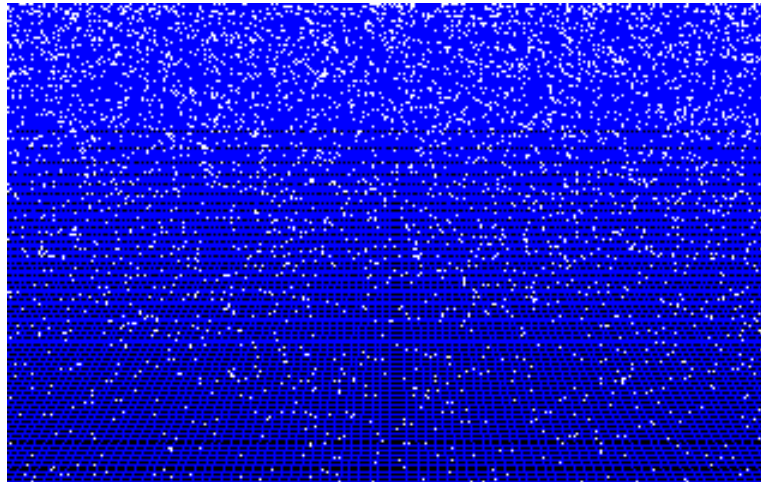


Gravitatie en kosmologie

FEW cursus



Jo van den Brand & Mark Beker
Relativistische kosmologie: 19 november 2009

Inhoud

- **Inleiding**
 - Overzicht
- **Klassieke mechanica**
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- **Quantumfenomenen**
 - Neutronensterren
- **Wiskunde I**
 - Tensoren
- **Speciale relativiteitstheorie**
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen
- **Wiskunde II**
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- **Algemene relativiteitstheorie**
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- **Kosmologie**
 - Friedmann
 - Inflatie
- **Gravitatiestraling**
 - Theorie
 - Experiment

Relativistische kosmologie

Theorie van de oerknal:
ontstaan van ruimtetijd,
het heelal dijt uit

Waarneembaar deel van het heelal valt
binnen de lichtkegel van de waarnemer

Er zijn grenzen aan het waarneembaar
gebied: de deeltjeshorizon

In de toekomst ziet hij meer van het heelal

Twee stelsels in tegenovergestelde richting
en op grote afstand van de waarnemer

Stelsels hebben geen tijd gehad om te
communiceren

Dit is het Big Bang scenario zonder inflatie

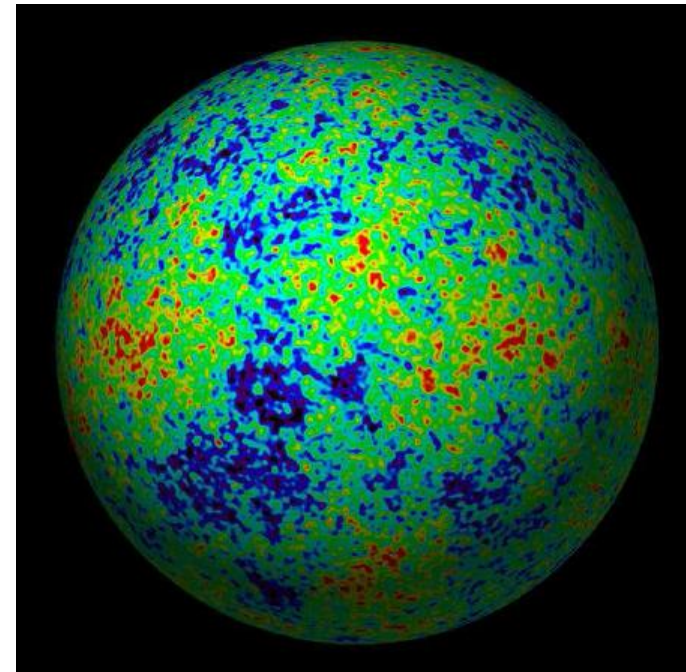


Isotropie van heelal

ART is voldoende voor beschrijving van Big Bang:
sterke en zwakke WW enkel op femtometers
sterrenstelsels en andere materie elektrisch neutraal

Nachthemel ziet er in elke richting hetzelfde uit op een
schaal groter dan 100 Mpc

Kosmische microgolf achtergrondstraling (CMBR)
 $T \approx 2,725$ K zwarte straler binnen 50 ppm
isotroop binnen 10 ppm
Voorspeld door Gamow
Ontdekt door Penzias en Wilson (1965)



