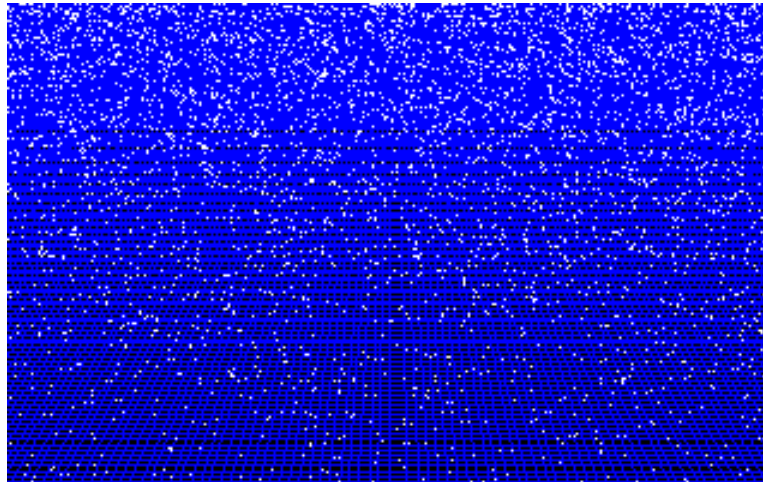


# Gravitatie en kosmologie

FEW cursus



**Jo van den Brand & Joris van Heijningen**

**Zwarte gaten: 17 November 2015**

**Copyright (C) Vrije Universiteit 2009**

# Inhoud

- **Inleiding**
  - Overzicht
- **Klassieke mechanica**
  - Galileo, Newton
  - Lagrange formalisme
- **Quantumfenomenen**
  - Neutronensterren
- **Wiskunde I**
  - Tensoren
- **Speciale relativiteitstheorie**
  - Minkowski
  - Ruimtetijd diagrammen
  - Lagrangiaan en EM
- **Wiskunde II**
  - Algemene coördinaten
  - Covariante afgeleide
- **Algemene relativiteitstheorie**
  - Einsteinvergelijkingen
  - Newton als limiet
  - Sferische oplossingen
  - Zwarte gaten
- **Kosmologie**
  - Friedmann
- **Gravitatiestraling**
  - Theorie en experiment

# Zwarte gaten

---

Een zwart gat is een gebied in ruimtetijd waar materie en straling in kunnen gaan, maar waaruit ze niet kunnen ontsnappen. Het is een *structuur in ruimtetijd* en verschilt hiermee aanzienlijk van materiële objecten zoals (neutronen)sterren, *etc.*

Een zwart gat is omgeven door een *event horizon*: een gesloten oppervlak waardoor licht naar binnen kan vallen, maar niet meer uit kan ontsnappen

Het meest eenvoudige zwarte gat wordt beschreven door de Schwarzschild metriek, waarbij de event horizon zich bevindt op  $r = R_S = 2GM/c^2$

Merk op dat dezelfde uitdrukking ook volgt uit een klassieke berekening, waarbij we de *escape velocity* gelijkstellen aan de lichtsnelheid

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{es}^2 &= \frac{GMm}{R} \\ v_{escape} &> c \end{aligned} \right\} R < \frac{2GM}{c^2}$$

Chandrasekhar vond in 1931 dat er een bovenlimiet van ongeveer 1.4 zonnemassa's is voor de massa van een witte dwerg, vanwege de druk door ontaardheid van elektronen. Boven deze limiet volgt gravitationele ineenstorting

Landau voorspelt (1932) neutronensterren

Oppenheimer voorspelt (1939) dat neutronensterren een maximum massa van ongeveer 3 zonnemassa's hebben: de ontdekking van zwarte gaten

Object	Straal (in m)	Massa (in kg)	Schwarzschild straal
Aarde	$6,3 \cdot 10^6$	$6,6 \cdot 10^{24}$	1 cm
Jupiter	$7,0 \cdot 10^7$	$2,1 \cdot 10^{27}$	3 meter
Zon	$7,0 \cdot 10^8$	$2,0 \cdot 10^{30}$	3 kilometer

# Klassificatie van zwarte gaten

---

## Eigenschappen van het zwarte gat

- Enkel massa
- Massa en impulsmoment
- Massa en elektrische lading
- Massa, impulsmoment en elektrische lading

## Metriek

- Schwarzschild
- Kerr
- Reissner-Nordstrom
- Kerr-Newman

We verwachten dat fysische zwarte gaten impulsmoment hebben, maar waarschijnlijk geen elektrische lading (vanwege de vorming uit neutrale atomen)

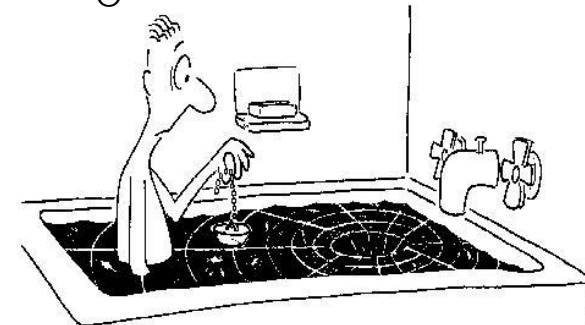
We kunnen zwarte gaten ook classificeren op basis van astrofysische eigenschappen

## Klasse

- Micro zwarte gaten
- Sterrenmassa zwarte gaten
- Intermediaire zwarte gaten
- Supermassieve zwarte gaten

## Massagebied

- 0 tot  $0.1 M_{\odot}$
- 0.1 tot  $300 M_{\odot}$
- 300 tot  $10^5 M_{\odot}$
- $10^5 M_{\odot}$  tot  $10^{10} M_{\odot}$



# Soorten zwarte gaten

---

Supermassieve ZG

$10^5 M_{\odot}$  tot  $10^{10} M_{\odot}$

- Gevonden in centrum meeste sterrenstelsels
- Verantwoordelijk voor Active Galactic Nuclei
- Kunnen direct en indirect gevormd worden

Intermediaire-massa ZG

300 tot  $10^5 M_{\odot}$

- Mogelijk gevonden in dichte sterrenclusters
- Mogelijke verklaring voor Ultra-luminous X-Rays
- Moeten indirect gevormd worden

Sterrenmassa ZG

0.1 tot  $300 M_{\odot}$

- Resten van zeer zware sterren
- Verantwoordelijk voor Gamma Ray Bursts
- Direct gevormd

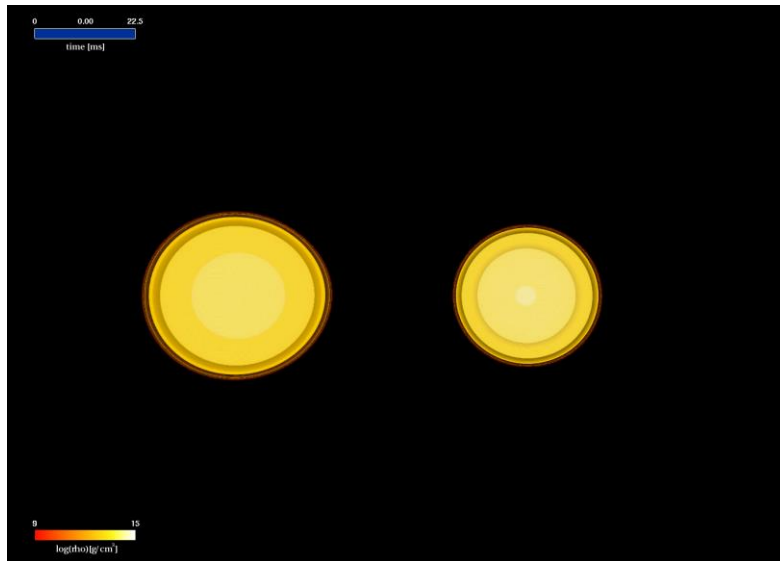
Micro ZG

0 tot  $0.1 M_{\odot}$

- Quantumeffecten worden relevant
- Voorspeld door enkele inflatiemodellen
- Misschien geproduceerd in kosmische straling
- De reden dat LHC de Aarde zal vernietigen ...

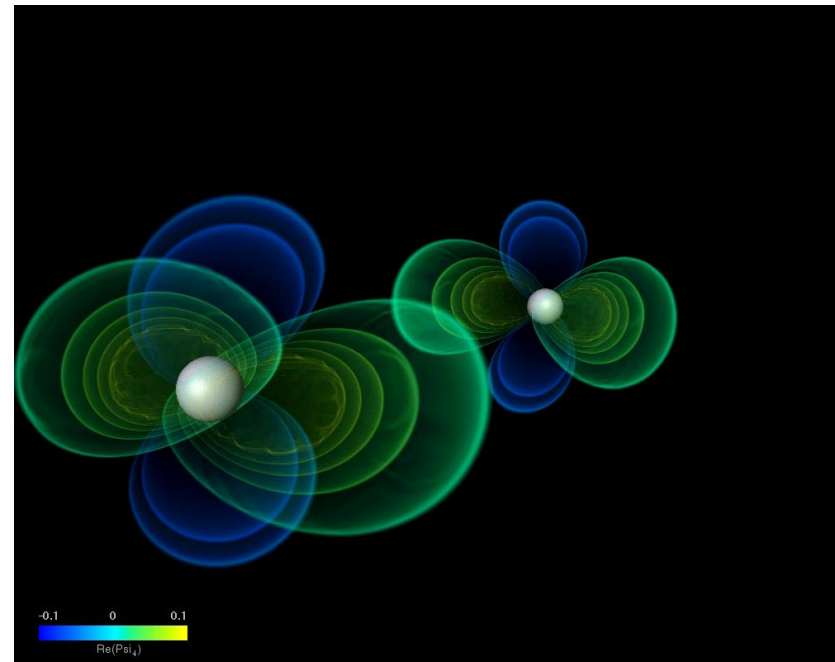
# Numerieke relativiteitstheorie

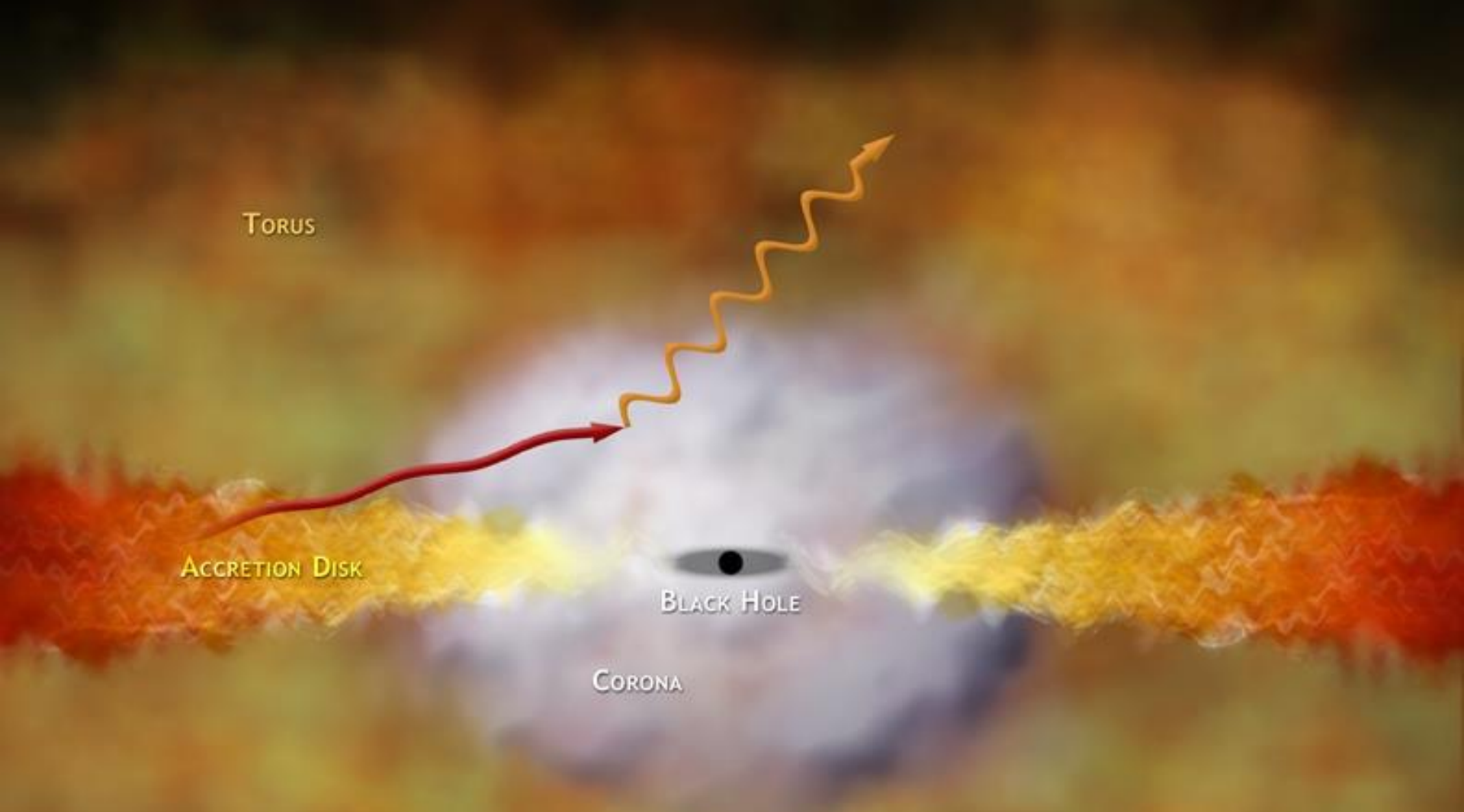
Vorming van een zwart gat uit  
samensmelting van neutronensterren.  
Merk op dat er een accretieschijf ontstaat



