alle elementen zwaarder dan  $^7\text{Li}$  voornamelijk in het inwendige van sterren gemaakt zijn of in astrofysische processen zoals supernova explosies (zie sectie 3.5.1 voor een schatting van de abundantie van  $^4\text{He}$  gevormd in sterren).

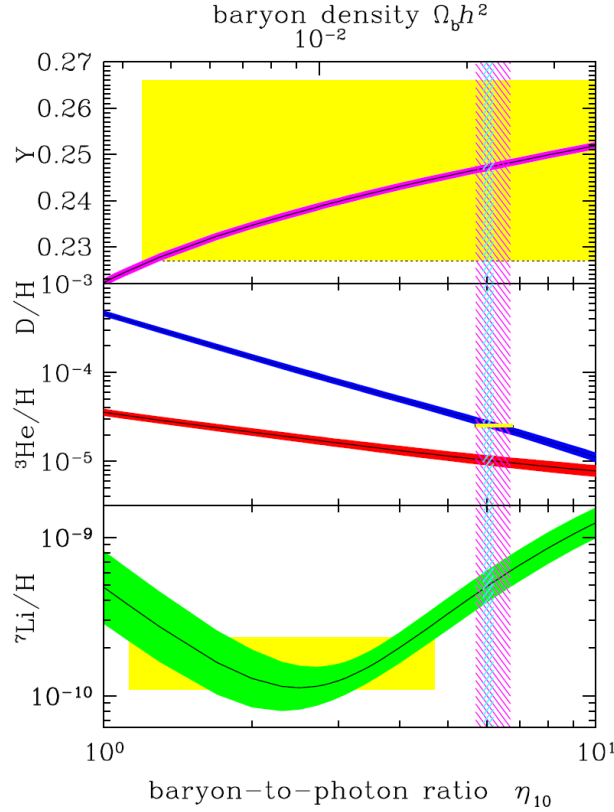
Big Bang nucleosynthese begon pas toen het universum meer dan 10 seconden oud was en door haar expansie was afgekoeld tot een temperatuur van ongeveer  $3 \times 10^9$  K. Voor deze tijd was de temperatuur zó hoog, dat de lichte kernen, gevormd in botsingen tussen nucleonen en kernen, na hun vorming ook weer direct uiteen vielen. De starttijd is nagenoeg onafhankelijk van de hoeveelheid donkere materie, omdat het heelal toen stralingsgedomineerd was en dat bepaalde de facto de temperatuur-tijd relatie. De relatieve abundanties voor protonen en neutronen volgen dan uit thermodynamische argumenten. De berekeningen zijn niet lineair en kunnen enkel met numerieke methoden worden uitgevoerd (zie Fig. 8 voor een overzicht van de verschillende reactiekanalen).



**Figuur 9:** Voorspellingen voor de primordiale abundanties van de lichtste elementen, getoond als functie van tijd en temperatuur na de Big Bang.

Voor temperaturen lager dan  $3 \times 10^9$  K en dus voor tijden groter dan 10 s na de Big Bang blijft  ${}^4\text{He}$  gebonden, terwijl de lichtere kernen nog steeds uiteen vallen. Dit komt omdat  ${}^4\text{He}$  een zogenaamde dubbel-magische kern is met een relatief hoge bindingsenergie van 28 MeV. Hierdoor kan nucleosynthese nog steeds geen aanvang nemen. Echter, Fig. 9 toont dat ongeveer 3 minuten later, toen de temperatuur door verdere expansie afgekoeld was tot minder dan  $10^9$  K, deuteronen gevormd kunnen worden door de reactie  $n + p \rightarrow D + \gamma$  en zijn de deuteronen stabiel. Vervolgens leidt neutron- en protonvangst door deuteronen tot  ${}^3\text{H}$  en  ${}^3\text{He}$ . Het  ${}^3\text{H}$  gaat via beta-verval over in  ${}^3\text{He}$  en dat kan op haar beurt door neutronvangst weer overgaan in  ${}^4\text{He}$ . De bijdrage van dit laatste proces is echter klein ten opzichte van de vorming van  ${}^4\text{He}$  door directe neutronvangst van  ${}^3\text{He}$  of door de reactie  $D + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^4\text{He}$ .

Botsingen tussen  ${}^3\text{H}$  en  ${}^3\text{He}$  met  ${}^4\text{He}$  creëren kleine hoeveelheden  ${}^7\text{Li}$  en  ${}^7\text{Be}$ . Het gevormde  ${}^7\text{Be}$  kan via beta-verval overgaan in het stabiele  ${}^7\text{Li}$ , hetgeen weer de reactie  $p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$  kan aangaan. Ook andere lichte kernen kunnen op deze wijze vernietigd worden, bijvoorbeeld  $n + {}^3\text{He} \rightarrow p + {}^3\text{H}$ . De hoeveelheden  ${}^2\text{H}$ ,  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$  en  ${}^7\text{Li}$  geproduceerd in de Big Bang zijn derhalve gevoelig voor de baryondichtheid, of wel de verhouding van baryonen tot fotonen (ongeveer  $6 \times 10^{-10}$ ), maar ook voor de expansiesnelheid (snelheid van afkoeling) van het beginnend universum. De relatieve abundantie van een gegeven kern is gevoelig voor de reactiesnelheid van diverse kernreacties. Figuur 10 toont de abundanties van de lichte kernen gevormd in de Big Bang ten opzichte van de abundantie van waterstof. Hoe groter de baryonendichtheid, ofwel de



**Figuur 10:** Voorspellingen van de primordiale abundanties van de elementen  ${}^4\text{He}$ ,  $D$ ,  ${}^3\text{He}$  en  ${}^7\text{Li}$  voor hBig Bang nucleosynthese. De banden tonen de 95% CL range als functie van de baryon-foton verhouding  $\eta = \eta_{10} \times 10^{-10}$ . De rechthoeken geven de gemeten abundanties. De kleine verticale band geeft de kosmische abundantie uit metingen aan de kosmische achtergrondstraling, terwijl de wijde band het resultaat van BBN concordance aangeeft (beide voor 95% CL). Credit: K.A. Olive et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 38, 090001 (2014).

massafractie in figuur 10, des te groter is de vernietigingssnelheid van  $D$ ,  ${}^3\text{H}$  en  ${}^3\text{He}$ . De gemeten abundanties van  $D$ ,  ${}^3\text{He}$  en  ${}^7\text{Li}$  komen overeen met een  $\eta$  in de buurt van het minimum in de  ${}^7\text{Li}$  curve.

De vorm van de curven in Fig. 10 zijn als volgt te begrijpen. De abundantie van  ${}^4\text{He}$  neemt toe met toenemende  $\eta$ , omdat nucleosynthese eerder begint voor een hogere baryonendichtheid. Deuterium en  ${}^3\text{He}$  verbranden door kernfusie en dus nemen hun abundanties af met toenemende  $\eta$ . Tenslotte wordt  ${}^7\text{Li}$  vernietigd door protonen bij lage  $\eta$  met een efficiëntie die toeneemt met toenemende  $\eta$ . Aan de andere kant wordt haar pre-cursor  ${}^7\text{Be}$  met hogere efficiëntie geproduceerd als  $\eta$  toeneemt. Dit verklaart het minimum in de curve voor  ${}^7\text{Li}$ .

### 3.1.1 De abundantie van ${}^4\text{He}$

We proberen nu een schatting te maken van de abundantie van  ${}^4\text{He}$ . Op tijden  $t \ll 1$  s zorgen zwakke interacties voor thermisch evenwicht tussen neutrino's, elektronen en positronen,

$$n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (190)$$

$$\nu_e + n \leftrightarrow p + e^- \quad (191)$$

$$e^+ + n \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e. \quad (192)$$

Toen de temperatuur van het heelal veel hoger was dan het massaverschil tussen proton en neutron,  $\Delta m \equiv m_n - m_p = 1.29$  MeV, verliepen de reacties even snel in beide richtingen en waren er evenveel protonen als neutronen in het plasma. Nadat de temperatuur daalt tot beneden 1 MeV, wordt de dichtheid van neutronen in toenemende mate onderdrukt, vanwege hun hogere massa. Omdat protonen en neutronen niet-relativistisch zijn bij deze temperaturen ( $T \approx 1$  MeV  $\ll m_p \approx m_n \approx 940$  MeV), kunnen we vergelijking (183) gebruiken om de verhouding

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\Delta m/T} = e^{-(1.29 \text{ MeV})/T} \quad (193)$$

te berekenen. Merk op dat het aantal helicitetoestanden  $g_p = g_n = 2$ . We zien dat de verhouding gelijk is aan 1 bij hoge temperatuur. Indien er thermisch evenwicht zou blijven bestaan, dan zou de verhouding afnemen tot een heel kleine waarde bij lage temperatuur. We weten echter van onze discussie in sectie 2.3.3 met betrekking tot het ontkoppelen van neutrino's, dat er voor  $T < 0.8$  MeV een zogenaamde "freeze-out" optreedt van de abundantie, omdat de reactiesnelheid

$$\Gamma(\nu_e + n \leftrightarrow p + e^-) \approx 2.1 \left( \frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^5 \text{ sec}^{-1} \quad (194)$$

kleiner wordt dan de Hubble expansiesnelheid. Neutronen kunnen dan niet meer vernietigd (of gecreëerd) worden door de laatste twee reacties van vergelijkingen (191) en (192). Ze verdwijnen echter wel nog steeds door het neutronverval getoond in de eerste reactie van vergelijking (190). Het verval van neutronen is nauwkeurig gemeten in het laboratorium en de gemiddelde levensduur bedraagt  $886.7 \pm 0.8$  s. Dat is een relatief lange tijd en we kunnen daarom aannemen dat de abundantie van neutronen wordt "ingevroren" op een waarde die hoort bij de temperatuur van 0.8 MeV. We vinden dan

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\Delta m/0.8} \approx 0.2. \quad (195)$$

Voordat de neutronen de gelegenheid hebben om te vervallen, eindigen ze in heliumkernen via de volgende twee mogelijke reeksen kernreacties:

$$p + n \leftrightarrow D + \gamma, \quad D + D \leftrightarrow {}^3\text{He} + n, \quad {}^3\text{He} + D \leftrightarrow {}^4\text{He} + p, \quad (196)$$

of

$$D + D \leftrightarrow {}^3\text{H} + p \quad {}^3\text{H} + D \leftrightarrow {}^4\text{He} + n. \quad (197)$$

De verhouding van de reactiesnelheid voor  $p + n \leftrightarrow D + \gamma$  en de Hubble expansiesnelheid wordt gegeven door

$$\frac{\Gamma_{pn}}{H} \approx 2 \times 10^3 \left( \frac{T}{0.1 \text{ MeV}} \right)^5 \frac{n_p}{n_p + n_n} \Omega_B h^2 \quad (198)$$

en die verhouding is groot voor  $T \gg 0.1$  MeV. Omdat de fotodichtheid zo groot is, is foto-disintegratie van deuterium erg efficiënt, waardoor de deuterium abundantie beneden  $10^{-10}$  blijft gedurende thermisch evenwicht. Hierdoor verlopen de reactie  $D + D$  relatief traag (want de reactiesnelheid is voor deze reacties evenredig met het kwadraat van de kleine deuterium abundantie) en wordt er maar weinig helium geproduceerd voor  $T > 0.1$  MeV. Beneden deze temperatuur wordt foto-disintegratie inefficiënt en neemt de deuterium abundantie toe tot ongeveer  $10^{-3}$ , waardoor snel helium ontstaat uit  $D + D$  kernfusie. Dit proces consumeert het merendeel van de neutronen, waardoor een goede schatting van de  ${}^4\text{He}$  abundantie gegeven wordt door

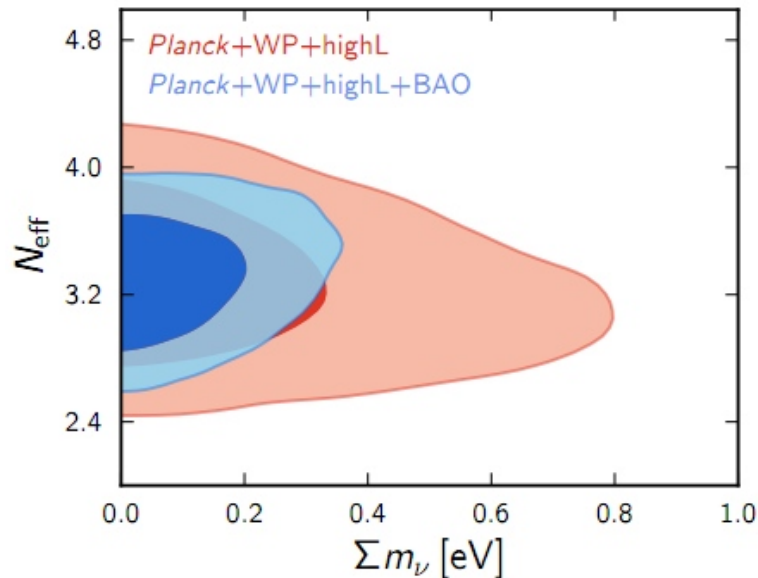
$$Y({}^4\text{He}) \equiv \frac{4n_{\text{He}}}{n_{\text{tot}}} = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2n_n/n_p}{1 + n_n/n_p}. \quad (199)$$

We hadden reeds gevonden dat de verhouding  $n_n/n_p$  ongeveer 0.2 is voor  $T \approx 0.8$  MeV. Na die tijd is er een aantal neutronen vervallen, zodat de verhouding aan het eind van de nucleosynthese (bij



een temperatuur  $T \approx 0.06$  MeV en na ongeveer 330 s) ongeveer 0.13 was. Als we dat invullen, vinden we een abundantie van  $Y(^4\text{He}) \approx 0.24$ . Hetzelfde getal volgt uit een gedetailleerde berekening en het is binnen de meetfouten precies de waarde die gemeten is in sterren in oude gaswolken.

Een belangrijke ingrediënt in de berekening van  $Y(^4\text{He})$  is de depletie van de neutron-proton verhouding door neutronverval. Als de expansie van het heelal sneller zou zijn geweest dan dat aangenomen in de standaard analyse, dan zouden minder neutronen tijd gehad hebben om te vervallen, voordat ze opgesloten raken in de heliumkernen. In dat geval zou de helium abundantie groter zijn geweest. Volgens de Friedmannvergelijking schaalt de expansiesnelheid  $H^2 \propto \rho$  en wordt de energiedichtheid  $\rho$  gedomineerd door relativistische deeltjes. Additionele soorten neutrino's, dus naast de drie neutrino's die we kennen van het standaard model van de deeltjesfysica, zouden dus leiden tot een hogere expansiesnelheid en daarmee tot een hogere abundantie van  $^4\text{He}$ . Figuur 11 toont dat de metingen laten zien dat er naar alle waarschijnlijkheid slechts drie soorten neutrino's zijn. Verder kan er ook een limiet op de som van de massa's van de verschillende neutrino's worden gezet.



**Figuur 11:** Posterior distributies voor  $N_{\text{eff}}$  en  $\sum m_\nu$  (de som van de massa's van de drie actieve neutrino's) in modellen met extra massaloze neutrino-achtige soorten. Image credit: Planck Collaboration: P. A. R. Ade et al., 2013, arXiv:1303.5076

De  $^4\text{He}$ -kern heeft de grootste abundantie vanwege haar grote bindingsenergie. De expansiesnelheid van het universum neemt toe met het aantal neutrinofamilies en berekeningen bevestigen dat er drie neutrinofamilies bestaan. Dit komt overeen met waarnemingen van  $Z^0$  verval. De resultaten van Big Bang nucleosynthese zijn in overeenstemming met de Planck en WMAP resultaten dat het universum bestaat uit  $4.82 \pm 0.05$  % gewone baryonische materie, uit  $25.8 \pm 0.4$  % van een onbekend soort 'dark matter' genaamd, omdat deze niet zichtbaar is, maar wel gravitationele effecten heeft, en uit  $69.2 \pm 1,0$  % van iets dat we 'dark energy' noemen.

### 3.2 Stervorming

Sterren condenseren uit gaswolken die voornamelijk uit waterstof bestaan. Als een gaswolk voldoende dichtheid heeft of koud genoeg is, dan kunnen delen ervan condenseren en sterren vormen. Het gebied dat condenseert dient een minimum afmeting te hebben, zodat er voldoende

massa en gravitatie is om de gasdruk in de wolk te overwinnen. Deze minimum lengte heet de *Jeans lengte*, naar de Britse astrofysicus Sir James Jeans (1877 - 1946). We kunnen de grootte  $R$  van een sferisch gebied dat instabiel is voor stervorming bij benadering vinden door de gemiddelde kinetische energie  $\frac{3}{2}kT$  van een molecuul met massa  $m$  gelijk te stellen aan de absolute waarde van de gravitationele potentiële energie  $\frac{GmM}{R}$ . Vervolgens vervangen we de massa  $M$  van dit gebied door haar dichtheid  $\rho$  via de substitutie  $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ . Dit levert dan de benadering  $\frac{3}{2}kT = \frac{GmM}{R} \rightarrow \frac{3}{2}kT = \frac{4}{3}\pi Gm\rho R^2 \rightarrow R = \left(\frac{9kT}{8\pi G\rho m}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Een exacte berekening die de geluidssnelheid in de gaswolk in rekening brengt, levert

$$\lambda_{\text{Jeans}} = \left(\frac{\pi kT}{G\rho m}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (200)$$

met  $T$  en  $m$  respectievelijk de temperatuur en massa van het molecuul en  $\rho$  de dichtheid van de condenserende gaswolk. Elk deel van de gaswolk groter dan de Jeans lengte heeft voldoende zelf-gravitatie en kan condenseren. De massa van een dergelijk gebied is  $\frac{4}{3}\pi\rho\lambda_{\text{Jeans}}^3$  en dat wordt de Jeans massa genoemd,

$$M_{\text{J}} = \frac{4}{3}\pi\rho\lambda_{\text{Jeans}}^3 = \frac{4\pi^{\frac{5}{2}}}{3} \left(\frac{kT}{Gm}\right)^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}. \quad (201)$$

Het is belangrijk om in te zien dat  $M_{\text{J}}$  afneemt als  $\rho$  toeneemt. Als dus een instabiel gebied initieel ter grootte  $\lambda_{\text{Jeans}}$  condenseert, neemt de dichtheid toe. Dit verlaagt de Jeans massa en dat maakt kleinere delen van het gebied instabiel voor condensatie. Indien de dichtheid in de gaswolk niet homogeen is, dan is het waarschijnlijk dat de samentrekkende gaswolk fragmenteert in kleinere gebieden. Sterrenkundigen noemen een dergelijk gebied een *protoster*.

De gravitationele potentiële energie van de moleculen wordt tijdens de contractie van de gaswolk omgezet in warmte<sup>4</sup>. Hierdoor neemt de temperatuur van het gas toe tijdens de contractie. Gedurende contractie van de protoster wordt de dichtheid uiteindelijk voldoende hoog om straling gevangen te houden en begint de protoster zich te gedragen als een zwart lichaam. Op dat moment neemt de temperatuur scherp toe en begint de protoster te schijnen in het zichtbare licht. De energie van contractie is voldoende om de protoster enkele miljoenen jaren te laten schijnen.

### 3.3 Energiehuishouding in sterren

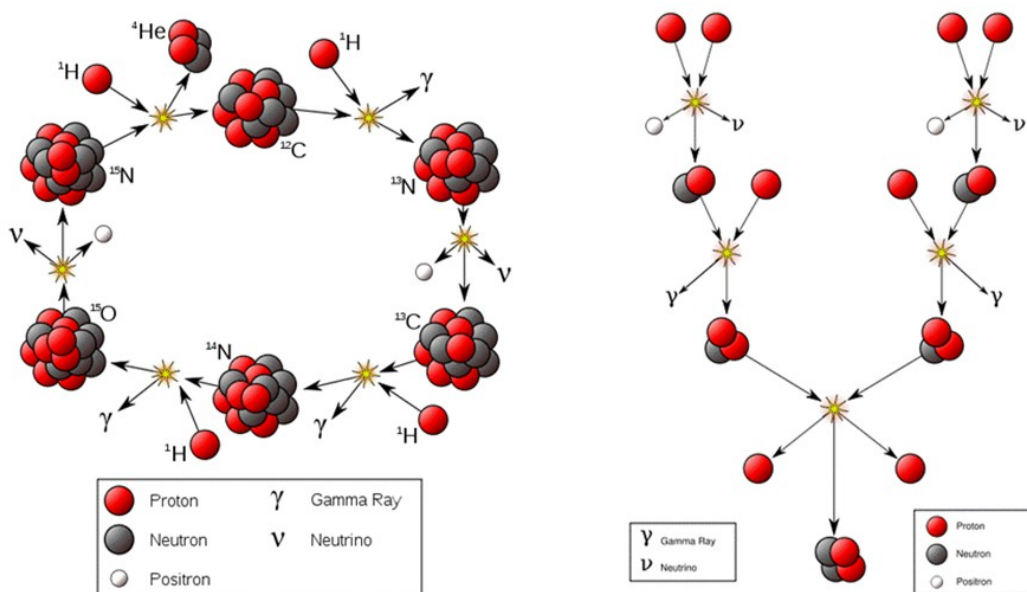
De verhitting tijdens contractie van de protoster is voldoende om kernfusie te initiëren. Het mechanisme van energieproductie in de zon is fusie van waterstofatomen tot helium en fusie is de energiebron van sterren. De constructie van een fusiereactor op aarde is ingewikkeld, het grootste probleem is de zogenaamde ‘confinement’ (opsluiting) van het plasma. Een plasma met een temperatuur van ongeveer  $10^8$  K dient in een eindig volume opgesloten te worden. Vaste wanden zijn niet mogelijk en we dienen toevlucht te nemen tot magnetische opsluiting of opsluiting met behulp van lasers. Het volume van het magnetisch veld dient relatief klein te zijn, enkele kubieke meters, want anders wordt het vermogen, maar worden ook de constructiekosten, onoverkomelijk. In de zon zijn deze problemen opgelost, alhoewel niet al te efficiënt. De buitentemperatuur is ongeveer 6000 K, terwijl de temperatuur in het centrum van de zon ongeveer  $1.6 \times 10^7$  K is.

<sup>4</sup>Ook onze zon is uit een dergelijke protoster ontstaan. De zon heeft een massa  $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$  kg en bestaat uit ongeveer  $10^{57}$  waterstofatomen met elk een massa van  $m = 1,67 \times 10^{-27}$  kg. De huidige luminositeit van de zon bedraagt  $L_{\odot} = 3,8 \times 10^{26}$  W. De ontsnappingssnelheid van de zon gelijk is aan  $v_{\text{ontsnapping}} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}}}$ . De kinetische energie van een atoom als het de zon bereikt is dus  $\frac{1}{2}mv_{\text{ontsnapping}}^2 = \frac{GM_{\odot}m}{R_{\odot}} = 3 \times 10^{-16}$  J. Hieruit volgt dat de gravitationele potentiële energie voldoende is om de protoster enkele miljoenen jaren te laten schijnen.

Kernfusie in de zon verloopt relatief traag, maar de totale energieproductie is groot, omdat het volume zo groot is.

Gravitatie reguleert het fusieproces in sterren: als om een of andere reden de reacties sneller verlopen, dan heeft dat een temperatuurstijging tot gevolg. Dit leidt direct tot expansie van het centrale deel van de ster, waardoor de reactiesnelheid vermindert en de energieproductie afneemt. Evenzo als het tegenovergestelde gebeurt en de temperatuur en dus ook de gasdruk afneemt, dan krimpt de kern van de ster en neemt door de hogere dichtheid de reactiesnelheid weer toe. Op deze wijze kan een ster als de zon miljarden jaren een stabiele energieproductie realiseren. Hetzelfde proces maakt ook dat als de massa van de ster groot is, de centrale druk en temperatuur relatief hoog zijn, waardoor de energieproductie groot is. Dit heeft ook tot gevolg dat zware sterren een relatief korte levensduur hebben.

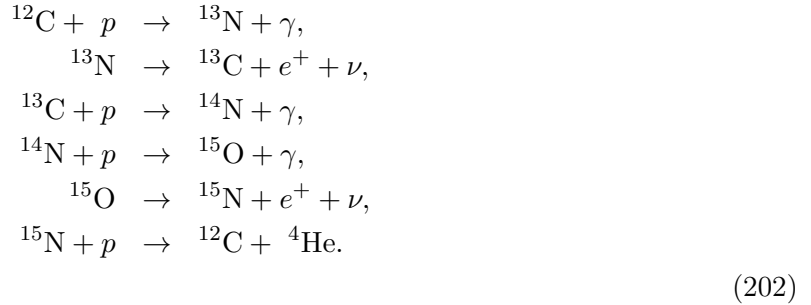
Vóór de ontdekking van kernreacties kon de energieproductie in de zon niet verklaard worden: er was geen bron bekend die een dergelijke hoeveelheid energie gedurende langere tijd kon produceren. Geologische studies tonen aan dat de zon ongeveer dezelfde temperatuur heeft gehad voor een periode van minstens  $10^9$  jaar. Eddington was een van de eersten die erop wezen, dat met de fusie van vier waterstofatomen tot een  ${}^4\text{He}$ -atoom, er ongeveer 7 MeV/nucleon aan energie vrijkomt. Dit proces levert miljoenen keren meer energie dan een chemische reactie. Er blijft echter een probleem: klassiek kan fusie niet optreden in sterren, omdat de thermische energie van de protonen onvoldoende is om de Coulombafstoting te overwinnen. Het quantummechanisch tunnелеffect maakt dergelijke reacties ook bij lagere temperatuur mogelijk. Men kan nu specifieke reacties, verantwoordelijk voor stellaire energieproductie, vaststellen. De eerste sequentie die



**Figuur 12:** CNO en *pp*-cyclus voor het fusieproces van een ster. De *pp*-cyclus is dominant in de zon (de CNO-cyclus verzorgt slechts 1.6 % van de energie productie in de zon). De CNO-cyclus is belangrijk in massieve waterstof-brandende sterren met een hoge centrale temperatuur, zoals Sirius A.

werd voorgesteld was de zogenaamde koolstof of CNO cyclus weergegeven in Fig. 12, waarin  ${}^{12}\text{C}$  en vier protonen ( $4p$ ) getransformeerd worden in een  $\alpha$ -deeltje en  ${}^{12}\text{C}$ . De CNO-cyclus verloopt

als volgt,



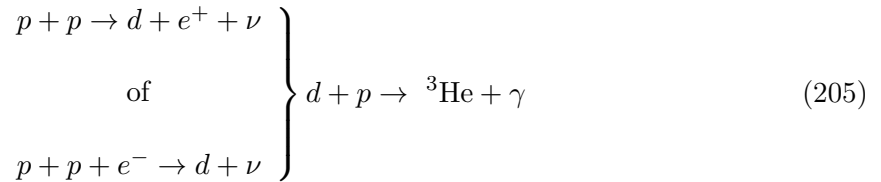
In deze sequentie fungeert het koolstof als een katalysator. Het ondergaat veranderingen, maar het wordt niet verbruikt. De totale reactie kan dus geschreven worden als



De totale energie  $Q$  die in deze reactie vrijkomt, kan eenvoudig gevonden worden uit de bekende massa's (via  $E = mc^2$ ). Er geldt

$$Q(4p \rightarrow {}^4\text{He}) = 26.7 \text{ MeV}. \tag{204}$$

Van deze energie wordt ongeveer 25 MeV gebruikt om de ster te verhitten, de rest wordt afgevoerd door de neutrino's. De CNO-cyclus is dominant in *hete* sterren. In *koude* sterren zoals de zon, is de *pp*-cyclus belangrijker. De essentiële stappen in de *pp*-cyclus zijn



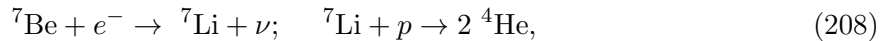
en



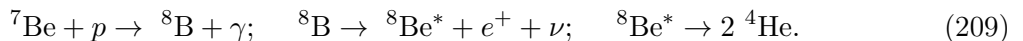
of



In vergelijking (206) is de reactie  $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu$  reeds gerealiseerd. In vergelijking (207) wordt  ${}^7\text{Be}$  gevormd en dit leidt tot  ${}^4\text{He}$  via twee sequenties,



of



De *pp*-cyclus heeft dezelfde energieopbrengst als de CNO-cyclus. Om de reactiesnelheden te kunnen berekenen, zijn er twee verschillende soorten input nodig. Ten eerste, de temperatuurverdeling van het inwendige van de zon dient bekend te zijn. Het originele werk gaat terug tot Eddington en verbeterde versies lijken betrouwbaar te zijn (we zullen in het volgende hoofdstuk zien dat de temperatuur in het inwendige van de zon ongeveer 16 miljoen K is). Ten tweede dienen de werkzame doorsneden<sup>5</sup> voor de genoemde reacties bekend te zijn voor temperaturen in

<sup>5</sup>De werkzame doorsnede is een maat voor de waarschijnlijkheid dat een bepaalde wisselwerking tussen deeltjes plaatsvindt (bijvoorbeeld verstrooiing of een kernreactie). Deze waarschijnlijkheid is vaak sterk afhankelijk van de energie van de deeltjes of de samenstelling van een target dat wordt beschoten. De werkzame doorsnede wordt aangeduid met  $\sigma$  en heeft de dimensie van oppervlakte.

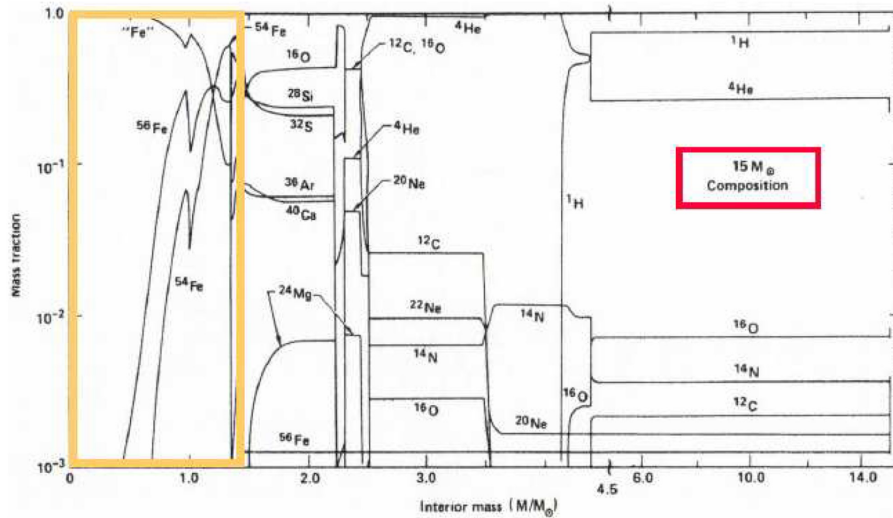
de orde van 16 miljoen K. Deze temperatuur correspondeert met kinetische energieën van slechts enkele keV, en de bijbehorende werkzame doorsneden zijn uitermate klein. De vergelijkingen tonen dat er twee typen reacties een rol spelen: hadronische en zwakke reacties (alle reacties met neutrino's zijn zwak). De gemiddelde levensduur van het verval  ${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu$  is gemeten. De twee zwakke reacties in vergelijking (205) verlopen echter zo traag, dat ze niet in het laboratorium gemeten kunnen worden: ze worden berekend door gebruik te maken van de Hamiltoniaan voor de zwakke wisselwerking. Teneinde de werkzame doorsneden voor de hadronische reacties te vinden, worden de waarden die bij hogere energieën gemeten zijn, geëxtrapoleerd naar enkele keV. Experimentatoren (zoals W.A. Fowler van Caltech) en diverse theoretici zijn van mening dat hun schattingen stabiel zijn en dat zowel de structuur van sterren als de kernfysische aspecten van de productie van zonne-energie goed begrepen zijn.

### 3.4 Nucleosynthese in sterren

Verschillende lichte elementen zijn gevormd tijdens de Big Bang. Deze zogenaamde primordiale productie is niet mogelijk voor zware elementen, omdat neutron- of protonvangst van  ${}^4\text{He}$  niet tot stabiele kernen leidt en vanwege het trage verloop van andere reacties. Neutronvangst bijvoorbeeld, leidt tot  ${}^5\text{He}$ , hetgeen instabiel is en weer direct vervalt naar  ${}^4\text{He}$ . Ook de vangst van  $\alpha$ -deeltjes via  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ , vormt alleen het instabiele  ${}^8\text{Be}$ , dat weer onmiddellijk opbreekt in twee  $\alpha$ -deeltjes. Als de temperatuur van het universum gedaald is tot ongeveer  $3 \times 10^8$  K, ongeveer een half uur na haar geboorte, stopt nucleosynthese, omdat Coulomb repulsie verdere kernreacties verhindert. De abundanties van de diverse elementen gevormd in de Big Bang zijn nu ingevroren, zodat de abundanties van de lichte elementen  $D$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^4\text{He}$  en  ${}^7\text{Li}$ , zoals die tegenwoordig worden waargenomen, nog steeds de toestand van een universum van een half uur oud reflecteren.

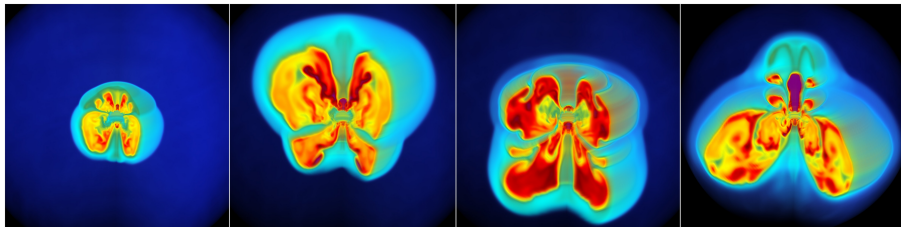
Lichte kernen kunnen ook in sterren geproduceerd worden. In het geval van  ${}^4\text{He}$  verklaart dit productieproces echter slechts ongeveer 10% van de waargenomen abundantie van dit element. Deuterium kan al helemaal niet in significante hoeveelheden in sterren geproduceerd worden, omdat het bij dergelijke hoge dichtheden direct in zware elementen geconverteerd wordt. Deze conversie beperkt de huidige baryondichtheid in het heelal tot minder dan ongeveer  $5 \times 10^{-28}$  kg/m<sup>3</sup>. De productie van lithium in sterren wordt positief beïnvloed door neutrino interacties met  ${}^4\text{He}$ . Deze reacties produceren  ${}^3\text{H}$ ,  ${}^3\text{He}$ , protonen en neutronen. Een van de successen van het standaard model is haar vermogen om de abundanties van de lichte elementen te voorspellen, zelfs al verschillen die een factor miljard van elkaar. Echter, de gemeten abundanties van zware elementen kan niet verklaard worden door Big Bang nucleosynthese. Klaarblijkelijk werden de zware elementen in een later stadium geproduceerd, nadat stervorming reeds plaatsgevonden had. Nucleosynthese, de verklaring van de abundantie van de elementen, is dus onlosmakelijk verbonden met sterstructuur en stervolutie.

Druk en temperatuur in een ster zijn immens. In de zon bijvoorbeeld, is de druk in het centrum  $2 \times 10^{10}$  bar en de temperatuur  $16 \times 10^6$  K. Atomen zijn onder deze omstandigheden bijna volledig geïoniseerd, waardoor er een plasma van vrije elektronen en naakte atoomkernen ontstaat. De interne druk wordt in stand gehouden door kernreacties die voor de stralingsenergie van de ster zorgen. Zolang deze reacties plaatsvinden, zullen gravitationele en interne druk elkaar in balans houden en is de ster in een evenwichtstoestand. Wat gebeurt er echter als de brandstof opgebruikt is? Wat gebeurt er met onze zon als alle waterstof opgebruikt is en de *pp*-cyclus stopt? De ster zal dan onder gravitatie samentrekken, waardoor de centrale druk en temperatuur zullen toenemen. Bij hogere temperatuur zullen nieuwe kernreacties plaatsvinden en zal een nieuwe evenwichtstoestand worden bereikt. Onder die omstandigheden zullen nieuwe elementen worden gevormd. Er zijn dus verschillende stadia van kernfusie en contractie. In alle stadia zullen zware elementen gegenereerd worden. Fig. 13 geeft de resultaten van de berekening van de



**Figuur 13:** Resultaten van de berekening van de samenstelling van een ster met een massa van 15 zonnemassa's. De abundanties van de diverse elementen worden gegeven als functie van massa (in zonnemassa's).

samenstelling van een ster met een massa van 15 zonnemassa's. Deze ster bevindt zich aan het eind van de diverse stadia van verbranding. Een dergelijke ster zal dan de supernova-fase ondergaan, waarna zij zich tot een neutronenster kan ontwikkelen. Ook voor de berekening van de supernova-fase bestaan er nauwkeurige modellen. Figuur 14 toont de resultaten van een dergelijke berekening.



**Figuur 14:** Resultaat van een computersimulatie van een supernova. De massaverdeling wordt gegeven als functie van de tijd, voor de eerste 0.7 seconde van het proces.