Isotropie van heelal: CMBR en WMAP

Temperatuurverdeling in
galactische coördinaten

Straling van 380.000 jaar nBB
daarvoor H-atoom instabiel

T-variaties: Sachs-Wolfe effect:
gravitationele roodverschuiving

Conclusies: WMAP

leeftijd $13,72 \pm 0,12$ Gjaar

diameter > 78 Gly

gewone materie: $4,6 \pm 0,1\%$

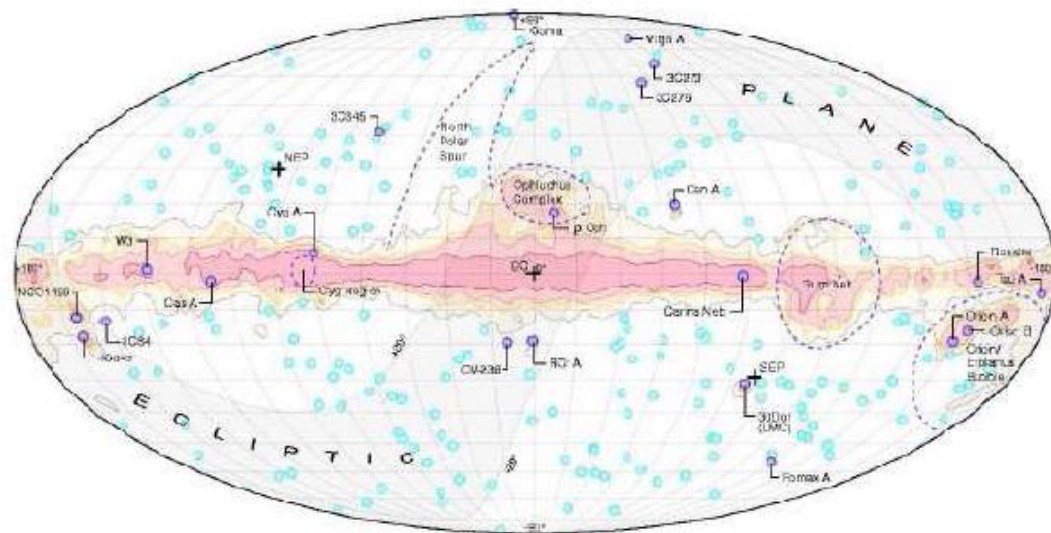
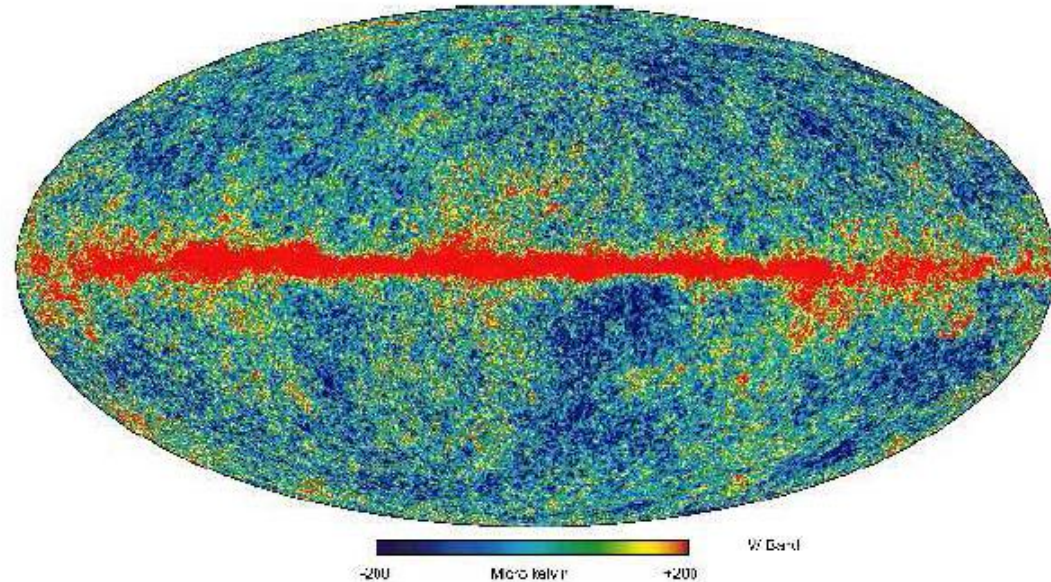
donkere materie: $23,3 \pm 1,3\%$

donkere energie: $72,1 \pm 1,5\%$

consistent met inflatiemodel

$H = 70,1 \pm 1,3$ km/s/Mpc

eeuwige expansie



Isotropie van heelal: materieverdeling

Galaxy Redshift Survey

245.591 objecten (sterrenstelsels)