Credit: Luciano Rezzolla

Coalescence van twee zwarte gaten:  
een zuiver ruimtetijd proces

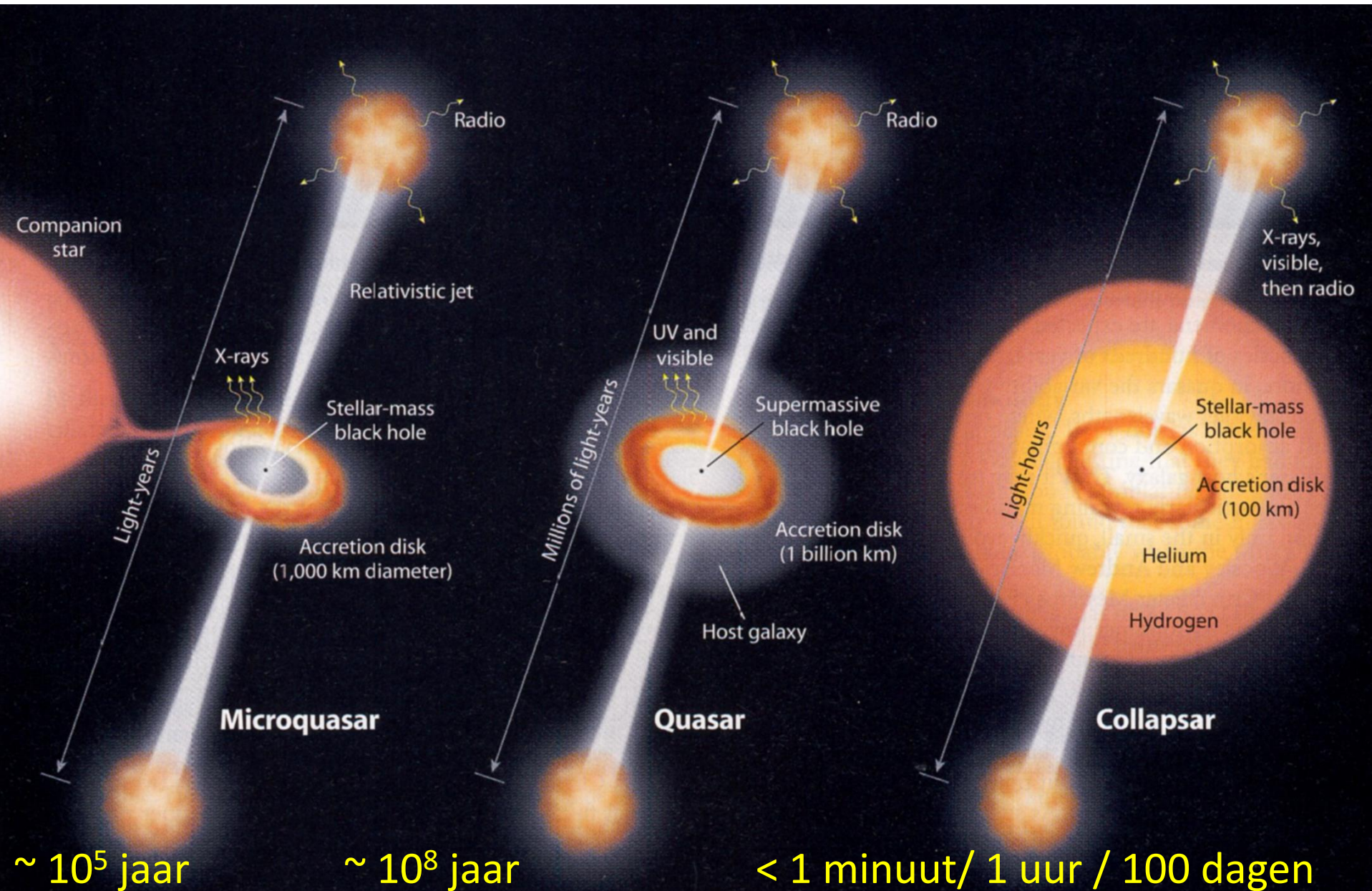




Nabij een zwart gat wordt veel straling geproduceerd



# Microquasar, quasar, en gamma-flits

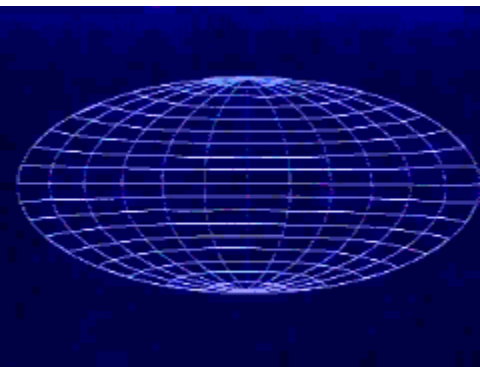
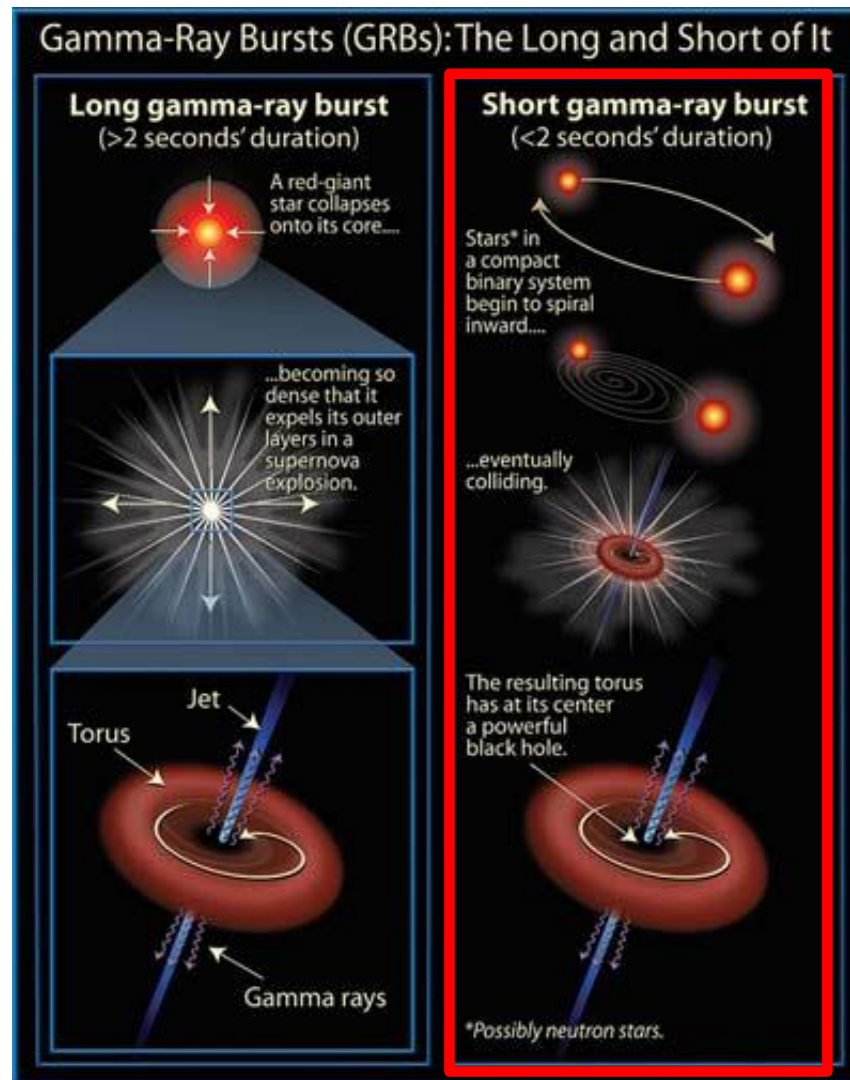




# Burst bronnen: gamma-ray bursts

- Recente satelliet missies tonen reeks explosieve gebeurtenissen in Universum die enorme hoeveelheden energie genereren

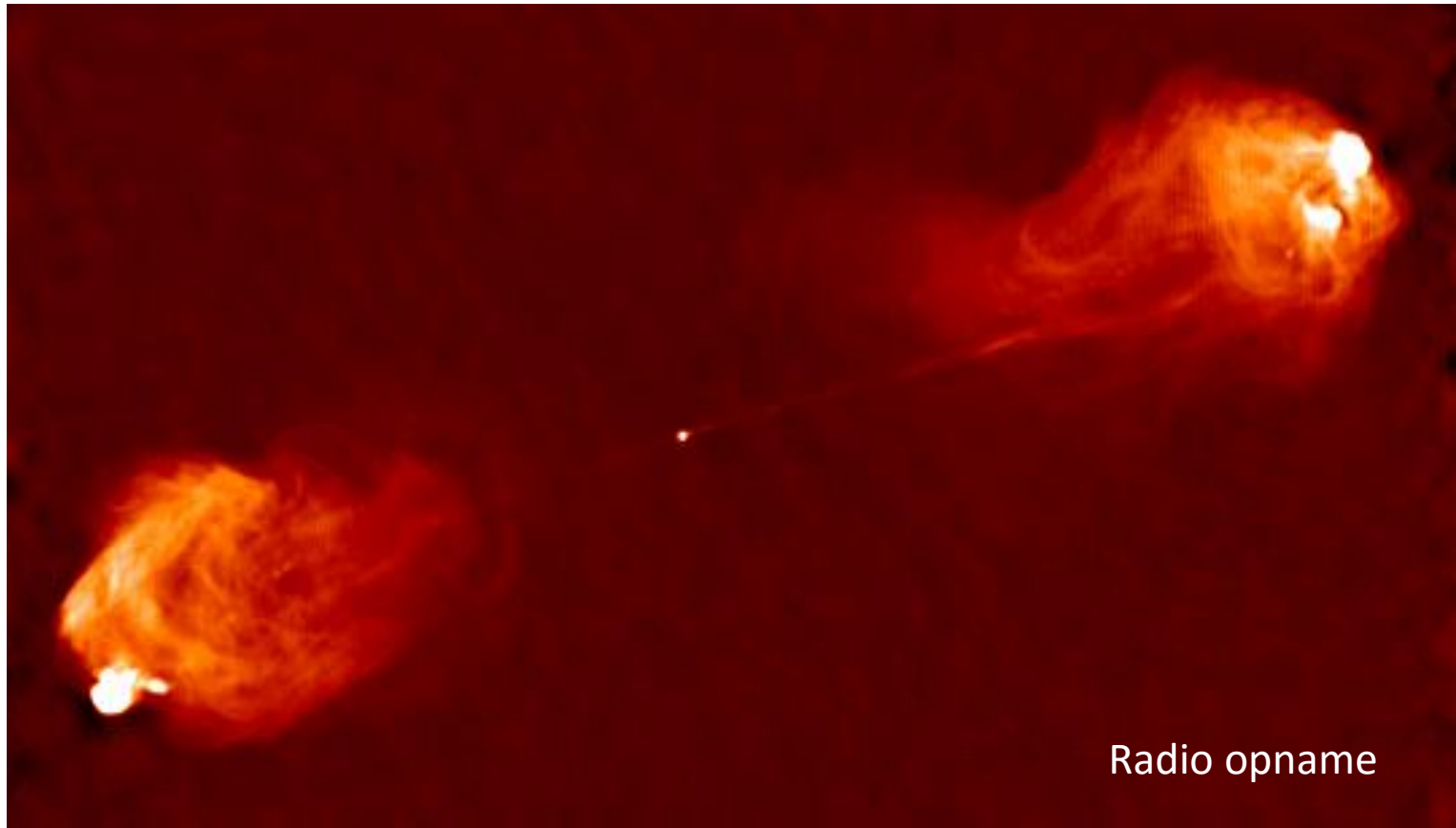
De oorsprong van GRB is nog steeds onbekend. Er zijn diverse modellen



# Radiostelsel Cygnus A

---

De jets hebben een totale lengte van ongeveer 500.000 lichtjaar, waarbij de orientatie van het zwarte gat gefixeerd is door haar spin



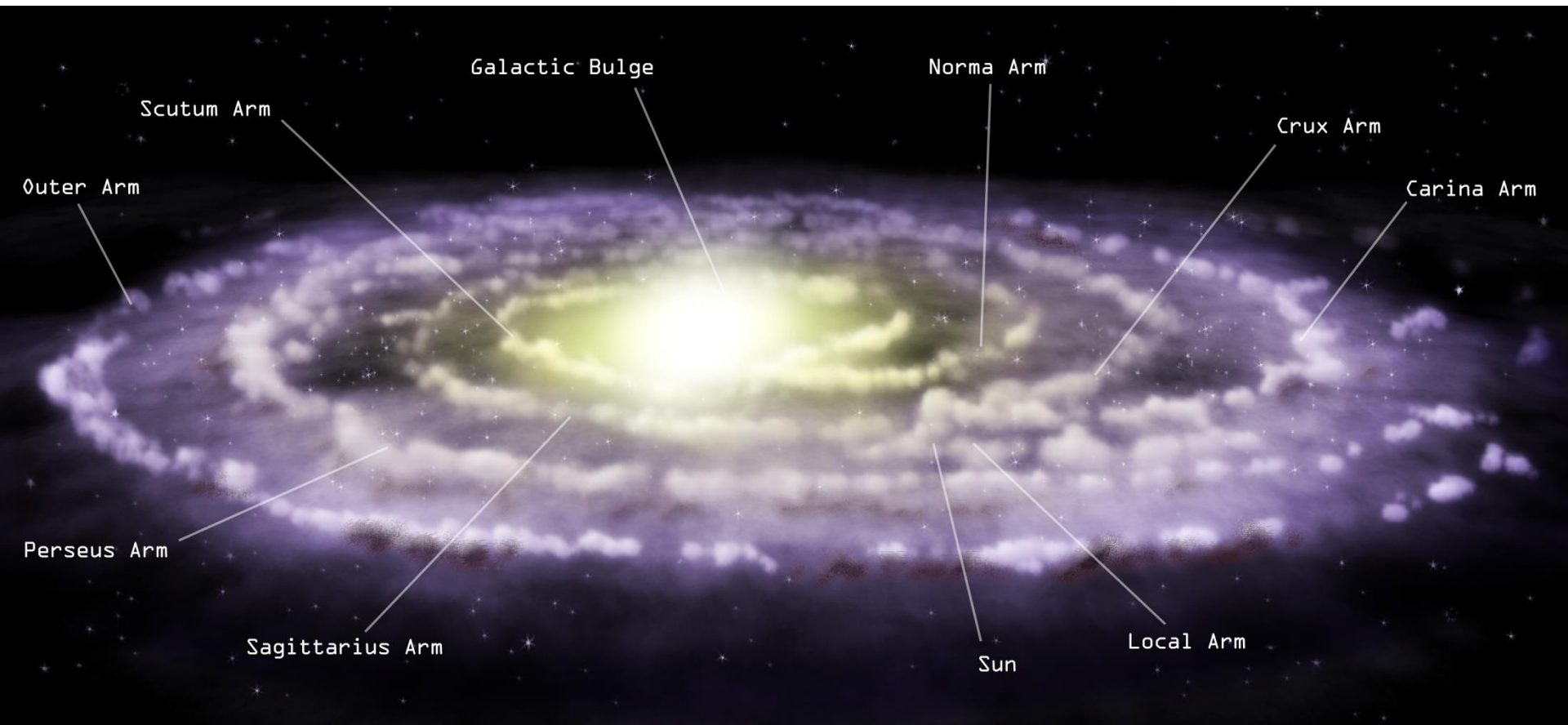
Radio opname

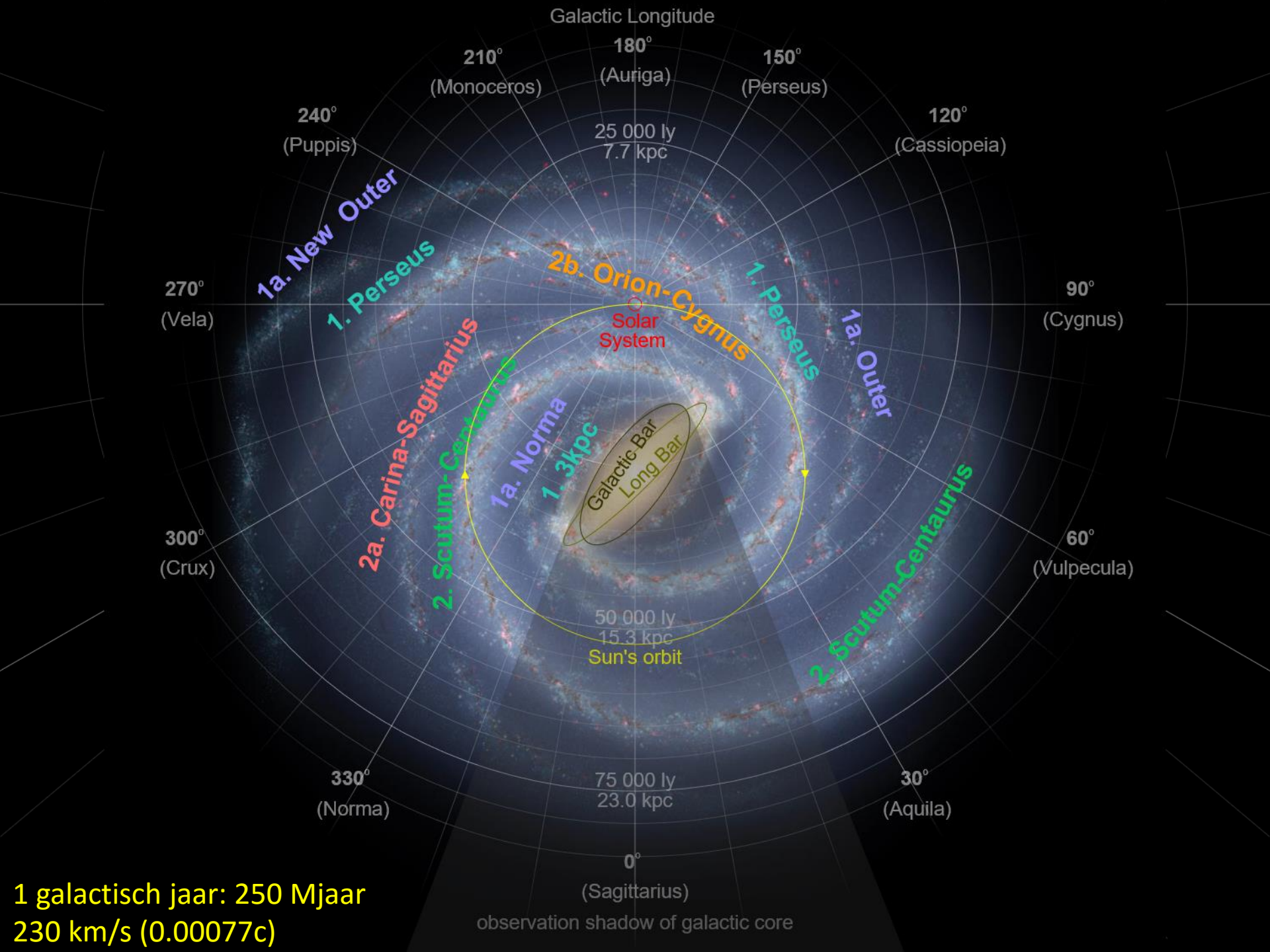
# Supermassieve zwarte gaten

---

In vele sterrenstelsels schuilt een zwart gat

- Ons eigen melkwegstelsel:  $M \sim 10^6 M_{\text{Zon}}$
- Actieve Sterrenstelsels:  $M \sim 10^8 M_{\text{Zon}}$





1 galactisch jaar: 250 Mjaar  
 230 km/s (0.00077c)