De volgende belangrijke stap, na de vorming van  ${}^4\text{He}$ , is de productie van  ${}^{12}\text{C}$ . Het  ${}^8\text{Be}$ , gevormd in de reactie  ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ , is instabiel. Indien de  ${}^4\text{He}$  dichtheid echter hoog genoeg is, kunnen meetbare hoeveelheden  ${}^8\text{Be}$  aanwezig zijn in de evenwichtsreactie



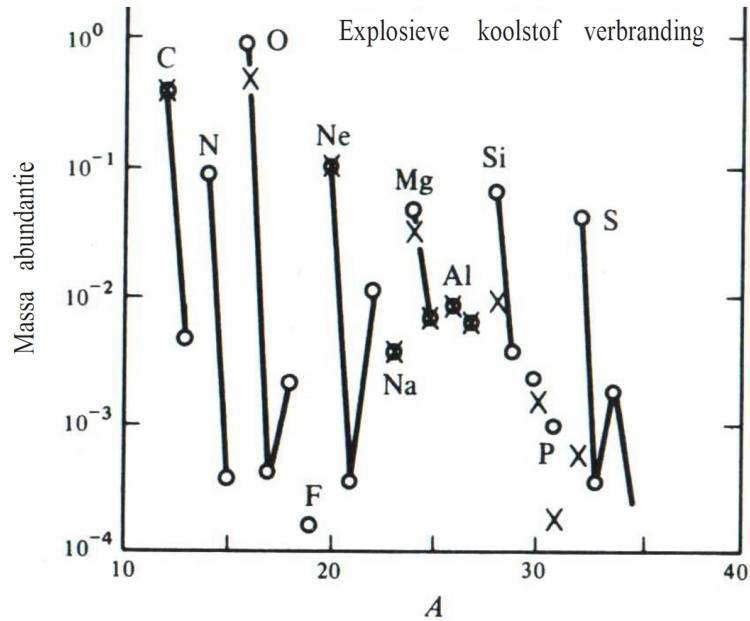
Vangst van een alfa deeltje kan dan plaatsvinden,



waardoor koolstof gevormd wordt. Deze vangst-reactie wordt versterkt, omdat de vorming van  ${}^{12}\text{C}$  voornamelijk verloopt via een resonantie met een aangeslagen toestand,  ${}^{12}\text{C}^*$ .

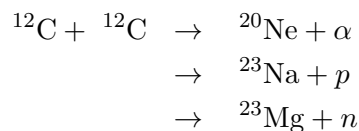
De vorming van  ${}^{16}\text{O}$  vindt plaats via





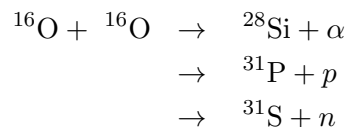
**Figuur 15:** Residu van koolstofverbranding in een exploderende ster. De cirkels stellen zonnestelsel abundanties voor, terwijl de berekende waarden door kruisen gerepresenteerd worden. De lijnen verbinden stabiele isotopen van een gegeven element. De aangenomen piektemperatuur is  $2 \times 10^9$  K en de dichtheid is  $10^8$  kg/m<sup>3</sup>.

Bovenstaande sequentie kan herhaald worden voor zwaardere elementen, terwijl proton- en neutronvangst de elementen kunnen vormen die tussen de alfa-achtige nucleïden liggen. Fusiereacties, zoals koolstofverbranding, zijn van vitaal belang om rekenschap te kunnen geven van de abundantie van elementen in het gebied  $20 \leq A \leq 32$ . De reacties



(213)

vereisen een temperatuur hoger dan ongeveer  $10^9$  K. Dergelijke temperaturen komen slechts voor in enkele zeer massieve sterren en men denkt dat koolstofverbranding voornamelijk plaatsvindt in massieve, zogenaamde exploderende sterren. Men neemt aan dat de temperatuur in exploderende sterren ongeveer  $2 \times 10^9$  K is. Figuur 15 laat zien dat de abundantie van de geproduceerde elementen goed overeenkomt met de resultaten van stermodellen. Op dezelfde manier kan zuurstofverbranding,



(214)

rekenschap geven van de abundantie van elementen met  $32 \leq A \leq 42$ , maar vereist een temperatuur van ongeveer  $3.6 \times 10^9$  K. Verbranding van silicium draagt bij tot de verklaring van de vorming van veel elementen tot Ni.

Een nieuw aspect komt aan de orde als de vorming van ijzer bereikt wordt. De bindingsenergie per nucleon heeft een maximum in de buurt van de Fe-groep. Voor atoomgetallen groter dan dat van ijzer, neemt de bindingsenergie per nucleon af. Om die reden kan de Fe-groep niet dienst doen als brandstof en de verbranding stopt als ijzer gevormd is. Dit verklaart ook waarom de elementen in de buurt van Fe meer abundant zijn dan andere. Elementen zwaarder dan ijzer zijn waarschijnlijk gevormd door neutron- en protonvangst reacties. Deze processen vinden plaats zolang de ster brandt of wanneer explosies protonen en neutronen produceren. Op het moment dat de kernreacties die de energie van de ster leveren stoppen, stopt ook de productie van zware elementen.



### 3.5 Uitgewerkte opgaven

#### 3.5.1 Productie van ${}^4\text{He}$ in sterren

Maak een schatting van de hoeveelheid  ${}^4\text{He}$  die door de sterren van onze melkweg gevormd is. De leeftijd van de melkweg is  $10^{10}$  jaar. Neem aan dat de melkweg gedurende deze tijd heeft gestraald met het huidige vermogen  $L_\star = 4 \times 10^{36}$  W. Merk op dat de conversie van een kilogram waterstof naar helium een energie levert van  $6 \times 10^{14}$  J.

*Antwoord:* De totale massa helium die geproduceerd is door het verbranden van waterstof in de sterren van de melkweg is

$$M_{\text{He}} = \frac{(4 \times 10^{36} \text{ W})(10^{10} \text{ jaar})(3 \times 10^7)}{(6 \times 10^{14} \text{ J})} = 2 \times 10^{39} \text{ kg.} \quad (215)$$

Merk op dat we een jaar ongeveer  $3 \times 10^7$  seconden heeft.

De totale massa van onze melkweg is ongeveer  $3 \times 10^{41}$  kg en dat betekent dat slechts minder dan 1 procent van de helium abundantie verklaard kan worden door waterstofverbranding in sterren. De waargenomen helium abundantie is ongeveer 25%. Verder merken we op dat er geen enkel mechanisme bekend is dat grote hoeveelheden helium uit waterstofverbranding kan uitstoten, zonder ook direct massa te genereren in de vorm van zware elementen.

#### 3.5.2 De vorming van ons zonnestelsel

Ons zonnestelsel is gemaakt uit gas afkomstig van een supernova. Al het uranium op aarde is gemaakt in deze supernova. Gedetailleerde berekeningen van de fysica van supernova explosies suggereren dat het aantal geproduceerde  ${}^{235}\text{U}$  kernen 1,7 maal groter was dan het aantal  ${}^{238}\text{U}$  kernen. Sinds hun productie verval  ${}^{235}\text{U}$  met een halfwaardetijd van  $t_{\frac{1}{2}} = 7,0 \times 10^8$  jaar en  ${}^{238}\text{U}$  met halfwaardetijd van  $t_{\frac{1}{2}} = 4,5 \times 10^9$  jaar. Hoe lang geleden vond de supernova explosie plaats, gegeven dat de verhouding  ${}^{235}\text{U}$  tot  ${}^{238}\text{U}$  zoals gevonden in gesteente gelijk is aan 0,007? (Hint: in radioactief verval neemt het aantal nog niet vervallen kernen af volgens de relatie  $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$  met  $\tau$  de levensduur.)

Voor het verval van het  ${}^{235}\text{U}$  geldt<sup>6</sup>  $N_{235}(t) = N_{235}(0)/2^{(t/0,7)}$  met  $t$  in miljard jaar. Evenzo vinden we voor het verval van het  ${}^{238}\text{U}$  de relatie  $N_{238}(t) = N_{238}(0)/2^{(t/4,5)}$ .

We delen bovenstaande vergelijkingen door elkaar en vinden

$$\frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)} = \frac{N_{235}(0)}{N_{238}(0)} \frac{2^{(t/4,5)}}{2^{(t/0,7)}}. \quad (216)$$

Er geldt  $N_{235}(t)/N_{238}(t) = 0,007$  en  $N_{235}(0)/N_{238}(0) = 1,7$ . Ook geldt  $2^a/2^b = 2^{(a-b)}$ . We vinden

$$0,007 = 1,7 \times 2^{t(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7})} \rightarrow {}^2\log\left(\frac{0,007}{1,7}\right) = t\left(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7}\right), \quad (217)$$

waar we beide kanten door 1,7 gedeeld hebben en de  ${}^2\log$  van beide kanten hebben genomen. Ook geldt  ${}^2\log(a) = {}^{10}\log(a)/{}^{10}\log(2)$ . We vinden nu

$$t = \frac{{}^{10}\log(\frac{0,007}{1,7})}{{}^{10}\log 2} / \left(\frac{1}{4,5} - \frac{1}{0,7}\right) = 6,6 \text{ miljard jaar.} \quad (218)$$

<sup>6</sup>Als u dat makkelijker vindt kunt u ook gebruikmaken van de relatie  $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$  met  $\tau$  de levensduur. Het verband tussen halfwaarde tijd  $t_{\frac{1}{2}}$  en de levensduur  $\tau$  wordt gevonden uit  $N(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-t_{\frac{1}{2}}/\tau}$ . Hieruit volgt  $t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$ . Verder gewoon bovenstaande logica volgen.

### 3.5.3 De proton-proton cyclus

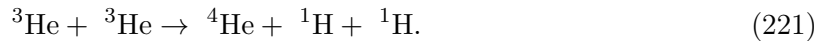
De zon en andere sterren produceren hun energie door kernfusie. Een van de fusiereacties, de proton-proton cyclus, bestaat uit de volgende reacties:



gevolgd door in  $10^{-5}$  van de gevallen

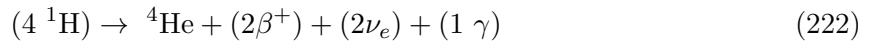


of in 85 procent van de gevallen

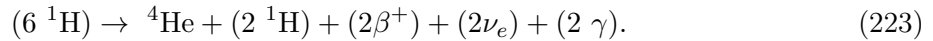


(a) Toon aan dat het netto effect van deze reacties gelijk is aan  $(4 {}^1\text{H}) \rightarrow {}^4\text{He} + (2\beta^+) + (2\nu_e) + (1 \text{ of } 2) \gamma$ .

Gewoon optellen van de reacties geeft in het eerste geval



en in het tweede geval



Netto wordt er evenveel waterstof omgezet per cyclus.

(b) Toon aan dat een rustenergie van 24,7 MeV vrijkomt in deze cyclus (en dan tellen we de 1,02 MeV die vrijkomt als elk van de positronen annihileert met een elektron niet eens mee).

We hebben de volgende rustmassa's:  $m_{{}^1\text{H}} = 1,007825 \text{ u}$ ,  $m_{{}^4\text{He}} = 4,02603 \text{ u}$ ,  $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ , met  $u$  de atomaire massa-eenheid,  $1 \text{ u} = 1,660\,538\,782(83) \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$ . Je vindt dan het massaverschil uit

$$\begin{aligned} \Delta m &= (4m_{{}^1\text{H}} - 2m_{e^-}) - (m_{{}^4\text{He}} + 2m_{e^+}) \\ &= 0,028697 \text{ u} - 4m_e = (26,73 - 2,044) \text{ MeV}/c^2 = 24,7 \text{ MeV}/c^2. \end{aligned} \quad (224)$$

Dit komt overeen met een rustenergieverschil van  $\Delta E_0 = \Delta mc^2 = 24,7 \text{ MeV}$ .

(c) De zon straalt met een energie van ongeveer  $4 \times 10^{26} \text{ W}$ . Neem aan dat dit wordt veroorzaakt door de conversie van vier protonen naar helium, gammastraling en neutrino's, hetgeen 26,7 MeV vrijmaakt. Wat is het verbruik van protonen in de zon (in protonen per seconde).

Het aantal proton-proton cycli per seconde is

$$\frac{P}{\Delta E} = \frac{(4 \times 10^{26} \text{ W})}{(26,7 \text{ MeV})(1,602 \times 10^{-13} \text{ J/MeV})} = 0,936 \times 10^{38} \text{ s}^{-1}. \quad (225)$$

Het verbruik in de zon is dan  $3,75 \times 10^{38}$  waterstofatomen ( ${}^1\text{H}$ ) per seconde. Vermenigvuldig dit met  $m_{{}^1\text{H}} = 1,67353 \times 10^{-27} \text{ kg}$  voor een verbruik van  $6,28 \times 10^{11} \text{ kg/s}$ .

(d) Hoe lang kan de zon nog schijnen op deze wijze? Neem aan dat de helft van de massa van de zon ( $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ) door protonen gevormd wordt.

Als er in totaal  $10^{30} \text{ kg}$  aan protonbrandstof voorradig is, dan zal de zon gedurende

$$T = \frac{(10^{30} \text{ kg})}{(6,28 \times 10^{11} \text{ kg/s})} = 1,6 \times 10^{18} \text{ seconde} \quad \text{of ook} \quad T = 5,0 \times 10^{10} \text{ jaar} \quad (226)$$

schijnen.

### 3.5.4 Kamiokande en supernova SN1987A

In de stad Kamiokande in Japan staat de zogenaamde Kamiokande II detector. Deze detector is ontworpen om proton verval te bestuderen. Met Kamiokande II werd op 23 februari 1987 in slechts 12 seconden een totaal van 12 neutrino interacties geregistreerd. Deze meting viel samen met de explosie van supernova SN1987A die op ongeveer 170.000 lichtjaar van de aarde stond. Reeds lang hiervoor hadden astrofysici berekend dat bij een dergelijke explosie binnen een aantal seconden een energie van ongeveer  $10^{46}$  J zou vrijkomen. Hiervan zou ongeveer 90 % vrijkomen in de vorm van neutrino's, die het heelal in gejaagd zouden worden, terwijl voor het spectaculaire zichtbare vuurwerk en de kinetische energie van de restanten ten hoogste een procent van de energie ter beschikking zou staan.

De Kamiokande II detector is in staat antineutrino's aan te tonen via de reactie



aan protonen in normaal water. De protonen die gebonden zijn in zuurstof kunnen hierbij verwaarloosd worden, omdat deze niet wezenlijk tot de totale telsnelheid bijdragen. De energie en de richting van de positronen kan met de detector bepaald worden (uit de richting en de intensiteit van de door de positronen opgewekte Čerenkovstraling). De actieve massa van de detector is 2100 ton water (1 ton  $\equiv$  1000 kg). De theoretische werkzame doorsnede voor deze reactie is energieafhankelijk en kan bij de hier optredende energieën uit de volgende relatie afgeleid worden

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left( \frac{E \text{ in MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2, \quad (228)$$

waarbij de energie van de neutrino's  $E$  gelijk gesteld kan worden aan de energie van de positronen. De 12 geregistreerde neutrino's hadden in het gewogen gemiddelde een energie  $\langle E_\nu \rangle = 12,8$  MeV en  $(\langle E_\nu \rangle)^{1/2} = 10,9$  MeV.

(a) Wat is het totale aantal neutrino's dat vrijkwam bij de explosie van de supernova? Ga ervan uit dat de zes neutrinosoorten  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\nu_\tau$ , en  $\bar{\nu}_\tau$ , waarvan enkel het  $\bar{\nu}_e$  met de Kamiokande II detector aangetoond kan worden, met vergelijkbare energieën en in vergelijkbare hoeveelheden geproduceerd werden.

*Antwoord:* Allereerst rekenen we uit hoeveel actieve protonen aanwezig zijn in de Kamiokande II detector.

$$N_p^{\text{actief}} = (2 \text{ protonen/H}_2\text{O}) \left( \frac{2.1 \times 10^9 \text{ gram H}_2\text{O}}{M_{\text{H}_2\text{O}} = 18} \right) \times N_A = 1.4 \times 10^{32}. \quad (229)$$

De werkzame doorsnede per actief proton bedraagt

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left( \frac{E}{10 \text{ MeV}} \right)^2 = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left( \frac{10.9 \text{ MeV}}{10 \text{ MeV}} \right)^2 = 1.19 \times 10^{-45} \text{ m}^2. \quad (230)$$

Een actief oppervlakte van  $N_p \times \sigma$  resulteerde in de detectie van 12 neutrino's. Het totale oppervlakte van de neutrinoschil bedraagt

$$A_{\text{total}} = 4\pi R^2 = 4\pi(170,000 \text{ lichtjaar})^2 = 4\pi(1.61 \times 10^{21} \text{ m})^2 = 3.25 \times 10^{43} \text{ m}^2. \quad (231)$$

In totaal zijn dus

$$N_\nu = (6 \text{ soorten neutrino's}) \times \frac{A_{\text{total}}}{N_p \sigma} = 1.17 \times 10^{57} \quad (232)$$

neutrino's vrijgekomen.

(b) Hoe groot is de totale in de vorm van neutrino's vrijgekomen energie in de explosie van SN1987A? Vergelijk dit met de theoretische voorspelling en vorm een oordeel over de overeenstemming.

*Antwoord:* De totale vrijgekomen energie in de vorm van neutrino's bedraagt

$$E_\nu = N_\nu \times \langle 12.8 \text{ MeV} \rangle = 1.5 \times 10^{64} \text{ eV} = 2.4 \times 10^{45} \text{ J}. \quad (233)$$

We hebben hier gebruikt dat  $1 \text{ eV} \equiv 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ . De overeenstemming is redelijk.

(c) Het eerst gemeten  $\bar{\nu}_e$  had een energie van 20,0 MeV. Het laatst gemeten neutrino kwam 12,4 seconde later en had een energie van 8,9 MeV. Welke limiet wordt hiermee op de massa van het neutrino geplaatst? Neem hierbij aan dat de supernova explosie minstens 10 s en hoogstens 20 s geduurd heeft. De benadering  $y = (1 - (x/C)^2)^{-1/2} \approx 1 + x^2/2C^2 + \dots$  voor  $x \ll C$  kan hier nuttig zijn.

*Antwoord:* We zoeken een relatie die verband legt tussen de massa en de energie van een neutrino. We gebruiken

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}_\nu}{E_\nu} \quad \text{en} \quad \gamma = \frac{E_\nu}{m_\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (234)$$

waarbij  $m_\nu$  de massa van het neutrino is. We kunnen schrijven

$$\frac{1}{\beta} = \left[ 1 - \left( \frac{m_\nu}{E_\nu} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{m_\nu^2}{2E_\nu^2}. \quad (235)$$

Het verschil in aankomsttijden van de neutrino's wordt enerzijds gegeven door de periode van 10 s waarin de supernova explodeerde, en anderzijds door de verschillen in reistijd,  $t = d/v$ , in het geval dat de neutrino's een massa ongelijk aan nul zouden hebben. Er geldt

$$\begin{aligned} 10 \text{ s} + 12.4 \text{ s} &= \frac{d}{v_2} - \frac{d}{v_1} = \frac{d}{c} \left( \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1} \right) \\ &= \frac{d}{c} \left( 1 + \frac{m_\nu^2}{2E_2^2} - 1 - \frac{m_\nu^2}{2E_1^2} \right) = \frac{dm_\nu^2}{2c} (E_2^{-2} - E_1^{-2}). \end{aligned} \quad (236)$$

We kiezen voor  $E_1$  en  $E_2$  de grootste en kleinste neutrino energieën, en vinden

$$m_\nu^2 = 22.4 \text{ s} \times \frac{2c}{d} \frac{E_1^2 E_2^2}{E_1^2 - E_2^2} = (22.4 \text{ s}) \left( \frac{(2)(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{1.61 \times 10^{21} \text{ m}} \right) (3.94 \times 10^{23}) = (29 \text{ eV})^2. \quad (237)$$

### 3.6 Opgaven

#### 3.6.1 De abundantie van ${}^4\text{He}$ in sterren

Leid vergelijking (198) af.

#### 3.6.2 De gravitationele zelfenergie van een ster

De gravitationele zelfenergie is de energie die vrijkomt wanneer een object, zoals een ster, geassembleerd wordt, door deeltje voor deeltje vanuit het oneindige te halen.

- (a) Bereken de zelfenergie van een uniforme bol met massa  $M$  en straal  $R$ .
- (b) Wat heeft het viriaaltheorema hierover te zeggen?
- (c) Metingen in het infrarood laten zien dat Jupiter en Saturnus stralen twee keer meer energie uitstralen dan dat ze absorberen in de vorm van zonlicht. Jupiter bijvoorbeeld absorbeert  $3,8 \times 10^{17}$  W aan zonlicht. Omdat radioactief verval geen rol van betekenis speelt, dient Jupiter een andere energiebron te hebben: warmte die gegenereerd wordt door globale contractie van de planeet. Gegeven is dat  $R_{\text{Jup}} = 6,96 \times 10^7$  m en  $m_{\text{Jup}} = 1,9 \times 10^{27}$  kg. Bereken de totale contractie  $\Delta R$  gedurende het bestaan van het zonnestelsel,  $t \approx 4,6 \times 10^9$  jaar, die nodig is om de straling te handhaven.

## 4 STANDAARD ZONNEMODEL

### 4.1 Standaard zonnemodel

Het standaard zonnemodel (Standard Solar Model - SSM) is een van de meest complete en succesvolle theorieën van de moderne sterrenkunde. We zullen de basisgedachten achter dit model en de consequenties ervan kort bespreken. Het SSM is gebaseerd op vier aannamen:

- de zon is sferisch symmetrisch;
- de zon is in hydrostatisch evenwicht;
- energie wordt overgebracht door straling en convectie alsook door neutrino's;
- fusie van waterstof tot helium is de energiebron.

In tabel 2 geven we de belangrijkste data voor de zon. De centripetale versnelling op de equator

Table 2: *Selectie van enkele van de meest belangrijke data voor de zon.*

Grootheid	Waarde
Gemiddelde afstand	$1.496 \times 10^{11}$ m
Straal	$(6.96432 \pm 54) \times 10^8$ m
Massa	$(1.98855 \pm 0.00025) \times 10^{30}$ kg
Gemiddelde dichtheid	$1.408 \times 10^3$ kg/m <sup>3</sup>
Dichtheid in het centrum	$1.622 \times 10^5$ kg/m <sup>3</sup>
Ontsnappingssnelheid	617.7 km/s
Rotatiesnelheid (bij de evenaar)	$7.189 \times 10^3$ km/uur
Gravitatie (bij de evenaar)	274.0 m/s <sup>2</sup>
Temperatuur fotosfeer	5778 K
Temperatuur in het centrum	$1.57 \times 10^7$ K
Luminositeit	$3.846 \times 10^{26}$ W

van de zon is  $a = v^2/R_\odot \approx 5 \times 10^{-3}$  m/s<sup>2</sup> en dat is verwaarloosbaar ten opzichte van haar gravitatie van  $g = GM_\odot/R_\odot^2 \approx 274$  m/s<sup>2</sup>. Sferische symmetrie is dus een goede aanname en we mogen toestandsvariabelen, zoals temperatuur en druk, schrijven als functie van de afstand tot het centrum van de zon, bijvoorbeeld  $T(r)$  en  $P(r)$ . Indien de lokale compositie (voornamelijk waterstof en helium) bekend is, dan geven deze twee grootheden ook de dichtheid.

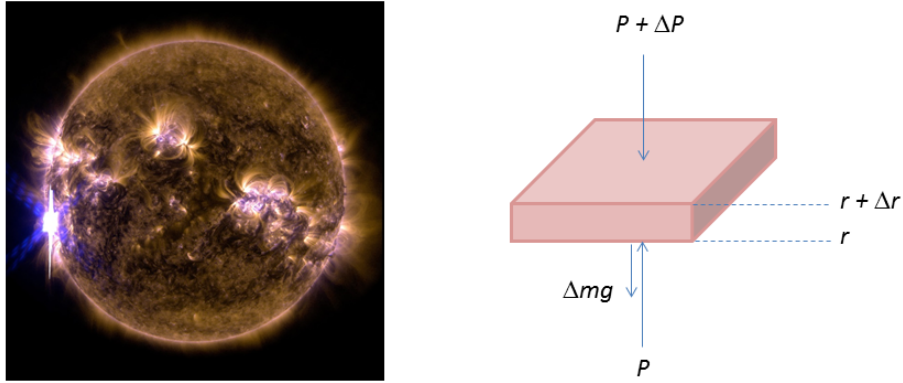
De druk in een ster is de som van de gasdruk<sup>7</sup> en de stralingsdruk. Dan geldt

$$P_{\text{gas}} = \frac{\rho k_B T}{\mu} \quad \text{en} \quad P_{\text{straling}} = \frac{4\sigma T^4}{3c}, \quad (238)$$

met  $\rho$  de dichtheid,  $\mu$  de deeltjesmassa ( $3.345 \times 10^{-27}$  kg voor waterstofmoleculen),  $\sigma$  de Stefan-Boltzmann constante en  $c$  de lichtsnelheid. Diep in de zon bedraagt de dichtheid  $\rho \approx 10^4$  kg/m<sup>3</sup> en temperatuur  $T \approx 10^7$  K en onder deze condities vinden we  $P_{\text{gas}} \approx 1.4 \times 10^{15}$  N/m<sup>2</sup> en  $P_{\text{straling}} \approx 2.5 \times 10^{12}$  N/m<sup>2</sup>. We zien dat de stralingsdruk verwaarloosbaar is<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>We vinden de uitdrukking voor de gasdruk uit de ideale gaswet,  $PV = Nk_B T$ , met  $P$  de gasdruk,  $V$  het volume,  $N$  het aantal moleculen,  $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$  J/K =  $8.617 \times 10^{-5}$  eV/K de constante van Boltzmann en  $T$  de temperatuur. Omdat de deeltjesdichtheid,  $N/V = \rho/\mu$ , met  $\rho$  de massadichtheid,  $\mu$  de moleculaire massa ( $\mu = 2m_p$  voor waterstofmoleculen, H<sub>2</sub>) en  $m_p$  de massa van het proton, kunnen we de gasdruk ook schrijven in de vorm  $P = \rho k_B T/\mu$ .

<sup>8</sup>Voor massieve sterren met hogere temperatuur kan stralingsdruk wel een belangrijke rol spelen.



**Figuur 16:** In de zon is er evenwicht tussen gravitatie en de gasdruk ten gevolge van de energie opgewekt door kernfusie. Links: een X-klasse zonnevlam barst uit op de linkerkant van de zon op de avond van 24 februari 2014. De samengestelde foto toont de zon in X-ray licht met golflengten van 131 en 171 Ångstrom. Image Credit: NASA/SDO. Rechts: op een schil met oppervlakte  $A$  en dikte  $\Delta r = h$  is er hydrostatisch evenwicht tussen de krachten van gasdruk en gravitatie.

We stellen ons voor dat de zon is opgebouwd uit sferische schillen. De schets in Fig. 16 toont dat op de bodem van een volume element een kracht werkt ter grootte  $F_{\text{bodem}} = P(r)A$ , terwijl aan de bovenkant een kracht werkt ter grootte  $F_{\text{top}} = -(P + \Delta P)A$ . Het minteken geeft aan dat deze kracht naar het centrum van de zon wijst. Verder werkt er nog de gravitatie op de massa van het volume element. Het gewicht is gelijk aan  $F_{\text{gravitatie}} = -\Delta mg$ , met  $\Delta m$  de massa van het element en  $g(r)$  de lokale gravitatieversnelling. Voor een gasschil met dikte  $\Delta r = h$  vinden we  $F_{\text{gravitatie}} = -\rho Ahg$ . Deze krachten zijn in hydrostatisch evenwicht,  $P(r)A - (P + \Delta P)A - \rho Ahg = 0$ , en er geldt voor een dunne sferische schil (met  $\Delta P \rightarrow dP$  en  $\Delta r = h \rightarrow dr$ ) dus  $P - (P + dP) - \rho g dr = 0$ . Hiermee vinden we

$$\text{hydrostatisch evenwicht :} \quad \frac{dP}{dr} = \rho g = -\rho \frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{P\mu}{kT} \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (239)$$

In de tweede stap gebruiken we dat de lokale gravitatieversnelling gegeven wordt door  $g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}$ , waarbij  $M(r)$  de totale massa binnen de bol is die begrensd wordt door de sferische schil met straal  $r$ . In de derde stap maken we gebruik van de ideale gaswet,  $PV = NkT \rightarrow P = \rho kT/\mu$ . Als randvoorwaarde hebben we dat de druk nul moet zijn aan de rand van de ster, waar  $\rho \approx 0$ .

De massa binnen de bol bedraagt  $M(r)$  en de sferische schil levert een bijdrage  $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$ . Er geldt dus

$$\text{massa - straal relatie :} \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho = 4\pi r^2 \frac{P\mu}{kT}. \quad (240)$$

Hier geldt de randvoorwaarde dat  $M(r) = 0$  als  $r = 0$ . Verder geldt dat  $M(r) = M_{\odot}$  als  $r = R_{\odot}$ , de straal van de ster.

In de evenwichtstoestand is de energie binnen het volume element, tussen  $r$  en  $r + dr$  constant. De stralingsflux door het buitenoppervlak is dan gelijk aan de som van de flux  $L$  door het binnen oppervlak en het vermogen  $dL$  dat binnen de sferische schil wordt gegenereerd:  $L + dL = L + 4\pi r^2 \epsilon \rho dr$ . Dit geeft

$$\text{energiebehoud :} \quad \frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \rho = 4\pi r^2 \epsilon \frac{P\mu}{kT}, \quad (241)$$

met  $L$  de *luminositeit* ofwel de flux van uitgestraalde energie per tijdseenheid, en  $\epsilon$  een functie die de intrinsieke energieproductie voorstelt (in W/kg). Bij een hogere temperatuur zal er meer

energie in de ster worden gegenereerd. Als randvoorwaarden gebruiken we  $L = 0$  voor  $r = 0$ , terwijl voor  $r = R_{\odot}$  we de luminositeit  $L = L_{\odot}$  van de zon dienen te vinden.

Tenslotte stellen we een vergelijking op voor de temperatuurverdeling  $T(r)$  van de zon. Hiertoe beschouwen we de intensiteit ( $\text{J}/(\text{m}^2\text{s})$ ) door een sferische schil. Straling passeert deze schil, terwijl er ook straling door kernfusie in de schil kan worden gegenereerd. Als de gemiddelde intensiteit van de straling binnen de schil gelijk is aan  $I$ , dan is de energie die geabsorbeerd wordt per tijdseenheid voor straling die de schil passeert gelijk aan  $-I\kappa\rho dr$ , met  $\kappa$  de *opaciteit* gedefinieerd als  $\kappa = \frac{\zeta}{\rho}$ , met  $\zeta$  de *lineaire absorptie coëfficiënt*. De geabsorbeerde intensiteit bedraagt  $dI = -I\kappa\rho dr = -\zeta I dr$ . De intensiteit van de straling die de schil passeert is gerelateerd aan de lokale luminositeit volgens  $I = \frac{L}{4\pi r^2}$ . Vanwege de relatie tussen energie ( $E$ ) en impuls  $p$  (voor straling geldt  $E = pc$ ), kunnen we de impulsverandering per tijdseenheid van de straling tussen binnen- en buitenoppervlak schrijven als

$$dp = -\frac{I\kappa\rho}{c}dr = -\frac{L\kappa\rho}{4\pi r^2 c}dr. \quad (242)$$

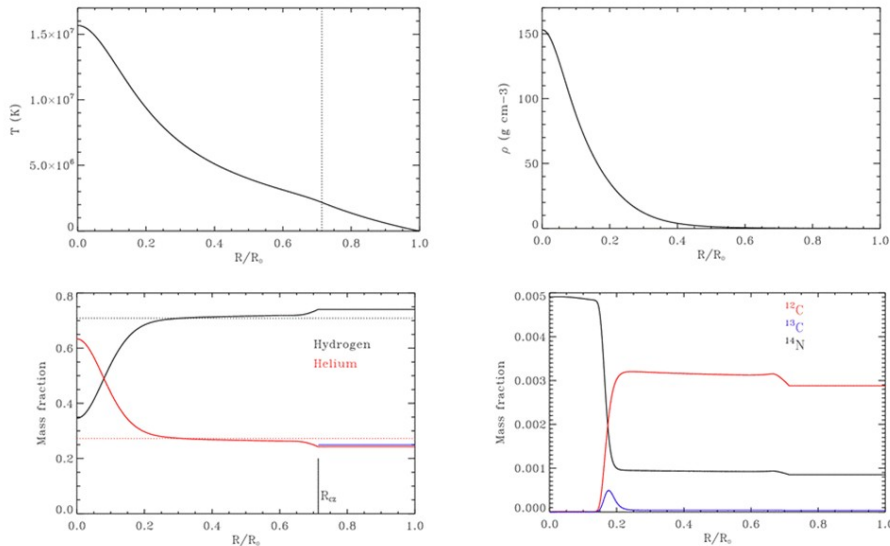
De impulsverandering in een sectie met eenheidsoppervlak vertegenwoordigt een krachtverschil per eenheid van oppervlakte, of stralingsdruk tussen binnen- en buitenoppervlak van het element. Er geldt

$$\frac{dP_{\text{straling}}}{dr} = -\frac{L\kappa\rho}{4\pi r^2 c}. \quad (243)$$

Omdat de stralingsdruk gegeven wordt door  $P_{\text{straling}} = \frac{4\sigma T^4}{3c}$ , kunnen we dit differentiëren naar  $r$  en in bovenstaande vergelijking invullen. We vinden dan

$$\text{diffusie van straling :} \quad \frac{dP_{\text{straling}}}{dr} = \frac{16\sigma T^3}{3c} \frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{3L\kappa\rho}{64\pi\sigma T^3 r^2}. \quad (244)$$

Voor de temperatuur nemen we als randvoorwaarde  $T = T_{\text{oppervlak}}$  als  $r = R_{\odot}$ . Dat is de conventionele temperatuur van een ster, die men kan waarnemen; het is de temperatuur van de fotosfeer, de zichtbare buitenkant van de ster.



**Figuur 17:** Resultaten van het standaard model voor de zon. Boven: temperatuur en dichtheidsverdeling; onder: massafracties van diverse elementen.

Bovenstaande vier differentiaalvergelijkingen hebben vier onafhankelijke variabelen:  $P(r)$ ,  $M(r)$ ,  $L(r)$  en  $T(r)$ . De dichtheid  $\rho(r)$  volgt uit de toestandsvergelijking  $P = P(\rho, T, X_i)$ , waarbij



$X_i$  de compositie van de ster voorstelt. Alle andere grootheden, zoals  $\kappa(r)$ ,  $\epsilon(r)$ , zijn bekende functies van  $\rho$ ,  $T$  en  $X_i$ . Het stelsel vergelijkingen kan iteratief worden opgelost en Fig. 17 geeft de berekende temperatuur en dichtheidsverdeling in de zon. We zien dat in het centrum van de zon een temperatuur van 16 miljoen graden wordt bereikt.

#### 4.1.1 Stermodel met lineaire afhankelijkheid voor de dichtheid

Om meer inzicht te krijgen in de structuur van een ster, bespreken we een eenvoudig model, waarin we aannemen dat de dichtheid in een ster lineair afhangt van de straal volgens

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R_\star}\right), \quad (245)$$

met  $R_\star$  de straal van de ster en  $\rho_0$  de dichtheid in het centrum van de ster. We gebruiken vergelijking (239) voor hydrostatisch evenwicht en vinden

$$\rho g = \frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R_\star}\right). \quad (246)$$

Volgens vergelijking (240) varieert de massa met de straal als

$$dM = 4\pi\rho_0 \left(1 - \frac{r}{R_\star}\right) r^2 dr. \quad (247)$$

Integreren levert

$$M(r) = \pi r^3 \rho_0 \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R_\star}\right). \quad (248)$$

We kunnen deze vergelijking normeren op de totale massa  $M_\star$  door op te merken dat voor  $r = R_\star$

$$M_\star = \pi R_\star^3 \rho_0 \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{3} \pi R_\star^3 \rho_0. \quad (249)$$

We gebruiken dit om  $\rho_0$  te elimineren en vinden

$$M(r) = M_\star \left(\frac{r}{R_\star}\right)^3 \left(4 - \frac{3r}{R_\star}\right). \quad (250)$$

Vervolgens vullen we het bovenstaande in in vergelijking (246) en vinden

$$\frac{dP}{dr} = -\pi G \rho_0^2 r \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{R_\star}\right) \left(1 - \frac{r}{R_\star}\right). \quad (251)$$

Als we bovenstaande uitdrukking integreren, vinden we de druk  $P(r)$  als functie van de straal. Dit levert

$$P(r) = \frac{5\pi G}{36} \rho_0^2 R_\star^2 \left(1 - \frac{24r^2}{5R_\star^2} + \frac{28r^3}{5R_\star^3} - \frac{9r^4}{5R_\star^4}\right), \quad (252)$$

waarbij we aannemen dat de druk gelijk is aan nul op het oppervlak van de ster,  $P(r = R_\star) = 0$ . Elimineren van de centrale dichtheid  $\rho_0$  door vergelijking (249) te gebruiken, levert

$$P_0 = P(r = 0) = \frac{5G}{4\pi} \frac{M_\star^2}{R_\star^4}. \quad (253)$$

We kunnen nu ook het temperatuurprofiel van de ster bepalen door de toestandsvergelijking van een ideaal gas te gebruiken ( $T = \mu m_p P / \rho k_B$ ). Merk op dat we dan de stralingsdruk verwaarlozen (en dat is ok voor de zon). We vinden

$$T(r) = \frac{5\pi G \mu m_p}{36 k_B} \rho_0 R_\star^2 \left(1 + \frac{r}{R_\star} - \frac{19r^2}{5R_\star^2} + \frac{9r^3}{5R_\star^3}\right). \quad (254)$$

Voor de temperatuur in het centrum van de ster vinden we

$$T_0 = \frac{5\pi G \mu m_p}{36k_B} \rho_0 R_\star^2. \quad (255)$$

Invullen van de meetgegevens voor de zon levert een centrale temperatuur van 20 miljoen K. Verder kunnen we vergelijking (249) gebruiken om de centrale dichtheid  $\rho_0$  van de ster te bepalen. Tenslotte, plotten we in Fig. 19 (de zwarte curve) de druk in de zon als functie van de afstand tot het centrum.

#### 4.1.2 Stermodel met constante dichtheid

Dit is een speciaal geval van het lineaire model, waarbij we de dichtheid constant houden,  $\rho(r) = \rho_0$ . We vinden dan met

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho_0 \quad \text{en} \quad M(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_0 \quad \rightarrow \quad P_0 = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R_\star^2. \quad (256)$$

Omdat de dichtheid constant is, is de gemiddelde dichtheid hetzelfde als de dichtheid in het centrum. Daarmee vinden we

$$\rho_0 = \frac{3M_\star}{4\pi R_\star^3} \quad \rightarrow \quad P_0 = \frac{3GM_\star^2}{8\pi R_\star^4}. \quad (257)$$

De druk als functie van de straal wordt dan

$$P(r) = \frac{3GM_\star^2}{8\pi R_\star^4} (R_\star^2 - r^2). \quad (258)$$

We kunnen de ideale gaswet weer gebruiken om het temperatuurprofiel te bepalen.