In binnengebied: gaten, knopen en draden

Op grote schaal isotroop

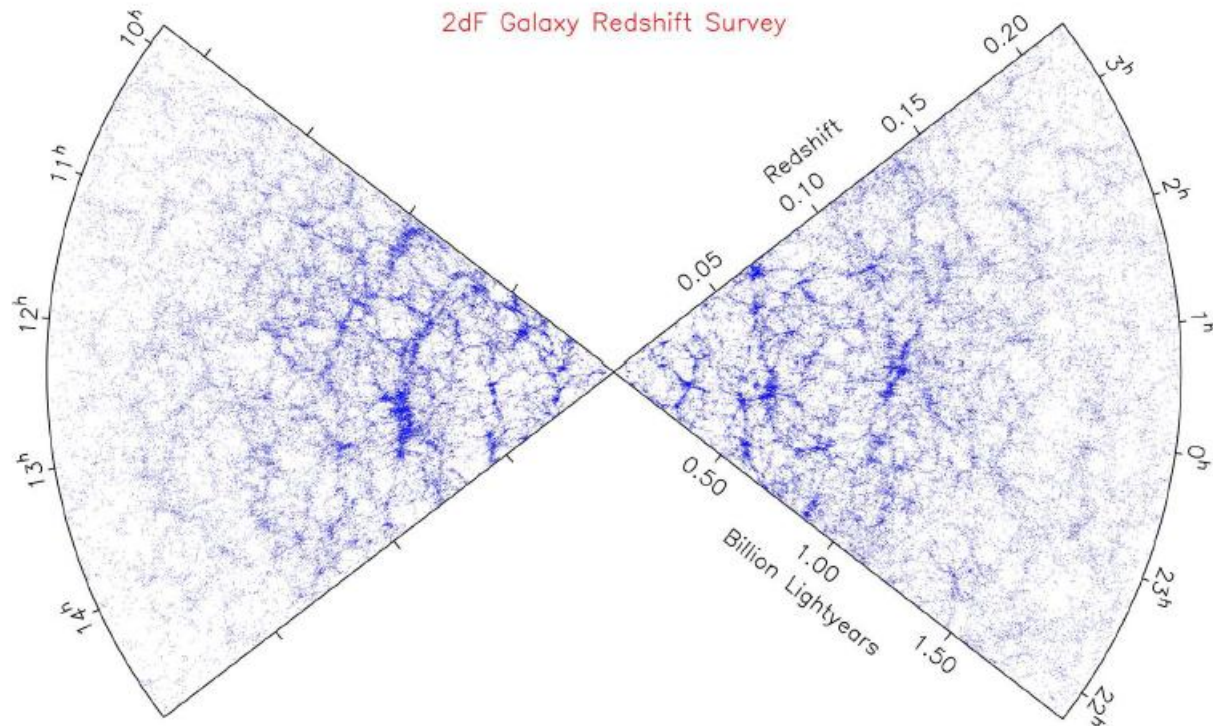
Aanname: aarde neemt
geen speciale plaats in



Heelal ziet er hetzelfde
uit vanuit elke positie



Homogeniteit



Kosmologisch principe: combinatie van isotropie en homogeniteit

Energie en materie gelijkmatig verdeeld op schaal groter dan 100 Mpc

Kosmologisch principe en metriek

Metriek die consistent is met KP kent geen voorkeursrichting of voorkeurspositie (dan heeft de energieverdeling dat ook niet)

Voorbeeld: Schwarzschildmetriek is isotroop, maar niet homogeen

Voorbeeld: Minkowskimetriek is isotroop en homogeen
echter oplossing van Einsteinvergelijkingen voor een leeg heelal

Voeg tijdafhankelijkheid toe aan Minkowskimetriek (dat is consistent met KP)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}$$

Schaalfactor $a(t)$

Vlakke Robertson – Walker metriek

Voor het lijn-element geldt
voor waarnemer die afstanden
wil meten ($dt = 0$)

$$\begin{aligned} \text{Eindige afstand } S &= \int a(t) d\vec{x} \\ &= a(t) \int d\vec{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 + a^2(t) dy^2 + a^2(t) dz^2 \\ &= a^2(t) dx^i dx_i \\ &= a^2(t) d\vec{x}^2, \end{aligned}$$

Coördinatenafstand $d\vec{x}$

Snelheid waarmee heelal uitdijt $\dot{a}(t)$

Kosmologische roodverschuiving

Lichtstraal volgt een lichtachtig pad (neem aan langs x-richting)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Lichtstraal uitgezonden op t_e (emissie) en ontvangen op t_o

Afgelegde coördinaatafstand R tussen emissie en ontvangst $R = \int_0^R dx = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)}$

Beschouw zender op grote coördinaatafstand R van ontvanger

Zender stuurt 2 pulsen met tijdsverschil δt_e

Ontvanger meet δt_o tijdsverschil (groter want heelal dijt uit)

Coördinaatafstand verandert niet (meebewegend stelsel – comoving frame)

$$\Rightarrow c \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \text{ met } \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o+\delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o+\delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = 0$$

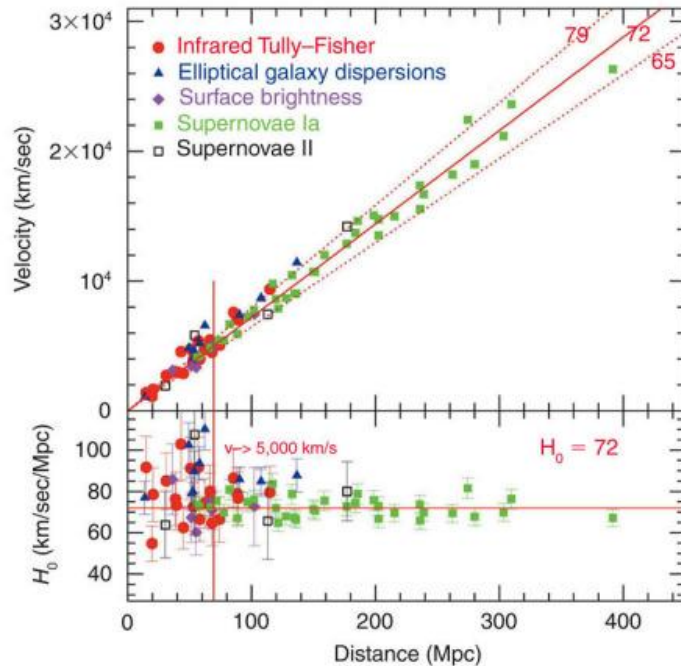
Neem aan δt_e en δt_o zo klein dat $a(t)$ constant $\Rightarrow \frac{\delta t_o}{\delta t_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$