Kern van ons melkwegstelsel  
wordt verduisterd door stof



## Combined 2MASS-MSX View of the Galactic Center



Two Micron All Sky Survey  
– Southern Facility –  
2MASS Atlas Image Mosaic

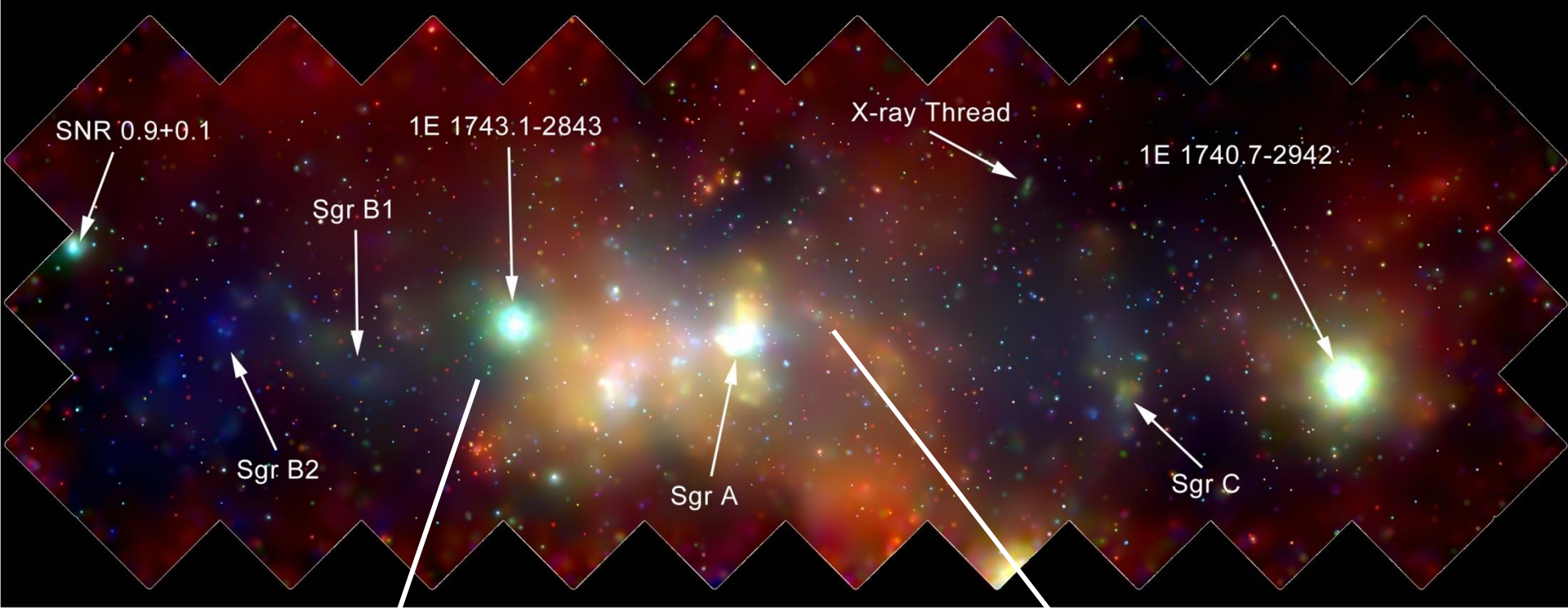
Infrared Processing and Analysis Center & University of Massachusetts



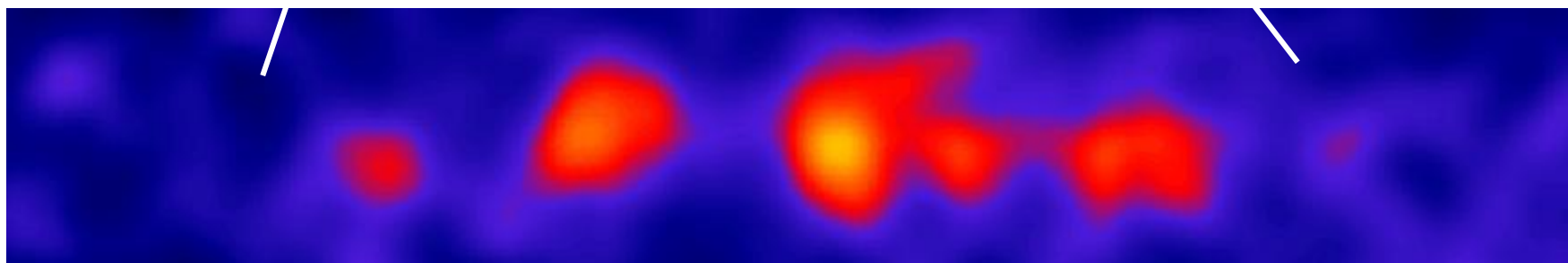
Midcourse Space Experiment  
SPIRIT III

Infrarood telescopen kijken door het stof heen





Röntgenstrahlung



Gammastrahlung

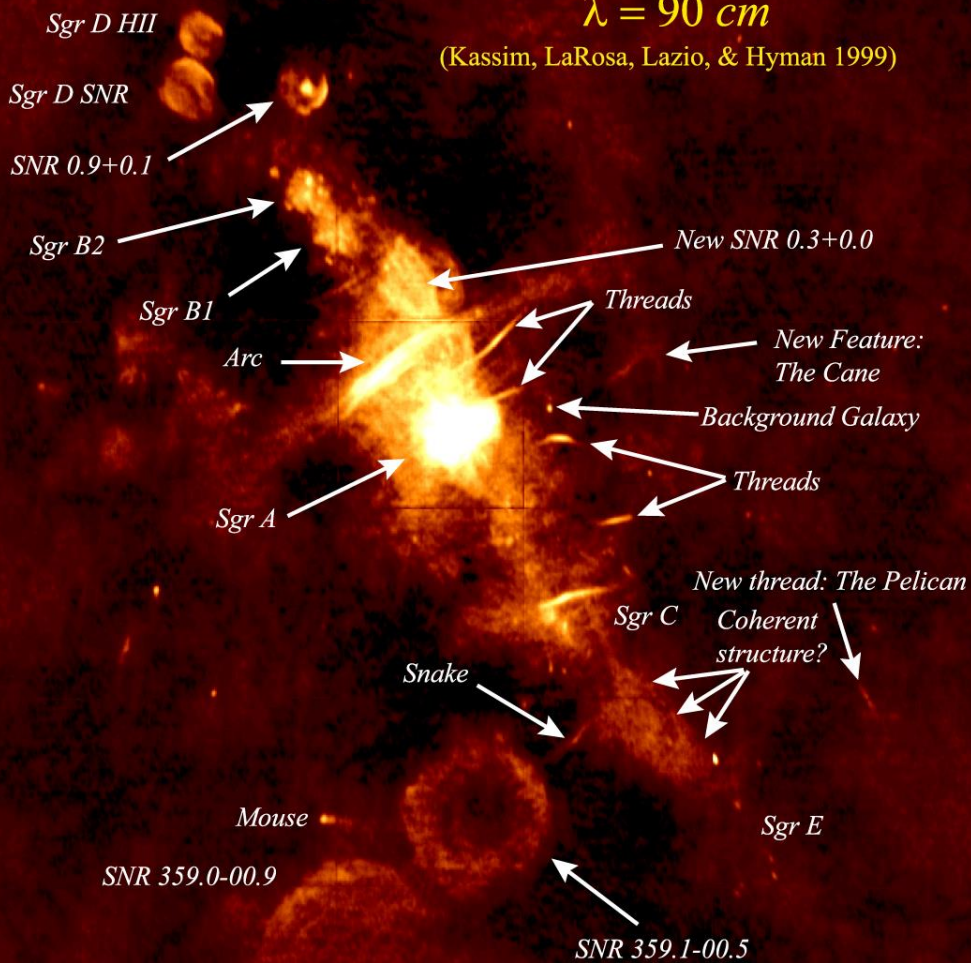


Naval Research Laboratory

# Wide-Field Radio Image of the Galactic Center

## $\lambda = 90 \text{ cm}$

(Kassim, LaRosa, Lazio, & Hyman 1999)



~0.5°  
 ~75 pc  
 ~240 light years

Tornado (SNR?)

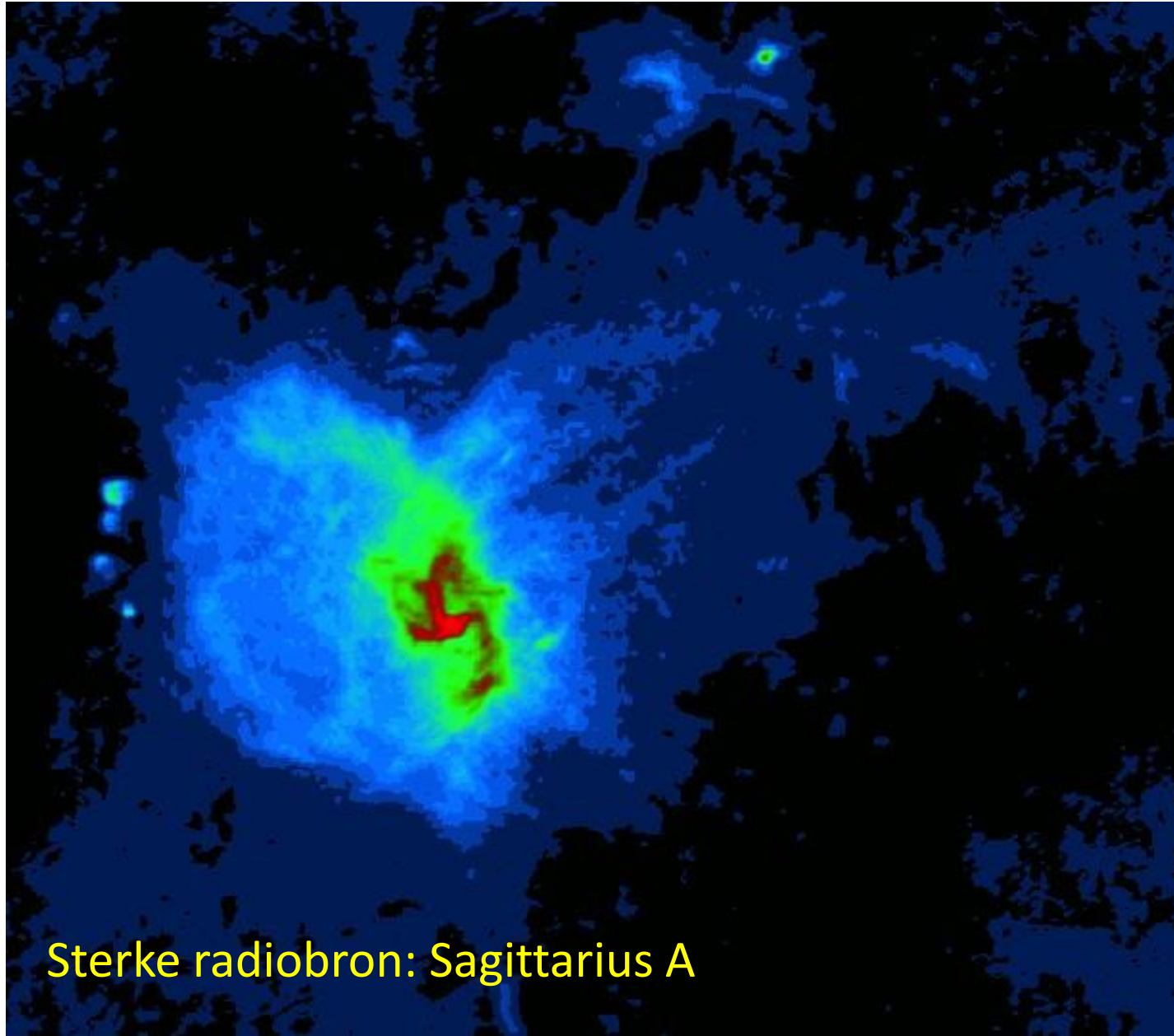






# Kern van melkwegstelsel (radio)

---



Sterke radiobron: Sagittarius A



1'