#### 4.1.3 Eddingtons theorie over het evenwicht van een ster

Het model van Eddington geeft een redelijke beschrijving van een ster, waarbij een ster voorgesteld kan worden als een bal van gas die voldoet aan de ideale gaswet<sup>9</sup>

$$P_G = \frac{R}{M} \rho T, \quad (261)$$

met  $\rho$  de massadichtheid,  $M$  de molaire massa en  $R$  de universele gasconstante  $R = 8.314$  J/mol K. De totale druk is de som van gasdruk en stralingsdruk,  $P = P_{\text{gas}} + P_{\text{straling}}$ . Verder nemen we aan dat  $P_{\text{gas}}/P = \beta$  ongeveer constant is voor de ster. Deze druk  $P$  is in evenwicht met de gravitationele aantrekking en we vinden met vergelijking (127)

$$P = \frac{R\rho T}{\beta M} = \frac{aT^4}{3(1-\beta)}. \quad (262)$$

<sup>9</sup>De meest gebruikte vorm van de ideale gaswet is

$$PV = nRT, \quad (259)$$

met  $P$  de druk [ Pa ],  $V$  volume [ m<sup>3</sup> ],  $n$  het aantal mol,  $R = k_B N_A = 8.314$  J/mol K de ideale gasconstante (het product van de Boltzmann constante en de constante van Avogadro), en  $T$  de temperatuur [ K ]. Er geldt

$$n = \frac{m}{M}, \quad (260)$$

met  $m$  de hoeveelheid massa [ kg ] en  $M$  de molaire massa [ kg/mol ]. Als we in vergelijking (259)  $n$  vervangen door  $m/M$  en de massadichtheid  $\rho = m/V$  introduceren, dan vinden we vergelijking (261).

We weten uit vergelijking (128) dat de dichtheid schaalt met  $T^3$  en vinden dus

$$P = \kappa \rho^{4/3}. \quad (263)$$

Als de druk evenredig met een macht van de dichtheid, dan noemen we het gas *polytroop*. Het voordeel van de polytroop relatie boven de gewone gaswet, is dat we nu enkel een relatie tussen druk en dichtheid hebben, die ontkoppeld is van thermodynamische variabelen als temperatuur. De polytropische index  $n$  is gerelateerd aan de adiabatische index  $\gamma$  (die het gedrag van de soortelijke warmte karakteriseert) via  $\gamma = (n + 1)/n$ . In dit geval is  $\gamma = 4/3$ .

De gravitatiepotentiaal voldoet aan de poissonvergelijking

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = -4\pi G\rho, \quad (264)$$

waar de linkerzijde het radiële deel van de laplace-operator in poolcoördinaten voorstelt en  $G$  de gravitatieconstante.

Voordat we verder gaan met onze beschouwing, maken we een pas op de plaats om vergelijking (264) af te leiden. Hiertoe beschouwen we een sferische schil van de ster met dikte  $dr$ . De naar het centrum gerichte gravitatiekracht door deze schil wordt gegeven door

$$-\frac{GM(r)dM(r)}{r^2} \quad \text{met} \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr, \quad (265)$$

waarbij  $M(r)$  de massa binnen de bol met straal  $r$  is. De kracht per oppervlakte-eenheid is dus

$$-g(r)\rho(r)dr = -\frac{GM(r)\rho(r)dr}{r^2}, \quad (266)$$

met  $g(r)$  de gravitatieversnelling. Deze kracht ondervindt weerstand door een toename van de druk

$$dP = -g\rho dr = \rho d\phi, \quad (267)$$

waarbij de gravitatiepotentiaal  $\phi$  gedefinieerd is door

$$g = -\frac{d\phi}{dr}. \quad (268)$$

Als we  $d\phi/dr = -g$  nog eens naar  $r$  differentiëren, vinden we vergelijking (264).

We vullen de polytroop uitdrukking (263) voor de druk in in vergelijking (267) en vinden na integratie

$$\phi = 4\kappa\rho^{1/3} + \text{constante}. \quad (269)$$

Hieruit volgen uitdrukkingen voor de dichtheid  $\rho(\phi)$  en druk  $P(\phi)$  als functie van de gravitatiepotentiaal

$$\rho = \left( \frac{\phi}{4\kappa} \right)^3 \quad \text{en} \quad P = \frac{1}{4}\rho\phi. \quad (270)$$

We vullen dit in in de poissonvergelijking (264) en dat levert de differentiaalvergelijking waaraan de potentiaal  $\phi$  in de ster moet voldoen,

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} + \alpha^2\phi^3 = 0, \quad \text{met} \quad \alpha^2 = \frac{\pi G}{16\kappa^3}. \quad (271)$$

We kunnen deze vergelijking numeriek oplossen voor  $\phi(r)$  met als randvoorwaarden

$$\phi|_{r=R_\odot} = 0 \quad \text{en} \quad \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (272)$$

In de praktijk blijken deze randvoorwaarden nogal onhandig te zijn, want ze zijn op twee verschillende plaatsen gedefinieerd. Het is eenvoudiger om het probleem om te schrijven naar zogenaamde initiële condities. Hiertoe definiëren we

$$u = \frac{\phi}{\phi_0} \quad \text{en} \quad z = \alpha\phi_0 r. \quad (273)$$

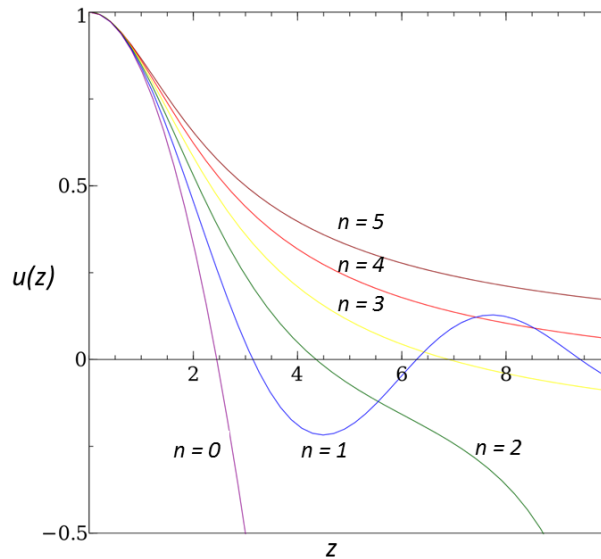
Met deze definitie wordt de dichtheid gegeven door  $\rho = \rho_0 u^3$  met  $\rho_0$  de centrale dichtheid en stelt  $z$  een dimensieloze genormeerde straal voor. Dan voldoet  $u(z)$  aan

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{du}{dz} + u^3 = 0, \quad \text{met} \quad u(0) = 1 \quad \text{en} \quad \left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0} = 0. \quad (274)$$

Bovenstaande uitdrukking wordt de Lane-Emden vergelijking<sup>10</sup> met index 3 genoemd. De algemene uitdrukking voor de Lane-Emden vergelijking is

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left( z^2 \frac{du}{dz} \right) = -u^n. \quad (275)$$

De oplossingen van bovenstaande vergelijking zijn functies van dichtheid  $\rho(r)$  uitgedrukt als  $u(z)$  en staan bekend als polytropen. We geven een plot van de verschillende oplossingen in Fig. 18. De index  $n$  bepaalt de orde van de oplossing. De oplossing hangt enkel van  $n$  af en kan geschaald



**Figuur 18:** Oplossingen van de Lane-Emden vergelijking voor  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Voor de dichtheid in sterren is enkel de functie relevant in tot het eerste nulpunt.

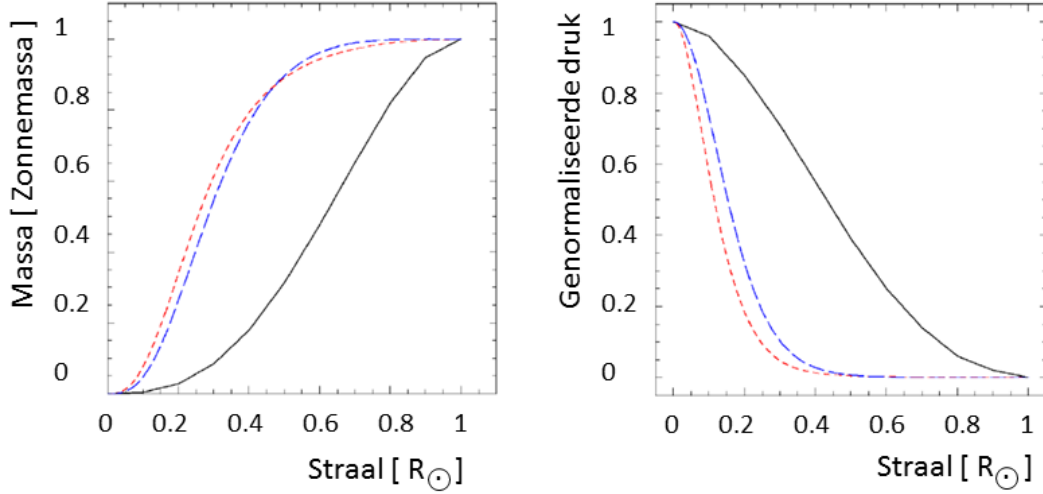
worden door  $P_0$  en  $\rho_0$  te variëren, om op deze wijze oplossingen voor sterren te verkrijgen voor een heel bereik van totale massa en straal. We onderscheiden

- Voor  $n = 0$  is de dichtheid als functie van de straal constant  $\rho(r) = \rho_0$  en vinden we de oplossing voor een niet-comprimeerbare ster met constant dichtheid.
- Voor  $1 \leq n \leq 1.5$  vinden we een benadering voor een volledig convectieve ster. Dat is een model voor een oude ster, zoals een M, L of T dwerg.

<sup>10</sup>De astrofysici Jonathan Homer Lane en Robert Emden stelden als eersten deze vergelijking op in 1870 en leidden hieruit ook de temperatuur van de zon af.

- Voor  $n = 3$  vinden we het model van Eddington. Hiervoor bestaat er geen analytische oplossing. Deze oplossing is bruikbaar als model voor een ster in stralingsevenwicht en vormt een goede benadering voor de zon.

We vervolgen onze discussie van de  $n = 3$  oplossing en geven in Fig. 19 een indruk van de nauwkeurigheid van Eddington's model. De  $n = 3$  polytroop geeft een goede beschrijving van



**Figuur 19:** Links: massa als functie van de afstand tot het centrum voor de zon. Rechts: druk als functie van de afstand tot het centrum voor de zon. Rode curve: het standaard zonnemodel, blauwe curve: polytroop  $n = 3$ , zwarte curve: lineaire afhankelijkheid voor de dichtheid.

een ster als de zon, terwijl nucleaire processen en de details van de energieoverdracht niet eens in rekening zijn gebracht. Ter illustratie zullen we temperatuur in het centrum van de zon berekenen. Op de rand van de ster  $r = R_*$  wordt de gravitatieversnelling gegeven door

$$g = \frac{GM_*}{R_*^2} = -\left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=R_*}. \quad (276)$$

Als we dit transformeren naar de "nieuwe" variabelen  $\{u, z\}$ , vinden we

$$\alpha = \frac{1}{GM_*} \left( -z^2 \frac{du}{dz} \right)_{u=0}. \quad (277)$$

Als we vergelijking (274) oplossen met randvoorwaarden (273), zien we dat voor  $n = 3$  de nuldoorgang (zie de gele curve in Fig. 18) optreedt voor  $z_1 = z|_{u=0} = 6.895$  en dat dan  $-z_1^2 \frac{du}{dz}|_{u=0} = 2.018$ . Hiermee kunnen we  $\alpha$  bepalen met vergelijking (277) en we vinden voor  $\phi_0$

$$\phi_0 = \frac{1}{\alpha R_*} z|_{u=0}. \quad (278)$$

De temperatuur in het centrum van de ster volgt dan uit vergelijking (262) als

$$T_0 = \frac{\beta M}{\rho_0 R} P_0 = \frac{\beta M}{4R} \phi_0. \quad (279)$$

Voor de zon geldt  $M_\odot = 2 \times 10^{30}$  kg en  $R_\odot = 7 \times 10^8$  m. Verder geldt  $M \approx M_{\text{waterstof}} = m_p N_A = (1.672 \times 10^{-27} \text{ kg})(6.022 \times 10^{23}) = 1.0 \times 10^{-3}$ . Als we verder  $\beta \approx 1$  nemen, vinden we  $T_\odot = 2 \times 10^7$  K voor de temperatuur in het centrum van de zon.

## 4.2 Witte dwergen, supernovae, neutronensterren en zwarte gaten

In sectie 3.3 hebben we diverse verbrandingsprocessen die zich in sterren afspelen beschreven. In deze fusiereacties worden elementen geproduceerd en tegelijkertijd wordt meer en meer kernbrandstof opgebruikt. Wat gebeurt er wanneer er geen brandstof meer is? Volgens de gangbare theorieën kan een ster op vier manieren aan zijn eind komen: het kan een zwart gat, een witte dwerg, of een neutronenster worden, of het kan volledig fragmenteren. Haar uiteindelijke lot wordt bepaald door de beginmassa van de ster. Als deze massa minder is dan ongeveer vier zonnemassa's, dan zal de ster een witte dwerg worden. Als deze massa echter groter is dan ongeveer vier zonnemassa's, kan een supernova ontstaan die resulteert in een neutronenster, een zwart gat of in volledige fragmentatie. Zwarte gaten trekken zich oneindig lang samen en benaderen, maar zullen dit nooit bereiken, een straal van ongeveer 3 km en een dichtheid van meer dan  $10^{19}$  kg/m<sup>3</sup>. Neutronensterren hebben een straal van ongeveer 10 km en een centrale dichtheid die groter is dan die van kernmaterie, ongeveer  $10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>. In het volgende bespreken we eerst de vorming en eigenschappen van een witte dwerg.

### 4.2.1 Witte dwergen: Fermi druk van een elektronengas

Stel dat het fusieproces ten einde loopt en de ster begint te contraheren onder zijn eigen gravitatie. Volgens het Pauliprincipe dient een systeem dat  $N_e$  elektronen bevat spinparen te vormen met impulsen die minstens  $\Delta p_{\text{minimum}}$  verschillen. Dit betekent dat in drie dimensies de grootste impuls in elke richting minstens de waarde  $N_e^{\frac{1}{3}} \Delta p_{\text{minimum}}$  dient te hebben. Merk op dat in deze bespreking we ons niet druk maken over factoren 2 of  $\pi$ , *etc.* De minimum impuls kunnen we vinden uit Heisenbergs onzekerheidsrelatie en is geassocieerd met de maximale onzekerheid in de plaats van het deeltje, hetgeen de grootte ( $2R$ ) van de ster is. We vinden hiermee voor de minimum impuls in de  $x$ -richting  $\Delta p_{\text{minimum } x} = \frac{h}{2R}$ , met  $h$  de constante van Planck. We kunnen nu het effect van het Pauliprincipe in rekening brengen door te vermenigvuldigen met  $N_e^{\frac{1}{3}}$  en vinden de minimum waarde die de grootste impuls in de  $x$ -richting dient te hebben. De drie richtingen combineren om een kinetische energie te leveren ter grootte

$$\langle K \rangle_{\text{gemiddeld}} = 3 \frac{\left( N_e^{\frac{1}{3}} \Delta p_{\text{minimum } x} \right)^2}{2m_e} = N_e^{\frac{2}{3}} \frac{3h^2}{8m_e R^2}, \quad (280)$$

waarbij we de klassieke relatie tussen kinetische energie en impuls gebruikt hebben ( $K = \frac{p^2}{2m}$ ). Deze random kinetische energie leidt direct tot de gasdruk via relatie  $PV = Nk_B T$  waarbij we de thermische energie  $k_B T$  vervangen door  $k_B T = \frac{2}{3} \langle K \rangle_{\text{gemiddeld}}$ . We vinden dan

$$P_{\text{Fermi}} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle K \rangle_{\text{gemiddeld}} = \frac{h^2 N_e^{\frac{5}{3}}}{8m_e V R^2}. \quad (281)$$

Vervolgens gebruiken we benadering (253) die een relatie geeft tussen druk, massa en grootte van een ster  $P = \frac{5GM^2}{4\pi R^4}$  en stellen dit gelijk aan de Fermi gasdruk  $P_{\text{Fermi}}$ . Verder geldt dat  $M = \frac{1}{2} N_e \mu \approx m_p N_e$  en  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ . We vinden

$$R = \frac{3h^2}{40GMm_e m_p} N_e^{\frac{2}{3}}, \quad (282)$$

en we zien dat een witte dwerg met grotere massa (want  $M_\star$  is evenredig met  $N_e$ ) leidt tot een kleinere straal. Als we de massa van de zon gebruiken ( $M = M_\odot$ ), vinden we een straal  $R = 10^7$  m. Dat is een straal in de orde van de straal van de aarde. Een exacte berekening geeft als

uitkomst dat een witte dwerg met een massa van 1 zonnemassa een straal heeft die ongeveer 90% is van de straal van de aarde.

We kunnen voor een witte dwerg de toestandsvergelijking afleiden door op te merken dat  $R \sim V^{\frac{1}{3}}$  en we zien dat de Fermi gasdruk alleen afhangt van de verhouding  $N_e/V$ , het aantal elektronen per volume eenheid. Deze elektronendichtheid is evenredig met de massadichtheid  $\rho = m_p N_e/V$  en we vinden hiermee de Fermi toestandsvergelijking

$$P_{\text{Fermi}} = \beta \rho^{\frac{5}{3}}, \quad (283)$$

waarbij de constante  $\beta$  afhangt van  $h$ ,  $m_e$  en  $m_p$ . De adiabatiese index  $\gamma = \frac{5}{3}$  en dat betekent dat een niet-relativistisch ontaard Fermigas stabiel is onder kleine verstoringen<sup>11</sup>.

Een ster waarvan de stabiliteit toe te schrijven is aan elektronontaarding wordt een witte dwerg genoemd. Ook de protonen in het plasma van de ster zijn onderhevig aan de onzekerheidsrelatie en het Pauliprincipe. Derhalve vormen de protonen ook een ontaard gas en leveren ze een bijdrage tot de gasdruk van de ster. Omdat de kinetische energie gegeven wordt door  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$  leveren protonen bij dezelfde waarde van impuls een beduidend kleinere bijdrage tot de kinetische energie en daarmee de gasdruk (het schaal omgekeerd evenredig met de massa). Witte dwergen worden waargenomen door sterrenkundigen en komen relatief veel voor: typisch 1 op de 10 sterren is een witte dwerg.

#### 4.2.2 Relativistisch ontaard elektronengas

Als een ster massief is, dan worden de elektronen in een klein volume gedwongen door de gravitatiekracht. Hierdoor wordt hun typische snelheid groot, in de orde van de lichtsnelheid. Om te begrijpen wat er dan fysisch gebeurt, dienen we een *relativistisch* ontaard elektronengas te beschouwen. We nemen hierbij aan dat de elektronen een gas vormen van ultra-relativistische vrije fermionen, die zich in een volume  $V$  bevinden. Alle beschikbare toestanden zijn bezet tot de Fermi energie  $E_F$ . Dit ontaarde elektronengas levert de druk die in evenwicht is met de gravitationele aantrekkingskracht. Voor ultra-relativistische deeltjes wordt het verband tussen energie en impuls gegeven door  $E = |\mathbf{p}|c$ . Analoog aan vergelijking (281) wordt de druk voor een ontaard relativistisch elektronengas gegeven door

$$P = \frac{hcN_e^{\frac{4}{3}}}{3RV}. \quad (284)$$

Als we weer  $P_0 \approx \frac{5GM^2}{4\pi R^4}$  gebruiken en het volume vervangen door  $\frac{4}{3}\pi R^3$  krijgen we

$$\frac{hcN_e^{\frac{4}{3}}}{4\pi R^4} = \frac{5GM^2}{4\pi R^4}. \quad (285)$$

In bovenstaande vergelijking gebeurt er iets verrassends, want de straal van de ster valt uit de vergelijking. Wat we overhouden is een uitdrukking voor de massa. Klaarblijkelijk heeft een relativistische witte dwerg een *unieke* massa. Deze massa noemen we de Chandrasekhar massa<sup>12</sup> en deze wordt gegeven door

$$M_{\text{Ch}} = \left(\frac{hc}{3G}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} \frac{m_{\text{Pl}}^3}{m_p^2}\right) \approx 1.4M_{\odot}. \quad (286)$$

<sup>11</sup>Met ontaarde materie bedoelen we materie waarbij de dichtheid dermate groot is dat de belangrijkste bijdrage tot de druk komt van het Pauliprincipe. Compressie van ontaarde materie dwingt deeltjes over te gaan naar quantumtoestanden met hogere energie.

<sup>12</sup>Subrahmanyan Chandrasekhar (1910 - 1995) heeft deze limiet afgeleid, die bepaalt of een instortende ster een witte dwerg wordt of een exotisch object, zoals een neutronenster of zwart gat. Ook quarksterren bestaande uit quarkmaterie (met name *s*-quarks) behoren tot de theoretische mogelijkheden.

We hebben in vergelijking (285) de relatie  $M = N_e \mu$  gebruikt, en in de laatste stap hebben we  $\mu = m_p$  genomen. Verder is  $m_{\text{Pl}}$  de zogenaamde Planck massa, die wordt gegeven door  $m_{\text{Pl}} = (hc/G)^{\frac{1}{2}} = 5.5 \times 10^{-8}$  kg.

Uit vergelijking (284) kunnen we de toestandsvergelijking van een ultra-relativistische witte dwerg vinden. Omdat  $R \sim V^{\frac{1}{3}}$  zien we dat

$$P = \beta \rho^{\frac{4}{3}} \quad (287)$$

Een index  $\gamma = \frac{4}{3}$  is slechts marginaal stabiel voor gravitationele ineenstorting. Elke kleine verstoring van de eigenschappen van een ultra-relativistische witte dwerg kan instabiliteit tot gevolg hebben.

### 4.2.3 Neutronensterren

Men neemt aan dat neutronensterren zich ontwikkelen uit de gravitationele samenstorting van sterren die massiever zijn dan ongeveer acht zonnemassa's. Tegen het einde van de diverse stadia van kernverbranding heeft de temperatuur een waarde van ongeveer  $8 \times 10^9$  K bereikt in een centrale, voornamelijk uit ijzer bestaande, kern ter grootte van ongeveer 1.5 zonnemassa. Het element  $^{56}\text{Fe}$  heeft de meest stabiele kern bij lage temperatuur en druk. Bij de druk, dichtheid en temperatuur van de centrale kern zullen de atomen volledig geïoniseerd zijn, waarbij de vrije elektronen een ontaard gas vormen. Het gedrag van deze elektronen bepaalt de verdere evolutie van de ster.

De ultra-relativistische witte dwerg is niet stabiel voor gravitationele ineenstorting. De sterkern verliest elektronen vanwege elektronvangst<sup>13</sup> door het ijzer, waarbij neutrino's worden uitgezonden. Als elektronen niet langer weerstand kunnen bieden aan de massa van de kern, stort de ster in. De gravitationele energie die hierbij vrijkomt wordt in warmte en kinetische energie omgezet. Kernen gaan hierbij over tot een gas van nucleonen en de dichtheid van de kern van de ster neemt toe tot waarden die ongeveer twee keer zo groot zijn als die van kernmaterie. Op dit punt aangekomen, stopt de compressie omdat het nucleongas nu de druk levert die nodig is om verdere ineenstorting te voorkomen. In het geval van niet al te grote massieve sterren, stuitert de kern wat op en neer als de compressie stopt, waardoor uitgaande drukgolven ontstaan die resulteren in een schokgolf. Deze schokgolf zal de mantel van de ster doen scheuren waardoor er een explosie volgt. Op deze wijze wordt een type II supernova geboren. De energie van de ineengestorte kern, ongeveer  $3 \times 10^{46}$  J, wordt in een tijdspanne van ongeveer 10 s uitgezonden in de vorm van neutrino's, waarbij er een neutronenster resteert. De neutrino's van SN1987a zijn op aarde waargenomen door het Superkamiokande en IMB experiment.

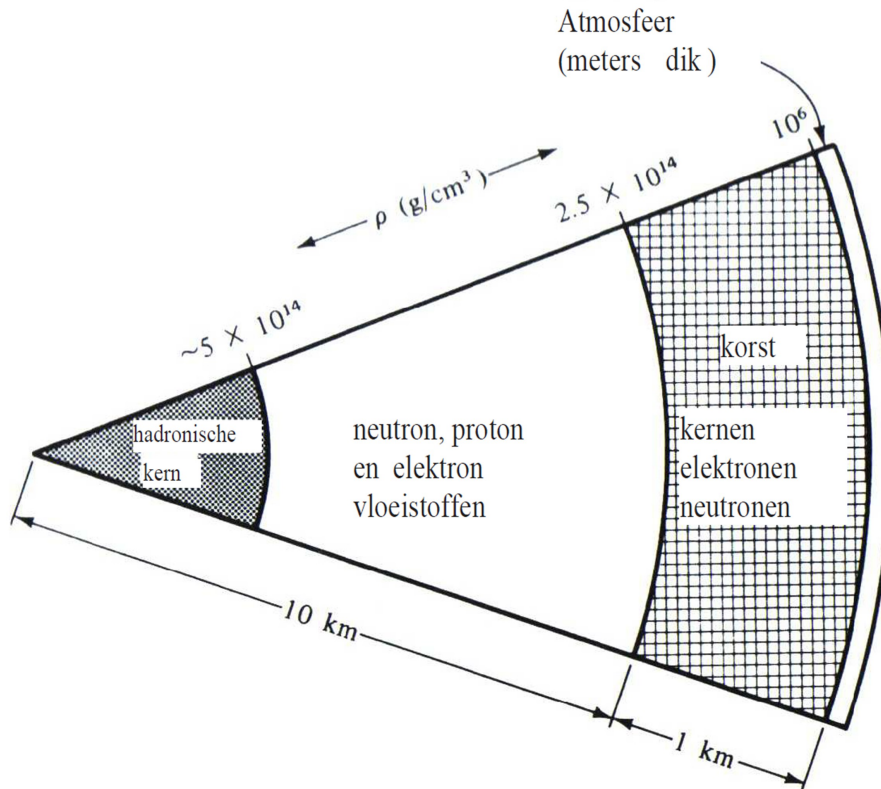
Neutrino emissie is een efficiënt koelproces voor de resterende neutronenster. De ster koelt al fors binnen een paar seconden en heeft na een paar dagen een interne temperatuur van ongeveer  $10^{10}$  K bereikt. Deze interne temperatuur blijft zeker boven de  $10^9$  K gedurende de eerste duizend jaar, met neutrino emissie als het belangrijkste koelproces. Daarna wordt foton-emissie het dominante koelproces en bereikt de neutronenster een temperatuur van ongeveer  $10^8$  K. Fig. 20 toont de doorsnede van een typische neutronenster. Hierbij zijn de volgende vragen relevant: Hoe heeft de ster deze eindtoestand bereikt? Waarom stort de ster niet volledig in? Veel vakgebieden zijn betrokken bij een formulering van antwoorden op deze vragen: relativiteitstheorie, quantummechanica, kern- en deeltjesfysica en vastestof fysica. In het volgende bespreken we een aantal subatomaire fysica aspecten.

We beschouwen als eerste de dichtheid en samenstelling van de ster. Voor een gegeven massa van de neutronenster, kunnen we de straal en dichtheidsverdeling uitrekenen<sup>14</sup>. Voor een ster

<sup>13</sup>Elektronvangst is de reactie  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ . Hierdoor worden protonen omgezet in neutronen, terwijl de ster neutrino's uitzendt.

<sup>14</sup>G. Baym en C. Pethick, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **25**, 27 (1975); S. Tsuruta, *Comm. Astrophys.* **11**, 151 (1986).





**Figuur 20:** Doorsnede van een typische neutronenster. De hadronische kern kan quarkmaterie of een pion-condensaat bevatten.

met een straal van 10 km is de centrale dichtheid ongeveer  $10^{17} - 10^{18} \text{ kg/m}^3$ . De dichtheid neemt toe van nul, aan de top van de ‘atmosfeer’, tot een waarde die groter is dan die van kernmaterie in het centrum. Uit de dichtheid kunnen we de samenstelling op een gegeven diepte afleiden. De buitenste laag bestaat voornamelijk uit  $^{56}\text{Fe}$ , het eindresultaat van het proces van kernverbranding. De dichtheid neemt toe als we in de richting van het centrum van de ster gaan en de Fermi energie wordt dusdanig groot, dat elektronvangst kan optreden, net zoals dat het geval was bij het ontstaan van een neutronenster in de pre-supernova fase. Bij deze hogere temperatuur worden meer neutronen-rijke isotopen gevormd. Elektronvangst blijft toenemen en bij een dichtheid van ongeveer  $4 \times 10^{14} \text{ kg/m}^3$  zullen kernen met 82 neutronen, zoals  $^{118}\text{Kr}$ , het meest stabiel zijn. Merk op dat gewoon krypton ( $Z = 36$ ) op aarde een atoomgetal  $A = 84$  heeft. De meest stabiele nucleïden bij dergelijke hoge drukken zijn dus zeer neutronen-rijk. Onder normale toestanden zouden dergelijke kernen direct vervallen door elektron-emissie. Echter bij de drukken die heersen in een neutronenster, zijn alle beschikbare toestanden reeds door elektronen bezet en verbiedt het Pauliprincipe een dergelijk beta-verval.

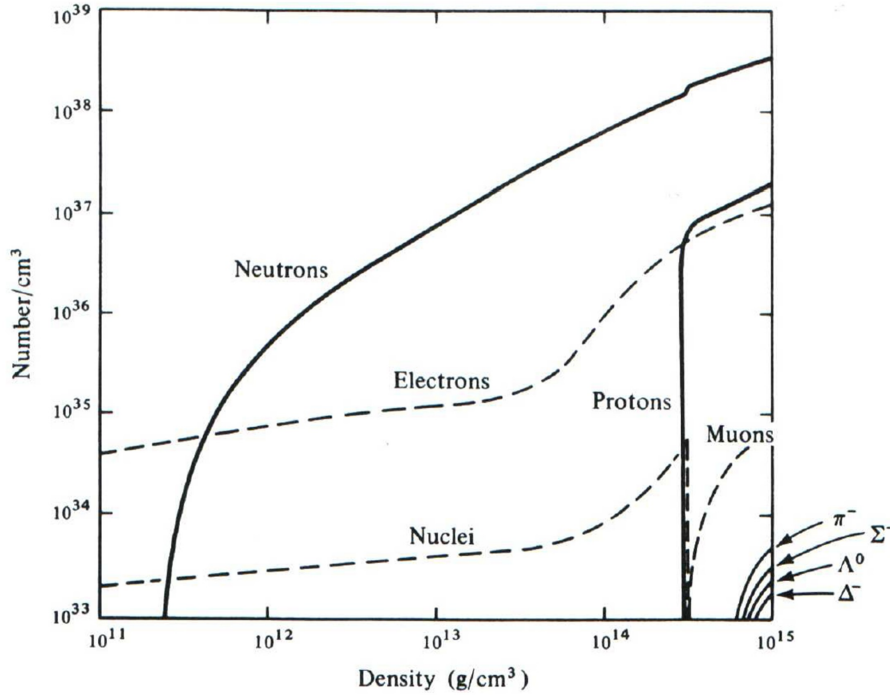
Het buitenste neutron van  $^{118}\text{Kr}$  is nauwelijks gebonden. Als de dichtheid groter wordt dan  $4 \times 10^{14} \text{ kg/m}^3$ , beginnen de neutronen uit de kernen te lekken en ontstaat er een ontaarde vloeistof. Als de druk verder toeneemt, zullen de kernen in deze zogenaamde ‘neutron drip line’ meer en meer neutronen-rijk worden en in grootte groeien. Bij een dichtheid van ongeveer  $2.5 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$ , beginnen de kernen elkaar te raken en gaan ze in elkaar over om een continue vloeistof van neutronen, protonen en elektronen te vormen. Neutronen zijn hierbij in de meerderheid en de fractie protonen wordt geraamd op ongeveer 4% van alle materie. De neutronen kunnen niet vervallen in protonen, omdat de energie van het vrijkomende elektron kleiner zou zijn dan de

Fermi energie van het elektrongas. Het verval is derhalve verboden door het Pauliprincipe.

Als de energie nog groter wordt, is het energetisch mogelijk om via elektronvangst meer massieve elementaire deeltjes te vormen, zoals bijvoorbeeld



waarbij dergelijke deeltjes weer stabiel zijn vanwege het Pauliprincipe. Fig. 21 toont resultaten van een berekening<sup>15</sup> van de samenstelling van een neutronenster als functie van de dichtheid.



**Figuur 21:** Aantal materiedeeltjes als functie van de dichtheid. Het ‘neutron drip regime’, waarbij neutronen uit kernen lekken, begint bij  $4 \times 10^{14} \text{ kg/m}^3$ . Bij een dichtheid van ongeveer  $2.5 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$  beginnen de kernen op te lossen. Bij hogere dichtheden kunnen muonen en vreemde deeltjes ontstaan.

Als we onze aandacht nog een keer richten op de druk in een neutronenster, dan hebben we reeds gezien dat het ontaarde elektrongas bij relatief lage drukken, de tegendruk levert die ineenstorting van de ster voorkomt. Bij hogere drukken wordt volledige ineenstorting voorkomen door een combinatie van twee effecten, de afstotende kracht in de nucleon-nucleon interactie en de energie ontaardheid van de neutronen. Fig. 21 toont dat neutronen domineren bij de hoogste drukken. Ze vormen een ontaard Fermigas en we kunnen de argumenten die geleid hebben tot vergelijking (282) herhalen voor het niet-relativistische geval. We vervangen in vergelijking (282)  $m_e$  door  $m_n$  en stellen  $\mu = m_p$  (dus vermenigvuldigen met een factor 2). Dit betekent dat de straal van een neutronenster ongeveer 600 keer kleiner is dan die van een witte dwerg, of wel ongeveer 17 km. We vinden dan weer dat de druk toeneemt met afnemend volume totdat het, samen met de afstotende kracht tussen nucleonen op korte afstand (de zogenaamde harde-pit repulsie van de nucleon-nucleon (NN) kracht), in evenwicht is met de gravitationele aantrekking.

Het bestaan van neutronensterren is reeds in de jaren dertig van de vorige eeuw voorspeld. Hun ontdekking in 1967 kwam toch onverwacht toen een nieuwe klasse hemellichamen werd

<sup>15</sup>M.A. Ruderman, *Sci. Amer.* **224**, 24 (februari 1971).

waargenomen. Deze objecten zijn puntvormig, staan buiten ons zonnestelsel en zenden periodieke radiogolven uit. Ze werden pulsars genoemd en op dit moment zijn er ongeveer 1800 bekend. Hun periode varieert van ongeveer 1.5 ms tot 4 s. In 1968 suggereerde Gold<sup>16</sup> dat een pulsar een neutronenster is. De periode van de pulsar wordt geassocieerd met de rotatiefrequentie van de neutronenster. De frequentie neemt geleidelijk af vanwege het verlies aan rotatie-energie. Dit energieverlies is aanzienlijk, zo is het verlies van rotatie-energie van de Krabpulsar ongeveer even groot als de totale energie uitgezonden door deze nevel. De neutronenster is dus de energiebron van de enorme Krabnevel.

Men heeft pulsars niet alleen waargenomen als radiosterren, maar ook is periodieke emissie van licht gemeten. De perioden, de vertragingssnelheden, en de plotselinge veranderingen van de perioden zijn zorgvuldig bestudeerd. Hiermee zijn diverse eigenschappen van neutronensterren vastgesteld en weten we meer van het gedrag van kernmaterie bij dichtheden groter dan  $10^{18}$  kg/m<sup>3</sup>.

---

<sup>16</sup>T. Gold, *Nature* **218**, 731 (1968).

### 4.3 Uitgewerkte opgaven

#### 4.3.1 Vrije-val tijd voor sterren

Als er geen naar buiten gerichte kracht zou zijn, dan zou een ster niet stabiel zijn en ineenstorten onder gravitatie. Hoelang duurt een dergelijke *collapse*?

*Antwoord:* We laten een testdeeltje vallen van het oppervlak van de ster met straal  $R$  en massa  $M$ . De afstand tot het centrum van de ster geven we aan met  $r$ . De versnelling is dan

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{integreeren} \quad t_{\text{vrije val}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \quad (289)$$

We gebruiken in de integratie de randvoorwaarde  $r = R$  voor  $t = 0$ . Als we de massa en straal van de zon gebruiken, vinden we  $t_{\text{vrije val}} = 27$  minuten.

#### 4.3.2 De Kelvin-Helmholtz tijdschaal voor de zon

In de 19e eeuw werd voorgesteld dat gravitationele contractie de energiebron van de zon is. Als een massief lichaam kleiner wordt, dan komt er gravitationele energie vrij in de vorm van warmte. Stel dat de zon langzaam ineenstort om haar luminositeit te genereren. Hoelang kan ze dan schijnen? Deze tijdschaal wordt de Kelvin-Helmholtz tijdschaal  $\tau_{\text{KH}}$  genoemd.

*Antwoord:* De gravitationele potentiële energie wordt gegeven door een integraal over

$$\Omega = -\frac{Gmm'}{r}, \quad (290)$$

voor massa's  $m$  en  $m'$  die zich op afstand  $r$  van elkaar bevinden.