Er geldt dus kosmologische roodverschuiving $1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \quad (\Delta\lambda/\lambda \equiv z)$

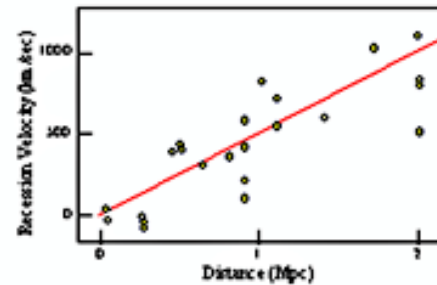
Wet van Hubble

Roodverschuiving in spectra

Hubble's original data
Standaardkaarsen
Cepheid variabelen
Supernovae Ia



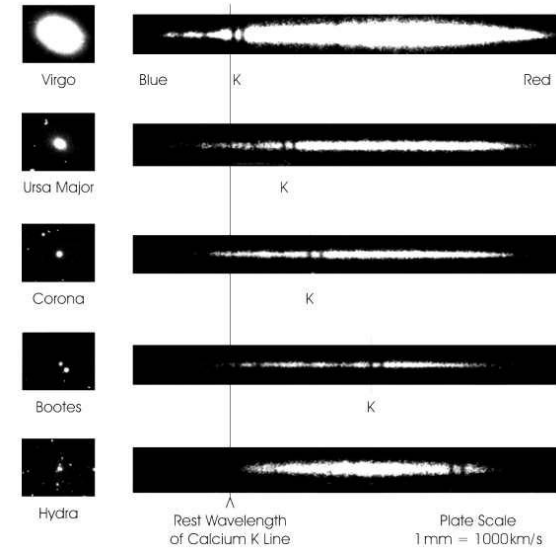
Hubble's Data (1929)



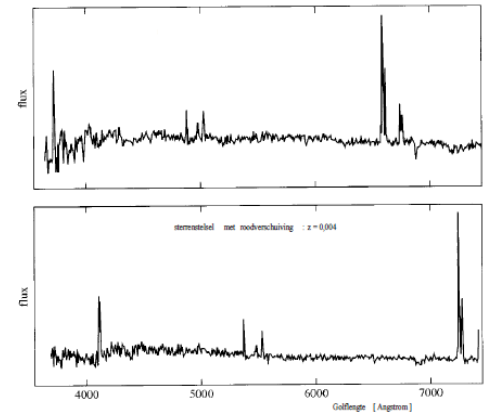
Spectrum van een ster als de zon



Spectrum van een ster als de zon, op 1 miljard lichtjaar



Expansie van het heelal



Wet van Hubble

Kosmologische roodverschuiving $1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$

Voor sterren die niet te ver weg staan ($a \approx \text{constant}$) geldt $a(t_e) \approx a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o)$

$$\Rightarrow 1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \approx \frac{a(t_o)}{a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o)} \approx \frac{a(t_o)}{a(t_o)(1 + \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}(t_e - t_o))} \approx \frac{1}{1 + \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}(t_e - t_o)}$$

(gebruik $(1 + x)^m \approx 1 + mx$)

$$\Rightarrow z \approx -\frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}(t_e - t_o)$$