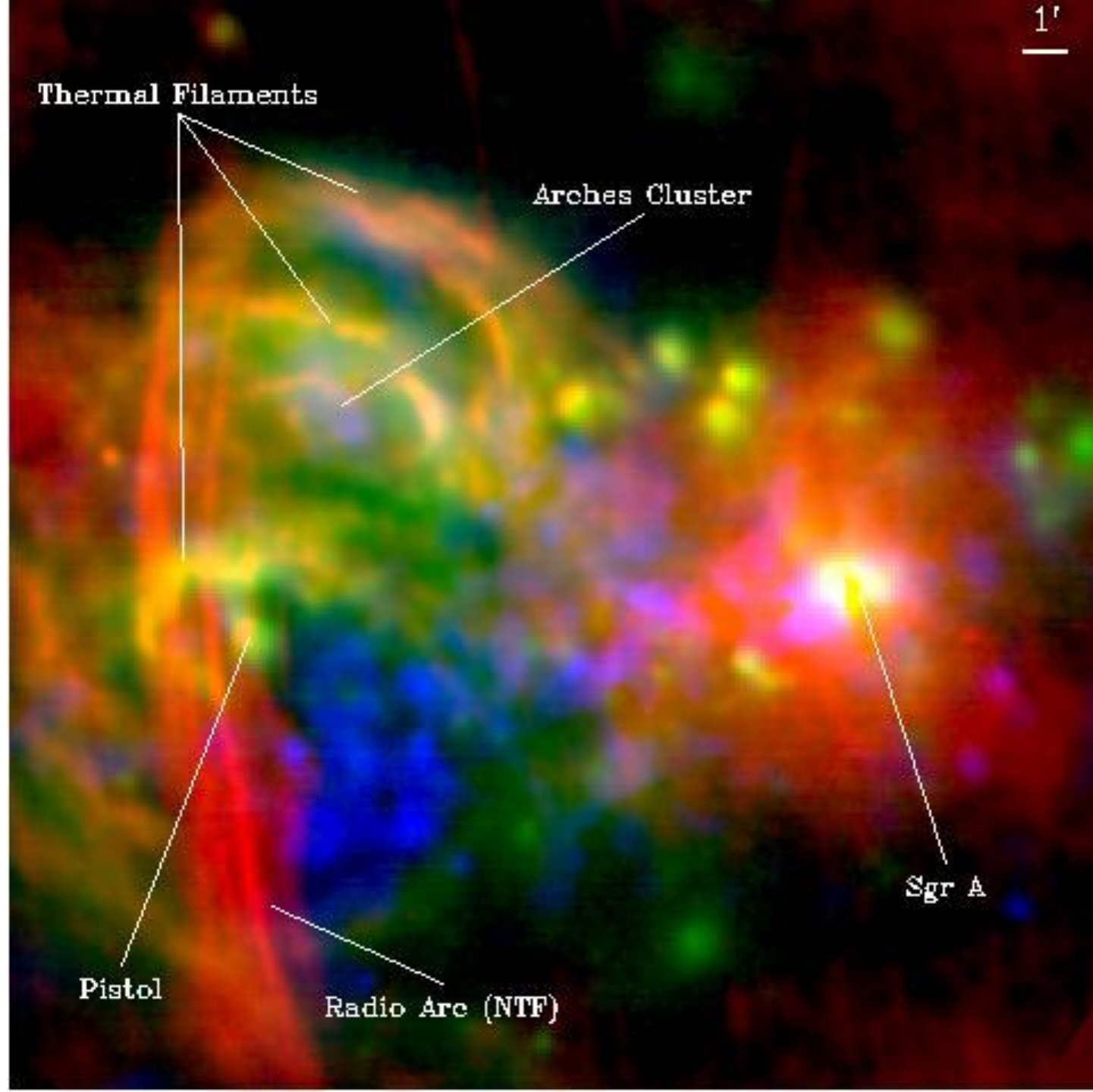
Thermal Filaments

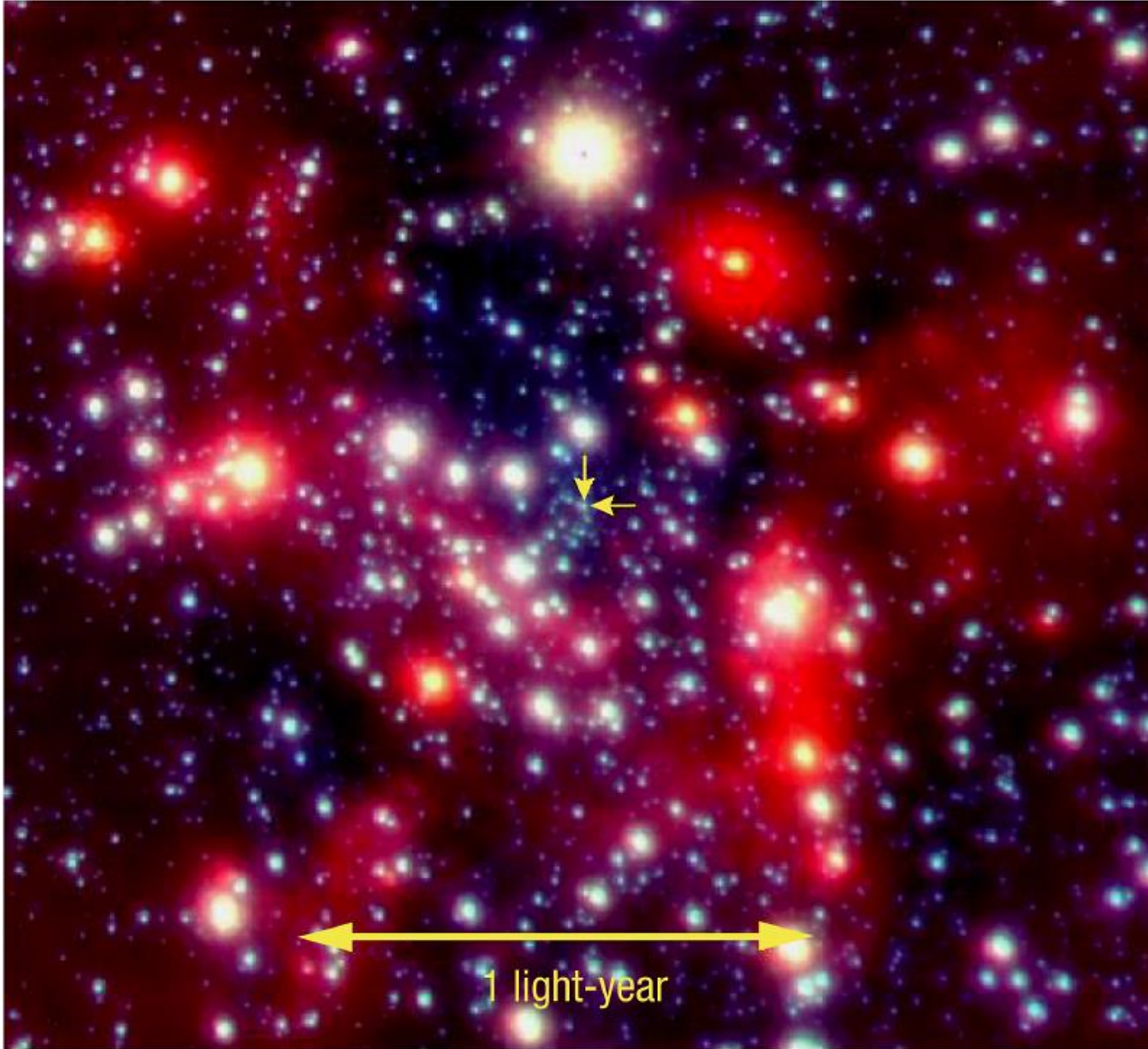
Arches Cluster

Sgr A

Pistol

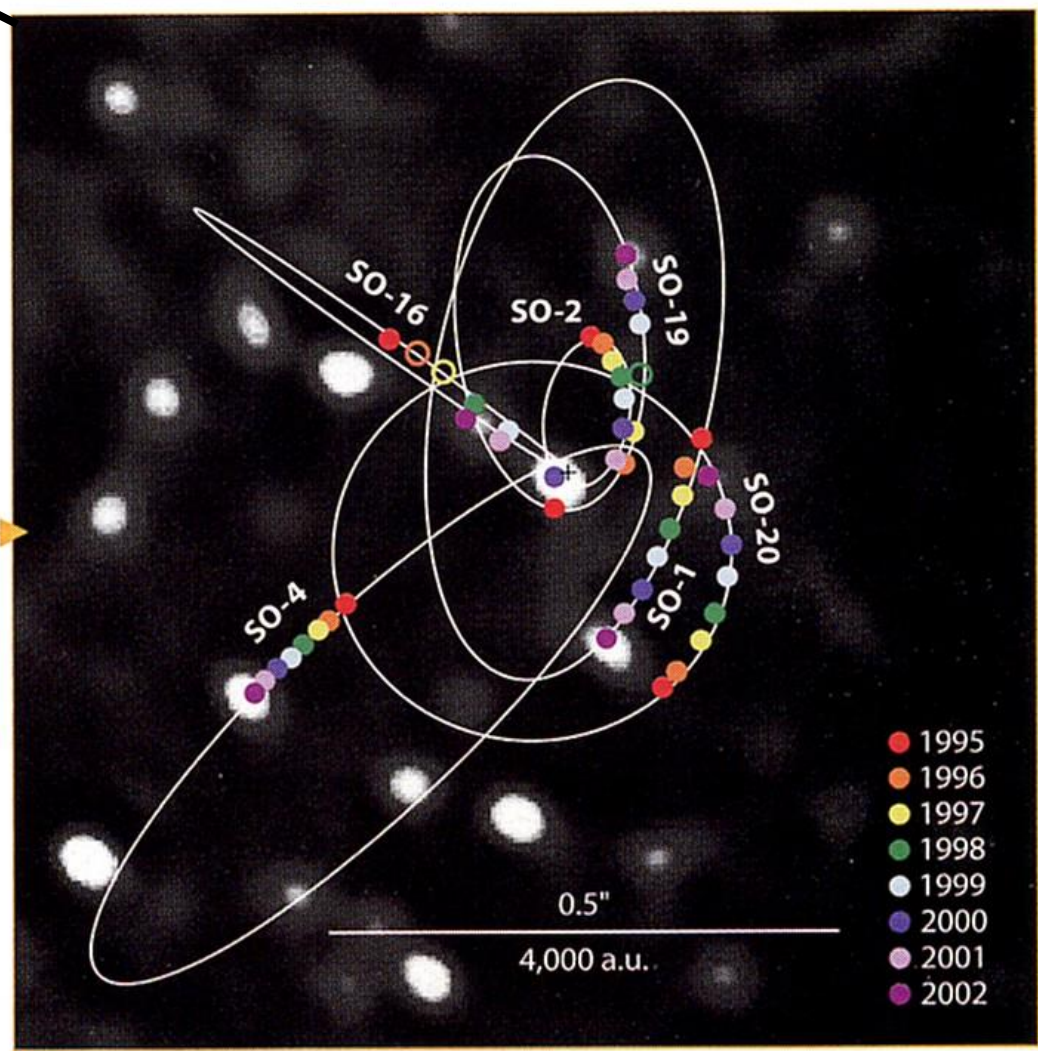
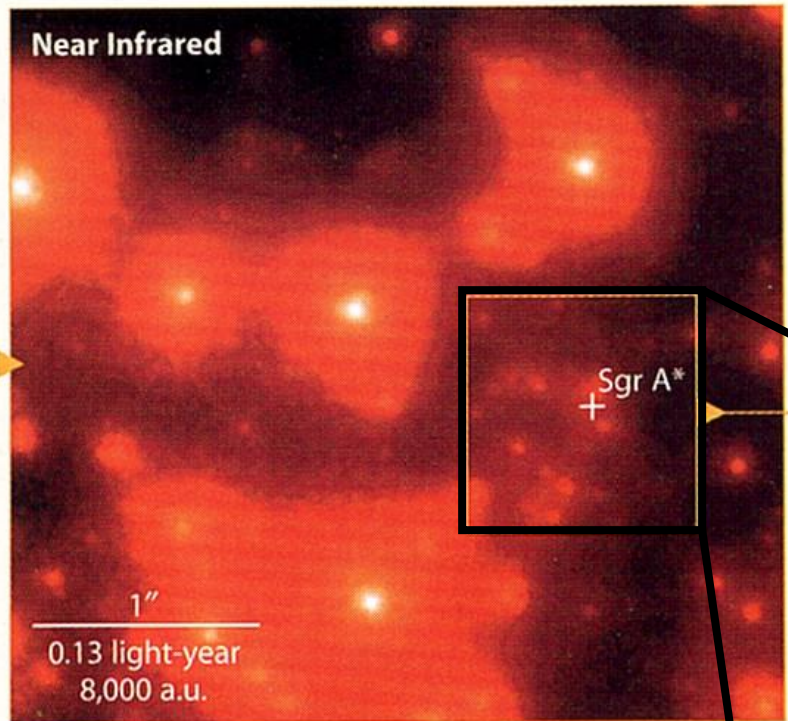
Radio Arc (NTF)



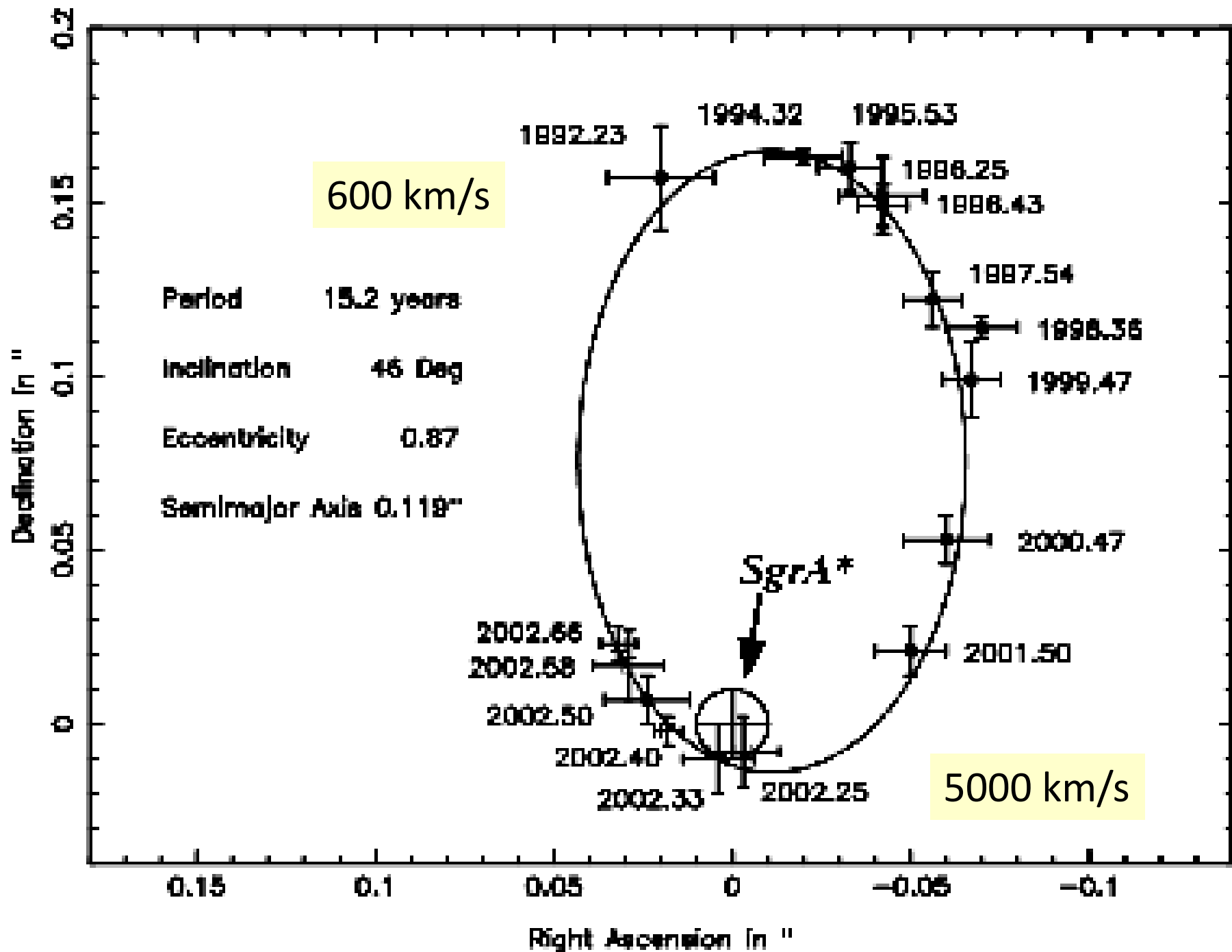


The Centre of the Milky Way  
(VLT YEPUN + NACO)