Voor een bolvormig lichaam, zoals een ster, stellen we ons voor dat we de bol schil voor schil samenstellen, van  $r = 0$  tot  $r = R$ . Voor een schil met straal  $r$  hebben we een incrementele potentiële energie van  $dU = \phi dm$ , met  $dm$  de massa van de schil en  $\phi$  de gravitatiepotentiaal voor de massa die we al geassembleerd hebben. Omdat de massa een sferische schil gaat vormen, vinden we

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{3Mr^2}{R^3} dr. \quad (291)$$

Verder hebben we

$$\phi = -\frac{Gm}{r} \quad \text{met} \quad m = \frac{4\pi r^3}{3} \rho = \frac{4\pi r^3}{3} \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right) = M \frac{r^3}{R^3}. \quad (292)$$

We vinden de potentiële zelfenergie van de massa door

$$U = \int dU = \int \phi dm = - \int G \frac{mdm}{r} = - \int \frac{G}{r} \frac{4\pi r^3}{3} \left(\frac{3Mr^2}{R^3}\right) dr. \quad (293)$$

Dit levert

$$U = \int dU = - \int \frac{GMr^4}{R^3} \left(\frac{4\pi M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right) dr = - \int \frac{3GM^2 r^4}{R^6} dr. \quad (294)$$

De potentiële zelfenergie van de bol is

$$U = \int dU = -\frac{3GM^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (295)$$

Voor de zon vinden we  $\Omega_{\odot} = 2.27 \times 10^{41}$  J en dat resulteert in  $\tau_{\text{KH}} = 5.9 \times 10^{14}$  seconde, ofwel 20 miljoen jaar. Dat is een behoorlijk lange tijd en in het midden van de 19e eeuw, toen dit voor het eerst werd afgeleid, werd dit beschouwd als de beste schatting voor de leeftijd van de zon. Het was pas aan het eind van de 19e eeuw dat men de leeftijd van de aarde beter begreep en men zag dat geologisch bewijs en radioactiviteit aanwijzigen gaven dat de aarde miljarden jaren oud is. Tegenwoordig weten we dat kernreacties verantwoordelijk zijn voor de luminositeit van de zon.

## 4.4 Opgaven

### 4.4.1 Poissonvergelijking voor gravitatie

De gravitatiepotentiaal van een ster voldoet aan de poissonvergelijking (264)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = \frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = -4\pi G\rho. \quad (296)$$

Geef de afleiding van deze vergelijking.

### 4.4.2 Zonneconstante

Satellieten worden gebruikt om de zonneconstante te meten nabij de aarde, maar buiten de atmosfeer. Men vindt

$$S = 1.37 \times 10^3 \text{ Wm}^{-2}. \quad (297)$$

Bereken hiermee de luminositeit van de zon.

### 4.4.3 Temperatuur van het oppervlak van de zon

Beschouw de zon als een zwarte straler en gebruik de luminositeit  $L_{\odot}$  en de straal van de zon  $R_{\odot}$  om de temperatuur aan het oppervlak (de fotosfeer) te berekenen.

### 4.4.4 Lane-Emden vergelijking

Verklaar de geldigheid van de randvoorwaarden in vergelijking (274).

Leid oplossingen af voor de Lane-Emden vergelijking voor  $n = 0$  en  $n = 1$ . Wat is de betekenis van deze oplossingen?

## 5 KOSMISCHE MICROGOLF-ACHTERGRONDSTRALING

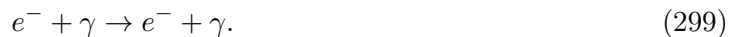
### 5.1 Ontdekking van de kosmische microgolf-achtergrondstraling

De ontdekking van de kosmische microgolf-achtergrondstraling vormt belangrijk bewijs voor de juistheid van de Big Bang theorie (naast de Hubble expansie van het heelal en de Big Bang nucleosynthese). Arno Penzias en Robert Wilson van Bell Telephone Laboratories detecteerden deze straling als 4080 MHz microgolf achtergrond in hun 20-voet antenne te Holmdel in New Jersey (USA). De achtergrondstraling kwam uit alle richtingen en de ontdekkers namen een signaal waar dat hoorde bij een temperatuur van  $3.5 \pm 1.0$  K. Het signaal werd verklaard in een publicatie in het *Astrophysical Journal* door R.H. Dicke, P.J.E. Peebles, P.G. Roll en D.T. Wilkinson van Princeton en het signaal bleek van kosmische oorsprong te zijn.

Het vroege heelal was direct na de Big Bang een heet en dicht plasma waarin elektromagnetische straling werd gegenereerd dat in thermisch evenwicht was met materiedeeltjes door reacties als



voor temperaturen in de orde van  $T \approx m_e$ . Tijdens de expansie van het heelal koelde de straling adiabatisch en op een gegeven moment was de energie van de fotonen onvoldoende voor bovenstaande paarproductie. Fotonen bleven vervolgens in thermisch evenwicht door Compton verstrooiing aan vrije elektronen,



De elektronen op hun beurt staan via elektromagnetische interacties in thermisch contact met de protonen in het plasma. Als uiteindelijk de temperatuur van het plasma onder de foto-ionisatie energie van waterstof daalt, kan de reactie



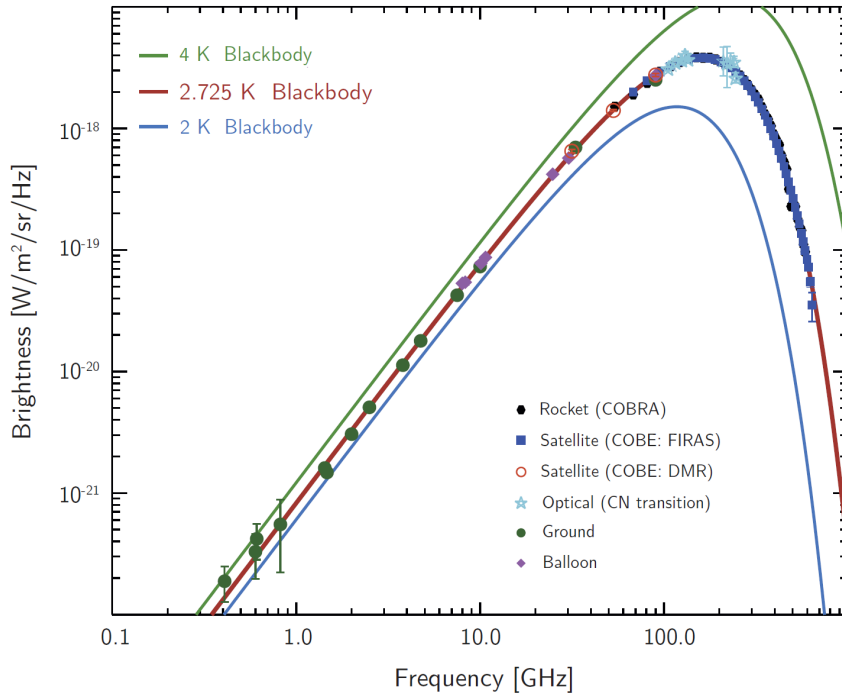
niet langer in thermisch evenwicht zijn en "ontkoppelden" de fotonen van materie. De fotonen waren vrij en konden vanaf dat moment nagenoeg zonder botsingen door het heelal bewegen. Het heelal werd transparant voor licht. Dit gebeurde ongeveer een paar honderdduizend jaar na de Big Bang bij een "freeze-out" temperatuur van  $T_f \approx 0.25$  eV. Daarna hebben deze fotonen bijna 14 miljard jaar langs geodeten door het heelal gereisd, nagenoeg zonder te botsen, en zijn door de expansie van het heelal inmiddels afgekoeld tot een temperatuur van minder dan 3 K.

Het bestaan van deze elektromagnetische reststraling van de oerknal met frequenties in het microgolfgebied, was al in 1946 door George Gamow en zijn medewerkers voorspeld. Hun schatting van de temperatuur van de straling was in goede overeenstemming met het resultaat van de metingen, 19 jaar later. Overigens was dit een bijproduct voor Gamow, want hij wilde bewijzen dat alle atoomkernen, inclusief die van de zware elementen, geproduceerd zijn in de Big Bang<sup>17</sup>.

Op dit moment is de temperatuur van de achtergrondstraling nauwkeurig bekend:  $T_\gamma = 2.7255 \pm 0.0006$  K ( $1\sigma$ ). De metingen worden uitgevoerd met satellieten of met instrumenten in ballonnen. Een nauwkeurige meting op Aarde is lastig, omdat men de 300 K straling van de omgeving dient af te trekken en dat leidt al snel tot relatief grote systematische onnauwkeurigheden. De temperatuurverdeling zoals gemeten door de COBE satelliet (bijvoorbeeld met het FIRAS instrument) en ook andere experimenten wordt getoond in Fig. 22. We zien dat de meetgegevens nauwkeurig de vorm van die van een zwarte straler volgen. Het spectrum van een "black body" is het type elektromagnetische straling binnen een object (of dat een object omgeeft) dat in

<sup>17</sup>De term "Big Bang" wordt toegeschreven aan de astronoom Fred Hoyle, die het gebruikte in een denigrerend bedoelde uitspraak tijdens een BBC uitzending in 1949. Hoyle gaf de voorkeur aan het zogenaamde "steady state" kosmologisch model.

thermodynamisch evenwicht is met zijn omgeving. De vorm en intensiteit van dit spectrum hangen enkel van de temperatuur van het object af. Het blijkt dat het spectrum van de kosmische achtergrondstraling de meest perfecte vorm van een "black body" spectrum heeft dat ooit gemeten is. De kosmische achtergrondstraling ontkoppelde van materie bij een roodverschuiving



**Figuur 22:** De kosmische microgolf-achtergrondstraling is die van een perfecte zwarte straler met een gemiddelde temperatuur van 2.725 K.

van  $z \approx 1100$ , toen de schaalfactor van het heelal dus meer dan duizend keer kleiner was dan de huidige waarde. Dit betekent dat de originele golflengte van de straling 1100 keer kleiner was, en de energie ongeveer 1100 keer groter was dan we tegenwoordig waarnemen.

## 5.2 Thermodynamische aspecten van de kosmische achtergrondstraling

Als we het Big Bang model volgen, dan werden fotonen in het vroege heelal continu gecreëerd, geabsorbeerd of geannihileerd, en weer uitgezonden. Hierdoor was het primeordiale plasma in perfect thermodynamisch evenwicht en gedroeg het heelal zich als een perfecte zwarte straler.

Onder dergelijke omstandigheden, waarbij een ensemble fotonen in thermisch evenwicht staat met zijn omgeving bij een bepaalde temperatuur  $T$ , kunnen we vergelijking (105) gebruiken. Hiermee vinden we het gemiddelde aantal fotonen per trillingsmode met een frequentie tussen  $\nu$  en  $\nu + d\nu$  in een gas van fotonen met temperatuur  $T$ ,

$$n(\nu; T)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu. \quad (301)$$

Hierbij gebruiken we dat fotonen bosonen zijn en dat  $\nu = \omega/2\pi = c/\lambda$  voor de frequentie van de trillingstoestand met golflengte  $\lambda = 1/\nu$  (voor eenheden waarbij  $c = \hbar = k_B = 1$ ). We nemen in rekening dat er twee mogelijke polarisatietoestanden zijn voor elk foton met frequentie  $\nu$  (hiervoor noteren we  $g_\gamma = 2$ ). De chemische potentiaal is voor fotonen gelijk aan nul. Als we het energiespectrum willen hebben, dienen we vergelijking (301) nog te vermenigvuldigen met



de foton-energie  $E = \hbar k = \hbar \omega = h\nu$ . Dat levert

$$u(\nu; T)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\hbar\nu/k_B T} - 1} d\nu. \quad (302)$$

We hadden het bovenstaande overigens direct uit vergelijking (127) kunnen vinden.

We gaan nu bekijken wat er met de temperatuur van het fotongas gebeurt als het heelal expandeert. Hierbij merken we op dat in het Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) model van de kosmologie de roodverschuiving  $z$  gedefinieerd is als

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}} \rightarrow 1 + z = \frac{a_{\text{obs}}}{a_{\text{emit}}}, \quad (303)$$

waarbij we in de tweede stap gebruiken dat in het FLRW model de roodverschuiving gerelateerd is aan de schaalfactor van het heelal. Hiermee vinden we dat in een latere epoch de frequentie  $\nu_0$  roodverschoven is met

$$\nu_0 = \frac{1}{1+z} \nu. \quad (304)$$

Na ont koppeling van de fotonen wordt het heelal transparant voor straling. Omdat we aannemen dat daarna de fotonen geen interacties meer ondergaan, moet het aantal fotonen behouden zijn. Teneinde de op dit moment observabele dichtheid van fotonen per frequentie-eenheid te verkrijgen, substitueren we de transformatie gegeven in vergelijking (304) in vergelijking (301). We vinden dan

$$n(\nu; T)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{[\nu_0(1+z)]^2 \cdot (1+z)}{e^{\frac{\hbar\nu_0(1+z)}{k_B T}} - 1} d\nu_0 = n(\nu_0; t_0) \cdot (1+z)^3. \quad (305)$$

We zien dat de fotondichtheid de vorm van het spectrum van een zwarte straler behoudt en een schaling vertoont die evenredig is met het inverse volume van het heelal. De black-body temperatuur neemt lineair af met de schaal, dus met  $(1+z)$ ,

$$T_0 = \frac{1}{1+z} T_e. \quad (306)$$

We kunnen vergelijkingen (127) en (128) gebruiken om de huidige energiedichtheid en deeltjesdichtheid van de kosmische achtergrondstraling te vinden. De huidige stralingsenergiedichtheid<sup>18</sup> in de vorm van fotonen is

$$\rho_{R\gamma} = \frac{\pi^2}{30} g_\gamma^{\text{totaal}} T^4 = 0.261 \text{ MeV/m}^3, \quad (307)$$

hetgeen correspondeert met een bijdrage tot  $\Omega = \rho/\rho_{\text{kritisch}}$  van

$$\Omega_{R\gamma} h^2 = 2.6 \times 10^{-5}. \quad (308)$$

De dichtheid van het aantal microgolf-achtergrond fotonen is

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \approx 410 \text{ cm}^{-3} \quad (309)$$

voor  $T = T_0 = 2.725 \text{ K}$ . Ondanks dat de microgolf-achtergrondstraling vandaag een kleine bijdrage tot  $\Omega$  levert, was ze ten tijde van emissie dynamisch van groter belang. De dynamica op dat moment werd gedomineerd door materie (zowel baryonische als donkere materie). Het belangrijkste is echter dat deze achtergrondstraling informatie verschaft over het heelal bij een roodverschuiving van ongeveer 1100.

<sup>18</sup>De equivalente massadichtheid bedraagt  $4.65 \times 10^{-34} \text{ g/cm}^3$ .

### 5.2.1 Recombinatie en de Saha vergelijking

We gaan nu nader bekijken wat er gebeurde bij een temperatuur van ongeveer 1 eV. We willen de elektronendichtheid  $n_e$  bij deze temperatuur berekenen, maar hebben bij deze energie te maken met een nieuw mechanisme: elektronen kunnen verdwijnen omdat ze combineren met protonen om neutrale waterstofatomen te vormen (plus fotonen). We dienen dus rekening te houden met het feit dat er in het plasma reacties van het type  $p + e^- \leftrightarrow {}^1\text{H} + \gamma$  kunnen optreden. Merk op dat in de evenwichtssituatie de chemische potentiaal voldoet aan  $\mu_p + \mu_e = \mu_{\text{H}}$ . We introduceren de baryonendichtheid

$$n_B \equiv n_p + n_{\text{H}}. \quad (310)$$

Verder geldt  $n_p = n_e$  omdat het plasma ongeladen is. Omdat de energieën laag zijn ten opzichte van de massa's van elektron, proton en waterstofatoom, kunnen we vergelijking (183) gebruiken om de dichtheden te vinden als functie van de temperatuur

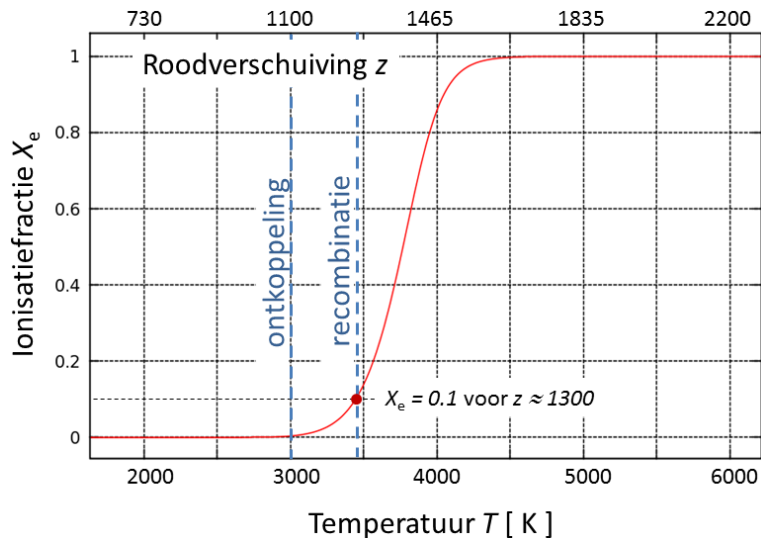
$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu_i - m_i}{T}}, \quad \text{voor } i = e, p, \text{ en H.} \quad (311)$$

We gebruiken  $\mu_p + \mu_e = \mu_{\text{H}}$  en de definitie van de bindingsenergie  $B \equiv m_{\text{H}} = m_e + m_p - m_{\text{H}}$ , en vinden

$$n_{\text{H}} = \frac{g_{\text{H}}}{g_e g_p} n_e n_p \left( \frac{m_e m_p T}{2\pi m_{\text{H}}} \right)^{-\frac{3}{2}} e^{B/T}. \quad (312)$$

Vervolgens gebruiken we  $n_e = n_p$  en  $m_p \approx m_{\text{H}}$ . Met de volgende definities voor de ionisatiefractie  $X_e \equiv n_p/n_B = n_p/(n_p + n_{\text{H}})$  en de baryon-foton verhouding  $\eta_B \equiv n_B/n_\gamma$  levert dit

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta_B \left( \frac{T}{m_e} \right)^{\frac{3}{2}} e^{B/T}. \quad (313)$$



**Figuur 23:** De fractie vrije elektronen als functie van de temperatuur en roodverschuiving. De temperatuur waarbij elektronen en protonen combineren tot waterstof is aangegeven. Fotonen ontkoppelen van het plasma bij een temperatuur van 3000 K.

Dit is de zogenaamde Saha-vergelijking voor de fractionele ionisatie in de evenwichtstoestand. We kunnen hiermee  $X_e$  bepalen als functie van de temperatuur  $T$ . Deze laatste is een functie van

de roodverschuiving,  $T = 2.725(1+z)$  K. De baryon-foton verhouding  $\eta_B$  volgt uit vergelijkingen (307), (2) en (81) als

$$\eta_B = n_B/n_\gamma = 2.7 \times 10^{-8} \Omega_B h^2. \quad (314)$$

Ook hebben we in sectie 3.1 (zie Fig. 10) gezien dat  $\Omega_B h^2 \approx 0.02$  en  $\eta_B \approx 6 \times 10^{-10}$ . Het verloop van  $X_e$  als functie van temperatuur en roodverschuiving wordt getoond in Fig. 23. We zien dat de ionisatiefractie kleiner wordt dan 10% bij een roodverschuiving

$$z_{\text{recombinatie}} \approx 1300. \quad (315)$$

Dit proces waarbij elektronen door protonen worden gevangen om waterstof te vormen, noemen we recombinatie.

De temperatuur waarbij recombinatie optreedt volgt uit  $T_{\text{recombinatie}} = 2.725(1 + z_{\text{recombinatie}}) = 3500$  K ofwel 0.3 eV, terwijl de tijd waarop recombinatie optreedt volgt uit

$$t_{\text{recombinatie}} = \frac{2}{3} H_0^{-1} (1 + z_{\text{recombinatie}})^{-\frac{3}{2}} \approx 1.4 \times 10^5 / h \text{ jaar}. \quad (316)$$

Naïef zouden we wellicht verwachten dat recombinatie optreedt bij  $T \approx 13.6$  eV, de bindingsenergie van het waterstofatoom. We dienen echter te beseffen dat er meer dan een miljard fotonen zijn per waterstofatoom. Dat betekent dat hoogenergetische fotonen in de staart van de Bose-Einstein verdeling tot een temperatuur van 0.3 eV efficiënt zijn in het ioniseren van waterstof.

### 5.2.2 Fotonen ontkoppelen van het plasma

Fotonen koppelen thermisch sterk aan het primeordiale plasma door reacties als  $e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$ . Thomson verstrooiing  $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$  vindt plaats met werkzame doorsnede  $\sigma_T = \alpha^2/m_e^2 \approx 2 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2}$ . De totale interactiesnelheid per foton bedraagt  $\Gamma_\gamma = n_e \sigma_T$  (we gebruiken  $v = c = 1$ ). Omdat  $\Gamma_\gamma \propto n_e$  neemt de interactiesnelheid af als de dichtheid van vrije elektronen afneemt (zie Fig. 313). Fotonen en elektronen zullen ontkoppelen als de interactiesnelheid kleiner wordt dan de Hubble expansiesnelheid

$$\Gamma_\gamma(T_{\text{ontkoppeling}}) \approx H(T_{\text{ontkoppeling}}). \quad (317)$$

We schrijven de uitdrukking aan de linkerkant als

$$\Gamma_\gamma(T_{\text{ontkoppeling}}) = n_B X_e(T_{\text{ontkoppeling}}) \sigma_T = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \sigma_T X_e(T_{\text{ontkoppeling}}) T_{\text{ontkoppeling}}^3, \quad (318)$$

waar we  $n_B = \eta_B n_\gamma$  gebruiken voor de dichtheid van baryonen, terwijl de fotondichtheid gegeven wordt in vergelijking (128). Vervolgens schrijven we de uitdrukking aan de rechterkant van vergelijking (317) als

$$H(T_{\text{ontkoppeling}}) = H_0 \sqrt{\Omega_M} \left( \frac{T_{\text{ontkoppeling}}}{T_0} \right)^{3/2}. \quad (319)$$

Hieruit volgt

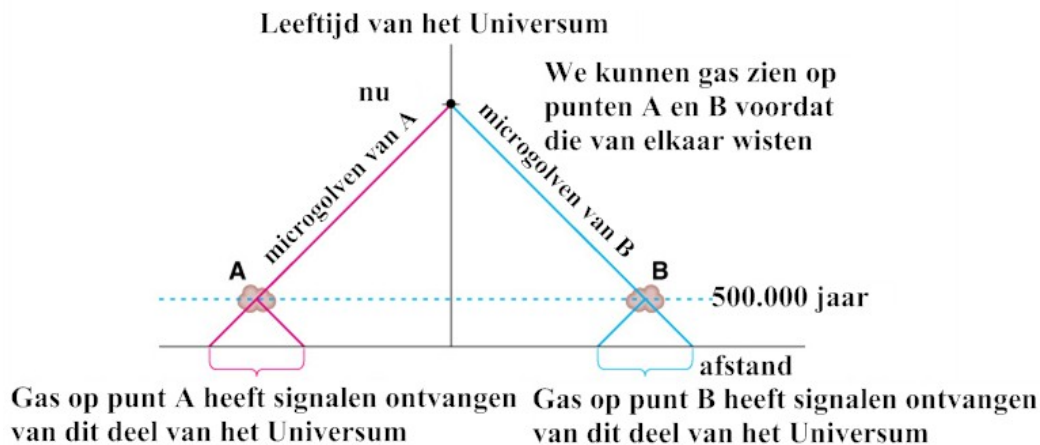
$$X_e(T_{\text{ontkoppeling}}) T_{\text{ontkoppeling}}^{3/2} = \frac{\pi^2}{2\zeta(3)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega_M}}{\eta_B \sigma_T T_0^{3/2}}. \quad (320)$$

We gebruiken de Saha-vergelijking (313) voor  $X_e(T_{\text{ontkoppeling}})$  en vinden

$$T_{\text{ontkoppeling}} \approx 0.27 \text{ eV} \quad \text{en} \quad z_{\text{ontkoppeling}} = (T_{\text{ontkoppeling}} - T_0)/T_0 \approx 1100. \quad (321)$$

### 5.3 Het horizon probleem van de kosmische microgolf-achtergrondstraling

Om het *horizon probleem* goed te beschrijven, moet het concept van een *horizon* worden behandeld. De horizon van een waarnemer is de grootste afstand waarover een invloed, elke invloed, gereisd kan hebben om deze waarnemer te bereiken; het is dus een bovenlimiet voor de grootte van de ruimte waarmee de waarnemer nog in causaal contact kan staan. We hadden al gezien dat geen enkele invloed sneller kan gaan dan het licht. Zo volgt dat de horizon van een waarnemer ook de grootte is van het zichtbare heelal van deze waarnemer.



**Figuur 24:** Als we de hoek van de deeltjeshorizon uitrekenen ten tijde van de oorsprong ont koppeling ( $z \approx 1100$ ), vinden we dat gebieden van de achtergrondstraling die meer dan  $1^\circ$  van elkaar gescheiden, niet causaal met elkaar in verband staan. Hoe kunnen delen van het primeordiale plasma die elkaar niet kennen toch dezelfde temperatuur (binnen 10 ppm) en dichtheid hebben?

De kosmische microgolf-achtergrondstraling is de elektromagnetische straling van het gloeiende plasma (voornamelijk bestaande uit waterstof en helium) toen het heelal ongeveer 380.000 jaar oud was. De energieverdeling is die van een zwarte straler (zie Fig. 22). Dit betekent dat het stralende plasma in thermisch evenwicht moet zijn geweest door uitwisseling van fotonen. Echter, deze fotonen zijn, zoals we al hadden gezien, ontkoppeld van de materie ongeveer 380.000 jaar na de oerknal: na dit moment is het niet meer mogelijk geweest om verschillende gebieden van het heelal in thermisch evenwicht met elkaar te brengen. Tijdens deze ont koppeling was de horizon van een waarnemer vele malen kleiner dan nu. We zouden daarom verwachten dat gebieden waarin tegenwoordig fotonen met dezelfde temperatuur worden gevonden, veel kleiner zijn dan het nu zichtbare heelal. Het tegenovergestelde blijkt waar te zijn: meetgegevens laten zien dat ons *hele* zichtbare heelal nagenoeg dezelfde temperatuur heeft. De paradox die hieruit volgt noemen we het horizon probleem.

Naast het horizonprobleem en het in sectie 1.4.5 besproken vlakheidsprobleem, is er het *probleem van de missende deeltjes*. Veel van de moderne theorieën van deeltjesfysica voorspellen het bestaan van exotische, nog niet gemeten deeltjes; voorbeelden zijn supersymmetrische deeltjes en magnetische monopolen. Deze deeltjes zijn typisch heel zwaar en zijn daarom moeilijk (danwel praktisch onmogelijk) te creëren in deeltjesversnellers. Echter, in het heel vroege heelal zijn temperaturen hoog genoeg geweest om de natuurlijke creatie van zulke deeltjes aannemelijk te maken. Geen van deze deeltjes is ooit geobserveerd<sup>19</sup>. De vraag is dan ook: als deze deeltjes inderdaad geproduceerd zijn in het vroege heelal, waarom zijn ze dan nooit gevonden?

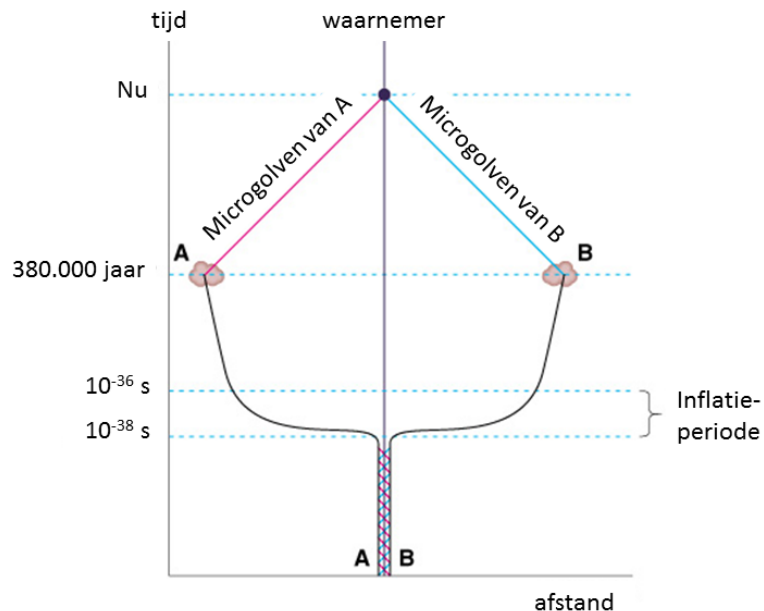
<sup>19</sup>Op zijn minst een enkele keer heeft een onderzoeksgroep beweerd een magnetische monopool gemeten te

## 5.4 Kosmologische inflatie

Al deze problemen kunnen in één klap worden opgelost door het standaard model van de kosmologie uit te breiden met een nieuw concept: *kosmologische inflatie*. Dit is de aanname dat het heelal, vlak na de oerknal, een periode heeft gekend van extreme snelle uitdijing. Mathematisch zullen we dit als volgt definiëren: ten tijde van inflatie geldt<sup>20</sup>

$$\dot{a}(t) > 0, \quad \text{en} \quad \ddot{a}(t) > 0. \quad (322)$$

Door inflatie te introduceren, kunnen we de drie tekortkomingen van het standaard model oplossen. Zo wordt het horizonprobleem opgelost door het feit dat tijdens de inflationaire periode de schaalfactor  $a(t)$  extreem groot wordt. Dit betekent dat een stuk van het heelal waarin thermisch evenwicht al was opgetreden vóór de start van de inflatieperiode, opgeblazen wordt tot veel grotere proporties dan de horizon van een waarnemer in dit deel van het heelal (zie Fig. 25). Het gevolg is dan ook dat, nadat de inflatieperiode is afgelopen, het zichtbare heelal voor deze waarnemer geheel in thermisch evenwicht is, precies zoals we dat vandaag meten!



**Figure 25:** *Inflatie lost het horizon-probleem op doordat gebieden die in thermisch evenwicht zijn in zeer korte tijd worden opgeblazen tot afmetingen groter dan de horizon van individuele waarnemers.*

Het vlakheidsprobleem wordt opgelost door het feit dat elke ruimte, wanneer opgeblazen tot voldoende grote proporties, vlak lijkt voor een lokale waarnemer. Dit is volkomen vergelijkbaar met het aardoppervlak, dat zo groot is vergeleken met ons lokale waarnemers, dat het ons voorkomt als plat. Dit is analoog aan de ervaring voor een mier die op het oppervlak van een ballon leeft. Naarmate de ballon wordt opgeblazen, wordt het oppervlak voor de mier steeds vlakker.

Tenslotte is ook het probleem van de missende deeltjes op een triviale manier opgelost door de introductie van een inflatieperiode. Immers, als het heelal tot enorme proporties is opgeblazen, zullen alle exotische deeltjes die gecreëerd zijn vóór de aanvang van de inflatieperiode, worden uitgesmeerd over een zeer groot volume. Dit maakt de kans er een tegen te komen in onze

hebben, maar het is daarna geen enkele andere onderzoeksgroep ooit gelukt dit resultaat te reproduceren. Veel deeltjesfysici zijn daarom sceptisch over het resultaat en negeren deze bewering.

<sup>20</sup>Merk op dat een heelal met een kosmologische constante precies aan deze definitie voldoet en dus dat we onze huidige uitdijing als inflatie zouden kunnen bestempelen. Dat is legitiem, maar wij zullen in het vervolg de naam inflatie reserveren voor versnelde expansie in het vroege heelal.

detectoren bijzonder klein. Uiteraard verklaart inflatie alleen waarom de *aanvankelijke* exotische deeltjes niet gevonden worden en doet zij geen uitspraak over de deeltjes die eventueel *na* de inflatieperiode gecreëerd zijn. Overigens verwachten we ook niet dat zulke deeltjes in een later stadium gecreëerd worden. De reden hiervoor is dat, zoals al genoemd, zulke exotische deeltjes typisch heel hoge massa hebben en het dus in toenemende mate moeilijk wordt deze deeltjes te creëren in een heelal naarmate de energiedichtheid afneemt ten gevolge van de expansie.

#### 5.4.1 De dynamica van kosmologische inflatie

We gaan ons nu bezighouden met de vraag hoe kosmologische inflatie gerealiseerd kan worden: op welke manier kunnen de friedmannvergelijkingen (47) en (49) toegepast worden om inflatie te bewerkstelligen? We hadden al gezien dat een kosmologische constante, een energievorm met constante dichtheid  $\rho_c$  en toestandsvergelijking  $\rho = -P$ , een heelal oplevert dat exponentieel uitdijt. Dit is echter niet de enige mogelijkheid om aan vergelijking (322) te voldoen. Als we de tweede friedmannvergelijking beschouwen,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3P), \quad (323)$$

zien we dat inflatie optreedt wanneer de rechterkant van deze vergelijking groter is dan nul; in termen van de toestandsvergelijking, betekent dit dat inflatie gevonden wordt voor alle materie (of energie) die de eigenschap  $\rho = nP$  met  $n < -\frac{1}{3}$  heeft.

Dergelijke vormen van energie worden in de klassieke natuurkunde niet gevonden. In de quantumfysica zijn zulke energievormen echter wel degelijk te realiseren, door energie te beschrijven in termen van *velden* in plaats van deeltjes. We definiëren een veld en construeren dit zodanig dat het een energiedichtheid en druk kent die voldoen aan een toestandsvergelijking waarin  $n < -\frac{1}{3}$ . Het is dan vervolgens aan de experimentele natuurkunde om uit te maken of het bestaan van een dergelijk veld gedemonstreerd kan worden.

Het model dat het meest gebruikt wordt, is dat van een scalaire veld  $\phi(t)$  dat alleen afhankelijk is van de tijd en niet van de ruimte; het zogenaamde inflatonveld. Immers, het kosmologisch principe suggereert dat alle energie en materie homogeen en isotroop verdeeld dient te zijn. Verder is de keuze voor een vector- of tensorveld niet in overeenstemming met de eis van isotropie vanwege de rotatie-afhankelijkheid van zulke velden. Een plaatsafhankelijkheid tenslotte is niet in overeenstemming met de eis van homogeniteit. Een scalaire veld kent een lagrangiaanse dichtheid gegeven door

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi(t))(\partial_\nu\phi(t)) - V(\phi(t)), \quad (324)$$

waar in het huidige geval de ruimtelijke afgeleiden geen bijdragen leveren. Bij elke lagrangiaanse dichtheid hoort een actie  $S$ , gegeven door

$$S = \int d^3x dt \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (325)$$

waarin, zoals eerder beargumenteerd,  $g$  de determinant van de metriek is. In het huidige geval gebruiken we de vlakke FRLW metriek, vergelijking (23), en is de determinant gegeven door

$$g = -a^6(t). \quad (326)$$

Via de Euler-Lagrange vergelijkingen kunnen we nu de bewegingsvergelijking voor het scalaire veld  $\phi(t)$  afleiden. Dit is een wat lange berekening, maar relatief eenvoudig aangezien het veld

louter van de tijd afhangt. Het resultaat is dan ook snel gevonden: het scalaire veld  $\phi(t)$  evolueert in de tijd volgens de bewegingsvergelijking

$$\ddot{\phi}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\phi}(t) + c^2\partial_\phi V(\phi(t)) = 0. \quad (327)$$

Merk op dat de details van de evolutie van het scalaire veld afhangen van de potentiële energiedichtheid  $V(\phi(t))$ ; de verschillende soorten modellen van kosmologische inflatie worden dan ook gekenmerkt door de keuze van deze grootte. We zullen hier nog niet in detail op in gaan; in wat volgt zullen we geen aannames maken voor de vorm van  $V(\phi(t))$ ; dientengevolge blijven al onze volgende conclusies zo algemeen mogelijk.

Elke lagrangiaanse dichtheid leidt tot een energie-impuls tensor

$$T_{\mu\nu} = \left(\partial_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi\right) + g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (328)$$

Deze uitdrukking kunnen we gebruiken om de druk en dichtheid ten gevolge van het scalaire veld te berekenen. Hiertoe vullen we onze huidige lagrangiaanse dichtheid en metriek in, en vergelijken we de resulterende energie-impuls tensor met die van de friedmannvloeistof, gegeven in vergelijking (46). De uitdrukkingen voor de dichtheid en druk kunnen dan direct worden afgelezen. We vinden dat

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2(t) + V(\phi(t)), \\ P(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2(t) - V(\phi(t)). \end{aligned} \quad (329)$$

Merk op dat de eerste term gezien kan worden als de kinetische energiedichtheid van het scalaire veld, en de tweede term als de potentiële energiedichtheid; de uitdrukking voor de dichtheid  $\rho$  van de *totale* energie klopt dan ook precies met wat we zouden verwachten<sup>21</sup>.

We beschouwen een heelal dat, in zijn vroegste epoch, gevuld is met de gebruikelijke soorten energie: koude materie, straling, een kosmologische constante, en voegen nu een inflatonveld toe. Al deze invloeden bepalen, via de friedmannvergelijkingen, de mate waarin de schaalfactor evolueert in de tijd. Als de invloed van het inflatonveld het grootst is, zal het heelal een periode ingaan van exponentiële uitdijning. Het gevolg is dan, dat de andere invloeden vrijwel meteen verwaarloosd kunnen worden. Immers, de energiedichtheid en druk van een gebruikelijke vorm van energie en materie is evenredig met de inverse van de schaalfactor tot een bepaalde macht (zie onze resultaten uit het vorige hoofdstuk 1), en zullen daarom asymptotisch (en, voor typische inflatiemodellen, heel snel) naar nul gaan. Alle termen in de friedmannvergelijkingen die evenredig zijn met druk en dichtheid kunnen we daarom negeren bij de beschrijving van het heelal in een inflatieperiode. We concluderen dat we het heelal in een inflatieperiode kunnen beschrijven door de friedmannvergelijking met daarin louter de invloed van het inflatonveld gesubstitueerd, en, uiteraard, de bewegingsvergelijking voor dat inflatonveld, vergelijking (327). De resulterende set bewegingsvergelijkingen noemen we de *inflatievergelijkingen*

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) + 3H(t)\dot{\phi}(t) + c^2\partial_\phi V(\phi(t)) &= 0, \\ H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\phi}^2(t) + V(\phi(t))\right). \end{aligned} \quad (330)$$

Het doen van inflatiekosmologie kunnen we nu als volgt samenvatten: beargumenteer een vorm voor de potentiële energiedichtheid  $V(\phi(t))$ , substitueer deze in de inflatievergelijkingen, en los

<sup>21</sup>De uitdrukkingen voor de dichtheid en druk hadden ook gevonden kunnen worden door *aan te nemen* dat  $\rho$  deze vorm zou hebben, en daarna, zoals we uitgewerkt hebben in het vorige hoofdstuk, de friedmannvergelijkingen te gebruiken om de bijbehorende druk te vinden.

de resulterende set bewegingsvergelijkingen op om de expliciete vorm voor de schaalfactor  $a(t)$  en het inflatonveld  $\phi(t)$  te vinden.