Hubble constante

$$H(t_o) = 70,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

$$H(t_o) = 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

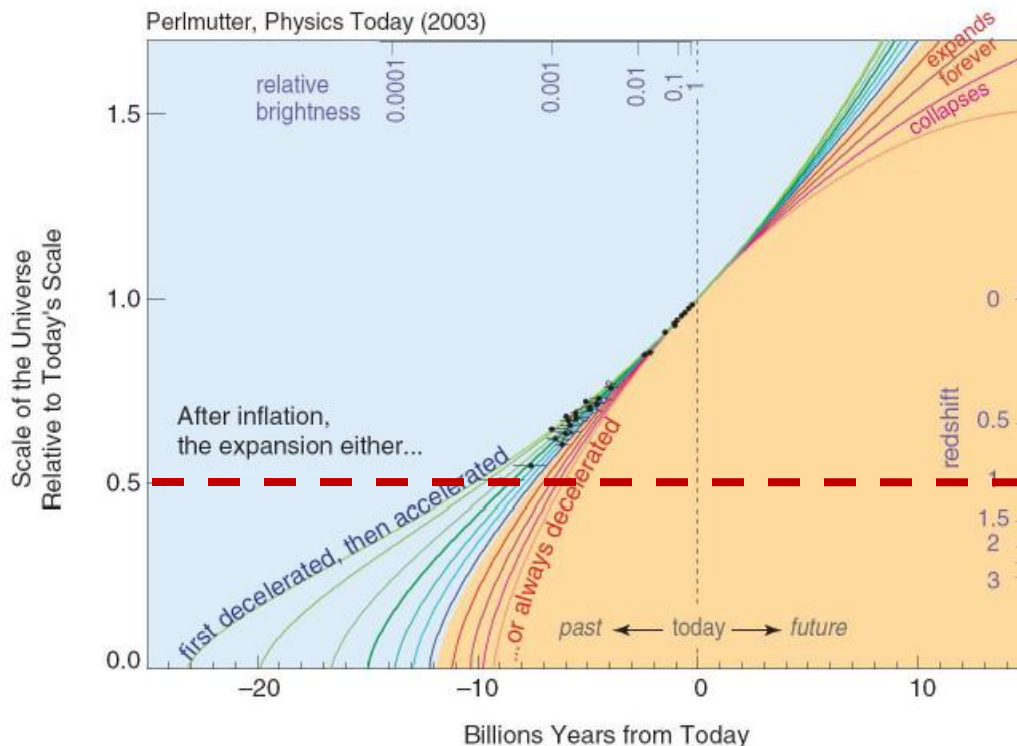
Kosmologische roodverschuiving:

heden $\rightarrow z = 0$

10 Gyr geleden $\rightarrow z = 1$

$z = 1 \rightarrow$ heelal half zo groot

Hubble constante is niet constant!



Friedmannvergelijkingen

Wat is de exacte vorm van de functie voor de schaalfactor $a(t)$?

Metriek volgt uit Einsteinvergelijkingen voor correcte energie-impulstensor T

Complicatie: tijdafhankelijkheid metriek heeft invloed op T (e.g. ballonmodel en P)

Kosmologisch principe:

geen plaatsafhankelijkheid
perfecte vloeistof

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu} \quad \rho \text{ nu als energiedichtheid}$$

Gebruik CMRF $\Rightarrow U^\mu = (c, 0, 0, 0)$

Bereken Riccitenor en
Riemannscalar voor

Robertson-Walker metriek

$$R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \quad R = -6 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 6 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}.$$

$$R_{ij} = -\left(2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)\right)\delta_{ij},$$

Invullen van $R_{\mu\nu}$, R en $T_{\mu\nu}$ in
Einsteinvergelijkingen



Relaties (twee) tussen schaalfactor,
druk en energiedichtheid

Voor $\mu = 0, \nu = 0$ $\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t),$

$\mu = i, \nu = i$ $\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}P(t)$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 &= +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(3P(t) + \rho(t)\right). \end{aligned}\right\}$$

Oerknal en Friedmannvergelijkingen

Dichtheid en druk zijn positieve grootheden (voor ons bekende materie en velden)

Dan $\ddot{a}(t)$ negatief volgens $\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (3P(t) + \rho(t))$

Uitdijingssnelheid neemt af in de tijd

Volgens experiment, $\dot{a}(t_{\text{nu}}) > 0$, dijt heelal nu uit



Schaalfactor $a(t)$ heeft ooit de waarde nul aangenomen

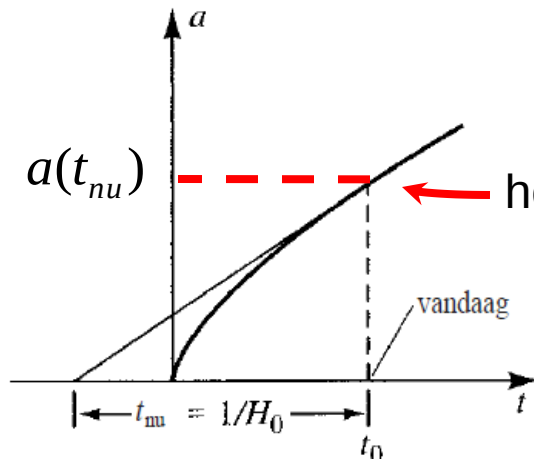
Friedmannvergelijkingen voorspellen

alle materie en energie ooit opgesloten in volume $V = 0$

ruimtetijd is begonnen als *singulariteit* met oneindige energiedichtheid

generieke conclusie voor alle oplossingen van Friedmannvergelijkingen

Leeftijd van het heelal



$$\dot{a}(t_{\text{nu}}) = \frac{a(t_{\text{nu}})}{t_{\text{nu}}} \Rightarrow t_{\text{nu}} = \frac{a(t_{\text{nu}})}{\dot{a}(t_{\text{nu}})} \approx \frac{1}{H}$$

Leeftijd van het heelal < 15 Gjaar

Energiedichtheid in heelal

Heelal bestaat uit

koude materie: atomen, molekulen, aarde, sterren, donkere materie, etc.

straling: fotonen van sterren, fotonen van CMB, neutrino's, etc.

kosmologische constante: donkere energie, vacuum energie, quintessence veld, etc.