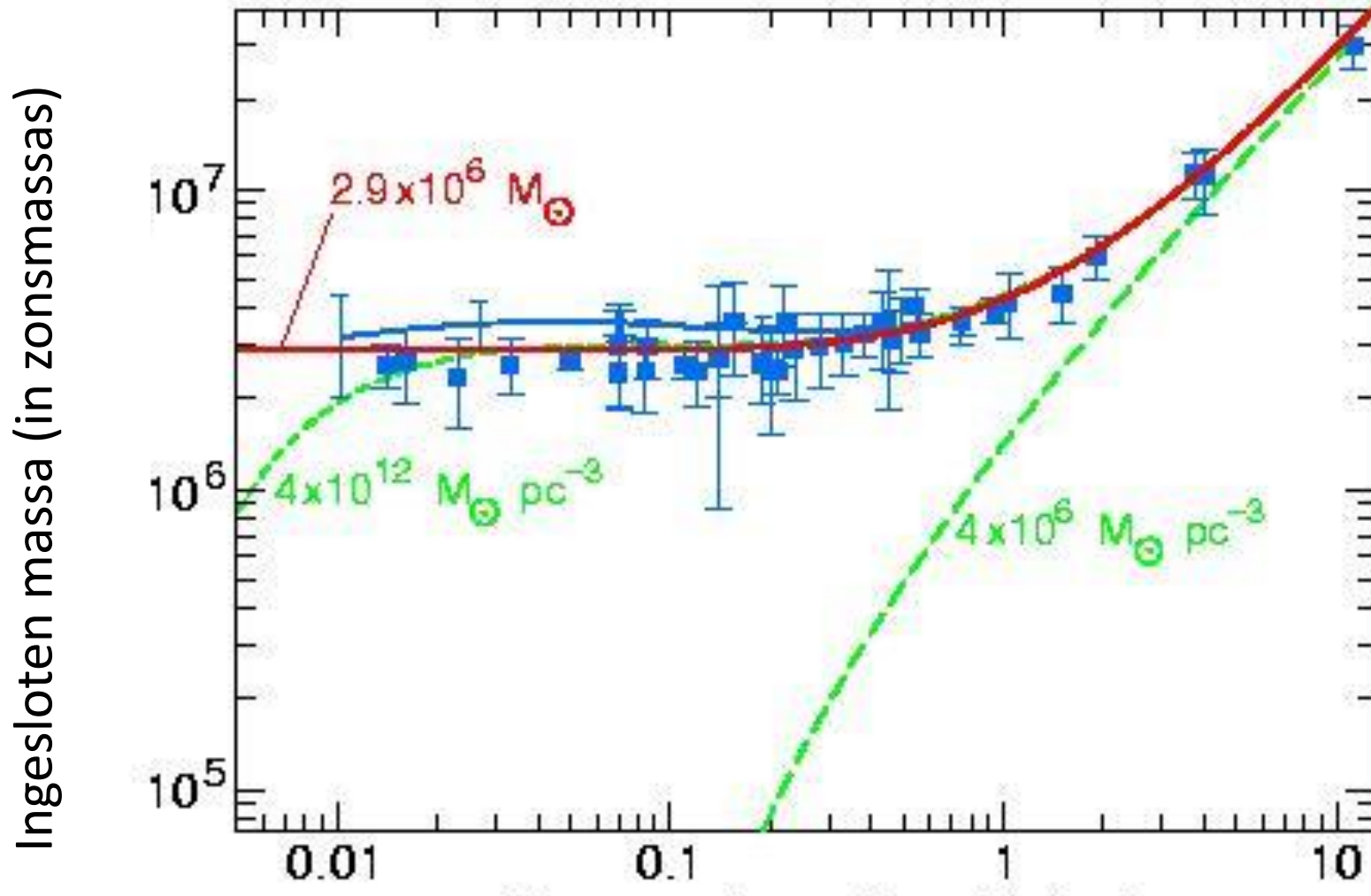




Sterbanen in de directe omgeving van Sagittarius A\*



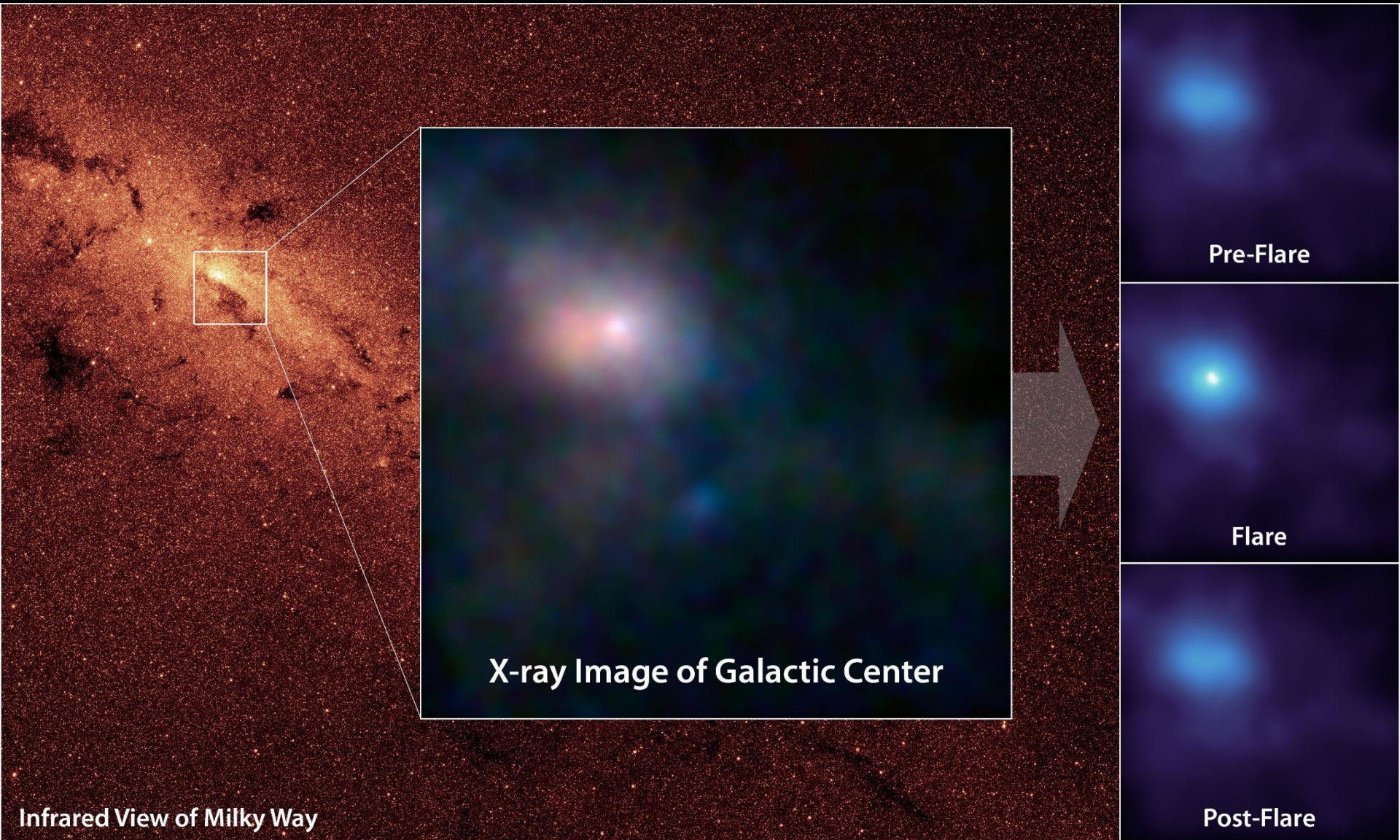
# Massaverdeling in melkwegkern



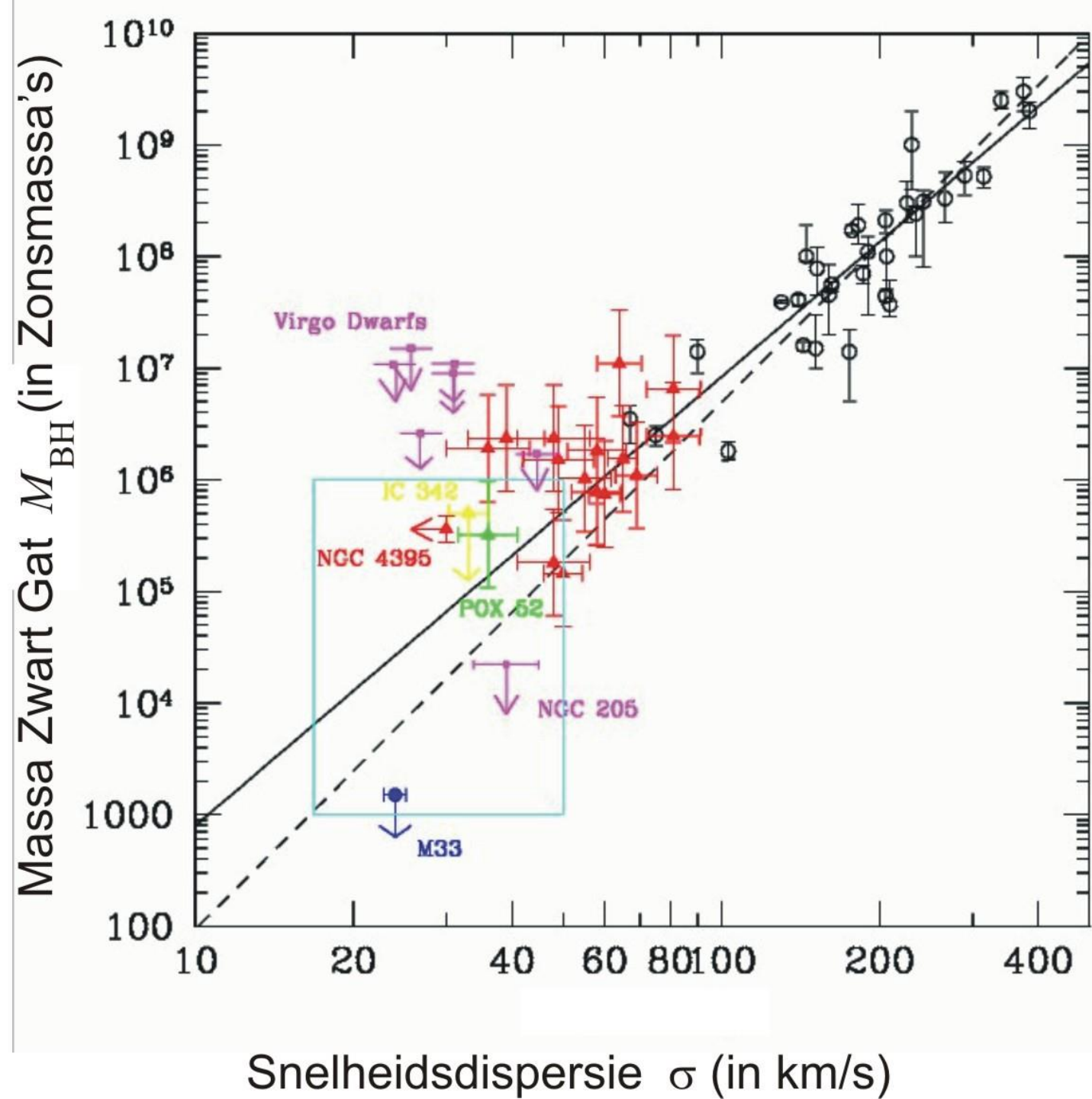
Afstand tot Sagittarius A\* (in parsec)



# Massaverdeling in melkwegkern

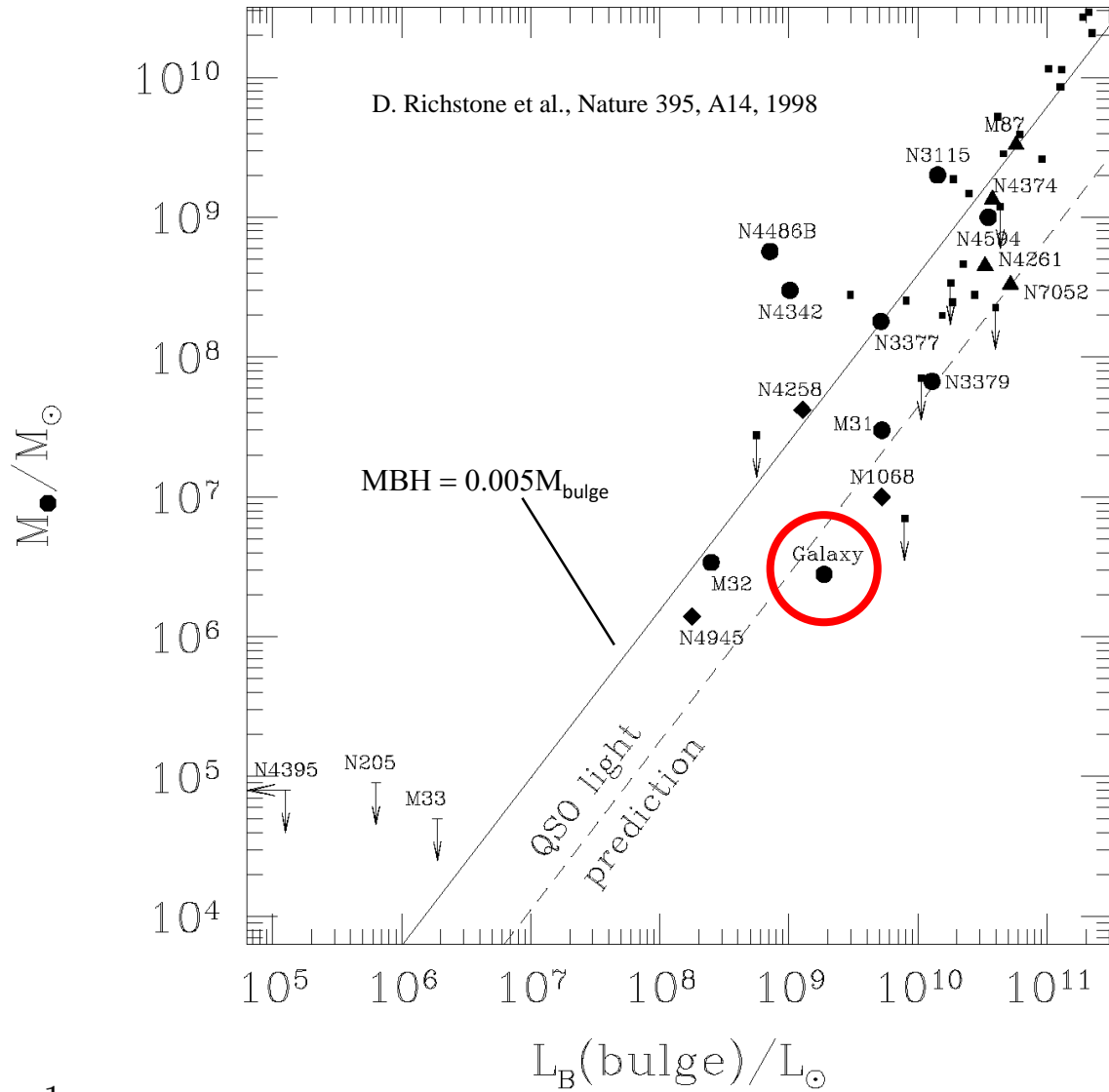
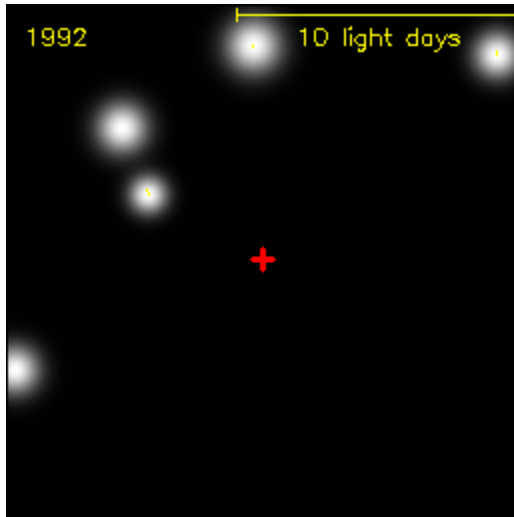


X-ray beeld van Sagittarius A\* (Oktober 2012)





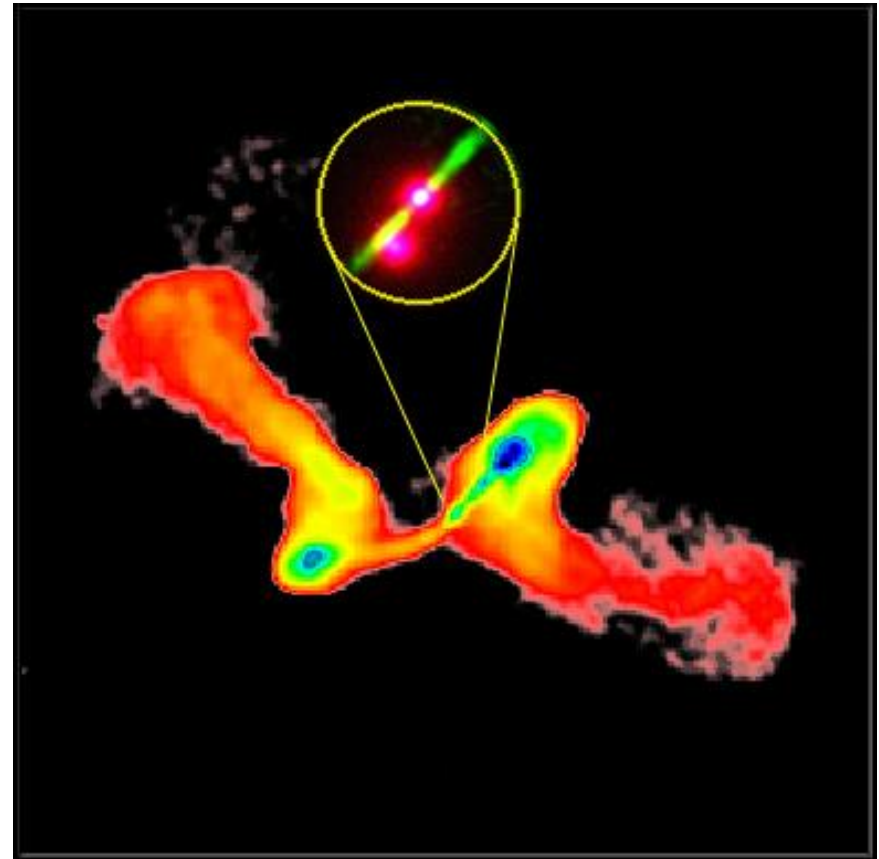
# Supermassieve zwarte gaten



# Massive black hole mergers

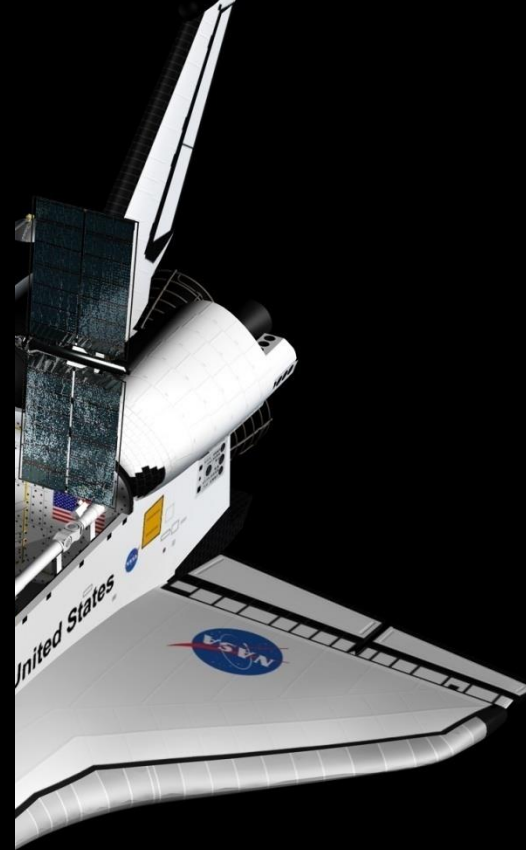
---

- Several observed phenomena may be attributed to MBH binaries or mergers
  - X-shaped radio galaxies (see figure)
  - Periodicities in blazar light curves (e.g. OJ 287)
  - X-ray binary MBH:           NGC 6240
- See review by Komossa [[astro-ph/0306439](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0306439)]

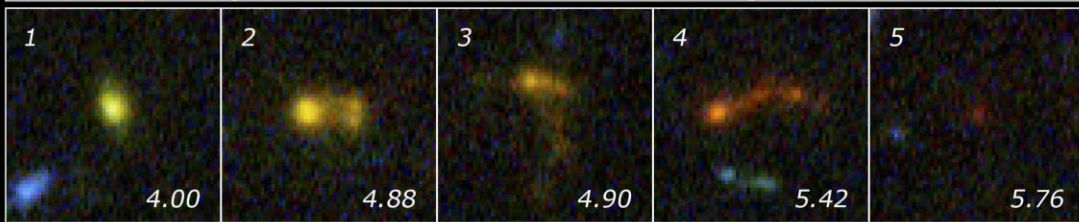


[Merritt and Ekers, 2002]