Merk op dat het niet gegarandeerd is dat een gevonden oplossing  $\{ a(t), \phi(t) \}$  inderdaad inflatie ( $\dot{a}(t) > 0, \ddot{a}(t) > 0$ ) beschrijft, voor elke willekeurige vorm voor de potentiële energiedichtheid  $V(\phi(t))$ . In de volgende sectie zullen we daarom criteria afleiden die, mits hieraan voldaan wordt, inflatie zullen garanderen.

### 5.4.2 De vereenvoudigde inflatievergelijkingen

Nu de inflatievergelijkingen gevonden zijn, kunnen we ons buigen over de vraag op welke manier een scalaire veld gebruikt kan worden om inflatie te realiseren. Dit is geen triviale vraag: we hadden al gezien dat inflatie volgt wanneer dichtheid en druk leiden tot een toestandsvergelijking met  $n < -\frac{1}{3}$ , maar beide grootheden hangen op een niet-triviale manier af van de waarde van het scalaire veld  $\phi(t)$ , welke zelf weer gedictieerd wordt door de bewegingsvergelijking (330). Het is om deze reden dat men op dit moment vaak de *aanname van langzame evolutie*<sup>22</sup> maakt: aangenomen wordt dat het scalaire veld heel langzaam evolueert in de tijd, zodanig dat we mogen aannemen dat de  $\dot{\phi}$ -termen in uitdrukking (329) voor de dichtheid en druk verwaarloosbaar zijn (fysisch gezien betekent dit dat de kinetische energie van het veld veel kleiner is dan de potentiële energie),

$$\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2(t) \ll V(\phi(t)). \quad (331)$$

Er geldt dan

$$\begin{aligned} \rho(t) &\approx +V(\phi(t)), \\ P(t) &\approx -V(\phi(t)). \end{aligned} \quad (332)$$

Merk op dat, onder deze aanname, de toestandsvergelijking de waarde  $n = -1$  heeft gekregen, en dit voor alle keuzes voor de potentiële energie  $V(\phi(t))$ . In hoofdstuk 1 hadden we al gezien dat deze waarde van  $n$  leidt tot exponentiële expansie van het heelal, en zo is gevonden dat, onder de aanname van langzame evolutie, exponentiële inflatie gevonden wordt *ongeacht de details van het model*. Het scalaire veld zullen we in het vervolg dan ook aanduiden met de naam *inflatonveld*; de deeltjes die we aan dit veld kunnen toekennen heten *inflatonen*. We proberen een beeld te schetsen in Fig. 26. Hierbij tonen de rode pijlen de klassieke beweging van  $\phi$ . Als  $\phi$  zich in het gebied (a) bevindt, dan zal de energiedichtheid nagenoeg constant blijven,  $\rho \approx \rho_f$ , zelfs wanneer het heelal expandeert. Verder is het zo dat de kosmologische expansie als een "wrijvingskracht" werkt en de beweging van  $\phi$  vertraagt. Zelfs nabij gebieden (b) en (d) gedraagt  $\phi$  zich als een knikker die beweegt in een schaal met stroop, en kruipt hij slechts langzaam naar beneden langs de rand van de potentiaal. Gedurende deze periode van "slow roll" blijft  $\phi$  nagenoeg constant. Pas nadat  $\phi$  het grootste deel van de helling naar beneden heeft afgelegd, begint hij te oscilleren rond zijn minimum, in gebied (c), en hiermee eindigt inflatie.

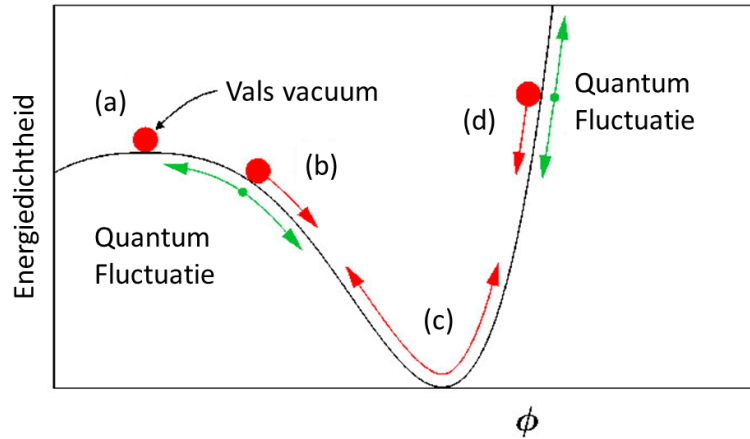
We zullen verder aannemen dat  $\ddot{\phi}(t)$  veel kleiner is dan  $3H\dot{\phi}(t)$ , zodat we de eerste term in vergelijking (330) kunnen verwaarlozen; fysisch betekent deze aanname dat we ervan uitgaan dat  $\dot{\phi}(t)$  maar heel langzaam van waarde verandert. Deze voorwaarde is belangrijk, want het zegt effectief dat de kinetische energiedichtheid van het inflaton *lange tijd klein blijft*. Daarmee voorkomt men dat inflatie te snel ten einde komt.

Onder deze aannames zien de inflatievergelijkingen er eenvoudiger uit,

$$\begin{aligned} 3H(t)\dot{\phi}(t) + c^2\partial_\phi V(\phi(t)) &= 0, \\ H^2(t) - \frac{8\pi G}{3c^2}V(\phi(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (333)$$

<sup>22</sup>In het Engels: de *Slow Roll Condition*.





**Figuur 26:** In de meest eenvoudige inflatiemodellen wordt het heelal op vroege tijden gedomineerd door de potentiële energiedichtheid van een scalair veld  $\phi$ .

Deze zullen we de *Vereenvoudigde Inflatie Vergelijkingen* (VIV) noemen. We zullen nu twee belangrijke parameters afleiden die ons zeggen wanneer we deze aannames mogen gebruiken. Samengevat gelden de VIV alleen zolang aan

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2(t)}{V(\phi(t))} \ll 1, \quad \text{en} \quad \frac{\ddot{\phi}(t)}{3H(t)\dot{\phi}(t)} \ll 1 \quad (334)$$

voldaan is. Beide eisen kunnen worden herschreven met behulp van de twee VIV zelf, en zo in een vorm worden gegoten waarin alleen de potentiële energiedichtheid  $V(\phi(t))$  voorkomt. Dit maakt het makkelijk om voor een gegeven inflatiemodel snel te zien of de vereenvoudigde inflatievergelijkingen gebruikt mogen worden.

De eerste eis kan worden herschreven als

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2(t)}{V(\phi(t))} &= \frac{c^2}{18H^2(t)} \frac{(\partial_\phi V(\phi(t)))^2}{V(\phi(t))} \\ &= \frac{1}{6} \frac{c^4}{8\pi G} \left( \frac{\partial_\phi V(\phi(t))}{V(\phi(t))} \right)^2 \ll 1, \end{aligned} \quad (335)$$

waar in de eerste stap de eerste VIV is gebruikt, en in de tweede stap de tweede. We definiëren nu de inflatieparameter  $\epsilon$  als

$$\epsilon \equiv \frac{1}{6} \frac{c^4}{8\pi G} \left( \frac{\partial_\phi V(\phi(t))}{V(\phi(t))} \right)^2, \quad (336)$$

en zoals nu gebleken is, moet deze veel kleiner zijn dan 1 om de eerste van de twee VIV te mogen gebruiken. De fysische interpretatie van de parameter  $\epsilon$  is snel af te lezen:  $\epsilon$  is een maat voor de steilheid van de functie  $V(\phi(t))$ , en de eis dat deze parameter heel klein is, zegt dus dat we aannemen dat  $V(\phi(t))$  heel vlak is. De parameter heeft ook een andere betekenis, die we kunnen vinden door op te merken dat de VIV kunnen worden gebruikt om aan te tonen dat

$$-\frac{\dot{H}(t)}{H^2(t)} = \frac{1}{3}\epsilon. \quad (337)$$

Als  $\epsilon \ll 1$  geldt dat de linkerkant van deze vergelijking veel kleiner is dan 1. Dit is niks anders dan zeggen dat er inflatie aan de gang is, en dit kunnen we zien als volgt. De definitie van de

Hubble constante,  $H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$  zegt dat deze vergelijking geschreven kan worden als

$$1 - \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} = \frac{1}{3}\epsilon \ll 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} \gg 0, \quad (338)$$

en de ongelijkheid garandeert dat  $\ddot{a}(t) \gg 0$ : versnelde uitdijing van het heelal. De conclusie is dan ook dat de eis  $\epsilon \ll 1$  niet alleen betekent dat de vereenvoudigde inflatievergelijkingen gebruikt mogen worden, maar ook *dat inflatie gegarandeerd is*. De laatste opmerking verklaart de naam *inflatieparameter*.

De tweede eis in vergelijking (334) kan eveneens worden herschreven,

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\phi}(t)}{3H(t)\dot{\phi}(t)} &= -\frac{1}{9H^2(t)} \left( c^2 \partial_\phi^2 V(\phi(t)) + 3\dot{H}(t) \right) \\ &= -\frac{c^4}{24\pi G} \frac{\partial_\phi^2 V(\phi(t))}{V(\phi(t))} + \frac{\epsilon}{9} \ll 1, \end{aligned} \quad (339)$$

waarin in de eerste stap de tijdsafgeleide van de eerste VIV is gebruikt, en in de tweede stap de tweede VIV is gebruikt samen met de conditie gegeven in vergelijking (337). Als we nu de eis op parameter  $\epsilon$  gebruiken,  $\epsilon \ll 1$ , zien we dat de tweede term genegeerd kan worden. We definiëren dan een parameter  $\eta$  als

$$\eta \equiv -\frac{c^4}{24\pi G} \frac{\partial_\phi^2 V(\phi(t))}{V(\phi(t))}, \quad (340)$$

en nu blijkt dat deze veel kleiner dan 1 moet zijn om de tweede VIV te mogen gebruiken. De fysische interpretatie van de parameter  $\eta$  is snel in te zien:  $\eta$  is een maat voor de snelheid waarmee  $V(\phi(t))$  van steilheid verandert, en de eis dat deze parameter klein is zegt dat we aannemen dat  $V(\phi(t))$  lang vlak *blijft*.

Dit alles maakt dat we kunnen concluderen dat we de VIV kunnen gebruiken om inflatie te beschrijven voor elke keuze voor de potentiële energiedichtheid  $V(\phi(t))$ , mits het maar een functie is die erg vlak is ( $\epsilon \ll 1$ ) en langere tijd vlak blijft ( $\eta \ll 1$ ). Deze eis *garandeert* bovendien dat exponentiële inflatie het gevolg is.

Het inflatiemodel is belangrijk omdat hierdoor de quantumfluctuaties in de kromming van ruimtetijd en in het dilatonveld tot macroscopische afmetingen worden opgeblazen. Omdat inflatie een relatief lange tijd duurde, zijn de waargenomen (via temperatuurverschillen) dichtheidsvariaties in het primeordiale plasma schaalinvariant.

## 5.5 Anisotropie in de kosmische microgolf-achtergrondstraling

De ontdekking dat het heelal gevuld wordt door microgolf-achtergrondstraling was een groot succes voor de Big Bang theorie. Het merendeel van de stralingsenergie is in de vorm van deze straling en vormt op dit moment ongeveer  $5 \times 10^{-5}$  van de totale energiedichtheid van het heelal. Ook was het een groot succes dat het spectrum van deze straling de vorm heeft van die van een zwarte straler, hetgeen duidt op thermisch evenwicht in het vroege heelal.

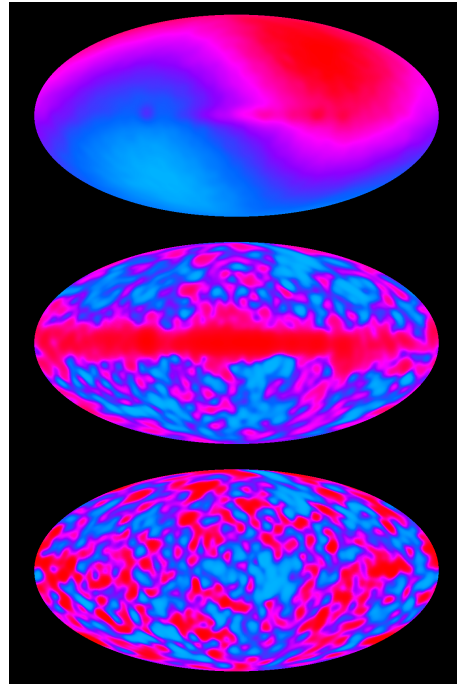
Het is misschien nog indrukwekkender dat de details van de anisotropiën in de kosmische microgolf-achtergrondstraling in goede overeenstemming zijn met ons huidige begrip van de fysische processen in het vroege heelal.

### 5.5.1 De dipoolasymmetrie

De ruwe data van de kosmische microgolf-achtergrondstraling toont een anisotropie in de orde van  $10^{-3}$  die veroorzaakt wordt door de peculiar snelheid  $|\mathbf{v}| = 368$  km/s van de Aarde ten opzichte van de Hubble flow van de straling. De grootte van de anisotropie wordt door de Dopplerformule gegeven,  $T(\theta) = T_0 [1 + (v/c) \cos \theta]$ , met  $\theta$  de tijdsafhankelijke waarnemingsrichting ten opzichte van deze peculiar snelheid  $\mathbf{v}$ . De beweging van de Aarde en de satelliet zijn goed bekend en vertonen een regelmatige variatie die in rekening gebracht kan worden. Er dient vervolgens een dipoolterm van de thermodynamische temperatuur van de data te worden afgetrokken. Deze dipoolterm in de kosmische achtergrondstraling heeft een amplitude  $3.353 \pm 0.024$  mK en wijst in de richting met galactische coördinaten  $(l, b) = (264^\circ.26 \pm 0^\circ.33, 48^\circ.22 \pm 0.13^\circ)$ , of equatoriale coördinaten  $(\alpha, \delta) = (11^h 12.^m 2 \pm 0.^m 8, -7^\circ.06 \pm 0^\circ.16)$  epoch J2000.

We tonen de ongecorrigeerde en de voor de peculiar snelheid gecorrigeerde data in Fig. 27. De dipoolterm wordt in het algemeen toegeschreven aan de beweging van het zonnestelsel ten opzichte van het ruststelsel van de kosmische microgolf-achtergrondstraling.

**Figure 27:** *Temperatuur van de kosmische microgolf-achtergrondstraling gemeten met de COBE satelliet. Boven: het ongecorrigeerde spectrum wordt gedomineerd door een dipoolterm; midden: het spectrum gecorrigeerd voor de dipoolterm ten gevolge van onze peculiar snelheid toont een achtergrond in het galactische vlak; beneden: spectrum gecorrigeerd voor dipoolterm en de bijdrage van onze melkweg. (Credit: COBE)*



We dienen nog een verdere correctie te maken die te maken heeft met de galactische emissie van infraroodstraling. Deze emissie is afkomstig van synchrotronstraling en van kosmisch stof. Het vertoont een quadrupool anisotropie in het thermodynamisch frequentiespectrum. Een berekening van de quadrupoolterm geeft een amplitude  $6 \mu\text{K} \leq Q_{\text{rms}} \leq 17 \mu\text{K}$ .

Na het corrigeren voor de dipool- en quadrupooltermen zien we dat er kleine maar significante anisotropiën overblijven op het  $10^{-5}$  niveau. Deze anisotropiën zijn van fundamenteel belang en reflecteren de fluctuaties in dichtheid en temperatuur van het vroege heelal. De macroscopische structuren die we in het huidige heelal zien, zijn hieruit ontstaan.

### 5.5.2 Temperatuurfluctuaties en hoekspectrum

In het Big Bang model wordt de structuur die we nu zien verklaard door gravitationele instabiliteit. Kleine verstoringen in de dichtheid van een anders homogene massadistributie in het

vroege heelal, zullen door gravitationele aantrekking groeien en uiteindelijk sterren en sterrenstelsels vormen. De minieme temperatuurverschillen in de kosmische achtergrondstraling geven hiermee dus een mogelijke verklaring voor de huidige macroscopische structuur van het heelal. De temperatuurverschillen zelf zijn weer terug te voeren tot quantumeffecten in het zeer vroege heelal en dat zullen we nu nader beschouwen.

Quantumfluctuaties zijn het resultaat van de onzekerheidsrelaties. Voor een bepaald tijdsinterval  $\Delta t$  kan de energie van een systeem niet nauwkeuriger gespecificeerd worden dan  $\Delta E$ , met conditie  $\Delta t \Delta E \approx \hbar$ . We kunnen dit toepassen op de situatie voor inflatie en nemen aan dat de veranderingen in het inflatieveld plaatsvinden op een energieschaal  $m \approx m_{\text{GUT}}$ . De bijbehorende tijdschaal kunnen we bij benadering berekenen met vergelijking (138) en we vinden dat de leeftijd van het heelal als de energie per deeltje gelijk is aan  $kT = m$  van orde  $t \approx m_{\text{Pl}}/m^2$  is (we gebruiken weer natuurlijke eenheden). De fluctuatie in de energie per deeltje is dan  $\Delta E = 1/\Delta t \approx m^2/m_{\text{Pl}}$  en de fractionele fluctuatie is dan

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{m}{m_{\text{Pl}}}. \quad (341)$$

Omdat de energiedichtheid voor relativistische deeltjes gelijk is aan  $\rho \propto E^4$ , zullen dichtheidsfluctuaties  $\Delta\rho/\rho$  van gelijke grootte zijn. Deze naïeve benadering laat zien dat de grootte van de dichtheidsfluctuaties (waarvan we gezien hebben dat ze in de orde van  $10^{-5}$  zijn), afhangen van de keuze van de massaschaal voor inflatie.

We kunnen nog een stap verder gaan door te bedenken dat de fluctuaties in de amplitude  $\phi$  van het inflatieveld veroorzaakt worden door de verschillen in tijd waarop verschillende "bubbles" in het heelal hun inflatie beëindigen. Hierbij geldt

$$\Delta t = \Delta\phi/\dot{\phi}. \quad (342)$$

Met name de amplitude van de fluctuaties in de microgolf achtergrondstraling op de schaal van de horizon zijn belangrijk en deze worden bepaald door de verschillende bedragen waarmee de "bubbles" in het heelal geëxpandeerd zijn. Er geldt

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \delta_{\text{hor}} = H\Delta t \approx H^2/\dot{\phi}, \quad (343)$$

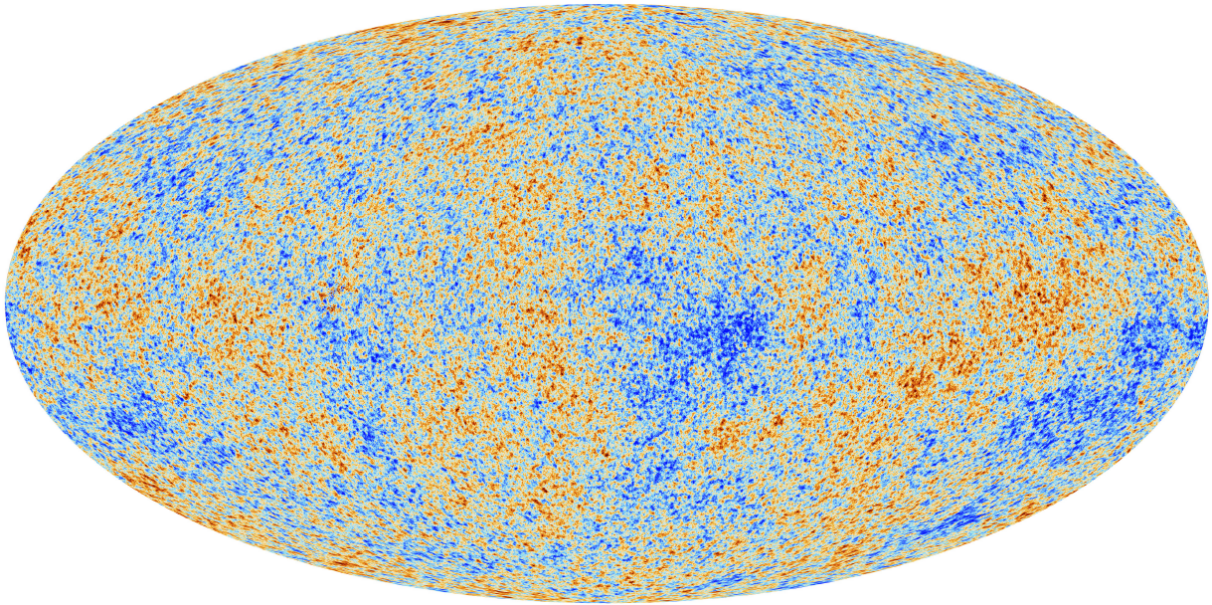
waarbij de Hubble-tijd gegeven wordt door  $1/H$ . Verder geldt  $\Delta\phi \approx H$  vanwege de onzekerheidsrelatie. We gebruiken vergelijking (333) voor  $H^2$ . Als we een eenvoudig kwadratisch model voor de inflatiepotentiaal  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$  nemen, dan volgt uit vergelijking (327) dat  $\dot{\phi} = -m^2\phi/3H$  en vinden we als schatting voor de dichtheidsfluctuaties

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \left(\frac{m}{m_{\text{Pl}}}\right) \left(\frac{\phi}{m_{\text{Pl}}}\right)^2. \quad (344)$$

De resultaten van COBE (zie Fig. 27) hadden nog beperkte resolutie. Na de COBE satelliet is de zogenaamde Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) door NASA op 1 juni 2001 gelanceerd. Vervolgens is op 14 mei 2009 de Planck satelliet door de European Space Agency (ESA) gelanceerd. De recente data van de Planck satelliet laten geen twijfel bestaan en bevestigen dat deze fluctuaties in de orde van  $10^{-5}$  zijn. We geven de data in Fig. 28.

We kunnen de fluctuaties analyseren door correlaties te nemen tussen punten aan de hemel. We definiëren een punt aan de hemel door een eenheidsvector te kiezen met richting  $\hat{\mathbf{n}}$ . Een dergelijk punt heeft dan een temperatuurfluctuatie gedefinieerd door  $\Theta(\hat{\mathbf{n}}) \equiv \delta T(\hat{\mathbf{n}})/\bar{T}$ , met  $\bar{T}$  de gemiddelde temperatuur. Voor de correlatie tussen twee punten  $\hat{\mathbf{n}}$  en  $\hat{\mathbf{n}}'$  geldt dan

$$C(\theta) \equiv \langle \Theta(\hat{\mathbf{n}}) \Theta(\hat{\mathbf{n}}') \rangle, \quad (345)$$



**Figuur 28:** Anisotropie van de kosmische microgolf-achtergrondstraling zoals die gemeten is met de Planck satelliet. De rode gebieden zijn heter dan de gemiddelde temperatuur en de blauwe gebieden zijn kouder. (Credit: ESA en de Planck Collaboratie)

met  $\cos \theta \equiv \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'$ . Het veld  $\Theta$  is een stochastische variabele en de haken duiden een ensemble gemiddelde aan.

Vervolgens expanderen we het temperatuurveld in sferisch harmonische functies  $Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$ ,

$$\Theta(\hat{\mathbf{n}}) = \Theta(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Theta_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}). \quad (346)$$

De expansiecoëfficiënten  $\Theta_{lm}$  worden *multipoole momenten* genoemd. Er geldt

$$\Theta_{lm} = \int \Theta(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}) d\Omega, \quad (347)$$

waar de integraal over de hele ruimte genomen wordt. Voor de sferisch harmonische functies geldt

$$Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) = Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)((l-m)!)^2}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (348)$$

met  $P_l^m(x)$  de geassocieerde Legendre functies

$$P_l^m(x) \equiv \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l. \quad (349)$$

We hebben bijvoorbeeld  $P_0^0(x) = 1$ ,  $P_1^0(x) = x$  en  $P_1^1(x) = -(1-x^2)^{1/2}$ .

Merk op dat de basisfuncties orthogonaal zijn. Er geldt

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} Y_{lm} Y_{l'm'}^* d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (350)$$

met  $\delta_{nn'}$  de Kroecker deltafunctie ( $\delta_{nn'} = 1$  als  $n = n'$ , anders geldt  $\delta_{nn'} = 0$ ) en  $d\Omega = \sin \theta d\phi d\theta$ .

De twee-punts correlator van de multipolen wordt gedefinieerd door

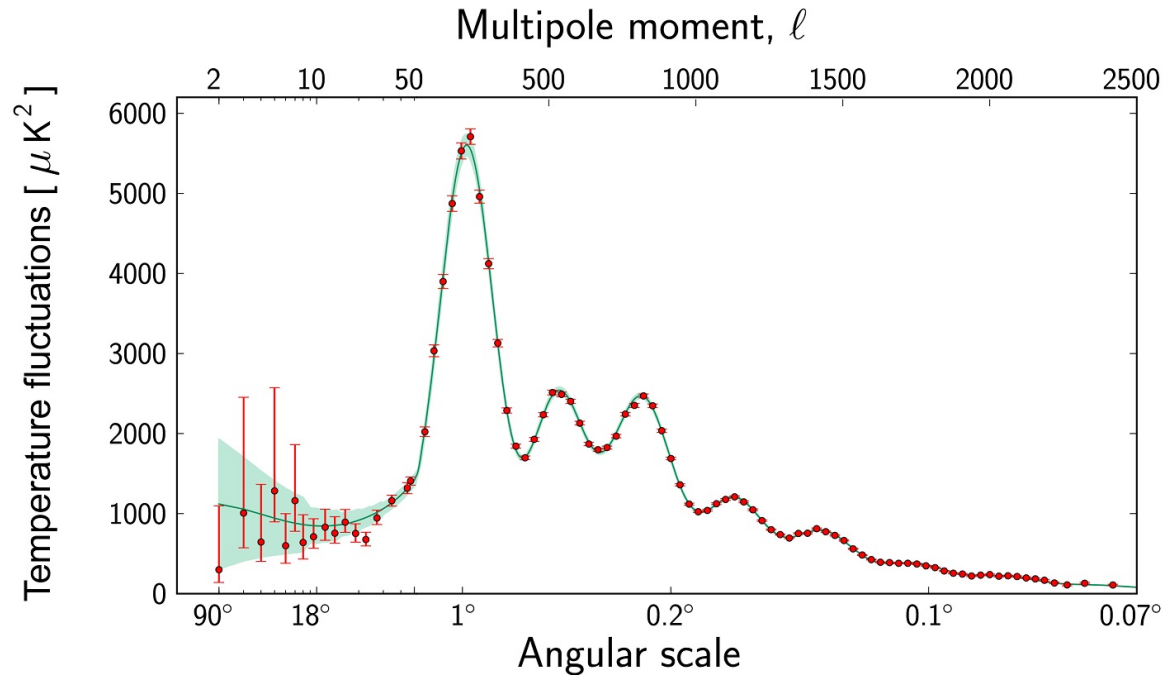
$$\langle \Theta_{lm} \Theta_{l'm'}^* \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (351)$$

We noemen  $C_l$  het *angular power spectrum*. De informatie die opgesloten ligt in het angular power spectrum in de harmonische ruimte is equivalent aan die van de twee-punts correlatiefunctie in de echte ruimte. Er geldt

$$C(\theta) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos \theta), \quad (352)$$

met  $P_l(\cos \theta)$  de Legendre polynomen.

We hebben nu een krachtig gereedschap in handen om de kosmologische informatie van miljoenen pixels van het beeld van de microgolf achtergrondstraling statistisch op compacte wijze te kunnen analyseren. We tonen het angular power spectrum voor de data verzameld door de Planck Collaboratie in Fig. 29.



**Figuur 29:** Het power spectrum van de temperatuurfuctuaties in de kosmische microgolf achtergrondstraling gemeten met Planck. De groene curve representeert een fit met het "standaard model van de kosmologie". (Credit: ESA en de Planck Collaboratie)

Als we de data bij lage multipolen bekijken, dan vinden we grote afwijkingen. De reden is dat het voorspelde spectrum (de groene curve) de gemiddelde sterkte van de multipool geeft voor een waarnemer die een ensemble van universa kan analyseren. We hebben hier een filosofisch probleem: we hebben slechts één heelal tot onze beschikking en kunnen niets zeggen over het ensemble gemiddelde. Dit is problematisch omdat de lage multipolen (de monopool en dipool) het patroon van anisotropiën voor een belangrijk deel bepaald hebben.

We zien voor een hoekschaal kleiner dan  $6^\circ$  in totaal zeven pieken met verschillende amplituden in het spectrum. Het standaard model van de kosmologie is voor deze multipool momenten in perfecte overeenstemming met de meetgegevens. We zullen nu bekijken welke informatie besloten ligt in dit spectrum.



### 5.5.3 Intermezzo: de akoestische golffunctie

We geven een korte afleiding van de akoestische golffunctie, waarbij we aannemen dat de processen zó snel zijn, dan er geen noemenswaardige warmteoverdracht plaats kan vinden. Het proces is dan adiabatisch.

#### Continuïteitsvergelijking

We beschouwen in Fig. 30 een infinitesimale vloeistofelement met dimensies  $dx$ ,  $dy$  en  $dz$ . Op een gegeven moment is de massa van de vloeistof die per tijdseenheid door het linker  $x$ -vlak stroomt gelijk aan  $\partial_t m_x = \rho u_x dy dz$ . We kunnen een Taylor-expansie gebruiken om de massa te vinden die het vlak op positie  $x + dx$  binnenstroomt. Er geldt

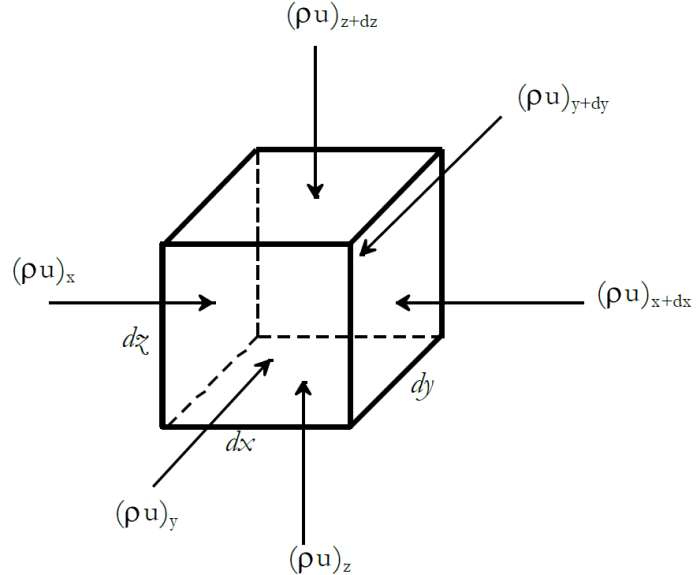
$$\partial_t m_{x+dx} = \partial_t m_x + \left. \frac{\partial(\partial_t m_x)}{\partial x} \right|_x dx + \dots = \rho u_x dy dz + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz. \quad (353)$$

We kunnen hetzelfde doen voor de stroming door de andere vlakken en vinden

$$\partial_t m_{\text{totaal}} = \left( -\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \partial_t m dx dy dz. \quad (354)$$

We gebruiken de divergentie operator  $\nabla \cdot$  en vinden de exacte continuïteitsvergelijking

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (355)$$



**Figure 30:** We beschouwen een kleine kubus met ribben  $dx$ ,  $dy$  en  $dz$ . De dichtheid van de vloeistof wordt aangegeven met  $\rho$  en de snelheid met  $\mathbf{u}$ .

We schrijven de dichtheid als som van een gemiddelde dichtheid en een fluctuatie

$$\rho = \rho_0(1 + \delta(t, \mathbf{x})). \quad (356)$$

Als we dit uitwerken, vinden we de zogenaamde lineaire continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial \delta(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (357)$$

Deze vergelijking stelt dat ruimtelijke variaties in het snelheidsveld van de deeltjes leiden tot veranderingen in deeltjesdichtheid.

De vergelijking van Euler

We gebruiken de tweede wet van Newton om de versnelling van een vloeistofdeeltje te berekenen. Op het vlak van de kubus op plaats  $x$  werkt een kracht  $f(x) = P(x)dydz$ , met  $P(x)$  de druk op plaats  $x$ . Idem voor het vlak op positie  $x + dx$ . De netto kracht in de  $x$ -richting bedraagt

$$df_x = P(x)dydz - P(x + dx)dydz. \quad (358)$$

We gebruiken weer een Taylor-expansie voor de druk op het  $x + dx$  vlak

$$P(x + dx) = P(x) + \frac{\partial P}{\partial x}dx + \dots \quad (359)$$

en beperken ons in het vervolg tot de lineaire term. Voor de druk schrijven we  $P = P_0 + p$  en we vinden

$$df_x = -\frac{\partial}{\partial x}(P_0 + p)dxdydz = -\frac{\partial p}{\partial x}dV \rightarrow d\mathbf{f} = -\nabla p dV, \quad (360)$$

waar we in de tweede stap ook de andere richtingen meenemen. Als we de tweede wet van Newton gebruiken, vinden we de versnelling van het vloeistofelement

$$d\mathbf{f} = dm \mathbf{a} = dm \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \text{en} \quad dm = \rho dV \rightarrow \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0. \quad (361)$$

Merk op dat de versnelling de *totale* afgeleide van  $\mathbf{u}$  naar de tijd is. De deeltjessnelheid is een functie van tijd en plaats en we dienen dan ook de kettingregel te gebruiken

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}u_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}u_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}u_z + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \quad (362)$$

Dit levert de vergelijking van Euler

$$\rho [\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] = -\nabla p, \quad (363)$$

die we al eerder tegengekomen zijn (zie vergelijking (19)).

De fluctuaties zijn klein en we nemen aan dat de niet-lineaire termen verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de lineaire term. De evenwichtsvergelijking wordt dan

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0. \quad (364)$$

We gebruiken vergelijking (356) en vinden

$$\rho_0 (1 + \delta(t, \mathbf{x})) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \rightarrow \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (365)$$

waar we aannemen dat  $\delta(t, \mathbf{x}) \ll 1$ . We noemen dit de *lineaire* vergelijking van Euler.

*De akoestische golfvergelijking*

We beginnen met de continuïteitsvergelijking (357) en differentiëren deze naar de tijd. Dat levert

$$\frac{\partial^2 \delta(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \delta(t, \mathbf{x})}{\partial t^2}. \quad (366)$$

We herschikken de vergelijking van Euler tot

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p. \quad (367)$$



Combineren van bovenstaande vergelijkingen levert

$$\nabla \cdot \nabla p = \nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 \delta(t, \mathbf{x})}{\partial t^2}. \quad (368)$$

We hebben te maken met een relativistisch plasma met een toestandsvergelijking voor straling en vinden

$$P = \rho c^2/3 \rightarrow p = \frac{\rho_0 c^2}{3} \delta(t, \mathbf{x}). \quad (369)$$

Dit levert de golfvergelijking

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \right) \delta(t, \mathbf{x}) = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \right) \frac{\delta \rho}{\rho} = 0, \quad (370)$$

met  $v_s$  de geluidssnelheid van de akoestische golf. Voor een relativistisch plasma geldt

$$v_s = \sqrt{\left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{adiabatisch}}} = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad (371)$$

en we zien dat akoestische fluctuaties zich met hoge snelheid voortplanten door het plasma.

#### 5.5.4 Akoestische oscillaties en dichtheidsverstoringen

Het vroege heelal bestaat uit een heet en dicht plasma van geladen deeltjes en fotonen. Het plasma is sinds de Big Bang afgekoeld door de expansie van het heelal en is nu extreem koud (gelijk aan de straling van een lichaam met een temperatuur van 2.7 K). We kunnen tegenwoordig de kosmische microgolf-achtergrondstraling van het plasma waarnemen (deze straling kwam vrij toen de temperatuur van het plasma ongeveer 3000 K was) en zien een karakteristiek patroon in de temperatuurverschillen van de straling. Deze temperatuurverschillen vertellen ons iets over de samenstelling, geometrie en leeftijd van het heelal.