Voor elk van deze soorten energie en materie geldt dat er een verband tussen energiedichtheid en druk bestaat

Toestandsvergelijking $P(t) = n\rho(t)$ volgt uit Friedmannvergelijkingen

Energiedichtheid: energie gedeeld door fysisch volume

Fysisch volume bepaald door $a^3(t)$

Koude materie $\rho(t) = \frac{A}{a^3(t)}$ Hoeveelheid materie constant (= A) en wordt niet omgezet naar andere soorten energie

Straling $\rho(t) = \frac{A}{a^4(t)}$ Extra afname t.g.v. kosmologische roodverschuiving
 $E = h\nu = \hbar\omega = (2\pi\hbar c)/\lambda$ evenredig met schaafactor

Kosmologische constante $\rho(t) = \rho_c = \text{const.}$ Neemt niet af tijdens uitdijen of krimpen van heelal

Heelal gedomineerd door koude materie

Koude materie $\rho(t) = \frac{A}{a^3(t)}$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 &= + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= - \frac{4\pi G}{3c^2} (3P(t) + \rho(t)). \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{a}^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{A}{a(t)}, \\ \ddot{a}(t) &= - \frac{4\pi G}{3c^2} (1 + 3n) \frac{A}{a^2(t)}. \end{aligned}$$

Bepaal constante $n \Rightarrow$ differentieer 1e FV $2\ddot{a}(t) = - \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{A}{a^2(t)}$

invullen in 2e FV $-\frac{4\pi G}{3c^2} A = - \frac{4\pi G}{3c^2} (1 + 3n) A$

$\Rightarrow n = 0, P = 0$

Er geldt $a(t)\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} A,$

$$a^2(t)\ddot{a}(t) = - \frac{4\pi G}{3c^2} A.$$

$\Rightarrow a(t) = Bt^{2/3}$

Hieruit volgt ook direct $\dot{a}(t) > 0$ en $\ddot{a} < 0$

Heelal gedomineerd door straling

Straling $\rho(t) = \frac{A}{a^4(t)}$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 &= + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= - \frac{4\pi G}{3c^2} (3P(t) + \rho(t)). \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = 1/3 \text{ en dus } P(t) = \frac{A}{3} \frac{1}{a^4(t)}$$

Er geldt $a^2(t)\dot{a}^2(t) = + \frac{8\pi G}{3c^2} A,$
 $a^3(t)\ddot{a}(t) = - \frac{8\pi G}{3c^2} A.$

$$\Rightarrow a(t) = B\sqrt{t}$$

Hieruit volgt ook direct $\dot{a}(t) > 0$ en $\ddot{a} < 0$

Uitdijing van een stralingsgedomineerd heelal gaat sneller

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{2} B t^{-\frac{1}{2}}$$

Heelal gedomineerd door Λ

Kosmologische constante $\rho(t) = \rho_c = \text{const.}$

Voor normale straling en materie neemt dichtheid af als energie over groter volume wordt uitgesmeerd

Eigenschap van ruimtetijd zelf (driekwart van alle energie is van deze vorm!)

Friedmannvergelijkingen leveren $n = -1$

Druk is negatief!!!

$$P(t) = -\rho(t) = -\rho_c = \text{const.}$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_c, \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_c. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2} \rho_c} t}$$

Uitdijing is exponentieel en verloopt steeds sneller

Standaardmodel van de kosmologie

Model van de geschiedenis van het heelal

Interactie tussen deeltjes vindt plaats door uitzending van fotonen en gluonen, etc. → straling

Energie per foton: energiedichtheid × volume $E_{\text{foton}} \propto \frac{1}{a(t)}$

Dominatie door straling of materie levert

$$E_{\text{foton, straling}} = A_{\text{straling}} t^{-1/2},$$

$$E_{\text{foton, materie}} = A_{\text{materie}} t^{-2/3}$$

Experimenteel gegeven: op dit moment geldt $\left(\frac{\rho_{\text{materie}}}{\rho_{\text{fotonen}}} \right)_{\text{nu}} \approx 1000$

Materie $\rho(t) = \frac{A}{a^3(t)}$ straling $\rho(t) = \frac{A}{a^4(t)}$ $\Rightarrow a(t_{\text{nu}}) = \frac{A_{\text{materie}}}{A_{\text{straling}}} 1000$

Toen bijdrage straling en materie even groot waren $\left(\frac{\rho_{\text{materie}}}{\rho_{\text{fotonen}}} \right)_{\text{omslag}} \equiv 1 \Rightarrow a(t_{\text{omslag}}) = \frac{A_{\text{materie}}}{A_{\text{straling}}}$

We vinden hiermee $(a)_{\text{nu}} = 1000 \cdot (a)_{\text{omslag}}$ heelal 1000 keer kleiner