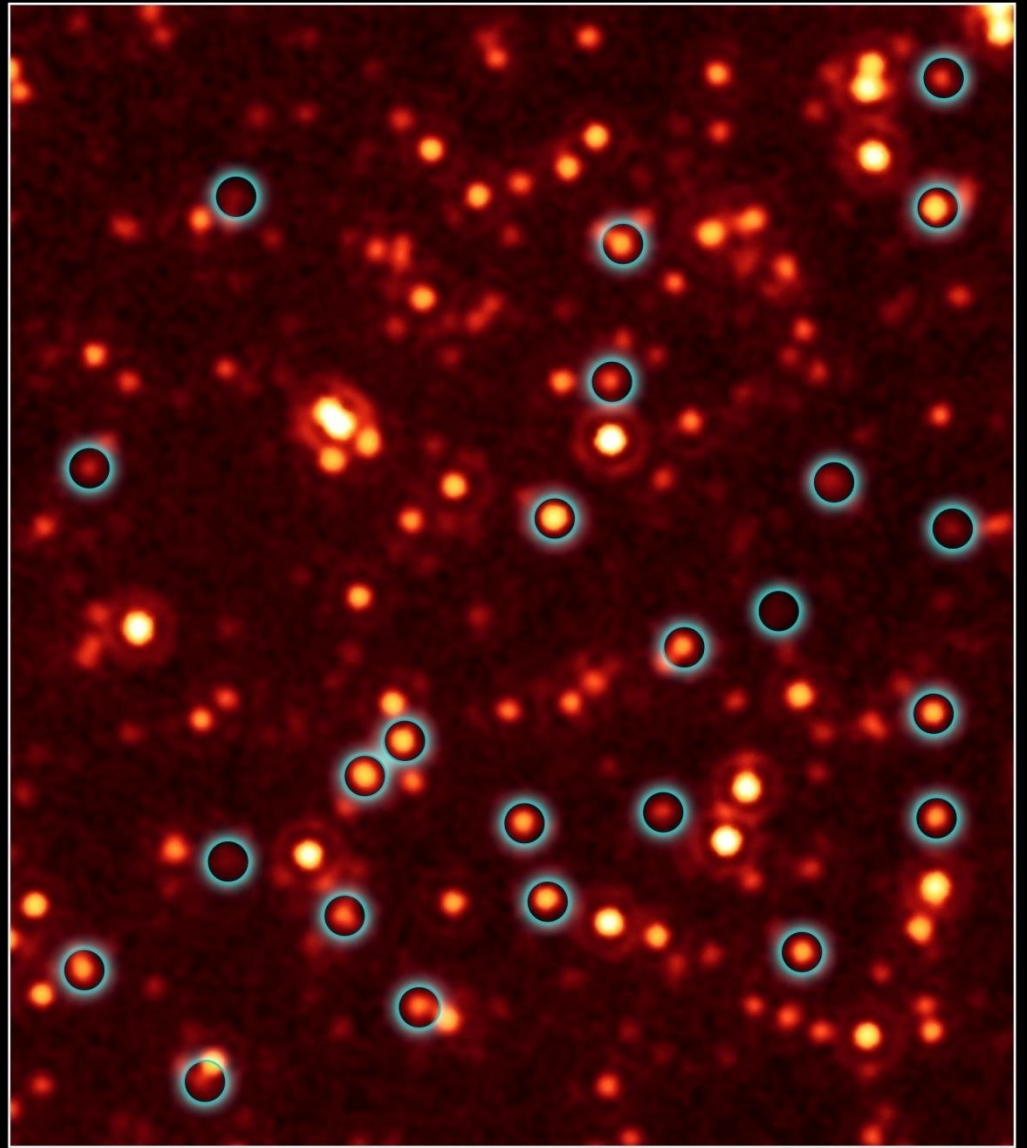
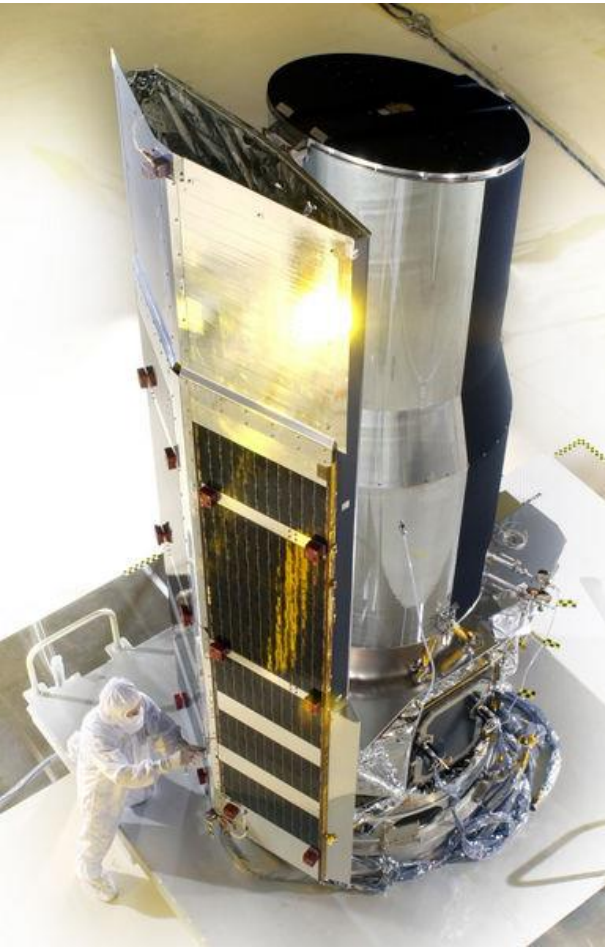


Hubble space  
telescope



Galaxy Building Blocks in the Hubble Ultra Deep Field  
*Hubble Space Telescope • ACS/WFC*

# Spitzer space telescope



Locating Black Holes in Distant Galaxies

Spitzer Space Telescope •  
MIPS

NASA / JPL-Caltech / E. Daddi (CEA, France)

ssc2007-17a



# GPS (Global Positioning System)

Friedwardt Winterberg (1955): gebruik atoomklokken in orbit om ART te testen

Sputnik (1957): Doppler effect geeft lokatie (20 en 40 MHz radiosignalen)

GPS (1973 bedacht, 1978 eerste satelliet, 1993 operationeel)

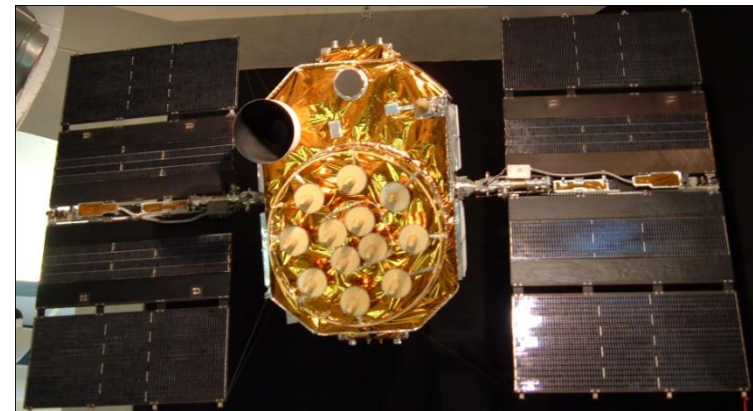
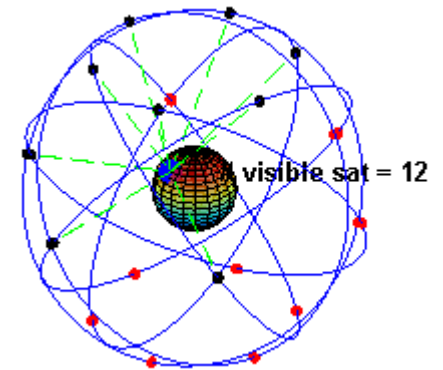
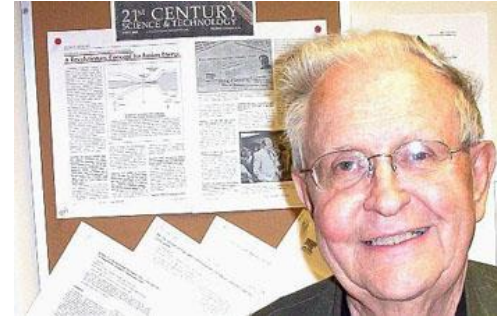
Precisie:

atoomklokken 1 ns/dag)

(licht legt 30 cm per ns af)

ART 45.900 ns/dag sneller dan op Aarde

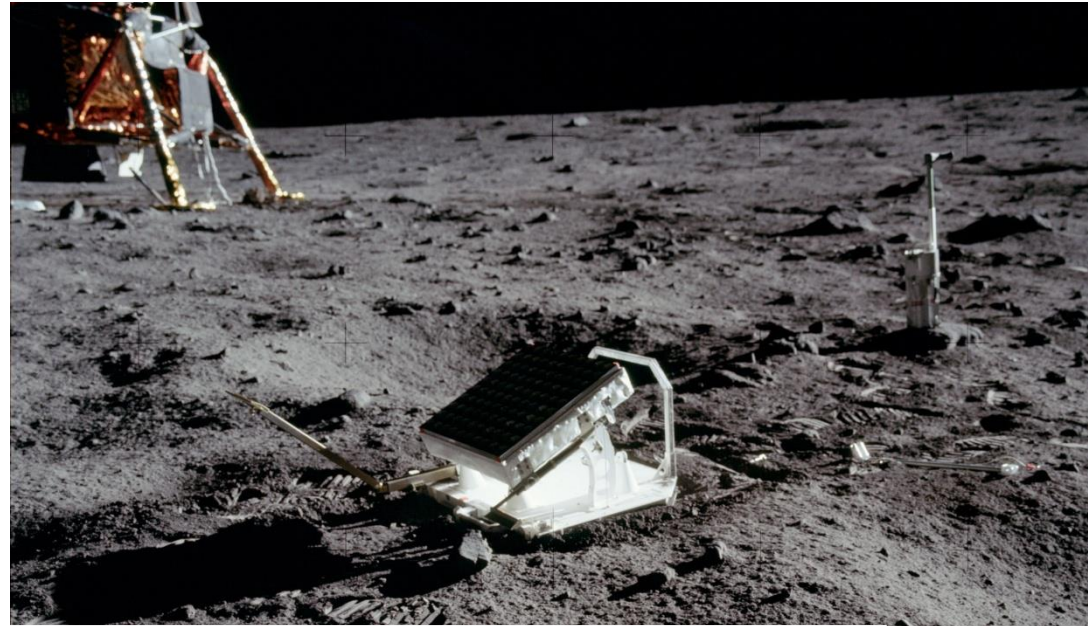
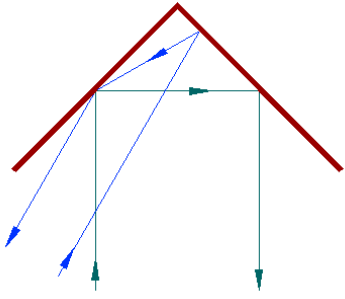
SRT 7,200 ns/dag langzamer



Een test van ART voor statische effecten in zwakke gravitievelden



# Apollo – Lunar laser ranging



Test van EP tot  $1,5 \times 10^{-13}$

Rotaties van maan: 20% vloeibare kern

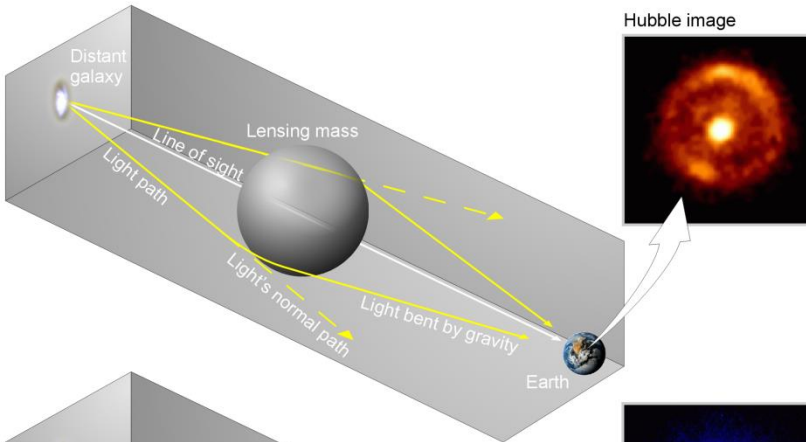
$G$  niet tijdafhankelijk tot  $1:10^{11}$  sinds 1969

Maan verwijderd zich met 3,8 cm/jaar

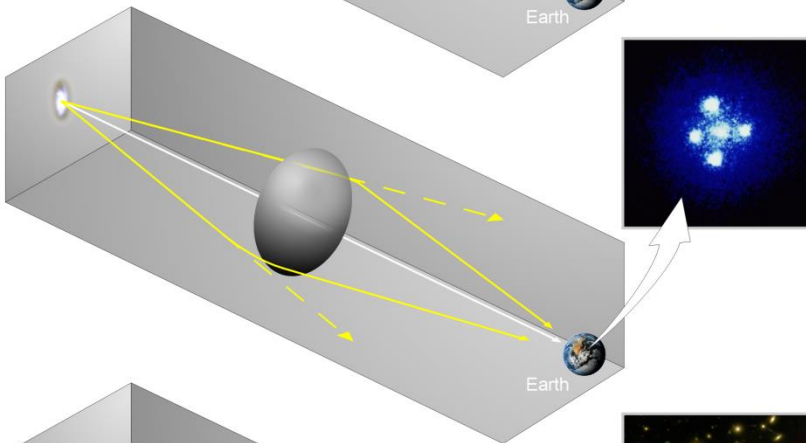
Aardprecessie volgens ART

Wie twijfelt eraan of we op de maan zijn geweest?