In een expanderend heelal moeten we de akoestische golfvergelijking (370) op twee manieren aanpassen. Allereerst dienen we in rekening te brengen dat alle afstanden continu toenemen volgens  $\mathbf{x}(t) = a(t)\mathbf{x}_0$ . Hierdoor geldt

$$\rho_0(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho_0}{a^3(t)} \quad \text{en} \quad \mathbf{v}_0(t, \mathbf{x}) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \mathbf{x}. \quad (372)$$

Ten tweede dienen we rekening te houden met het feit dat de golven massaverdichtingen veroorzaken, die op hun beurt weer gravitationeel koppelen met de golven. Voor het laatste effect kunnen we de poissonvergelijking gebruiken. Er geldt

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \rightarrow \nabla^2(\delta\phi) = 4\pi G \rho_0 \delta(t, \mathbf{x}), \quad (373)$$

met gravitatiepotentiaal  $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ . Als we bovenstaande vergelijking oplossen voor constante dichtheid  $\rho_0$ , vinden we

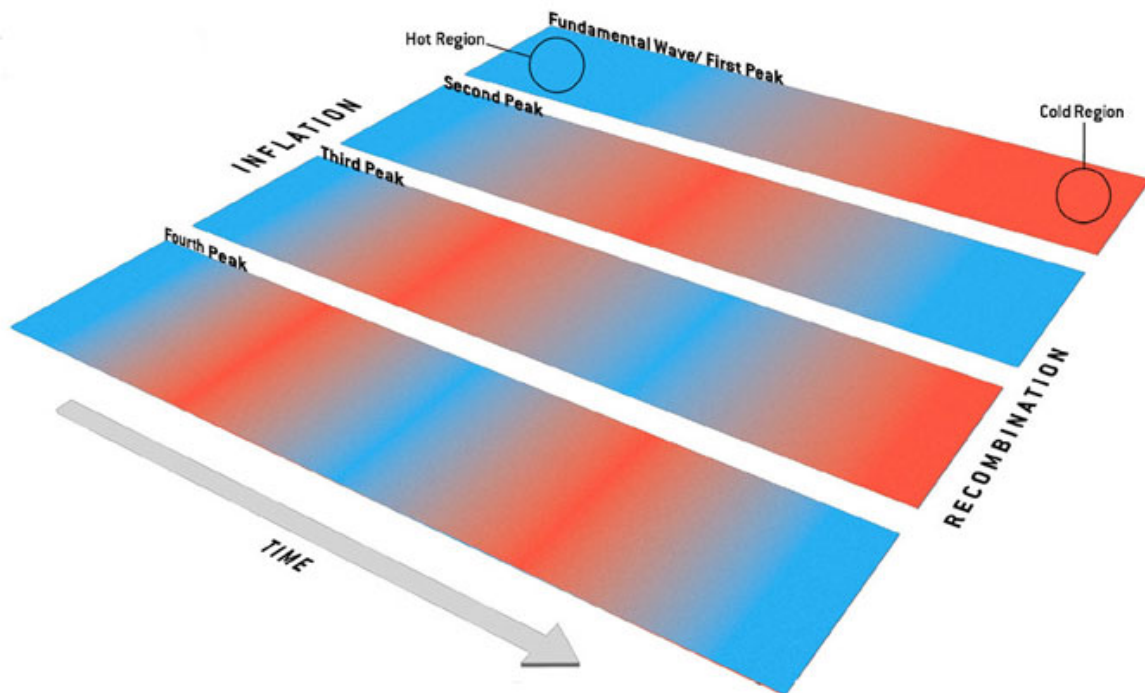
$$\phi_0(t, \mathbf{x}) = \frac{2\pi G \rho_0 r^2}{3}. \quad (374)$$

Na wat algebra kunnen we de akoestische golfvergelijking (in de  $\mathbf{k}$  ruimte) in een expanderend heelal schrijven als

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{k^2 v_s^2}{a^2(t)} - 4\pi G \rho_0 \right) \right] \delta(t, \mathbf{k}) = 0. \quad (375)$$

De snelle verstrooiing van fotonen en baryonen in het plasma zorgt ervoor dat het plasma in het vroege heelal zich gedraagt als een perfecte vloeistof. Initiële quantumfluctuaties veroorzaken verdichtingen die op hun beurt gravitationele potentiaalputten vormen en uiteindelijk leiden tot de structuur van het huidige heelal. Als de vloeistof in de put valt, dan ondervindt het een tegendruk ten gevolge van de intense straling. Hierdoor ontstaan er akoestische oscillaties door periodieke compressie en verdunning van de vloeistof. De compressies leiden tot verdichtingen en verwarming van het plasma, terwijl de verdunningen leiden tot afkoeling van het plasma. Tijdens inflatie groeien deze oscillaties tot macroscopische dimensies en worden ze *ingevroren*. We kunnen ze nu waarnemen als karakteristieke eigenschappen van de microgolf achtergrondstraling.

De kosmische achtergrondstraling toont dat de initiële inhomogeniteiten in het vroege heelal klein waren. Een gebied met extra dichtheid kan groeien door gravitationeel meer massa aan te trekken, maar dat kan enkel als het hele gebied in causaal contact staat. Dit betekent dat enkel gebieden die kleiner zijn dan de horizon ten tijde van ontkoppeling, de tijd hadden om te comprimeren. Gebieden die voldoende klein zijn ten opzichte van de horizon hebben voldoende tijd gehad om gravitationeel te comprimeren totdat de naar buiten gerichte druk de compressie stopte door Thomson verstrooiing. Als het gebied klein genoeg is, dan kan het zelfs een aantal van dergelijke akoestische oscillaties hebben ondergaan. De fundamentele golf komt overeen met één compressie, maar bij de eerste boventoon hebben we te maken met één compressie en één verdunning. Zo kunnen we ook hogere boventonen hebben.



**Figuur 31:** Akoestische golven oscilleerden in het plasma van het vroege heelal. Na inflatie werd de fundamentele golf in bepaalde gebieden van het plasma gecomprimeerd en in andere gebieden verdund. Hierdoor bereikte de temperatuur van de straling maximum en minimum waarden ten tijde van recombinitie. De boventonen oscilleerden  $n$  keer (met  $n = 2, 3, \dots$ ) sneller, waardoor ook kleinere gebieden temperatuurfluctuaties vertoonden tijdens recombinitie. (Credit: Wayne Hu)

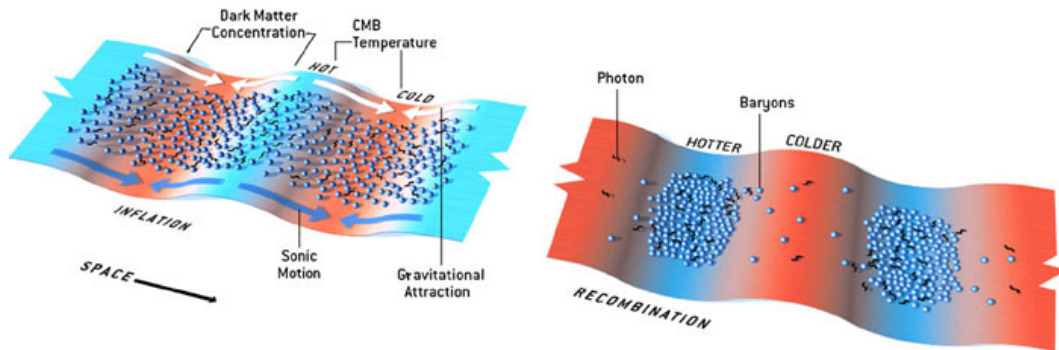
De meest uitgesproken temperatuursvariatie in de achtergrondstraling zal worden veroorzaakt door de fundamentele geluidsgolf. Dit is omdat delen van de hemel die gescheiden zijn door een

schaalgrootte die gelijk is aan de horizon ten tijde van ont koppeling (en dat correspondeert met de fundamentele geluidsgolf) geheel uit fase zullen zijn. We geven dit op schematische wijze weer in Fig. 31.

Om dit beter te begrijpen, beschouwen we een staande golf  $A_k(x, t) \propto \sin(kr) \cos(\omega t)$  met geluidssnelheid  $v_s$  (in het plasma is dat  $v_s \approx c/\sqrt{3}$ ), met hoekfrequentie  $\omega$  en golfgetal  $k$ . Er geldt  $\omega = kv_s$ . De verplaatsing, en dus de correlatie in temperatuur, zal maximaal zijn tijdens ont koppeling voor een tijd  $t_{\text{ontk}}$  waarvoor geldt  $\omega t_{\text{ontk}} = kv_s t_{\text{ontk}} = n\pi$  met  $n = 1, 2, 3, \dots$ . De opeenvolgende pieken in het angular power spectrum vertegenwoordigen de variaties in temperatuur veroorzaakt door de boventonen. Deze serie pieken geeft een sterke onderbouwing dat inflatie inderdaad al deze pieken geëxciteerd heeft. Immers, als de excitaties continu in de tijd gegenereerd waren, dan zou het spectrum niet zo harmonisch geördend zijn.

Zowel gewone materie als donkere materie maakt deel uit van het primeordiale plasma en versterkt de gravitationele aantrekking van een lokale verdichting. Het is echter alleen de gewone materie die akoestische compressies en verdunningen ondergaat, want de donkere materie wisselwerkt niet met fotonen en is reeds veel eerder van het plasma ont koppeld. Tijdens recombinitie is de fundamentele golf ingevroren in het plasma in een fase waarin gravitatie de compressie van de gebieden met hogere dichtheid versterkt. We geven dit weer in Fig. 32, waar we de gravitationele putten voorstellen met een diagram voor de potentiële energie.

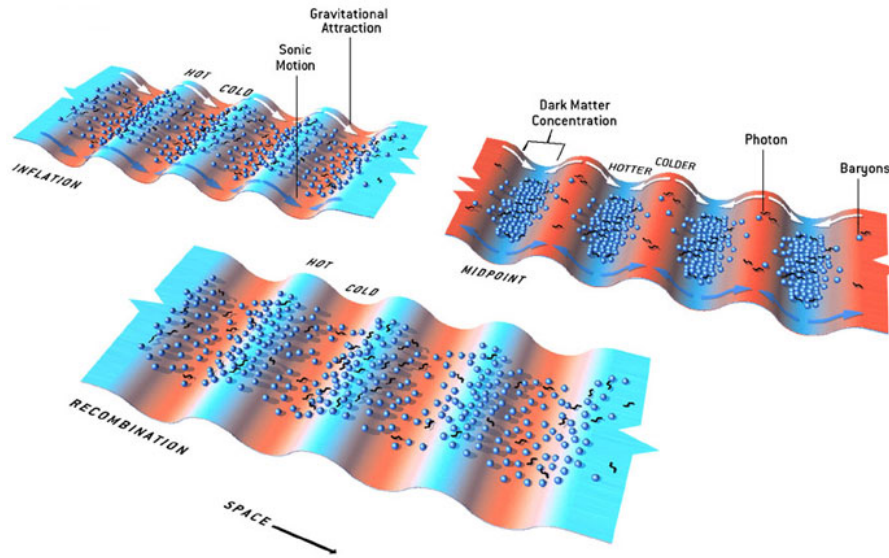
De eerste boventoon, die correspondeert met een schaal die de helft van de fundamentele golflengte is, wordt gevangen in tegenfase. Gravitatie van met name donkere materie probeert het plasma te comprimeren, terwijl de plasmadruk het probeert te expanderen. We geven dat weer in Fig. 33.



**Figuur 32:** De gravitatie van donkere materie moduleert de akoestische signalen in de achtergrondstraling. Na inflatie zullen gebieden met een hogere dichtheid van donkere materie, baryonen en fotonen gravitationeel aantrekken. De hoogste dichtheden worden bereikt als dit effect dezelfde schaal heeft als de fundamentele golf. Tijdens recombinitie, 380.000 jaar later, hebben gravitatie en geluidsgolven samengewerkt om de stralingstemperatuur in de putten te verhogen en in de pieken te verlagen. (Credit: Wayne Hu)

Gebieden met donkere materie corresponderen met een tweede piek zorgen voor een toename in temperatuur van de straling in de putten lange tijd voordat recombinitie optreedt. Hierna zal de gasdruk de baryonen en fotonen uit de putten drukken (aangegeven met blauwe pijlen), terwijl gravitatie ze terug trekt (witte pijlen). Door deze tegenwerking worden de verschillen in temperatuur kleiner. Dit verklaart waarom de tweede piek in het spectrum lager is dan de eerste.

We zien dus dat de verhouding van de fundamentele piek en de eerste boventoon informatie verschaft over de relatieve sterkte van gravitatie en stralingsdruk in het vroege heelal. Het



**Figuur 33:** Op kleinere lengteschaal zullen gravitatie en akoestische druk elkaar soms tegenwerken, waardoor de temperatuurverschillen verminderen. (Credit: Wayne Hu)

verschafft informatie over de hoeveelheid donkere materie.

De inflatietheorie voorspelt dat de geluidsgolven nagenoeg dezelfde amplitude hebben op alle lengteschalen. Het spectrum toont echter een sterke afname van de grootte van de temperatuurverschillen na de derde piek. Dit komt doordat geluidsgolven met dergelijk korte golflengten gedissipeerd worden. Geluid plant zich namelijk voort door oscillaties van deeltjes in een gas of plasma. Een golf kan zich niet voortplanten als haar golflengte kleiner is dan de typische afstanden die deeltjes afleggen tussen botsingen.

### 5.5.5 Kromming van het heelal

We kunnen de tijd  $t_{\text{recomb}}$  van de recombinitie epoch berekenen om dat fusica van het homogene en isotrope vroege heelal zo eenvoudig is. Gedurende deze tijd worden de kleine inhomogeniteiten in de dichtheid van donkere materie verstrekt door gravitatie. Baryonen vallen in deze gravitatieputten en de kosmische microgolf-achtergrondstraling koppelt hieraan door Thomson verstrooiing aan de vrije elektronen vóór  $t_{\text{recomb}}$ . Stralingsdruk biedt weerstand aan deze inval, waardoor akoestische oscillaties ontstaan, analoog aan geluidstrillingen in licht, maar met een geluidssnelheid  $v_s = c/\sqrt{3}$ . De sterkste oscillaties in de kosmische microgolf-achtergrondstraling hebben golflengte

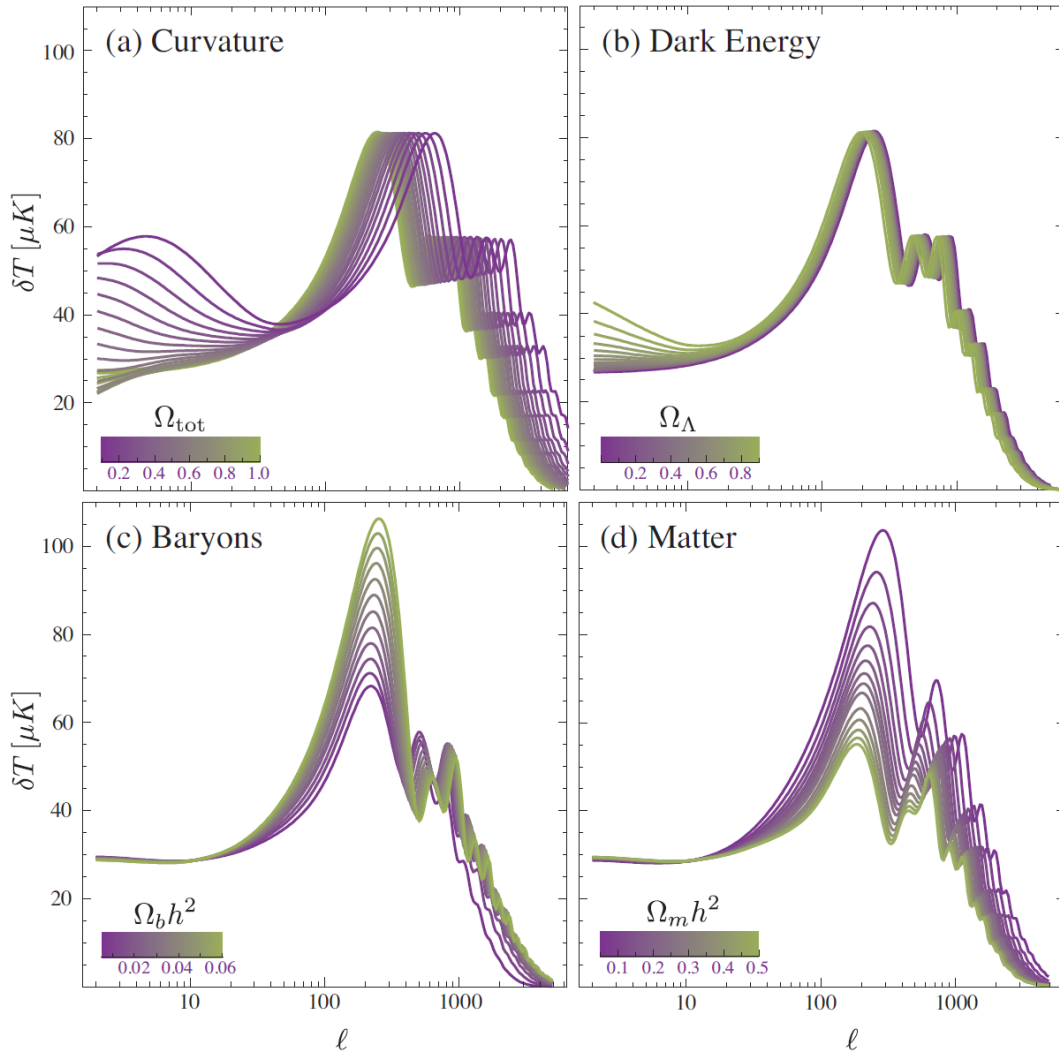
$$\lambda_{\text{recomb}} \approx 2v_s t_{\text{recomb}} \approx \frac{2v_s t_{\text{recomb}}}{\sqrt{3}} \approx \frac{2 \times 380.000}{\sqrt{3}} \text{ lichtjaar} \approx 438.000 \text{ lichtjaar}. \quad (376)$$

Dit is ongeveer 134 kpc. Na recombinitie ontkoppelen de fotonen en is deze "standaardmaat" met een factor  $1 + z_{\text{recomb}} \approx 1092$  gegroeid tot de huidige grootte van 146 Mpc.

Het angular power spectrum van de kosmische achtergrondstraling waargenomen met Planck toont een karakteristieke hoekgrootte van  $\theta_{\text{recomb}} = 0.010388 \pm 0.000027$  rad. De hoekafstand tot het oppervlak van laatste verstrooiing is  $D_A = \lambda_{\text{recomb}}/\theta_{\text{recomb}} \approx 14.1 \pm 0.16$  Gpc. De grootste extra-galactische afstand wordt dus nauwkeurig gemeten. Als we in een vlak  $\Lambda$ CDM heelal leven, dan is de huidige leeftijd 13.78 Gjaar.

### 5.5.6 Kosmologisch parameterschatting met kosmische microgolf-achtergrondstraling

De fenomenologie van de akoestische pieken in de temperatuur (en polarisatie) wordt in essentie beschreven door vier observabelen en de beginvoorwaarden. Deze vier fundamentele kosmologische parameters zijn de kromming van het heelal, de bijdrage aan donkere energie, de baryonische materiedichtheid, en de totale materiedichtheid. We geven een indruk van de gevoeligheid van het temperatuurspectrum voor deze parameters in Fig. 34.



**Figuur 34:** Gevoeligheid van het temperatuurspectrum van de kosmische microgolf-achtergrondstraling voor de vier fundamentele kosmologische parameters: (a) kromming van het heelal; (b) donkere energie gekwantificeerd als een kosmologische constante  $\Omega_\Lambda$ ; (c) baryonische materiedichtheid; (d) de materiedichtheid. (Credit: Wayne Hu)

Door het fitten van het  $\Lambda$ CDM model aan de fluctuaties van de microgolf-achtergrondstraling wordt nauwkeurige kosmologische informatie verkregen.

### 5.5.7 Polarizatie van de kosmische microgolf-achtergrondstraling

De kosmische achtergrondstraling is gepolariseerd en het meten van deze polarisatie heeft de hoogste wetenschappelijke prioriteit. De polarisatie wordt veroorzaakt door botsingen en als we de polarisatie waarnemen, dan kijken we direct naar het oppervlak van laatste verstrooiing van

de fotonen. Het is daarom onze meest directe probe van het heelal ten tijde van reëcombinatie en ook tijdens de latere reïonisatie van het heelal door de eerste sterren. Vooral deze laatste era kan enkel via de polarisatie van de kosmische microgolf-achtergrondstraling onderzocht worden.

De polarisatie is een tensorveld en draagt meer informatie dan het temperatuurveld. Metingen van polarisatie hebben daarom de potentie om met grote precisie de fysische parameters die samenhangen met de akoestische oscillaties te bepalen. Via de richtingsinformatie van de polarisatie hebben we ook een kans om informatie te verzamelen over de gravitatiegolven die voorspeld worden in de inflatiemodellen. Op die manier geeft polarisatie ons een direct venster op het heel vroege heelal en de oorsprong van alle structuur in het heelal.

### 5.5.8 Sunyaev-Zel'dovich effect

Het Sunyaev-Zel'dovich effect refereert aan comptonverstrooiing van de fotonen van de kosmische microgolf-achtergrondstraling aan heet, geïoniseerd gas in clusters van sterrenstelsels. Hierdoor ontstaat er een anisotropie in de kosmische achtergrondstraling, een zogenaamde "hotspot", waardoor het spectrum vertekend raakt. Observaties met de WMAP satelliet laten zien dat ongeveer 17% van de fotonen van de achtergrondstraling verstrooiing hebben ondergaan met een dunne mistlaag bestaande uit geïoniseerd gas na een paar honderd miljoen jaar na de Big Bang. Dit is een relatief grote fractie en het lijkt dat de eerste sterren eerder gevormd zijn dan men tot nu toe verwacht had.

### 5.5.9 Sachs-Wolfe effect en geïntegreerd Sachs-Wolfe effect

Op het moment van laatste botsingen, ontkoppelen baryonen en fotonen. De fotonen zijn plotseling vrij om in rechte paden door het heelal te reizen. De baryonen zijn echter geclusterd in gravitationele potentiaalputten. Vóór ontkoppeling waren de fotonen sterk aan de baryonen gekoppeld en dat betekent dat zij zich ook in dergelijke potentiaalputten bevinden. De fotonen moeten dus uit deze putten klimmen na hun laatste botsing en dat proces kost energie. De fotonen worden hierdoor roodverschoven. De bijbehorende toename bij lage  $l$  in het angular power spectrum staat bekend als het Sachs-Wolfe effect. Dit effect is de dominante bron van fluctuaties in de achtergrondstraling voor een hoekschaal groter dan 10 graden. Deze gebieden waren in het vroege heelal te groot om akoestische oscillaties te ondergaan.

Het geïntegreerde Sachs-Wolfe effect (ISW) wordt ook door gravitationele roodverschuiving veroorzaakt, maar het vindt plaats tussen het oppervlak van laatste verstrooiing en de aarde. Het is dus geen fundamenteel onderdeel van de kosmische achtergrondstraling. Onderweg kunnen fotonen in een gravitationele potentiaalput vallen, waardoor ze blauwverschoven raken. Later klimmen ze weer uit de put en ondergaan ze roodverschuiving. Als dit proces symmetrisch zou zijn, dan zou de energie van het foton voor en na het passeren van de put gelijk zijn. Dit is echter niet altijd het geval, omdat putten een tijdevolutie ondergaan als het heelal van stralingsdominantie naar door materie gedomineerd gaat. Een tweede effect komt door de "recente" invloed van donkere energie op de evolutie van het heelal.

## 5.6 Uitgewerkte opgaven

### 5.6.1 Energiedichtheid van het heelal in de vorm van black-body straling

De energiedichtheid van het heelal heeft drie componenten: straling, materie en donkere energie. Een deel van de stralingsbijdrage is de energiedichtheid van de black-body straling in de vorm van primeordiale fotonen van de Big Bang.

*Opgave a):* Maak een schatting van de fractie van de totale energiedichtheid van het heelal,  $\Omega_\gamma$ , in de vorm van fotonen van de kosmische achtergrondstraling.

*Antwoord:* We dienen hiertoe vergelijking (127) te integreren. De *totale* energie in de vorm van black-body straling  $\rho_\gamma$  voor *alle* frequenties wordt gegeven door de integraal over alle frequenties,

$$\rho_\gamma = \int_0^\infty u(\omega; T) d\omega. \quad (377)$$

We kunnen de berekening vereenvoudigen door een dimensieloze parameter  $\xi$  in te voeren, waarvoor geldt

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{k_B T}. \quad (378)$$

We kunnen vergelijking (127) dan herschrijven als

$$\rho_\gamma = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left( \frac{k_B T}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi, \quad (379)$$

waarbij de integraal een numerieke constante

$$\int_0^\infty \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi = \frac{\pi^4}{15} \quad (380)$$

oplevert. We vinden aldus de bekende relatie van Stefan Boltzmann

$$\rho_\gamma = \sigma T^4, \quad \text{met } \sigma = 4.72 \times 10^{-3} \text{ eV/cm}^3/\text{K}^4. \quad (381)$$

Voor het FLRW model kunnen we de kritische energiedichtheid uitrekenen. Hierbij is het heelal op de grens van open naar gesloten. Er geldt

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{ g/cm}^3 = 1.1 \times 10^4 \text{ eV/cm}^3, \quad (382)$$

met  $H_0$  de Hubble constante en de dimensieloze parameter  $h \equiv H_0 / (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1})$ . De fractie van de totale energie in het heelal in de vorm van kosmische microgolf-achtergrondstraling is dus

$$\Omega_\gamma h^2 \approx 4 \times 10^{-5}. \quad (383)$$

We concluderen dat de energiedichtheid op dit moment dus gedomineerd wordt door materie. De bijdrage van de achtergrondstraling is verwaarloosbaar.

## 5.7 Opgaven

### 5.7.1 Temperatuurcorrelaties in de kosmische achtergrondstraling

Geef een afleiding van vergelijking (352). Gebruik hierbij de identiteit

$$\sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{n}}') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}'). \quad (384)$$



## A APPENDIX - FUNDAMENTELE CONSTANTEN

Grootheid	Symbol	Waarde
Lichtsnelheid	$c$	$2.998 \times 10^8$ m/s
Constante van Planck	$h$	$6.626 \times 10^{-34}$ Js
Gravitatieconstante	$G$	$6.67 \times 10^{-11}$ N m <sup>2</sup> kg <sup>-2</sup>
Lading van het elektron	$e$	$1.602 \times 10^{-19}$ C
Massa van het elektron	$m_e$	$9.109 \times 10^{-31}$ kg
Massa van het proton	$m_p$	$1.672 \times 10^{-27}$ kg
Constante van Avogadro	$N_A$	$6.022 \times 10^{23}$ 1/mol
Stefan-Boltzmann constante	$\sigma$	$5.670373(21) \times 10^{-8}$ W m <sup>-2</sup> K <sup>-4</sup>
Universele gasconstante	$R$	$8.314$ J mol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>
Constante van Boltzmann	$k_B$	$1.381 \times 10^{-23}$ J/K

## B APPENDIX - COÖRDINATENSISTEMEN

### B.1 Cartesiaanse coördinaten

$d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	lijn-element
$d\tau = dx dy dz$	volume-element
$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$	gradiënt
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	divergentie
$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$	rotatie
$\Delta t = \nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$	Laplace operator

### B.2 Sferische coördinaten

$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$	lijn-element
$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$	volume-element
$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$	gradiënt
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$	divergentie
$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$	rotatie
$\Delta t = \nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$	Laplace operator

### B.3 Cilindrische coördinaten

$d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$	lijn-element
$d\tau = s ds d\phi dz$	volume-element
$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$	gradiënt
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s v_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$	divergentie
$\nabla \times \mathbf{v} = \left[ \frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{s}} + \left[ \frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$	rotatie
$\Delta t = \nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left( s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$	Laplace operator

## FUNDAMENTELE THEOREMAS

$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$	Gradiënt theorema
$\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$	Divergentie theorema (stelling van Gauss)
$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$	Rotatie theorema (stelling van Stokes)

## C APPENDIX: NUTTIGE WISKUNDIGE UITDRUKKINGEN

### C.1 Vaak gebruikte formules uit de statistiek

#### C.1.1 Fermi-Dirac statistiek

Er geldt

$$I_{\text{FD}}(n) = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Gamma(n+1) \zeta(n+1), \quad \text{voor } n > -1, \quad (385)$$

met  $\Gamma(z)$  en  $\zeta(z)$  twee speciale functies die we respectievelijk de Gamma functie en Riemanns zeta functie noemen. In het bijzonder geldt

$$I_{\text{FD}}(1) = \frac{\pi^2}{12}, \quad I_{\text{FD}}(2) = \frac{3\zeta(3)}{2} \approx 1.80309, \quad I_{\text{FD}}(3) = \frac{7\pi^4}{120}, \quad I_{\text{FD}}(4) = \frac{45\zeta(5)}{2} \approx 23.3309. \quad (386)$$

#### C.1.2 Bose-Einstein statistiek

Er geldt

$$I_{\text{BE}}(n) = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n+1) \zeta(n+1), \quad \text{voor } n > -1. \quad (387)$$

Merk op dat

$$I_{\text{FD}}(n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) I_{\text{BE}}(n). \quad (388)$$

In het bijzonder geldt

$$I_{\text{BE}}(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad I_{\text{BE}}(2) = 2\zeta(3) \approx 2.40411, \quad I_{\text{BE}}(3) = \frac{\pi^4}{15}, \quad I_{\text{BE}}(4) = 24\zeta(5) \approx 24.8863. \quad (389)$$

#### C.1.3 Boltzmann statistiek

Er geldt

$$I_{\text{B}}(n) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^n dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right). \quad (390)$$

In het bijzonder geldt

$$I_{\text{B}}(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad I_{\text{B}}(1) = \frac{1}{2}, \quad I_{\text{B}}(2) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad I_{\text{B}}(3) = \frac{1}{2}, \quad I_{\text{B}}(4) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}, \quad I_{\text{B}}(5) = 1. \quad (391)$$

## D APPENDIX: DE ALGEMENE RELATIVITEITSTHEORIE - EEN SAMENVATTING

### D.1 Pseudo-riemannse variëteit

Ruimtetijd is een variëteit die continu en differentieerbaar is. Dat betekent dat we scalaire, vector, 1-vorm en in het algemeen tensorvelden kunnen definiëren, waarvan dan op elk punt de afgeleiden bepaald kunnen worden. Een differentieerbare variëteit is een primitieve amorfe verzameling van punten (puntgebeurtenissen voor het geval van ruimtetijd). Lokaal zijn de punten gerangschikt als punten in een euclidische ruimte. Vervolgens specificeren we een afstandsconcept door een metriek  $\mathbf{g}$  toe te voegen, die de informatie bevat over hoe snel klokken lopen en wat de afstanden zijn tussen punten.

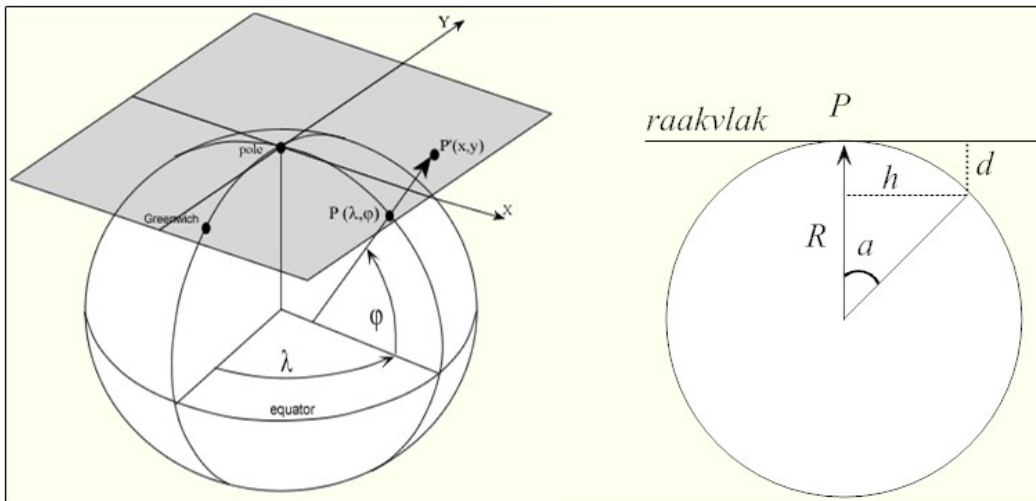
Op het aardoppervlak zouden we een metriek bepalen door kleine vectoren  $\overrightarrow{\Delta\mathcal{P}}$  op het aardoppervlak te tekenen. Vervolgens zeggen we dat de lengte van de vector gegeven wordt door het inproduct

$$\overrightarrow{\Delta\mathcal{P}} \cdot \overrightarrow{\Delta\mathcal{P}} \equiv \overrightarrow{\Delta\mathcal{P}}^2 = (\text{lengte van } \overrightarrow{\Delta\mathcal{P}})^2, \quad (392)$$

en gebruiken we een meetlat om dit te bepalen. We hebben nu een definitie van het inproduct van een vector voor een kleine vector met zichzelf. We gebruiken lineariteit om naar macroscopische vectoren te gaan. Vervolgens kunnen we een definitie krijgen voor het inproduct van twee *verschillende* vectoren door gebruik te maken van

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{1}{4} [(\vec{A} + \vec{B})^2 - (\vec{A} - \vec{B})^2]. \quad (393)$$

Kortom, als je een afstandsconcept hebt (een meetlat op het oppervlak van de aarde), dan kun je een inproduct vinden, en hieruit volgt de metriek (want dat is niets anders dan  $\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) \equiv (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \mathbf{g}(\vec{B}, \vec{A})$ ). De metrische tensor is symmetrisch.). Een differentieerbare variëteit met als extra structuur een metriek, noemen we een riemannse variëteit.



**Figuur 35:** Links: op punt  $\mathcal{P}$  van het oppervlak van de aarde bevindt zich een raakruimte (in dit geval een raakvlak); rechts: het raakvlak is een goede afbeelding in de nabijheid van punt  $\mathcal{P}$ .

We willen nu een metriek toekennen aan ruimtetijd. Hiertoe introduceren we een lokaal lorentzframe (LLF). Dat doen we door op punt  $\mathcal{P}$  in vrije val te gaan. Het equivalentieprincipe zegt dan

dat alle effecten van gravitatie verdwijnen en dat we lokaal de metriek van de speciale relativiteitstheorie vinden. Dat is de minkowskimetriek. We kunnen op elk punt  $\mathcal{P}$  van de variëteit een coördinatenstelsel kiezen, waarin de minkowskimetriek geldt. Terwijl dit in de SRT ook een *globaal* coördinatenstelsel kan zijn, is dat alleen *lokaal* mogelijk in de algemene relativiteitstheorie. Hiermee hebben we op elk punt  $\mathcal{P}$  een definitie van lengte gevonden: met  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . In essentie bedrijven we nu SRT op punt  $\mathcal{P}$  en hebben we een maat om lengten van staven en eigentijden van ideale klokken te bepalen. In een LLF wordt de metriek gegeven door  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ . Voor een riemannse variëteit dienen alle diagonale elementen positief te zijn. De signatuur (de som van de elementen op de diagonaal) van de metriek van ruimtetijd is +2, en we spreken van een pseudo-riemannse variëteit.

Stel we brengen een coördinatenstelsel op het aardoppervlak aan met longitude en latitude. Als we naar het oppervlak van de aarde kijken, dan zien we dat hoe dichter we in de buurt van een punt  $\mathcal{P}$  blijven, hoe cartesischer dit referentiesysteem er lokaal uit ziet. Afwijkingen van cartesische coördinaten treden op in tweede orde in de afstand  $x$  tot het punt  $\mathcal{P}$ . Wiskundig betekent dit dat geldt

$$g_{jk} = \delta_{jk} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{x}|^2}{R^2}\right), \quad (394)$$

met  $R$  de straal van de aarde. Een eenvoudige manier om dit te zien is door het raakvlak op punt  $\mathcal{P}$  te construeren. Fig. 35 toont dat als  $\vec{x}$  de positievector is van een punt ten opzichte van  $\mathcal{P}$ , dan komt dat overeen met  $\cos|\vec{x}|$  op het raakvlak. Een reeksontwikkeling levert  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$ . Dit heeft tot consequentie dat als men alleen naar eerste-orde afgeleiden kijkt, men geen enkele invloed van de kromming van de aarde ziet. Alleen als we tweede-orde afgeleiden nemen, beginnen we de kromming waar te nemen.

Hetzelfde geldt voor ruimtetijd. In een gekromde ruimtetijd kunnen we geen globaal lorentzframe vinden waarvoor  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ . Het is echter wel mogelijk om coördinaten te kiezen, zodat in de nabijheid van  $\mathcal{P}$  deze gelijkheid bijna geldig is. Dat wordt mogelijk gemaakt door het equivalentieprincipe. Dit is de precieze definitie van een lokaal lorentzframe en voor een dergelijk coördinatenstelsel geldt

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) &= \eta_{\alpha\beta} \quad \text{voor alle } \alpha, \beta; \\ \frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) &= 0 \quad \text{voor alle } \alpha, \beta, \gamma; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) &\neq 0. \end{aligned} \quad (395)$$

Het bestaan van lokale lorentzframes drukt uit dat elke gekromde ruimtetijd op elk punt een vlakke raakruimte heeft. Alle tensormanipulaties die we uitvoeren spelen zich in deze raakruimte af. Bovenstaande uitdrukkingen vormen de wiskundige formulering van het feit dat het equivalentieprincipe ons toestaat om op punt  $\mathcal{P}$  een LLF te kiezen.

De metriek maakt het mogelijk om de lengte van een kromme te definiëren. Als  $d\vec{x}$  een kleine vectorverplaatsing op een curve is, dan is de gekwadrateerde lengte gelijk aan  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  (we noemen dit het lijnelement). Een maat voor de lengte wordt gevonden door hiervan de absolute waarde te nemen en dan de wortel te trekken. Dat geeft  $dl \equiv |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{\frac{1}{2}}$ . Integratie geeft dan de totale lengte en we vinden

$$l = \int_{\text{langs de curve}} |g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|^{\frac{1}{2}} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right|^{\frac{1}{2}} d\lambda, \quad (396)$$

waarbij  $\lambda$  de parameter van de curve is. De curve heeft als eindpunten  $\lambda_0$  en  $\lambda_1$ . De raakvector  $\vec{V}$  van de curve heeft componenten  $V^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$  en hiermee vinden we

$$l = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} |\vec{V} \cdot \vec{V}|^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (397)$$

voor de lengte van een willekeurige curve.

Ook het berekenen van volumes is belangrijk als we integraties uitvoeren in ruimtetijd. Met volume bedoelen we hier een vier-dimensionaal volume. Stel we bevinden ons in een LLF en hebben er een volume element  $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ , met coördinaten  $\{x^\alpha\}$  in de lokale lorentzmetriek  $\eta_{\alpha\beta}$ . Transformatietheorie zegt dan dat

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}, \quad (398)$$

waarbij de factor  $\partial(\ )/\partial(\ )$  de jacobiaan van de transformatie van  $\{x^{\alpha'}\}$  naar  $\{x^\alpha\}$  is. Er geldt

$$\frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{1'}} & \dots \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \det(\Lambda^\alpha_{\beta'}). \quad (399)$$

De berekening van deze determinant is nogal omslachtig en het kan eenvoudiger door te beseffen dat in termen van matrices de transformatie van de componenten van de metriek gegeven wordt door de vergelijking  $(g) = (\Lambda)(\eta)(\Lambda)^T$ , waarbij met 'T' transponeren bedoeld wordt. Dan voldoen de determinanten aan  $\det(g) = \det(\Lambda)\det(\eta)\det(\Lambda^T)$ . Voor elke matrix geldt  $\det(\Lambda) = \det(\Lambda^T)$  en verder hebben we  $\det(\eta) = -1$ . Hiermee vinden we dan  $\det(g) = -[\det(\Lambda)]^2$ . We gebruiken de notatie

$$g \equiv \det(g_{\alpha'\beta'}) \quad \rightarrow \quad \det(\Lambda^\alpha_{\beta'}) = (-g)^{\frac{1}{2}} \quad (400)$$

en vinden

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \det[-(g_{\alpha'\beta'})]^{\frac{1}{2}} dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'} = (-g)^{\frac{1}{2}} dx^{0'} dx^{1'} dx^{2'} dx^{3'}. \quad (401)$$

Het is belangrijk om goed de redenatie te begrijpen die we gevolgd hebben om tot bovenstaand resultaat te komen. We zijn gestart in een speciaal coördinatenstelsel, het LLF, en hierin geldt de minkowskimetriek. Vervolgens hebben we het resultaat ggeneraliseerd naar algemene coördinatenstelsels.