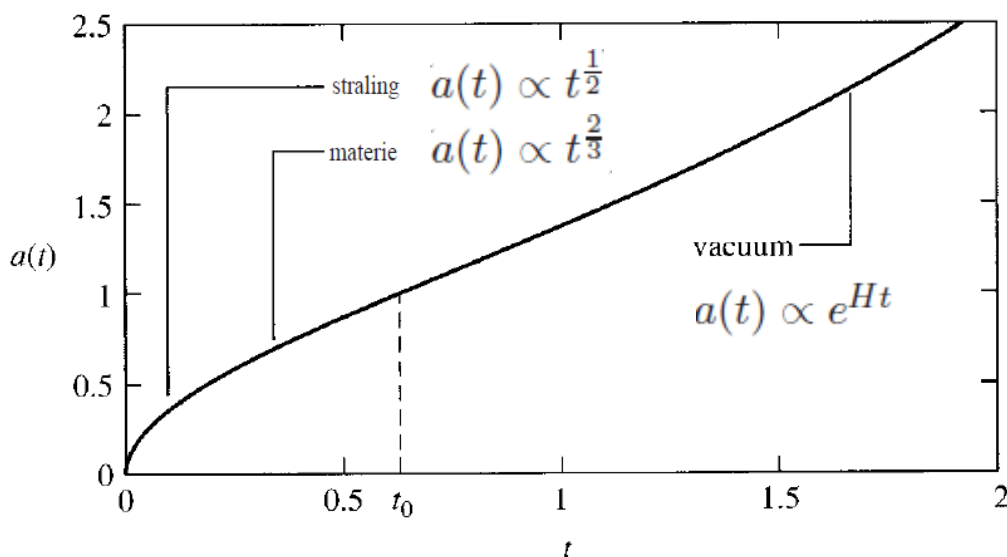
Ook geldt $t_{\text{nu}}^{2/3} = 1000 t_{\text{omslag}}^{2/3} \rightarrow t_{\text{omslag}} \approx \frac{t_{\text{nu}}}{10^5}$

Omslag van straling- naar materie dominantie vond plaats toen het heelal ongeveer 100.000 jaar oud was

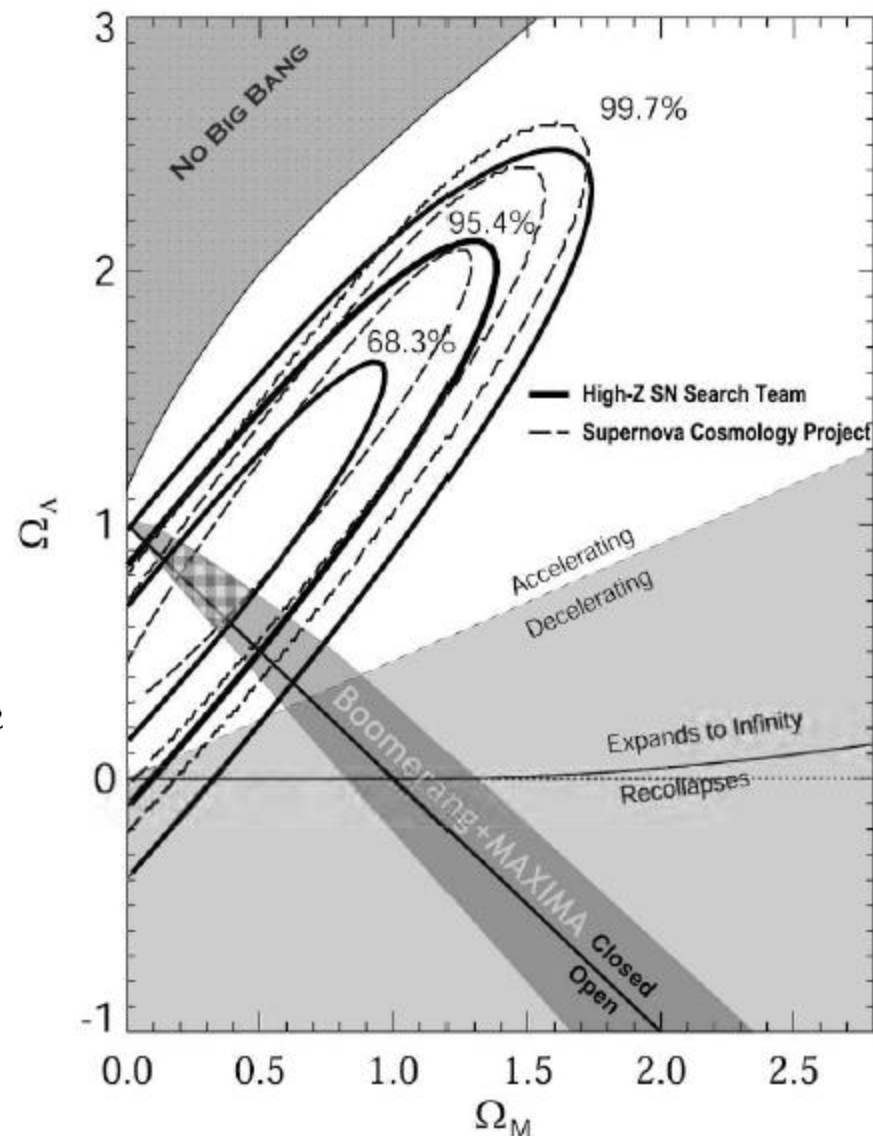
Standaardmodel van de kosmologie

Evolutie heelal voor vlakke FRW model.