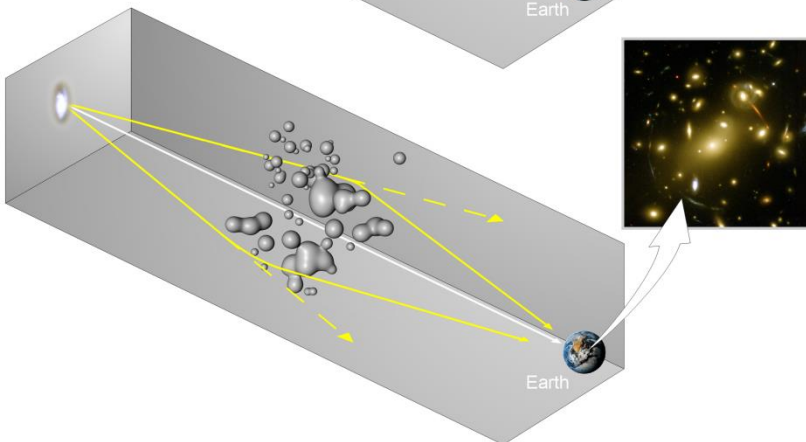
# Gravitatielensen



Sferische lens geeft Einstein ring



Platte lens geeft Einstein kruis



Banaanachtige vervorming



LRG 3-757 Hubble Space Telescope's Wide Field Camera 3





Cluster of galaxies C10024+1654, Hubble Space Telescope



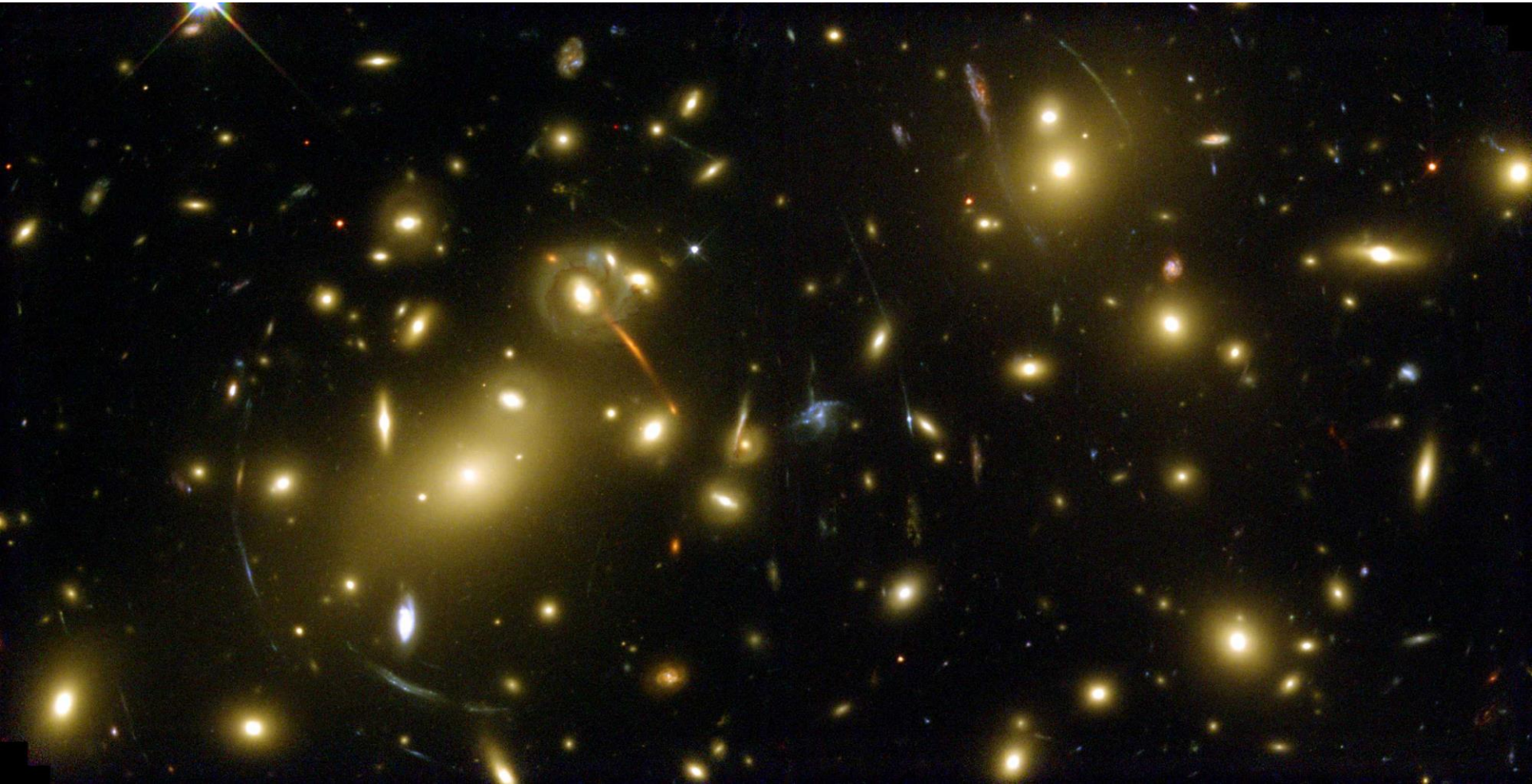
# Abell 2218

---

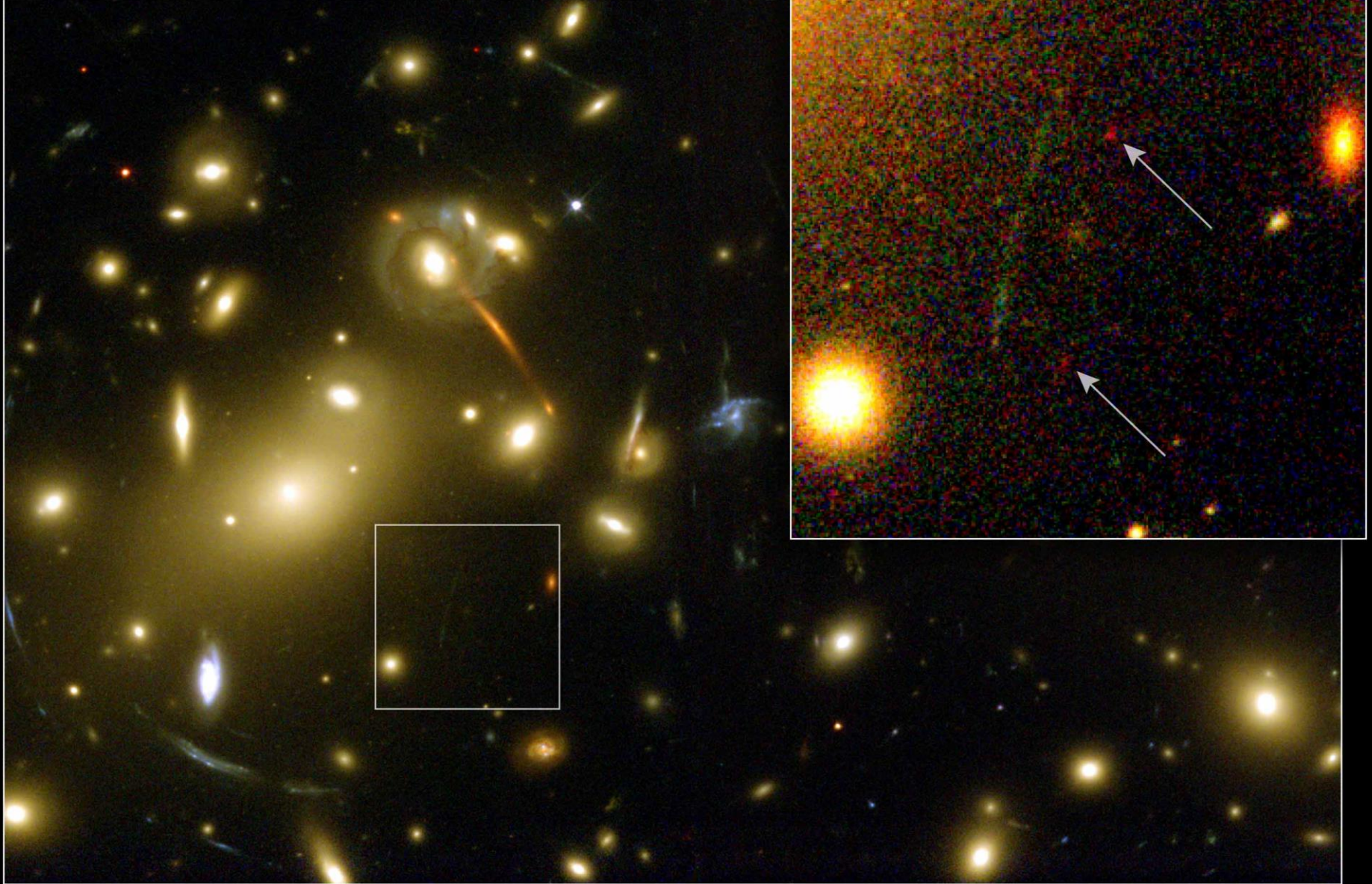
Cluster van sterrenstelsels op 2 Glichtjaar afstand

- werkt als een sterke Einstein lens
- oranje: elliptisch stelsel ( $z = 0.7$ ), blauw: stervorming ( $z = 1.5$ ) en rood ( $z = 7$ )

13 Gjaar oud







**Distant Object Gravitationally Lensed by Galaxy Cluster Abell 2218  
Hubble Space Telescope • WFPC2**



# In een zwart gat vallen

---

We gaan nu door de horizon en reizen naar  $r = 0$

De radiële bewegingsvergelijking is  $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left[ \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{R_S}{r} \right]$

We starten vanuit rust op grote afstand  $r_0$  waar geldt  $dr/d\tau = 0$

Omdat energie  $E$  constant is, vinden we hiermee  $\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = 1 - \frac{R_S}{r_0}$

Dus  $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 R_S \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right]$

We gebruiken de negatieve wortel om de invallende beweging te beschrijven (waarom?)

$$\frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{R_S} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} = -c\sqrt{R_S} \sqrt{\frac{r_0 - r}{rr_0}} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}$$

We integreren over  $r$  van  $r_0$  tot een punt  $r'$   $\tau(r') - \tau(r_0) = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \int_{r_0}^{r'} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} dr$

$$\begin{aligned} \text{Dit levert } \tau(r') - \tau(r_0) &= \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[ \sqrt{\frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} + \arctan \left( -\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} \right) \right]_{r_0}^{r'} \\ &= \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[ \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{r'}{r_0} \left(1 - \frac{r'}{r_0}\right)} + \arctan \left( -\sqrt{\frac{r'}{r_0 - r'}} \right) \right] \end{aligned}$$

# In een zwart gat vallen

De tijd die verstrijkt op de klok van de vrij vallende waarnemer bedraagt

$$\tau(r') - \tau(r_0) = \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[ \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{r'}{r_0} \left( 1 - \frac{r'}{r_0} \right)} + \arctan \left( -\sqrt{\frac{r'}{r_0 - r'}} \right) \right]$$

Als we onze val op grote afstand van het zwarte gat beginnen, geldt  $r_0 \gg r'$

We kunnen de rechterkant van de vergelijking dan in Taylor expansie schrijven

$$\text{Dus } \tau(r') - \tau(r_0) \approx \frac{r_0}{c} \left( \frac{r_0}{R_S} \right)^{1/2} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{r'}{r_0} \right)^{3/2} \right]$$

Als we geïnteresseerd zijn in de tijd tot we in de centrale singulariteit aankomen, kunnen we de limiet  $r' \rightarrow 0$  beschouwen. Dat levert

$$\tau_{\text{sing}} = \frac{\pi r_0^{3/2}}{2cR_S^{1/2}}$$

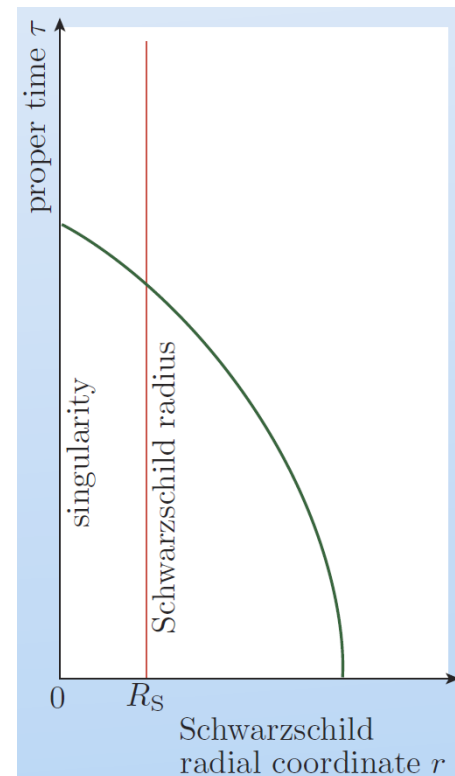
Eveneens kunnen we uitrekenen hoelang het duurt voordat we de event horizon bereiken. We vinden

$$\tau_{\text{horiz}} = \frac{r_0^{3/2}}{cR_S^{1/2}} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \left( \frac{R_S}{r_0} \right)^{3/2} \right]$$

Het verschil in beide uitdrukkingen geeft de tijd die verstrijkt om van de horizon de singulariteit te bereiken

$$\tau_{\text{sing}} - \tau_{\text{horiz}} = \frac{2}{3} \frac{R_S}{c}$$

De figuur toont dat er niets bijzonders bij de horizon gebeurt



# Vallen gezien vanuit grote afstand

---

Voor een waarnemer op grote afstand is er geen verschil tussen de proper tijd gemeten met zijn locale klok en zijn coördinaten tijd. We gebruiken  $t$  om zijn tijd aan te geven

We willen weten hoelang het duurt voordat licht deze waarnemer bereikt

Voor twee events op de wereldlijn van een naar buiten reizend foton met  $d\theta = d\phi = 0$

$$0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - R_S/r} \quad \longrightarrow \quad \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{c} \frac{1}{1 - R_S/r}$$

Voor een radieel naar buiten reizend foton kiezen we het + teken (waarom?)

Voor een radieel foton uitgezonden door een vallend lichaam op  $t_1$  en  $r_1$  en dat wordt geobserveerd door een verre waarnemer op  $t_2$  en  $r_2$  bedraagt de vluchttijd

$$t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - R_S/r}$$

We vinden  $t_2 - t_1 = \frac{r_2 - r_1}{c} + \frac{R_S}{c} \ln\left(\frac{r_2 - R_S}{r_1 - R_S}\right)$

We vinden niet  $(r_2 - r_1)/c$  omdat coördinaten geen metrische betekenis hebben

De “vluchttijd” is groter dan  $(r_2 - r_1)/c$  en nadert oneindig als  $r_1$  het punt met  $R_S$  nadert

Het verschil in coördinaten tijd hangt enkel af van de posities van emissie en observatie



# Vallen gezien vanuit grote afstand

We kunnen meer inzicht krijgen in wat de verre waarnemer ziet door de positie  $r$  van het vrij vallende object als functie van de tijd  $t$  te bepalen

We hebben reeds afgeleid dat  $\frac{E}{mc^2} = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$  }  $\longrightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{(1 - R_S/r_0)^{1/2}}{1 - R_S/r}$

We hadden ook  $E/mc^2 = (1 - R_S/r_0)^{1/2}$

Verder hadden we reeds  $\frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}$

Vermenigvuldigen levert  $\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{cR_S^{1/2}} \frac{(1 - R_S/r_0)^{1/2}}{1 - R_S/r} \sqrt{\frac{rr_0}{r_0 - r}}$

We zijn enkel geïnteresseerd in effecten nabij de horizon, waar  $r \ll r_0$  en  $r_0 \gg R_S$

Dat levert  $\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{cR_S^{1/2}} \frac{r^{1/2}}{1 - R_S/r}$

We integreren over  $r$  vanaf  $r_*$  op grote afstand van de horizon tot een punt  $r'$

$$t(r') - t(r_*) = -\frac{1}{cR_S^{1/2}} \int_{r_*}^{r'} \frac{r^{1/2}}{1 - R_S/r} dr$$

Er geldt  $t(r') - t(r_*) = -\frac{R_S}{c} \left[ \frac{2}{3} \left(\frac{r}{R_S}\right)^{3/2} + 2 \left(\frac{r}{R_S}\right)^{1/2} - \ln \left| \frac{(r/R_S)^{1/2} + 1}{(r/R_S)^{1/2} - 1} \right| \right]_{r_*}^{r'}$

# Vallen gezien vanuit grote afstand

Als we de grenzen invullen, vinden we

$$t(r') - t(r_*) = \frac{R_S}{c} \left( \text{constant} - \frac{2}{3} \left( \frac{r'}{R_S} \right)^{3/2} - 2 \left( \frac{r'}{R_S} \right)^{1/2} + \ln \left| \frac{(r'/R_S)^{1/2} + 1}{(r'/R_S)^{1/2} - 1} \right| \right)$$

De groene lijn in de figuur toont het resultaat

De blauwe lijn geeft de tijd die verstrikt op de vallende klok

Volgens de verre waarnemer duurt het oneindig lang voordat het vallende lichaam de horizon bereikt

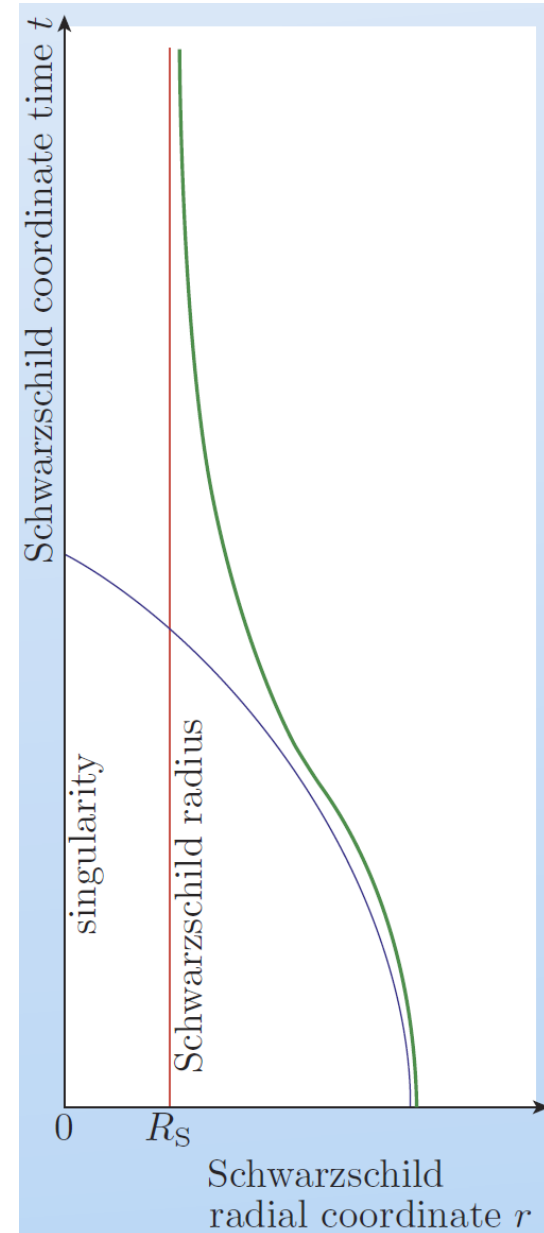
Merk op dat ook het lichtsignaal van een *vallend* object er een oneindige tijd over deed, maar dat was toch een andere relatie

Voor licht van een stationair object:  $f_\infty = f_{\text{em}} \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}} \right)^{1/2}$

En dus  $\lambda_\infty = \frac{\lambda_{\text{em}}}{\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}} \right)^{1/2}}$

De horizon is het *oppervlak van oneindige roodverschuiving*

Voor de luminositeit geldt  $L \rightarrow L_0 e^{ct/aR_S}$  als  $r \rightarrow R_S$