## D.2 Tensoren en covariante afgeleide

Stel we hebben een tensorveld  $\mathbf{T}(\_, \_, \_)$  met rang 3. Dit veld is een functie van lokatie en definieert een tensor op elk punt  $\mathcal{P}$ . We kunnen deze tensor expanderen in de basis  $\{\vec{e}_\alpha\}$  en dat geeft de (boven-) componenten  $T^{\alpha\beta\gamma}$ . In het algemeen hebben we 64 termen voor ruimtetijd. We kunnen de tensor  $\mathbf{T}$  echter ook expanderen in de duale basis  $\{\vec{e}^\alpha\}$  en er geldt

$$\mathbf{T}(\_, \_, \_) \equiv T^{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes \vec{e}_\gamma = T_{\alpha\beta}{}^\gamma \vec{e}^\alpha \otimes \vec{e}^\beta \otimes \vec{e}_\gamma. \quad (402)$$

Als we de waarden van de componenten willen berekenen dan wordt het volgende theorema gebruikt,

$$T^{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{T}(\vec{e}^\alpha, \vec{e}^\beta, \vec{e}^\gamma) \quad \text{en} \quad T_{\mu\nu}{}^\gamma = \mathbf{T}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu, \vec{e}^\gamma). \quad (403)$$

Als we de componenten van de tensor  $\mathbf{T}$  in een of andere rangschikking van boven- en benedenindices hebben, en we willen de componenten weten in een andere rangschikking van indices, dan wordt de metriek gebruikt. Er geldt

$$T_{\mu\nu}{}^\gamma = T^{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \quad \text{en bijvoorbeeld ook} \quad T^{\alpha\beta\gamma} = g^{\alpha\rho} T_\rho{}^{\beta\gamma} \quad (404)$$

Vervolgens willen we contractie bespreken. Dat is nogal ingewikkeld om te behandelen in onze abstracte notatie. Gegeven een tensor  $\mathbf{R}$ , kunnen we deze altijd schrijven in termen van een basis van vectoren als

$$\mathbf{R}(\_, \_, \_, \_) = \vec{A} \otimes \vec{B} \otimes \vec{C} \otimes \vec{D} + \dots \quad (405)$$

We bespreken contractie alleen voor een tensorproduct van vectoren en gebruiken lineariteit om een wiskundige beschrijving voor algemene tensoren te vinden. Voor contractie  $\mathbb{C}_{13}$  van de eerste met de derde index geldt

$$\mathbb{C}_{13} [\vec{A} \otimes \vec{B} \otimes \vec{C} \otimes \vec{D}(\_, \_, \_, \_)] \equiv (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} \otimes \vec{D}(\_, \_). \quad (406)$$

We kunnen bovenstaande abstracte definitie in termen van componenten schrijven en vinden

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = A^\mu C^\nu \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu = A^\mu C^\nu g_{\mu\nu} = A^\mu C_\mu \rightarrow \mathbb{C}_{13} \mathbf{R} = R^{\mu\beta}{}_\mu{}^\delta \vec{B} \times \vec{D}. \quad (407)$$

Op dezelfde manier als hierboven, zien we dat we uit twee vectoren  $\vec{A}$  en  $\vec{B}$  een tensor  $\vec{A} \times \vec{B}$  kunnen construeren door er het tensorproduct van te nemen, terwijl we een scalar  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  kunnen maken door het inproduct te nemen. De contractie van het tensorproduct  $\vec{A} \otimes \vec{B}$  levert weer een scalar op,  $\mathbb{C} [\vec{A} \otimes \vec{B}] = \vec{A} \cdot \vec{B}$ .

Vanaf nu gaan we een vergelijking als  $R^{\mu\beta}{}_\mu{}^\delta$  vanuit een ander gezichtspunt bekijken. We hebben het steeds gezien als de componenten van een tensor. Vanaf nu is onze interpretatie dat de indices  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  en  $\delta$  labels zijn van de sleuven van de abstracte tensor  $\mathbf{R}$ . Dus met  $R^{\alpha\beta\gamma\delta}$  bedoelen we de abstracte tensor  $\mathbf{R}(\_, \_, \_, \_)$  met eerste sleuf  $\alpha$ , tweede sleuf  $\beta$ , enz.

Het bovenstaande rondt onze discussie over tensoralgebra af. In het volgende gaan we tensoranalyse bespreken. Dit doen we aan de hand van een tensorveld  $\mathbf{T}(\_, \_)$  met rang 2, maar wat we concluderen is geldig voor elk tensorveld. Het veld  $\mathbf{T}$  is een functie van lokatie in de variëteit,  $\mathbf{T}(\mathcal{P})$ . We differentiëren  $\mathbf{T}$  nu langs de curve  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Op punt  $\mathcal{P}$  wordt de raakvector  $\vec{A}$  aan de curve gegeven door  $\vec{A} = \frac{d\mathcal{P}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}$ . De afgeleide van  $\mathbf{T}$  langs de curve (dus in de richting van vector  $\vec{A}$ ) wordt gegeven door

$$\nabla_{\vec{A}} \mathbf{T} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{[\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda + \Delta\lambda))] - \mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda))}{\Delta\lambda}. \quad (408)$$

Merk op dat de twee tensoren,  $\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda + \Delta\lambda))$  en  $\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda))$ , in twee verschillende raakruimten leven. Ze zijn bijna hetzelfde, omdat  $\Delta\lambda$  klein is, maar desalniettemin zijn het verschillende raakruimten. We hebben een manier nodig om de tensor  $\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda + \Delta\lambda))$  naar punt  $\mathcal{P}$  te transporteren, waar we de afgeleide willen bepalen, zodat we de tensoren kunnen aftrekken. Wat we nodig hebben wordt *parallel transporteren* van  $\mathbf{T}(\mathcal{P}(\lambda + \Delta\lambda))$  genoemd.

In een gekromde variëteit zien we de effecten van kromming niet als we eerste-orde afgeleiden nemen<sup>23</sup>. Het parallel transporteren betekent dan hetzelfde als wat het betekent in een vlakke

<sup>23</sup>We kunnen altijd een lokaal lorentzframe construeren, dat voldoende vlak is voor wat wij willen. In dat systeem zijn de basisvectoren constant en hun afgeleiden nul in punt  $\mathcal{P}$ . Dit is een *definitie* voor de covariante afgeleide. Deze definitie leidt er onmiddellijk toe dat de christoffelsymbolen gelijk zijn aan nul en dat in het LLF geldt  $V^\alpha{}_\beta = V^\alpha{}_\beta$  op punt  $\mathcal{P}$ . Dit is natuurlijk waar voor elke tensor en ook voor de metriek,  $g_{\alpha\beta;\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} = 0$  op punt  $\mathcal{P}$ . Omdat de vergelijking  $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$  een tensorvergelijking is, is hij geldig in *elke* basis. Gegeven dat  $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$ , vinden we weer dat voor elke metriek dient te gelden

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}). \quad (409)$$

Dus terwijl  $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$  op  $\mathcal{P}$  in het LLF, geldt dat niet voor de afgeleiden ervan, want die bevatten  $g_{\alpha\beta,\gamma\mu}$ . Dus de christoffelsymbolen zijn dan wel nul op punt  $\mathcal{P}$  als we een LLF kiezen, maar verschillen in het algemeen van nul in de omgeving van dit punt. Het verschil tussen een gekromde en een vlakke variëteit manifesteert zich dus in de afgeleiden van de christoffelsymbolen.

ruimte: de componenten veranderen niet door het transporteren. We hebben dus met vergelijking (408) een uitdrukking voor de afgeleide gevonden. De originele tensor  $\mathbf{T}(\_, \_)$  heeft twee sleuven, en dat is ook zo voor de afgeleide  $\nabla_{\vec{A}}\mathbf{T}(\_, \_)$ , want volgens vergelijking (408) is de afgeleide niets anders dan het verschil van twee tensoren  $\mathbf{T}$  op verschillende punten, en dan gedeeld door de afstand  $\Delta\lambda$ .

Als volgende stap kunnen we nu het concept gradiënt invoeren. We merken op dat de afgeleide  $\nabla_{\vec{A}}\mathbf{T}(\_, \_)$  lineair is in de vector  $\vec{A}$ . Dat betekent dat er een rang-3 tensor  $\nabla\mathbf{T}(\_, \_, \vec{A})$  bestaat, zodanig, dat geldt

$$\nabla_{\vec{A}}\mathbf{T}(\_, \_) \equiv \nabla\mathbf{T}(\_, \_, \vec{A}). \quad (410)$$

Dit is de definitie van de gradiënt van  $\mathbf{T}$ . Het laatste slot wordt per conventie gebruikt als het differentiatieslot. De gradiënt van  $\mathbf{T}$  is een lineaire functie van vectoren en heeft één sleuf meer dan  $\mathbf{T}$  zelf, en heeft verder de eigenschap dat als je  $\vec{A}$  in de laatste sleuf stopt, je de afgeleide van  $\mathbf{T}$  krijgt in de richting van  $\vec{A}$ . We definiëren de componenten van de gradiënt als

$$\nabla\mathbf{T} \equiv T^{\alpha\beta}_{;\mu} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta \otimes \vec{e}^\mu. \quad (411)$$

Het is een conventie om de differentiatie index beneden te plaatsen. Merk verder op dat je deze differentiatie index naar boven of beneden kunt halen net als elke andere index. Verder correspondeert alles dat na de puntkomma komt met een gradiënt. De componenten van de gradiënt zijn in dit geval  $T^{\alpha\beta}_{;\mu}$ .

Hoe berekenen we de componenten van een gradiënt? Het gereedschap hiervoor zijn de zogenaamde *connectie coëfficiënten*<sup>24</sup>. Die coëfficiënten worden zo genoemd, omdat bij het nemen van de afgeleide we het tensorveld in twee verschillende raakruimten moeten vergelijken. De connectie coëfficiënten geven ons informatie over hoe de basisvectoren veranderen tussen beide naburige raakruimten. Omdat we een basis hebben in punt  $\mathcal{P}$ , kunnen we ons afvragen wat de afgeleide is van  $\vec{e}_\alpha$  in de richting van  $\vec{e}_\mu$ . Er geldt

$$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\alpha \equiv \Gamma^\rho_{\alpha\mu}\vec{e}_\rho. \quad (412)$$

Deze afgeleide is zelf ook een vector en we kunnen deze dus expanderen in onze basis op punt  $\mathcal{P}$  waar we de afgeleide willen weten. De expansiecoëfficiënten zijn  $\Gamma^\rho_{\alpha\mu}\vec{e}_\rho$ . Evenzo geldt

$$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}^\rho = -\Gamma^\rho_{\sigma\mu}\vec{e}^\sigma. \quad (413)$$

Merk op dat we nu een minteken krijgen! De connectie coëfficiënten vertellen je hoe de basisvectoren van plaats tot plaats veranderen. Dus als je de componenten van een gradiënt wilt weten, bijvoorbeeld  $T^{\alpha\beta}_{;\gamma}$ , dan moet je correcties maken voor het feit dat de basisvectoren veranderen. De tensor  $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$  is zelf misschien constant en alleen de basisvectoren hangen van de positie af. Het blijkt dat

$$T^{\alpha}_{\beta;\gamma} = T^{\alpha}_{\beta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma}T^{\mu}_{\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}T^{\alpha}_{\mu}, \quad \text{waarbij } T^{\alpha}_{\beta,\gamma} = \partial_{\vec{e}_\gamma}T^{\alpha}_{\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}T^{\alpha}_{\beta}. \quad (414)$$

Als we de metriek  $\mathbf{g}$  kennen, dan kunnen we de christoffelsymbolen uitrekenen, en daarmee alle covariante afgeleiden. Hiermee vinden we tenslotte weer de vergelijkingen

$$\begin{aligned} V^{\alpha}_{;\beta} &= V^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}V^{\mu}, \\ \mathcal{P}^{\alpha;\beta} &= \mathcal{P}^{\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\mathcal{P}_{\mu}, \\ T^{\alpha\beta}_{;\gamma} &= T^{\alpha\beta}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}T^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}T^{\alpha\mu}. \end{aligned} \quad (415)$$

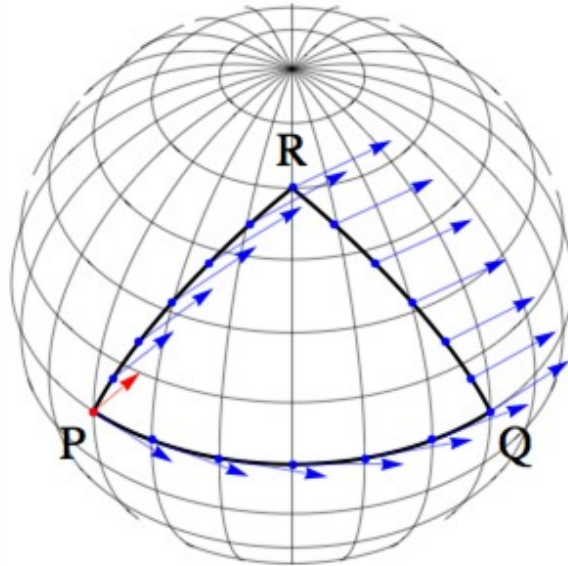
We hebben de notatie  $T^{\alpha\beta}_{;\mu}$  ingevoerd om te benadrukken dat het nemen van de covariante afgeleide de rang van de tensor verandert. Een andere notatie, die we in de rest van onze aantekeningen zullen gebruiken, is  $\nabla_{\mu}T^{\alpha\beta}$ . Merk op dat  $T^{\alpha\beta}_{;\mu} = \nabla_{\mu}T^{\alpha\beta} = \nabla_{\vec{e}_\mu}T^{\alpha\beta}$ . Op dezelfde manier schrijven we  $T^{\alpha\beta}_{,\mu} = \partial_{\mu}T^{\alpha\beta} = \partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\mu$ .

<sup>24</sup>Deze staan ook bekend als de christoffelsymbolen.



### D.3 Geodeten en kromming

Als we sferische coördinaten aanbrengen op een bol, en we volgen twee lijnen, die loodrecht op de evenaar staan, in de richting van de noordpool, dan zien we dat de initieel parallelle lijnen een snijpunt hebben op het gekromde oppervlak. Het vijfde postulaat van Euclides geldt dus niet in een gekromde ruimte: parallelle lijnen kunnen wel degelijk een snijpunt hebben.



**Figuur 36:** Parallel transporteren van een vector  $\vec{V}$  rond een driehoekig traject  $PQRP$  uitgezet op een bol. Door  $\vec{V}$  te transportereren over de lus  $PQRP$  verkrijgt de eindvector een rotatie ten opzichte van de beginvector. De rotatiehoek is afhankelijk van de grootte van de lus, de gekozen weg, en de kromming van de variëteit.

Een andere illustratie van hoe kromming zich manifesteert, en die misschien nog doeltreffender is, wordt gegeven in Fig. 36. We beginnen in punt  $P$  met een raakvector die in de horizontale richting wijst. We nemen een kleine stap in de richting van  $Q$  en na elke stap projecteren we de raakvector weer op het lokale raakvlak. Dit is onze manier van parallel transporteren. Nadat we het gesloten traject  $PQRP$  hebben volbracht, zien we dat de eindvector niet meer parallel is aan de initiële vector. Dit gebeurt niet in een vlakke ruimte en is een effect van de kromming van de bol. De consequentie is dat we op een gekromde variëteit geen globale parallelle vectorvelden kunnen definiëren. Het resultaat van parallel transporteren hangt af van de gekozen weg en van de grootte van de lus.

Teneinde een wiskundige beschrijving te vinden, vatten we het interval  $PQ$  in Fig. 36 op als een curve, en stellen we dat  $\lambda$  de parameter is van deze curve. Het vectorveld  $\vec{V}$  is gedefinieerd op elk punt van de curve. De vector  $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$  is de raakvector aan de curve. Parallel transporteren betekent dat in een lokaal inertiaal coördinatensysteem op punt  $\mathcal{P}$  de componenten van  $\vec{V}$  constant moeten zijn langs de curve. Er geldt

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta \partial_\beta V^\alpha = U^\beta \nabla_\beta V^\alpha = 0 \quad \text{op punt } \mathcal{P}. \quad (416)$$

De eerste gelijkheid is de definitie van de afgeleide van een functie (in dit geval  $V^\alpha$ ) langs de curve, de tweede gelijkheid komt van het feit dat  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$  op punt  $\mathcal{P}$  in deze coördinaten. De derde gelijkheid is echter een frame-onafhankelijke uitdrukking en die is geldig in elke basis. We

nemen dit als de coördinatenstelsel onafhankelijke definitie van het parallelle transport van  $\vec{V}$  langs  $\vec{U}$ . Een vector  $\vec{V}$  wordt dus parallel getransporteerd langs een curve met parameter  $\lambda$  als geldt

$$U^\beta \nabla_\beta V^\alpha = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0. \quad (417)$$

De laatste stap maakt gebruik van de notatie voor de richtingsafgeleide langs  $\vec{U}$ .

De belangrijkste curven in een gekromde ruimte zijn de *geodeten*. Geodeten zijn lijnen die (zo recht als mogelijk is) zijn getrokken, met als voorwaarde dat de raakvectoren  $\vec{U}$  van deze lijnen parallel getransporteerd worden. Voor een geodeet geldt dus

$$\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0. \quad (418)$$

Merk op dat in een LLF deze lijnen inderdaad recht zijn. Voor de componenten geldt

$$U^\beta \nabla_\beta U^\alpha = U^\beta \partial_\beta U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0. \quad (419)$$

Als  $\lambda$  de parameter van de curve is, dan geldt  $U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$  en  $U^\beta \partial/\partial x^\beta = d/d\lambda$ . Hiermee vinden we

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (420)$$

Omdat de christoffelsymbolen bekende functies van de coördinaten  $\{x^\alpha\}$  zijn, is dit een verzameling niet-lineaire tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor  $x^\alpha(\lambda)$ . Deze heeft een unieke oplossing als de initiële condities voor  $\lambda = \lambda_0$  worden gegeven:  $x_0^\alpha = x^\alpha(\lambda_0)$  en  $U_0^\alpha = (dx^\alpha/d\lambda)_{\lambda_0}$ . Dus door het geven van een beginpositie ( $x_0^\alpha$ ) en een beginsnelheid ( $U_0^\alpha$ ), verkrijgen we een unieke geodeet.

Door de parameter  $\lambda$  te veranderen, veranderen we wiskundig de curve (maar niet het pad). Als  $\lambda$  een parameter van de geodeet is, en we definiëren een nieuwe parameter  $\phi = a\lambda + b$ , met  $a$  en  $b$  constanten, die dus niet van de positie op de curve afhangen, dan geldt voor  $\phi$  ook

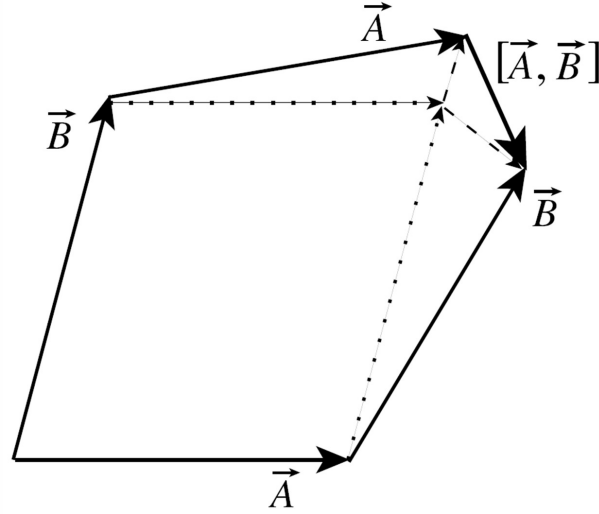
$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\phi^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\phi} \frac{dx^\beta}{d\phi} = 0. \quad (421)$$

Alleen lineaire transformaties van  $\lambda$  geven nieuwe parameters die voldoen aan de geodetenvergelijking. We noemen de parameters  $\lambda$  en  $\phi$  *affine* parameters. Tenslotte merken we op dat een geodeet ook een curve is met een extreme lengte (minimale lengte tussen twee punten). We kunnen de vergelijking voor een geodeet dus ook vinden met de Euler-Lagrange vergelijkingen. Hierbij gaan we uit van vergelijking (396), waarbij we de minkowskimetrick  $\eta_{\mu\nu}$  vervangen door  $g_{\mu\nu}$ . Ook kunnen we aantonen dat de lengte  $ds$  langs de curve een affine parameter is.

#### D.4 Kromming en de riemanntensor

In Fig. 37 tonen we twee vectorenvelden  $\vec{A}$  en  $\vec{B}$ . De vectoren zijn zó klein, dat de kromming van de variëteit geen rol speelt in het gebied waar dit diagram getekend is. We kunnen daarmee aannemen dat de vectoren op het oppervlak liggen in plaats van in de raakruimte. Teneinde de commutator  $[\vec{A}, \vec{B}]$  uit te kunnen rekenen, gebruiken we een lokaal orthonormaal coördinatenstelsel. Omdat we een vector kunnen opvatten als een richtingsafgeleide, stelt  $A^\alpha \partial B^\beta / \partial x^\alpha$  de grootte voor waarmee de vector  $\vec{B}$  verandert als die langs  $\vec{A}$  verplaatst wordt (dat is de korte gestreepte lijn rechtsboven in Fig 37). Evenzo is  $B^\alpha \partial A^\beta / \partial x^\alpha$  de verandering van  $\vec{A}$  als die langs  $\vec{B}$  verplaatst wordt (dat is de andere korte gestreepte lijn). Voor de componenten van de commutator in een coördinatenstelsel geldt

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \left[ A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, B^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right] = \left( A^\alpha \frac{\partial B^\beta}{\partial x^\alpha} - B^\alpha \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \quad (422)$$



**Figuur 37:** De commutator  $[\vec{A}, \vec{B}]$  van twee vectorvelden. We nemen aan dat de vectoren klein zijn, zodat de kromming het toelaat dat ze in de variëteit liggen.

Volgens bovenstaande vergelijking is de commutator  $[\vec{A}, \vec{B}]$  het verschil van de twee gestreepte lijnen in Fig. 37. Het is het vijfde lijnsegment dat nodig is om de vierhoek te sluiten (dat is de geometrische betekenis van de commutator). Vergelijking (422) is een operatorvergelijking, waarbij de uiteindelijke afgeleide opereert op een scalaïrveld (net als in de quantummechanica). We vinden hiermee meteen de componenten van de commutator in een willekeurig coördinatenstelsel:  $A^\alpha B^\beta_{,\alpha} - B^\alpha A^\beta_{,\alpha}$ . De commutator is nuttig om onderscheid te kunnen maken tussen een coördinatenbasis en een niet-coördinatenbasis (ook wel niet-holonomische basis genoemd)<sup>25</sup>.

In de discussie die leidde tot vergelijking (395), zagen we dat de effecten van kromming merkbaar worden als we tweede-orde afgeleiden (of gradiënten) nemen van de metriek. De krommingstensor van Riemann is een maat voor het falen van dubbele gradiënten om te sluiten. Neem een vectorveld  $\vec{A}$  en neem er de dubbele gradiënten van. Dan vinden we

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\alpha = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\alpha \equiv R^\beta_{\alpha\mu\nu} A_\beta. \quad (423)$$

Deze vergelijking kan gezien worden als de definitie van de riemanntensor. De riemanntensor geeft de commutator van covariante afgeleiden. Dit betekent dat we in gekromde ruimtetijd voorzichtig moeten zijn met de volgorde waarin we covariante afgeleiden nemen: ze commuteren namelijk niet. We kunnen vergelijking (423) uitwerken door te beginnen met de definitie van de covariante afgeleide,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\nabla_\nu A_\alpha) - \Gamma^\beta_{\alpha\nu} (\nabla_\nu A_\beta) - \Gamma^\beta_{\mu\nu} (\nabla_\beta A_\alpha) \quad \text{en} \quad \nabla_\mu A_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} A_\beta. \quad (424)$$

We dienen nu een en ander te differentiëren, indices te manipuleren, etc. Uiteindelijk vinden we

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\alpha = \left( \frac{\partial \Gamma^\beta_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\gamma_{\alpha\nu} \Gamma^\beta_{\gamma\mu} - \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} \Gamma^\beta_{\gamma\nu} \right) A_\beta = R^\beta_{\alpha\mu\nu} A_\beta. \quad (425)$$

<sup>25</sup>In een coördinatenbasis worden de basisvectoren gegeven door de partiële afgeleiden,  $\vec{e}_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ , en omdat partiële afgeleiden commuteren, moet gelden  $[\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta] = 0$ . In een niet-coördinatenbasis geldt  $[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu] = C^\alpha_{\mu\nu} \vec{e}_\alpha$ , met  $C^\alpha_{\mu\nu}$  de zogenaamde commutatie coëfficiënten. Een coördinatenbasis is handig voor het doen van berekeningen, terwijl een niet-coördinatenbasis nuttig kan zijn voor de interpretatie van gegevens.

De riemanntensor vertelt ons hoe een vectorveld verandert langs een gesloten pad. We kunnen vergelijking (409) gebruiken om de riemanntensor in een LLF te schrijven als

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}). \quad (426)$$

We zien dat de metrische tensor  $\mathbf{g}$  de informatie over de intrinsieke kromming bevat<sup>26</sup>. Deze kromming wordt manifest als we tweede-orde afgeleiden van de metriek nemen. Met  $R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda}R^{\lambda}_{\beta\mu\nu}$  en bovenstaande relatie, kunnen we een aantal belangrijke eigenschappen van de riemanntensor bewijzen. De riemanntensor is

- antisymmetrisch in de laatste twee indices. Er geldt

$$\mathbf{R}(\_, \_, \vec{A}, \vec{B}) = -\mathbf{R}(\_, \_, \vec{B}, \vec{A}) \quad \text{of} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}. \quad (427)$$

- Antisymmetrisch in de eerste twee indices. Er geldt

$$\mathbf{R}(\vec{A}, \vec{B}, \_, \_) = -\mathbf{R}(\vec{B}, \vec{A}, \_, \_) \quad \text{of} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}. \quad (428)$$

- De tensor is symmetrisch.

$$\mathbf{R}(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}) = \mathbf{R}(\vec{C}, \vec{D}, \vec{A}, \vec{B}) \quad \text{of} \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\nu\mu}. \quad (429)$$

- Er gelden de zogenaamde Bianchi identiteiten,

$$\nabla_{\mu}R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_{\gamma}R_{\alpha\beta\delta\mu} + \nabla_{\delta}R_{\alpha\beta\mu\gamma} = 0, \quad (430)$$

waarbij we steeds de laatste drie indices permuteren.

Bovenstaande symmetrieën reduceren de  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$  componenten van de riemanntensor tot 20.

De krommingstensor van Ricci (riccitensor) is gedefinieerd als de contractie van de riemanntensor. Er geldt

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}. \quad (431)$$

Bijvoorbeeld in het geval van het aardoppervlak bevat deze tensor ook de informatie over de kromming, maar dan als de riemanntensor geïntegreerd over de hoeken. Verder kan men laten zien dat de riccitensor symmetrisch is. Tenslotte hebben we nog de scalaire kromming, de riccikromming, gedefinieerd door

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}. \quad (432)$$

We hebben nu de tensoren gedefinieerd, die we nodig hebben voor de beschrijving van fenomenen in de algemene relativiteitstheorie. Er is een formidabel wiskundig apparaat opgetuigd en we gaan dat nu eerst gebruiken om de veldvergelijkingen (de zogenaamde einsteinvergelijkingen) van de ART te poneren. We maken een en ander aannemelijk door een analogie met de newtoniaanse beschrijving.

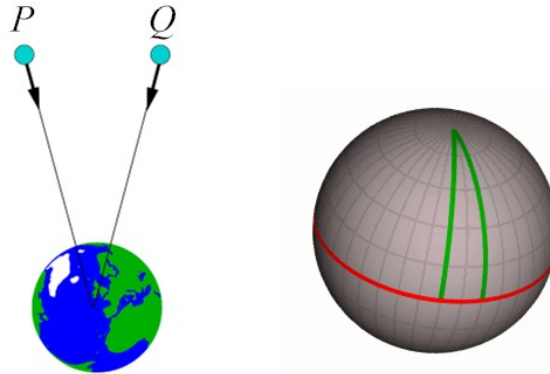
---

<sup>26</sup>Behalve intrinsieke kromming kan een variëteit ook een extrinsieke kromming hebben. Neem bijvoorbeeld een blad papier dat geen intrinsieke kromming heeft, en rol het op tot een cilinder. Deze cilinder heeft extrinsieke kromming en die beschrijft de inbedding van het vlakke blad papier in de 3D ruimte. De ART zegt niets over de hogere ruimten waarin ruimtetijd kan zijn ingebed. De ART geeft een beschrijving van kromming binnen de variëteit zelf en dat is de intrinsieke kromming van ruimtetijd.

### D.5 Newtoniaanse beschrijving van getijdenkrachten

We proberen een maat te vinden voor de kromming van ruimtetijd. Hiertoe laten we een testdeeltje vrij vallen. Wij besluiten als waarnemer<sup>27</sup> om met dit deeltje mee te vallen (LLF) en zien dat het deeltje langs een rechte lijn in ruimtetijd beweegt (alleen in de tijdrichting). Er is niets in de beweging van een enkel deeltje dat kromming verraaft. Met name in het vrij vallende coördinatenstelsel blijft het deeltje in rust. Eén deeltje is onvoldoende om de effecten van kromming te ontdekken.

Vervolgens laten we twee deeltjes vallen. We gaan de getijdenkracht op aarde bekijken vanuit het perspectief van waarnemers die vrij vallen (LLF) samen met de deeltjes. Dergelijke waarnemers vallen in een rechte lijn naar het centrum van de aarde. Fig. 38 geeft de situatie voor twee vrij vallende deeltjes  $P$  en  $Q$ , en we zien dat beide deeltjes paden volgen die leiden naar het centrum van de aarde. Vanuit het perspectief van een waarnemer die in vrije val is met deze deeltjes, zien



**Figuur 38:** Links: twee vrij vallende deeltjes bewegen op initieel parallelle paden naar het centrum van de aarde. Daar ligt het snijpunt van beide lijnen; rechts: lijnen op het aardoppervlak die initieel parallel zijn bij de evenaar, snijden elkaar bij de noordpool.

we dat de deeltjes naar elkaar toe bewegen. Dit wordt veroorzaakt door de differentiële gravitatieversnelling op de deeltjes en we noemen dit getijdenkrachten. Volgens Newton kruisen de paden ten gevolge van gravitatie, terwijl dit volgens Einstein gebeurt omdat ruimtetijd gekromd is. Wat Newton gravitatie noemt, wordt door Einstein kromming van ruimtetijd genoemd. Gravitatie is een eigenschap van de kromming van ruimtetijd.

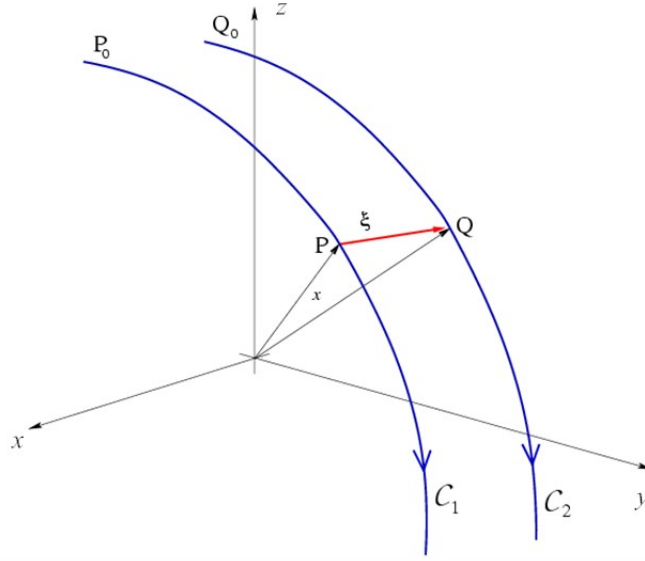
We willen nu een wiskundige beschrijving geven van dit proces, die in overeenstemming is met de wetten van Newton. Hiertoe beschouwen we Fig. 39. De newtoniaanse bewegingsvergelijkingen voor deeltjes  $P$  en  $Q$  zijn

$$\left(\frac{d^2 x_j}{dt^2}\right)_{(P)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right)_{(P)} \quad \text{en} \quad \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2}\right)_{(Q)} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right)_{(Q)}, \quad (433)$$

met  $\Phi$  de gravitationele potentiaal. We definiëren  $\vec{\xi}$  als de afstand tussen beide deeltjes. Voor parallelle banen zou gelden  $\frac{d\vec{\xi}}{dt} = 0$ . Met  $\vec{\xi} = (x_j)_{(P)} - (x_j)_{(Q)}$  vinden we via een Taylorexpanisie

$$\frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}\right) \xi_k = -\mathcal{E}_{jk} \xi_k \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_{jk} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}\right), \quad (434)$$

<sup>27</sup>We gaan er voor het gemak vanuit dat wij als waarnemer niet van invloed zijn op het proces. Het belangrijkste is dat we aannemen dat we geen kracht uitoefenen en geen kromming veroorzaken.



**Figuur 39:** De banen van twee vrij vallende deeltjes in een gravitatieveld  $\Phi$ . De drievector  $\vec{\xi}$  meet de afstand tussen de twee deeltjes en is een functie van de tijd.

en vatten  $\mathcal{E}_{jk}$  op als de componenten van de gravitationele getijdentensor  $\mathbf{E}$ . Merk op dat de metriek voor de 3D Euclidische ruimte gegeven wordt door  $\delta_{jk} = \text{diag}(1, 1, 1)$  en dat er dus geen verschil is tussen boven- en benedenindices. Vergelijking (434) wordt de vergelijking van Newtoniaanse geodetische deviatie genoemd.

Volgens Newton bewegen de deeltjes naar elkaar toe en schrijven we

$$\frac{d^2 \vec{\xi}}{dt^2} = -\mathbf{E}(\_, \vec{\xi}) \quad (435)$$

in abstracte notatie. Het is interessant dat de veldvergelijking van newtoniaanse gravitatie,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (436)$$

kan worden uitgedrukt in termen van tweede afgeleiden van  $\Phi$ , die de getijdenversnellingen in vergelijking (434) beschrijven. Er is een analoge connectie in de ART.

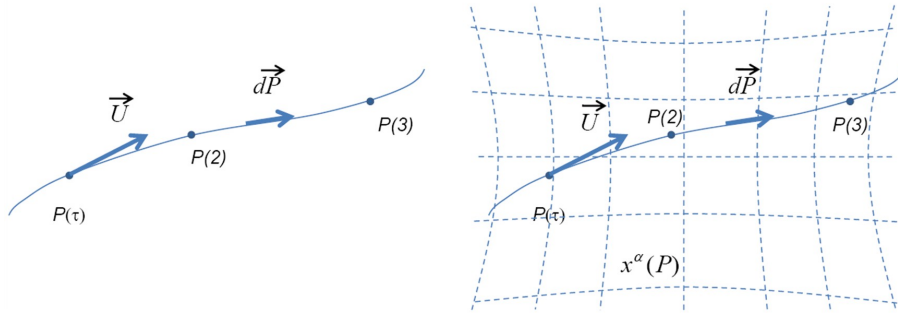
## D.6 De einsteinvergelijkingen

We komen nu tot de kern van de ART, de veldvergelijkingen. We zullen proberen de veldvergelijkingen plausibel te maken op een manier die al het voorgaande nog eens samenvat. We beginnen met een beschouwing in Fig. 40 (linker diagram) van de beweging van een deeltje langs een wereldlijn. De wereldlijn is geparаметriseerd met de eigentijd  $\tau$  op een klok die het deeltje met zich mee draagt. We kunnen de positie van het deeltje op een punt van de wereldlijn dus aangeven met  $\mathcal{P}(\tau)$ . De snelheid  $\vec{U}$  is de raakvector aan de curve en wordt gegeven door

$$\vec{U} = \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}. \quad (437)$$

Voor de snelheid geldt in het LLF op punt  $\mathcal{P}$

$$\vec{U}^2 = \frac{\overrightarrow{d\mathcal{P}} \cdot \overrightarrow{d\mathcal{P}}}{d\tau^2} = \frac{-c^2 d\tau^2}{d\tau^2} = -c^2 (= -1), \quad (438)$$



**Figuur 40:** Links: de wereldlijn van een deeltje is een curve die geparametriseerd kan worden met de eigentijd  $\tau$  van het deeltje. De snelheid  $\vec{U}$  is de raakvector aan de curve. Rechts: we brengen een coördinatenstelsel  $\{x^\alpha\}$  aan. De snelheid  $\vec{U}$  heeft nu componenten  $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ .

waarbij we de definitie van de metriek hebben gebruikt<sup>28</sup>. Omdat deze vergelijking een getal (scalar) oplevert, is dit geldig in elk coördinatenstelsel. We zien dus dat de snelheidsviervector lengte 1 heeft en in de tijdrichting wijst. Merk op dat deze definities geen gebruik maken van een coördinatenstelsel. In het geval dat een coördinatenstelsel aangebracht wordt, geldt voor de componenten van de snelheid

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (439)$$

De componenten zijn dus de afgeleiden van de coördinaten zelf.