Aanname: energie gelijk verdeeld over straling, materie en vacuum



Ia – supernovae en CMBR



Baryogenese

Berekenen van A_{straling} en A_{materie}

Fotonen hebben nu een temperatuur van 2.7 K (dat is 10^{-23} Joule)

Heelal is nu materie gedomineerd en 10^{10} jaar oud

$$E_{\text{foton, materie}} = A_{\text{materie}} t^{-2/3} \quad \Rightarrow \quad A_{\text{materie}} \approx 10^{-12} J s^{2/3} \approx 10^{-2} \text{GeV} s^{2/3}$$

Ten tijde van het omslagpunt geldt

$$(E_{\text{foton, straling}})_{\text{omslag}} \equiv (E_{\text{foton, materie}})_{\text{omslag}}$$

Er geldt $A_{\text{straling}} \approx 10^{-13} J s^{1/2} \approx 10^{-3} \text{GeV} s^{1/2}$

Baryogenese bij energie van ongeveer 1 GeV

Heelal was toen stralingsgedomineerd

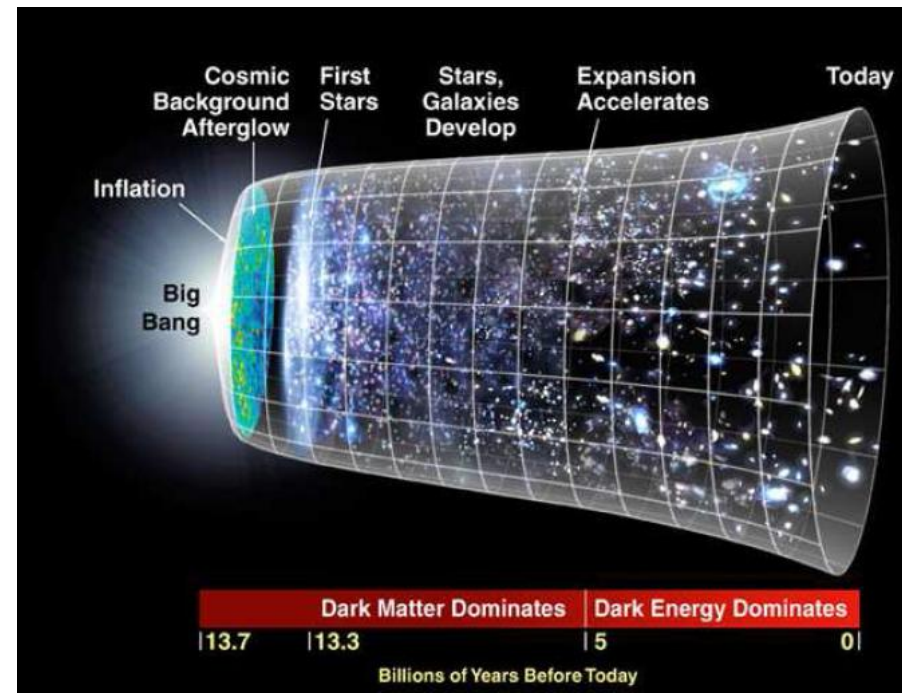
$$E_{\text{foton, straling}} = A_{\text{straling}} t^{-1/2}$$

Invullen van 1 GeV levert leeftijd van ongeveer 10^{-4} seconde

Elektrozwakke unificatie bij ongeveer 1000 GeV en dus 10^{-10} seconde

Geschiedenis heelal

Gebeurtenis	Fysische gebeurtenis	Energie per foton	Leeftijd
oerknal	begin van het heelal	∞ (?)	0 s
inflatie	heelal dijt versneld uit	?	?
ontkoppeling	elektrozwakke kracht onkoppelt	10^3 GeV	10^{-10} s
baryogenese	quarks vormen baryonen	1 GeV	10^{-4} s
nucleosynthese	baryonen vormen atoomkernen	10^{-3} GeV	100 s
recombinatie	elektronen binden aan atoomkernen	10^{-9} GeV	10^5 jaar
omslag	heelal wordt materiegedomineerd	10^{-9} GeV	10^5 jaar
het heden	fotonen hebben energie van 2,7 Kelvin	10^{-12} GeV	10^{10} jaar



Primordiale nucleosynthese

Drie minuten ($E = 2.2 \text{ MeV}$) na oerknal was deuterium stabiel $n + p \rightarrow d + \gamma$

Neutron- en protonvangst levert ${}^3\text{H}$ en ${}^3\text{He}$

Vorming van ${}^4\text{He}$ door n-vangst en reactie $d {}^3\text{He} \rightarrow p {}^4\text{He}$

Botsingen van ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$
en ${}^4\text{He}$ levert ${}^7\text{Li}$ en ${}^7\text{Be}$

Hoeveelheden van ${}^3\text{H}$,
 ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ en ${}^7\text{Be}$ is
gevoelig voor baryon
dichtheid en snelheid
van de expansie

Expansiesnelheid neemt
toe met aantal
neutrino families

Verhouding baryonen tot
fotonen $\sim 3 \times 10^{-10}$