Als het deeltje vrij beweegt en er geen andere krachten op werken dan die ten gevolge van de kromming van ruimtetijd, dan moet het in een rechte lijn bewegen. Hiermee bedoelen we zo recht als mogelijk is onder invloed van kromming. Het deeltje dient zijn eigen snelheid parallel te transporteren. Er geldt

$$\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0, \quad (440)$$

en dat is, zoals we reeds in vergelijking (418) gezien hebben, de abstracte uitdrukking voor een geodeet. Wat dit betekent is dat wanneer we naar een lokaal lorentzframe gaan, de componenten van de viersnelheid constant blijven (en daarom is de richtingsafgeleide gelijk aan nul) als het deeltje slechts een kleine afstand aflegt. We willen nu bekijken hoe de geodetenvergelijking eruit komt te zien als we een willekeurig coördinatenstelsel aanbrengen. Dit is geschetst in het rechterpaneel van Fig. 40. In dit coördinatenstelsel worden de componenten van  $\vec{U}$  gegeven door  $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ , en kunnen we de geodetenvergelijking schrijven als

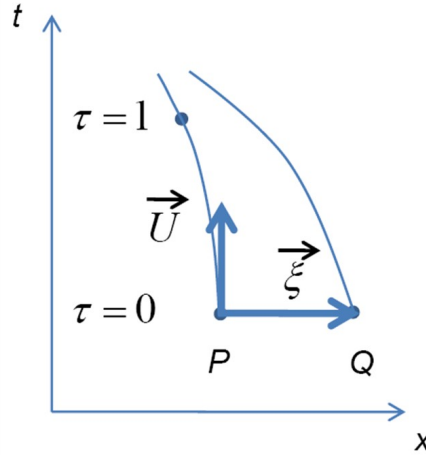
$$\nabla_\mu U^\alpha U^\mu = 0 \quad \rightarrow \quad (\partial_\mu U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu) U^\mu = 0. \quad (441)$$

Merk op dat  $\nabla_\mu U^\alpha$  de gradiënt is, waarvan we dan het inproduct nemen met de snelheid  $U^\mu$  om de afgeleide van de snelheid in de richting van de snelheid te vinden. Deze afgeleide stellen we vervolgens gelijk aan nul. In de tweede stap maken we gebruik van de uitdrukking in componenten van de covariante afgeleide. We vermenigvuldigen nu de termen en vinden

$$\underbrace{\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\mu}}_{\frac{dU^\alpha}{d\tau}} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{\frac{dx^\alpha}{d\tau}} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \underbrace{\frac{dx^\nu}{d\tau}}_{\frac{dx^\nu}{d\tau}} \underbrace{\frac{dx^\mu}{d\tau}}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (442)$$

<sup>28</sup>In het LLF komt  $\vec{d\vec{P}}$  overeen met  $(c\Delta\tau, \vec{0})$ , waarbij  $\Delta\tau$  de eigentijd is, gemeten met een ideale klok. Er geldt dan dat  $\vec{d\vec{P}} \cdot \vec{d\vec{P}} = -(c\Delta\tau)^2$ . Veelal gebruiken we natuurlijke coördinaten met  $c = 1$ .

Het is belangrijk in te zien dat we zijn uitgegaan van de abstracte tensorvergelijking (440) voor een geodeet. Na het aanbrengen van een willekeurig coördinatenstelsel hebben we deze vergelijking in componenten geschreven en het resultaat is vergelijking (442). Deze laatste geeft vier gewone tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor de coördinaten  $x^0(\tau)$ ,  $x^1(\tau)$ ,  $x^2(\tau)$  en  $x^3(\tau)$ . Deze vergelijkingen zijn gekoppeld via de connectiecoëfficiënten. Omdat het tweede-orde differentiaalvergelijkingen zijn, hebben we twee randvoorwaarden nodig, bijvoorbeeld op tijdstip  $\tau = 0$  zowel  $x^\alpha(\tau = 0)$  als  $\frac{dx^\alpha}{d\tau}(\tau = 0) = U^\alpha(0)$ . Daarna ligt de wereldlijn van het vrije deeltje (geodeet) vast.



**Figuur 41:** De wereldlijnen van twee deeltjes  $P$  en  $Q$  zijn initieel parallel. Door kromming van ruimtetijd bewegen de deeltjes naar elkaar toe. De afstand tussen de deeltjes wordt gegeven door de ruimtelijke vector  $\vec{\xi}$ .

We bekijken in Fig. 41 de geodetische afstand tussen twee deeltjes  $P$  en  $Q$ . Dit vormt de aanloop tot de einsteinvergelijkingen. Stel dat we twee deeltjes hebben die op een bepaald tijdstip (dat we voor het gemak als  $\tau = 0$  kiezen) in rust zijn ten opzichte van elkaar. We definiëren de separatievector  $\vec{\xi}$ , die van het ene naar het andere deeltje wijst. Verder heeft deeltje  $P$  een snelheid  $\vec{U}$ . De eis dat de deeltjes aanvankelijk in rust zijn ten opzichte van elkaar, komt neer op  $\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} = 0$  op punt  $\mathcal{P}$  op tijdstip  $\tau = 0$ . Verder willen we  $\vec{\xi}$  zo definiëren, dat in het LLF van deeltje  $P$  de vector  $\vec{\xi}$  zuiver ruimtelijk is (dat is een keuze die we mogen maken). Hiermee is  $\vec{\xi}$  loodrecht op de snelheid  $\vec{U}$ . Hij wijst dus in een richting die loodrecht op de tijdrichting staat. Er geldt dan  $\vec{U} \cdot \vec{\xi} = 0$  op punt  $\mathcal{P}$ . Samengevat, eisen we op tijdstip  $\tau = 0$

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} &= 0 \\ \vec{U} \cdot \vec{\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ op punt } \mathcal{P} \text{ voor } \tau = 0. \quad (443)$$

De tweede afgeleide  $\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi}$  is echter niet gelijk aan nul, want we weten dat de effecten van kromming merkbaar worden als we tweede-orde afgeleiden van de metriek nemen. Dit betekent dat de geodeten van de deeltjes naar elkaar toe worden gedrukt of van elkaar verwijderd raken (naargelang de metriek), naarmate de tijd vordert. Er geldt

$$\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} = -\mathbf{R}(\_, \vec{U}, \vec{\xi}, \vec{U}), \quad (444)$$

met  $\mathbf{R}$  de krommingstensor. Deze vergelijking beschrijft hoe twee aanvankelijk parallelle geodeten in de loop der tijd van elkaar beginnen af te wijken ten gevolge van de kromming. De



uitdrukking volgt uit vergelijkingen (415) en (423). De tweede afgeleide  $\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi}$  beschrijft de relatieve versnelling van de deeltjes.

In het LLF van deeltje  $P$  op tijdstip  $\tau = 0$  geldt  $U^0 = 1$  en  $U^i = 0$ . Hiermee verwachten we

$$(\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi})^j = \frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} = -R_{\alpha\beta\gamma}^j U^\alpha \xi^\beta U^\gamma = -R_{0k0}^j \xi^k, \quad (445)$$

want de snelheid  $\vec{U}$  heeft alleen een tijdcomponent in het LLF van deeltje  $\mathcal{P}$ , terwijl de separatievector  $\vec{\xi}$  alleen ruimteachtige componenten heeft  $k = 1, 2, 3$ . In het LLF heeft de vergelijking voor geodetische afwijking de vorm

$$\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} = -R_{0k0}^j \xi^k, \quad (446)$$

terwijl we in de newtoniaanse mechanica gevonden hebben (zie vergelijking (434)) dat

$$\frac{\partial^2 \xi^j}{\partial t^2} = -\mathcal{E}_{jk} \xi^k. \quad (447)$$

In een LLF is het ruimtelijke deel van de metriek cartesisch ( $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ ) en maakt de plaats van de indices niets uit. Vergelijken geeft dan

$$R_{j0k0} = \mathcal{E}_{jk} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}. \quad (448)$$

We kunnen een deel van de krommingstensor identificeren met afgeleiden van de newtoniaanse gravitatiepotentiaal. Volgens Newton geldt

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \quad \rightarrow \quad \Phi_{,jk} \delta^{jk} = \mathcal{E}_{jk} \delta^{jk} = \mathcal{E}^j_j, \quad (449)$$

en we vinden voor het spoor van de gravitationele getijdentensor  $\mathcal{E}^j_j = 4\pi G\rho$ . Analoog zou je misschien verwachten dat in de algemene relativiteitstheorie zou gelden dat

$$R^j_{0j0} = 4\pi G\rho \quad ? \quad (450)$$

als een eerste gok.

Er is echter een fundamenteel probleem met vergelijking (450). Het dient een uitdrukking te zijn, die niet van het coördinatenstelsel afhangt. Wat we echter gedaan hebben, is het opstellen van de vergelijking in een speciaal stelsel: het LLF. Wat we derhalve dienen te doen, is proberen een relatie tussen tensoren te vinden. Hiertoe merken we op dat in het LLF geldt dat  $R_{0000} = 0$  en  $R^0_{000} = 0$  ten gevolge van antisymmetrie. Er geldt dus  $R^j_{0j0} = 4\pi G\rho \rightarrow R^\mu_{0\mu 0} = 4\pi G\rho$ . We bevinden ons nog steeds in het LLF (overigens geldt hier  $R_{00} = 4\pi G\rho$  met  $R_{00}$  de Ricci tensor, maar dat terzijde).

Er is nog een probleem met vergelijking (450): links van het gelijkteken hebben we twee indices en rechts ervan geen enkele. Je zou dus misschien kunnen denken dat geldt

$$R_{\alpha\beta} = 4\pi GT_{\alpha\beta} \quad ? \quad (451)$$

Hierbij is  $T_{\alpha\beta}$  de energie-impuls tensor, waarvan  $T_{00} = \rho$  (en dat is overigens vaak de dominerende term in het LLF). Einstein maakte deze gok al in 1912, maar hij is fout! Deze vergelijkingen hebben ingebouwde inconsistenties. Het is belangrijk om te begrijpen wat er mis is, en dat komt neer op het volgende. Beschouw de riemannntensor

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} \approx g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \text{niet lineaire termen.} \quad (452)$$

Als we de eerste en derde index contraheren, krijgen we

$$R_{\alpha\beta} \approx g_{\gamma\alpha,\gamma\delta} + \text{niet lineaire termen.} \quad (453)$$

We zien hiermee dat de voorgestelde vergelijkingen (451) een verzameling vormen van 10 partiële differentiaalvergelijkingen voor de 10 componenten van de metriek  $g_{\alpha\beta}$  (want de metriek is symmetrisch in  $\alpha$  en  $\beta$ ). Ook de Ricci tensor is symmetrisch. Dat lijkt allemaal prima, maar we hebben de vrijheid om zelf het coördinatenstelsel te kiezen waarin we de vergelijkingen gaan opschrijven. We hebben de vrijheid om  $x^0(\mathcal{P})$ ,  $x^1(\mathcal{P})$ ,  $x^2(\mathcal{P})$  en  $x^3(\mathcal{P})$  te kiezen. We kunnen dat gebruiken om 4 van de 10 componenten van  $g_{\alpha\beta}$ , zoals gezien als functie van de coördinaten, gelijk te zetten aan wat we willen, bijvoorbeeld  $g_{00} = -1$ ,  $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ . Echter, onze vergelijkingen (451) staan dit niet toe: 10 partiële differentiaalvergelijkingen voor 10 onbekenden. Wat we nodig hebben, zijn 6 vergelijkingen voor 10 onbekenden.

Voordat we onze speurtocht naar de einsteinvergelijkingen voortzetten, maken we eerst twee opmerkingen. De eerste opmerking heeft te maken met de Bianchi indentiteiten. Dankzij deze indentiteiten  $R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + \dots = 0$  blijkt dat als we de einsteintensor definiëren,

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}, \quad (454)$$

met  $R_{\alpha\beta}$  de riccitenor en  $R$  de scalaire kromming, dan zorgen de Bianchi indentiteiten ervoor dat de divergentie van de einsteintensor gelijk is aan nul,

$$\nabla_{\beta}G^{\alpha\beta} = 0. \quad (455)$$

De tweede opmerking heeft te maken met de ons bekende behoudswetten voor energie en impuls. In een LLF geldt

$$\partial_{\beta}T^{\alpha\beta} = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} = 0, \\ \frac{\partial T^{j0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{jk}}{\partial x^k} = 0. \end{cases} \quad (456)$$

Merk op dat  $\frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j}$  de ruimtelijke divergentie is en energiebehoud zegt  $\partial\rho/\partial t + \text{div}\vec{J} = 0$ , met  $\vec{J}$  de massa-energieflux. Evenzo is  $\frac{\partial T^{j0}}{\partial t}$  de impulsdichtheid en  $\frac{\partial T^{jk}}{\partial x^k}$  de impulsflux. Omdat we alleen de eerste afgeleide nemen, is wat geldt in een vlakke ruimte in het LLF, ook geldig voor gekromde ruimtetijd. Hiermee vinden we de tensorvergelijking

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0. \quad (457)$$

Het lijkt redelijk om aan te nemen dat de natuur gekozen heeft voor

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}. \quad (458)$$

Dit zijn de einsteinvergelijkingen. De evenredigheidsfactor ( $8\pi G/c^4$ ) vinden we door de newtoniaanse limiet te nemen. Voordat we de einsteinvergelijkingen opleggen, weten we al dat

$$\nabla_{\beta}G^{\alpha\beta} = 0 = \frac{8\pi G}{c^4}\nabla_{\beta}T^{\alpha\beta}. \quad (459)$$

Dit zijn 4 vergelijkingen en het zijn de afgeleiden van de einsteinvergelijkingen. Aan deze 4 identiteiten (de divergenties van  $G^{\alpha\beta}$  en  $T^{\alpha\beta}$  zijn nul) wordt al voldaan. Dit legt 4 beperkingen op aan de einsteinvergelijkingen (ook wel de veldvergelijkingen genoemd) en de veldvergelijkingen geven slechts 6 nieuwe stukken informatie. Dat is precies wat we nodig hebben.

### D.7 Zwakke gravitatievelden en de newtoniaanse limiet

Het is duidelijk dat de ART beschrijving van gravitatie in termen van kromming van ruimtetijd reduceert tot de SRT voor lokale lorentzframes. Het is echter belangrijk om expliciet te controleren dat de beschrijving reduceert tot de newtoniaanse beschrijving als we de correcte randvoorwaarden bezien.

Zonder gravitatie heeft ruimtetijd de minkowskimetrick  $\eta$ . Derhalve zullen zwakke gravitatievelden overeenkomen met een geringe kromming van ruimtetijd. We nemen aan dat er coördinaten bestaan, waarin de metrick de volgende vorm heeft,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{met } |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (460)$$

Verder nemen we aan dat in dat coördinatenstelsel de metrick stationair is, waardoor geldt  $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ . De wereldlijn van een vrij vallend deeltje wordt gegeven door de geodetische vergelijking

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (461)$$

We nemen aan dat het deeltje langzaam beweegt (niet-relativistisch), zodat voor de componenten van de driesnelheid geldt  $dx^i/dt \ll c$  ( $i = 1, 2, 3$ ), met  $t$  gedefinieerd via  $x^0 = ct$ . Hiermee eisen we voor  $i = 1, 2, 3$

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}. \quad (462)$$

We mogen de driesnelheid verwaarlozen en vinden

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (463)$$

We gebruiken vergelijking (409) en vinden

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\kappa\mu} (\partial_0 g_{0\kappa} + \partial_0 g_{0\kappa} - \partial_\kappa g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\kappa\mu} \partial_\kappa g_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\kappa\mu} \partial_\kappa h_{00}, \quad (464)$$

waarbij we vergelijking (460) hebben gebruikt. De laatste gelijkheid is geldig tot op eerste orde in  $h_{\mu\nu}$ . Omdat we hebben aangenomen dat de metrick stationair is geldt

$$\Gamma^0_{00} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00} \quad \text{met } i = 1, 2, 3. \quad (465)$$

Invullen in vergelijking (463) levert

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00}. \quad (466)$$

De eerste vergelijking stelt dat  $dt/d\tau = \text{constant}$ , en hiermee kunnen we de twee uitdrukkingen combineren. Dat geeft de volgende bewegingsvergelijking voor het deeltje,

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} c^2 \nabla h_{00}. \quad (467)$$

Als we deze uitdrukking vergelijken met de newtoniaanse uitdrukking voor de beweging van een deeltje in een gravitatieveld, formule (433), dan zien we dat beide identiek zijn, als we de identificatie maken dat  $h_{00} = 2\Phi/c^2$ . We vinden dat voor een langzaam bewegend deeltje de ART overgaat in de newtoniaanse beschrijving, als de metrick gegeven wordt door

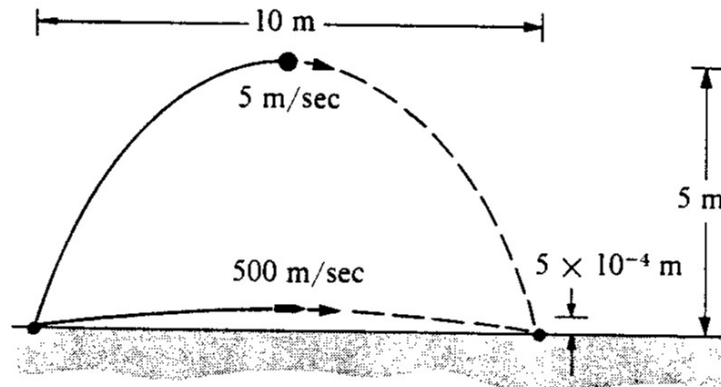
$$g_{00} = 1 + h_{00} = \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right). \quad (468)$$

We kunnen een schatting maken van deze correctie op de minkowskimetrik, want  $\frac{\Phi}{c^2} = -\frac{GM}{c^2 r}$  en we vinden  $-10^{-9}$  aan het aardoppervlak,  $-10^{-6}$  aan het oppervlak van de zon, en  $-10^{-4}$  aan het oppervlak van een witte dwerg. We zien dat de zwakke-veld limiet een uitstekende benadering is.

Vergelijking (468) toont dat ruimtetijdromping ervoor zorgt dat de tijdcoördinaat  $t$  in het algemeen niet de eigentijd meet. Hiertoe nemen we een klok die in rust is op een bepaald punt in ons coördinatensysteem (dan geldt  $dx^i/dt = 0$ ). Het eigentijdinterval  $d\tau$  tussen twee tikken van deze klok wordt gegeven door  $c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} c^2 dt^2$ , waarmee we vinden

$$d\tau = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt. \tag{469}$$

Dit geeft het interval in eigentijd  $d\tau$  dat correspondeert met een interval  $dt$  in coördinatentijd voor een stationaire waarnemer in de buurt van een massief object, in een gebied met gravitatie potentiaal  $\Phi$ . Omdat  $\Phi$  negatief is, is dit eigentijdinterval korter dan het corresponderende interval voor een stationaire waarnemer op grote afstand van het object, waar  $\Phi \rightarrow 0$  en dus  $d\tau = dt$ . Merk op dat we dit reeds hebben afgeleid uit het equivalentieprincipe; zie vergelijking (??) met  $\Phi = gh$ .



**Figuur 42:** Banen van een bal en een kogel door de ruimte. Gezien vanuit een laboratorium hebben de banen een verschillende kromming.

Het ruimtetijdinterval wordt gegeven door

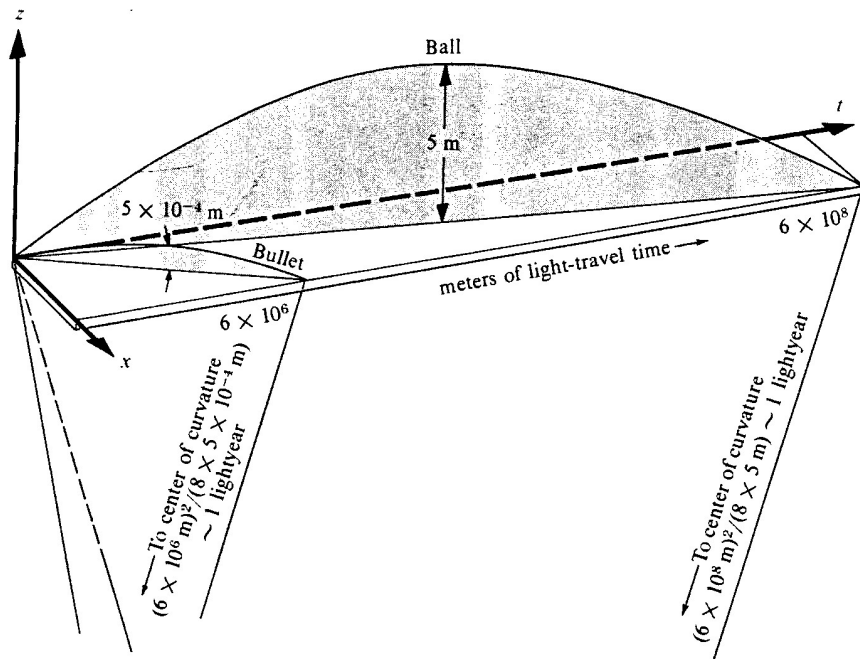
$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{470}$$

Deze vergelijking beschrijft een geometrie van ruimtetijd waarin deeltjes op geodeten bewegen die precies dezelfde banen volgen als die van deeltjes in een vlakke ruimtetijd waarin de newtoniaanse gravitatiekracht actief is. We hebben hiermee een gekromd ruimtetijdbeeld gevonden voor Newtons gravitatie. De kromming is alleen in de tijdrichting. Kromming in de tijd is niets anders dan de gravitationele roodverschuiving: tijd schrijdt voort met verschillende snelheden op verschillende plaatsen, derhalve is tijd gekromd. Deze gravitationele roodverschuiving bepaalt volledig de banen van deeltjes in een gravitatieveld. De gehele newtoniaanse gravitatie is alleen tijdromping.

Wellicht gaat het bovenstaande tegen ons gevoel in. Immers niets lijkt zo vanzelfsprekend als het idee dat gravitatie een manifestatie is van kromming van de ruimte. Kijk bijvoorbeeld naar

de banen van twee objecten in de ruimte, zoals getoond in Fig. 42. Een van de objecten is een bal die met een relatief lage snelheid van 5 m/s beweegt en een hoogte bereikt van 5 m. Het andere object is de kogel uit een geweer. Deze kogel beweegt met hoge snelheid (500 m/s). Als we de figuur bekijken, dan lijkt de baan van de bal sterker gekromd dan die van de kogel.

Het punt is echter dat we niet naar een kromming van de ruimte dienen te kijken, maar naar de kromming van ruimtetijd. Hiertoe tekenen we de banen nogmaals in Fig. 43, maar nu in minkowski ruimtetijd. We zien dat nu de banen van de bal en kogel een gelijke kromming hebben in ruimtetijd. In werkelijkheid heeft echter geen van de banen een kromming! Ze zien



**Figuur 43:** Banen van een bal en een kogel door ruimtetijd. Gezien vanuit een laboratorium hebben de banen dezelfde kromming. We vergelijken de baanlengte ten opzichte van de booglengte van de cirkel:  $(\text{straal}) = (\text{horizontale afstand})^2 / 8(\text{hoogte})$ .

er gekromd uit omdat we vergeten zijn dat de ruimtetijd waarin ze getekend zijn, zelf gekromd is. De kromming van ruimtetijd is precies zodanig, dat de banen zelf volledig recht zijn: het zijn immers geodeten.

### D.8 De zwakke-veld limiet van de einsteinvergelijkingen

De einsteinvergelijkingen (458) stellen dat de einsteintensor evenredig is met de energie-impuls tensor,  $G_{\mu\nu} = \text{constante } T_{\mu\nu}$ . We willen de evenredigheidsfactor bepalen, door de zwakke-veld limiet te nemen. Hiertoe hoeven we alleen de 00-component te beschouwen. We vinden dan

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = \text{constante}(T_{00}). \tag{471}$$

In de zwakke-veld limiet is ruimtetijd slechts weinig gekromd en bestaan er coördinaten waarvoor  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  met  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , terwijl de metriek stationair is. Er geldt dus  $g_{00} \approx 1$ . Verder kunnen we de definitie (425) van de krommingstensor gebruiken om  $R_{00}$  te vinden. Er geldt

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma^\mu_{0\mu} - \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} + \Gamma^\nu_{0\mu} \Gamma^\mu_{\nu 0} - \Gamma^\nu_{00} \Gamma^\mu_{\nu\mu}. \tag{472}$$

In ons coördinatenstelsel zijn de  $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$  klein, zodat we de laatste twee termen in eerste-orde in  $h_{\mu\nu}$  kunnen verwaarlozen. Ook is de metriek stationair in ons coördinatenstelsel, en vinden we

$$R_{00} \approx -\partial_i \Gamma^i_{00}. \quad (473)$$

In onze discussie van de newtoniaanse limiet, hebben we in vergelijking (465) gevonden dat  $\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00}$  in eerste-orde in  $h_{\mu\nu}$ . Dus geldt

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00}. \quad (474)$$

We kunnen nu onze benaderingen voor  $g_{00}$  en  $R_{00}$  substitueren in vergelijking (471) en vinden in de zwakke-veld limiet

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \text{constante} (T_{00} - \frac{1}{2}T). \quad (475)$$

We hebben hierbij gebruikt dat  $R = \text{constante } T$  met  $T \equiv T^\mu_\mu$ , door vergelijking (458) met gemengde componenten te schrijven,  $R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = \text{constante } T^\mu_\nu$ , en deze te contraheren door  $\mu = \nu$  te stellen (merk op dat  $\delta^\mu_\mu = 4$ ).

Om voortgang te kunnen maken, moeten we iets aannemen over de soort materie die het zwakke gravitationele veld produceert. We nemen hiervoor een perfecte vloeistof. Voor de meeste klassieke materieverdelingen geldt  $P/c^2 \ll \rho$  en we kunnen de energie-impuls tensor voor stof nemen. Er geldt

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu, \quad (476)$$

en hiermee vinden we  $T = \rho c^2$ . Verder nemen we aan dat de deeltjes die de vloeistof vormen, snelheden  $\vec{U}$  hebben die in ons coördinatenstelsel klein zijn ten opzichte van  $c$ . We doen de aanname  $\gamma_U \approx 1$  en dus  $U_0 \approx c$ . Vergelijking (475) reduceert dan tot

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx \frac{1}{2} \text{constante } \rho c^2. \quad (477)$$

We merken op dat  $\delta^{ij} \partial_i \partial_j = \nabla^2$ . Verder hebben we met vergelijking (468)  $h_{00} = 2\Phi/c^2$ , met  $\Phi$  de gravitatiepotentiaal. Als we de evenredigheidsconstante nu kiezen als constante  $= 8\pi G/c^4$ , dan vinden we de poissonvergelijking voor newtoniaanse gravitatie

$$\nabla^2 \Phi \approx 4\pi G \rho. \quad (478)$$

Deze identificatie verifieert onze aanname dat de evenredigheidsfactor tussen de einsteintensor en de energie-impuls tensor gelijk is aan  $8\pi G/c^4$ .

## D.9 De kosmologische constante

De einsteinvergelijkingen (458) zijn niet uniek. Einstein ontdekte al snel dat het niet mogelijk bleek om een statisch model van het universum te construeren op basis van de veldvergelijkingen. Deze vergelijkingen geven altijd oplossingen die corresponderen met een expanderend of contraherend heelal. Toen Einstein dit werk in 1916 uitvoerde was alleen onze melkweg bekend, en dat lijkt op een uniforme verdeling van vaste sterren. Door het invoeren van de kosmologische constante  $\Lambda$  was Einstein in staat om statische modellen van het universum te creëren (maar die blijken allemaal instabiel te zijn). Later werd ingezien dat de melkweg slechts één van de vele sterrenstelsels is, terwijl in 1929 Edwin Hubble de uitdijing van het universum ontdekte. Hij bepaalde de afstanden en roodverschuivingen van nabij gelegen sterrenstelsels en zag dat het universum expandeert.

Wat Einstein deed was het volgende. We weten dat  $\nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0$  en ook  $\nabla_\mu T_{\mu\nu} = 0$ , en ook  $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$ . We mogen elke constante veelvoud van  $g_{\mu\nu}$  optellen bij  $G_{\mu\nu}$  en krijgen dan nog steeds

een consistente verzameling veldvergelijkingen. Het is gebruikelijk om de evenredigheidsconstante aan te duiden met  $\Lambda$ , en we vinden dan

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (479)$$

waarbij  $\Lambda$  een nieuwe universele natuurconstante is, die we de kosmologische constante noemen. Wat we hiermee opgeven is dat de ‘gemodificeerde einsteintensor’  $G'_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$  niet meer gelijk is aan nul als ruimtetijd vlak is! Verder is  $G_{\mu\nu}$  niet meer een rechtstreekse maat voor de kromming.

Door vergelijking (479) weer met gemengde indices te schrijven en te contraheren vinden we  $R = \frac{8\pi G}{c^4}T + 4\Lambda$ . Invullen in vergelijking (479) levert

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (480)$$

We volgen nu dezelfde procedure als in sectie D.8 en vinden de veldvergelijkingen in de zwakke-veld limiet voor newtoniaanse gravitatie

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2. \quad (481)$$

Voor een sferische massa  $M$  vinden we het gravitatieveld

$$\vec{g} = \nabla\Phi = -\frac{3GM}{2r^2}\hat{r} + c^2\Lambda r\hat{r}, \quad (482)$$

en we zien dat de kosmologische term correspondeert met een gravitationele *afstoting*, waarvan de sterkte evenredig met  $r$  toeneemt.

Tegenwoordig hebben we een andere kijk op de kosmologische constante. Merk op dat de energie-impuls tensor van een perfecte vloeistof gegeven wordt door

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (483)$$

We stellen ons voor dat er een bepaalde ‘substantie’ is met een vreemde toestandsvergelijking  $P - \rho c^2$ . Een dergelijke substantie is iets dat we nog niet zijn tegengekomen, omdat het een negatieve druk heeft! De energie-impuls tensor voor deze substantie is

$$T_{\mu\nu} = -P g_{\mu\nu} = \rho c^2 g_{\mu\nu}. \quad (484)$$

Hierbij dienen we het volgende op te merken. Allereerst hangt de energie-impuls tensor voor deze vreemde substantie alleen van de metrische tensor af: het is derhalve een eigenschap van het vacuum zelf en we noemen  $\rho$  de energiedichtheid van het vacuum. Ten tweede, de vorm van  $T_{\mu\nu}$  is hetzelfde als die van de constante kosmologische term in vergelijking (479). We kunnen de kosmologische constante dus zien als een universele constante die de energiedichtheid van het vacuum bepaalt,

$$\rho_{\text{vacuum}}c^2 = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}. \quad (485)$$

Als we de energie-impuls tensor van het vacuum aanduiden met  $T_{\mu\nu}^{\text{vacuum}} = \rho_{\text{vacuum}}c^2 g_{\mu\nu}$ , kunnen we de gemodificeerde veldvergelijkingen schrijven als

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\text{vacuum}}), \quad (486)$$

met  $T_{\mu\nu}$  de energie-impuls tensor van de aanwezige materie of straling.

Als  $\Lambda \neq 0$ , dan dient hij op zijn minst zó klein te zijn dat  $\rho_{\text{vacuum}}$  verwaarloosbare gravitationele effecten heeft ( $|\rho_{\text{vacuum}}| < \rho_{\text{materie}}$ ) voor gevallen waarbij de newtoniaanse gravitatie theorie een goede beschrijving van de meetgegevens geeft. De systemen met kleinste dichtheid waarop de wetten van Newton worden toegepast, zijn kleine clusters van sterrenstelsels. Hiermee kunnen we de volgende limiet plaatsen

$$|\rho_{\text{vacuum}}c^2| = \left| \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right| \leq \rho_{\text{cluster}} \sim 10^{-29} \text{ g/cm}^{-3} \quad (487)$$

op de waarde van de kosmologische parameter. Het is evident dat  $\Lambda$  zó klein is, dat hij volledig onbelangrijk is op de schaal van een ster.

Hoe kunnen we de energiedichtheid van het vacuum berekenen? De eenvoudigste berekeningen sommeren de quantummechanische nulpuntsenergie van alle in de natuur bekende velden. Het antwoord dat gevonden wordt is ongeveer 120 ordes van grootte hoger dan de bovengrens op  $\Lambda$  die we net bepaald hebben. Dit is niet begrepen en er dient een fysisch mechanisme te bestaan dat de kosmologische constante klein maakt. Recente meetgegevens duiden erop dat de kosmologische constante niet precies gelijk is aan nul. De sterkste aanwijzing komt van metingen aan verre Type Ia supernovae, die zeggen dat de expansie van het universum op dit moment *toeneemt*. Zonder kosmologische constante verwachten we dat door de aantrekkende kracht van alle materie in het universum, de expansie zou vertragen en misschien zelfs aanleiding zou geven voor een contractie van het universum. Als de kosmologische constante echter van nul verschilt, kan de negatieve druk van het vacuum ervoor zorgen dat het universum versneld uitdijt.

## D.10 Alternatieve relativistische theorieën voor gravitatie

De einsteinvergelijkingen zijn niet uniek, zoals we gezien hebben in de vorige sectie. Het is ook mogelijk om radicaal nieuwe gravitatie theorieën te construeren. We bespreken in het volgende een aantal.

### D.10.1 Scalaire gravitatie theorieën

In de newtoniaanse beschrijving van gravitatie wordt het gravitatieveld voorgesteld door de scalar  $\Phi$ . Dit veld voldoet aan de poissonvergelijking  $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ . Omdat materie relativistisch wordt beschreven door de energie-impuls tensor  $T_{\mu\nu}$ , is de enige scalar met de dimensie massadichtheid die we kunnen maken  $T^\mu_\mu$ . Verder zijn plaats en tijd onderdeel van de viervector  $x^\mu$  en nemen we ook de afgeleide naar de tijd mee (via  $\square^2 \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu = -\partial_{ct} + \nabla^2$ ). Een consistente scalaire relativistische theorie van gravitatie wordt gegeven door de veldvergelijking

$$\square^2\Phi = -\frac{4\pi G}{c^2}T^\mu_\mu. \quad (488)$$

Deze theorie is echter onjuist gebleken (en voorspelde onder andere niet waargenomen effecten op de baan van mercurius). Verder is er geen koppeling tussen gravitatie en elektromagnetisme, waardoor we geen gravitationele roodverschuiving hebben, en ook geen afbuiging van licht door materie.

### D.10.2 Brans - Dicke theorie

Een gravitatie theorie gebaseerd op een vectorveld kan worden uitgesloten, omdat een dergelijke theorie voorspelt dat massieve deeltjes elkaar zullen afstoten in plaats van aantrekken. Het is wel mogelijk om relativistische theorieën te formuleren met combinaties van scalaire, vector en



tensorvelden. De meest belangrijke van dit soort theorieën is die van Robert Dicke en Carl Brans uit 1961. Brans en Dicke gingen in de formulering van hun theorie ook uit van het equivalentieprincipe en verkregen op die wijze een beschrijving van gravitatie in termen van kromming van ruimtetijd. In plaats van de gravitatieconstante  $G$  te behandelen als een natuurconstante, introduceerden ze een scalair veld  $\phi$  dat de sterkte van  $G$  bepaalt. Dit wil zeggen dat het scalaire veld  $\phi$  de sterkte van de koppeling van materie aan gravitatie bepaalt. De gekoppelde vergelijkingen voor het scalaire veld en het gravitatieveld kunnen geschreven worden als

$$\begin{aligned}\square^2\phi &= -4\pi\lambda(T^M)^\mu{}_\mu, \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \frac{8\pi}{c^4\phi}(T^M_{\mu\nu} + T^\phi_{\mu\nu}).\end{aligned}\tag{489}$$

We zien dat de effecten van materie worden voorgesteld door de energie-impuls tensor  $T^M_{\mu\nu}$  en een koppelingsconstante  $\lambda$  die het scalaire veld bepaalt. Het scalaire veld bepaalt de waarde van  $G$  en de veldvergelijkingen relateren de kromming aan de energie-impuls tensoren van het scalaire veld  $T^\phi_{\mu\nu}$  en de materie  $T^M_{\mu\nu}$ . Historisch wordt de koppelingsconstante geschreven als  $\lambda = 2/(3 + 2\omega)$ . In de limiet  $\omega \rightarrow \infty$  vinden we  $\lambda \rightarrow 0$ , en wordt  $\phi$  niet beïnvloed door de massaverdeling. We kunnen  $\phi$  dan gelijkstellen aan  $\phi = 1/G$ . In de limiet  $\omega \rightarrow 0$  gaat  $T^\phi_{\mu\nu} \rightarrow 0$  en reduceert de Brans-Dicke theorie tot die van Einstein.

De Brans-Dicke theorie is belangrijk, omdat hij laat zien dat men alternatieve theorieën kan ontwikkelen die consistent zijn met het equivalentieprincipe. Een van de voorspellingen van de Brans-Dicke theorie is dat de effectieve gravitatieconstante  $G$  een functie van de tijd kan zijn en bepaald wordt door het scalaire veld  $\phi$ . Een verandering in  $G$  zou de banen van planeten beïnvloeden en een redelijke conservatieve conclusie van meetgegevens zegt dat  $\omega \geq 500$ . Daarmee lijkt Einsteins theorie de correcte theorie voor gravitatie, althans voor lage energieën.

### D.10.3 Torsietheorieën

In onze discussie van gekromde ruimtetijd hebben we aangenomen dat de variëteit geen torsie heeft. Dit is geen noodzakelijke eis, en we kunnen de discussie van ruimtetijd generaliseren met een torsietensor,

$$T^\mu{}_{\nu\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu},\tag{490}$$

die niet gelijk is aan nul. Typisch wordt torsie veroorzaakt door de quantummechanische spin van deeltjes. Dergelijke theorieën zijn wiskundig gecompliceerd. Gravitatietheorieën met ruimtetijd torsie worden vaak Einstein-Cartan theorieën genoemd en zijn uitvoerig onderzocht.