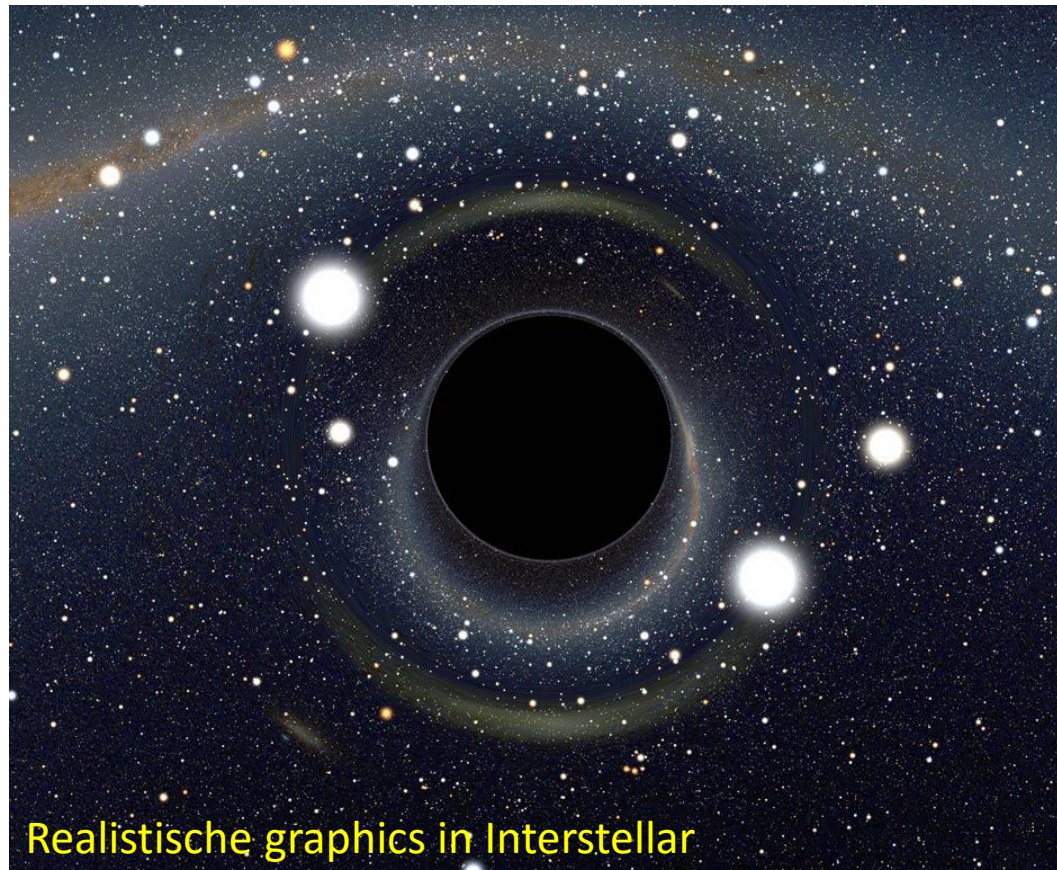
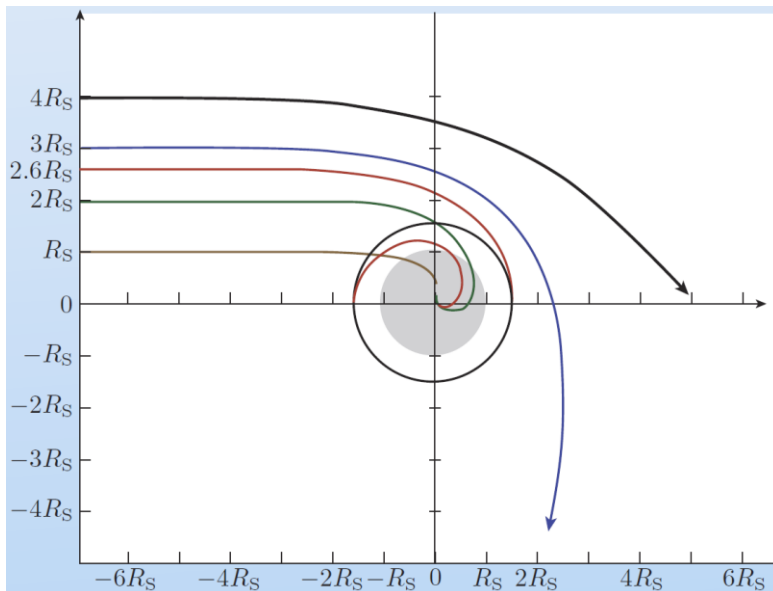
# Afbuigen van licht door zwart gat

Banen van licht voor verschillende botsingsparameters  $b$  (*impact parameter*)

Licht met  $b = 2.6R_S$  wordt gevangen in een cirkelvormige baan met straal  $r = 1.5R_S$

Deze baan is instabiel en dit gebied rond een zwart gat noemt men de *photon sphere*

Elk vrij vallend foton dat door de photon sphere gaat wordt gevangen door het zwarte gat



Realistische graphics in Interstellar



# Vorbij de event horizon

Er bestaan Schwarzschild coördinaten voor de hele vrije val

We zien een coördinaten singulariteit bij de horizon

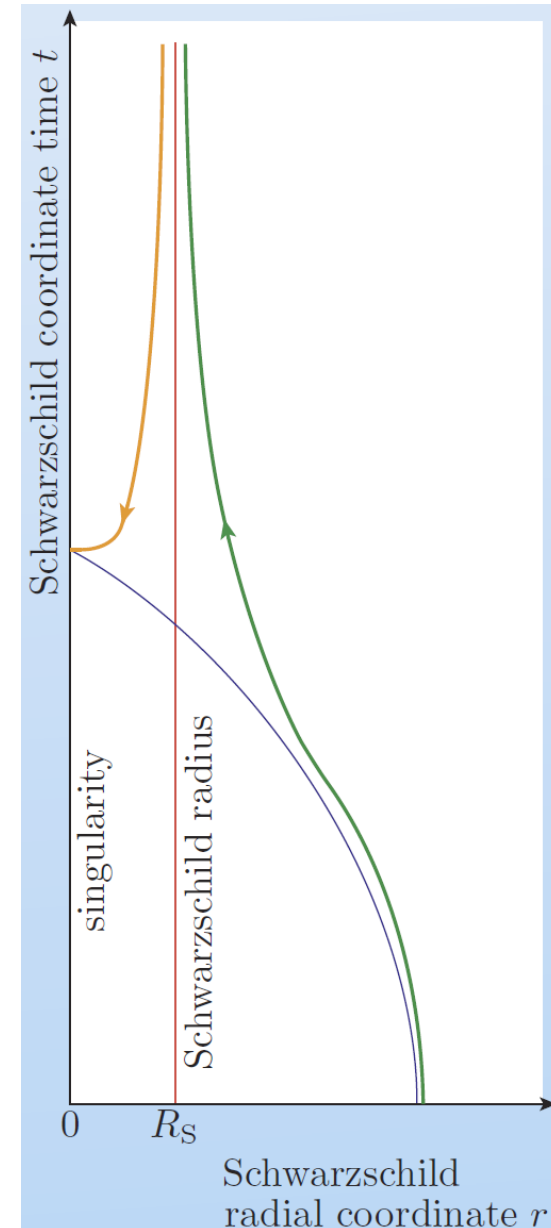
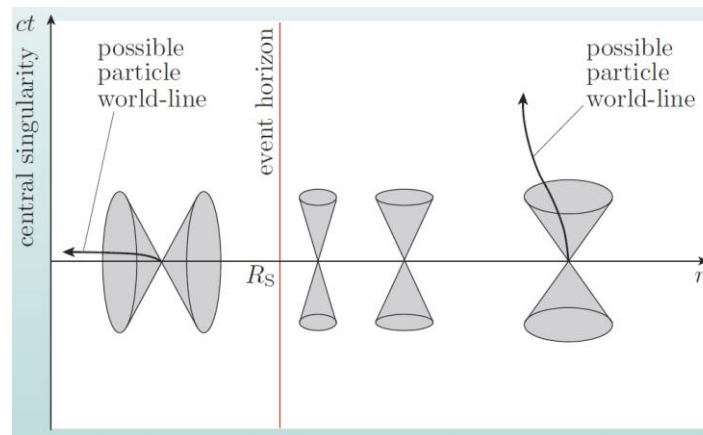
Het lijkt alsof de tijd afneemt als we de horizon passeren (de oranje curve), maar bedenk dat coördinaten geen metrische betekenis hebben

We krijgen meer inzicht door lichtkegels te construeren langs het pad van een invallende waarnemer

In de ART is ruimtetijd gekromd en dienen we kleine locale kegeltjes te tekenen

De kegels volgen uit de in een event inkomende en uitgaande nul-geodeten die horen bij de banen van lichtstralen

De kegels vertonen opmerkelijk gedrag voorbij de horizon. We zullen dat nader bekijken



# Voorbij de event horizon

De curven voor in- en uitgaand licht volgen uit vergelijking  $\frac{d(ct)}{dr} = \pm \frac{1}{1 - R_S/r}$

Merk op dat de richtingscoëfficiënt gegeven wordt door  $d(ct)/dr$

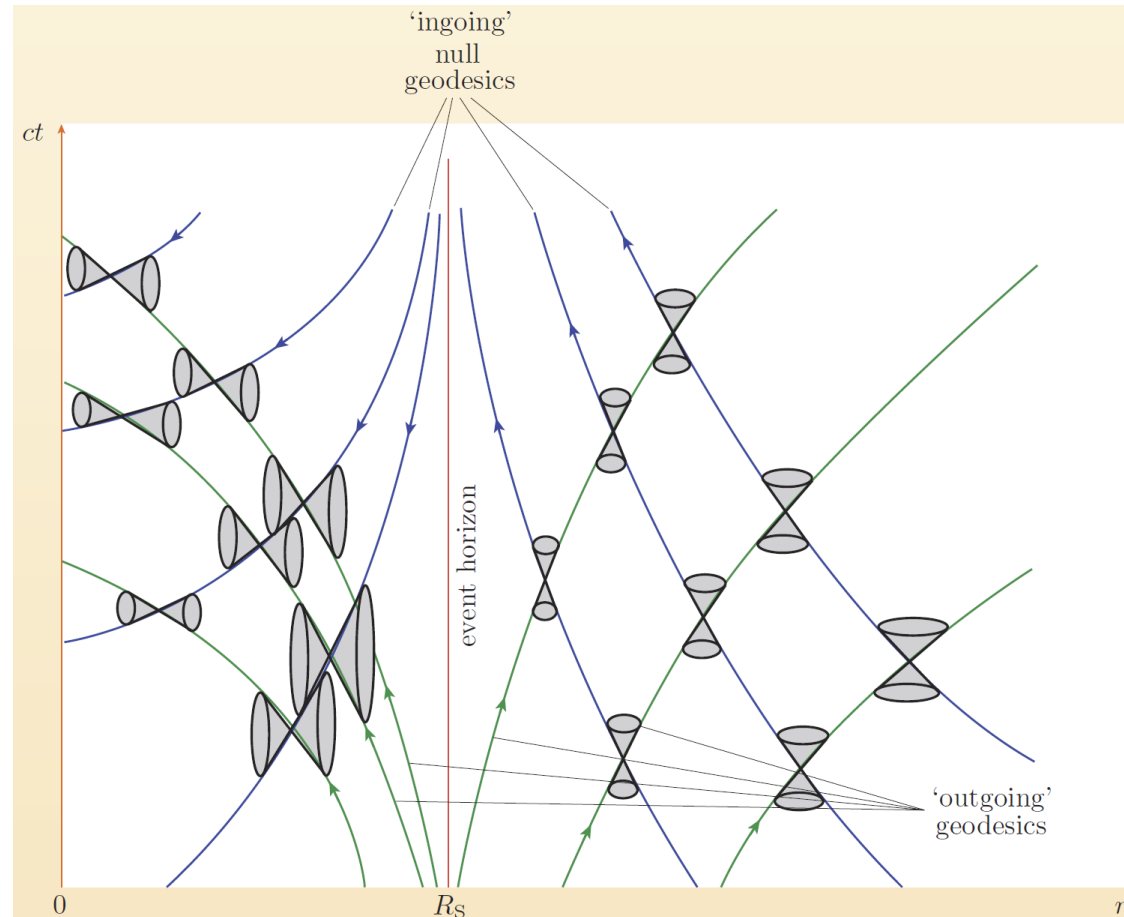
Op grote afstand van de horizon vinden we  $d(ct)/dr = \pm 1$  consistent met SRT

Verleden kegeldeel omsloten door ingaande nul-geodeten, toekomst kegeldeel omsloten door uitgaande lichtbanen

Als we de horizon van buiten benaderen  $d(ct)/dr \rightarrow \pm\infty$

Net binnen de horizon worden de lichtkegels heel breed en wordt hun tijd-achtig deel horizontaal: deeltjes kunnen nu enkel richting de singulariteit bewegen

Het “omklappen” van de lichtkegels is het gevolg van de keuze van coördinaten



# Eddington-Finkelstein coördinaten

We introduceren een nieuwe tijd-coördinaat

$$ct' = ct + R_S \ln \left( \frac{r}{R_S} - 1 \right)$$

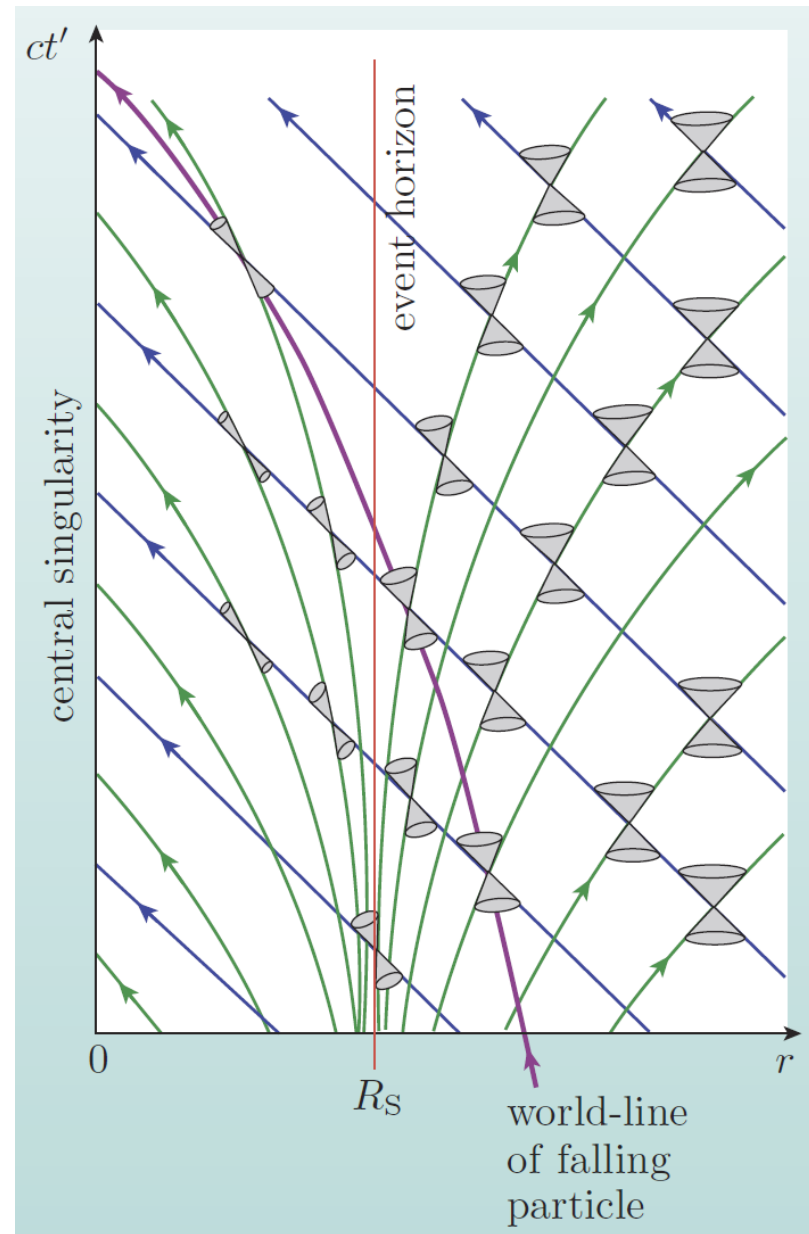
Het lijn-element wordt nu

$$(ds)^2 = c^2 \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) (dt')^2 - 2 \frac{R_S}{r} c dt' dr - r^2 ((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2)$$

Er geen singulariteit bij  $r = R_S$  en voor deze coördinaten worden ingaande nul-geodeten gegeven door rechte lijnen

Dat volgt eenvoudig uit het lijn-element voor het geval van radieel invallend licht: de oplossing met  $dt' = 0$  en dus  $t' = \text{constant}$

De gekromde “uitgaande” geodeten volgen hier ook uit. Ze eindigen iets later in de singulariteit





# Hawking straling

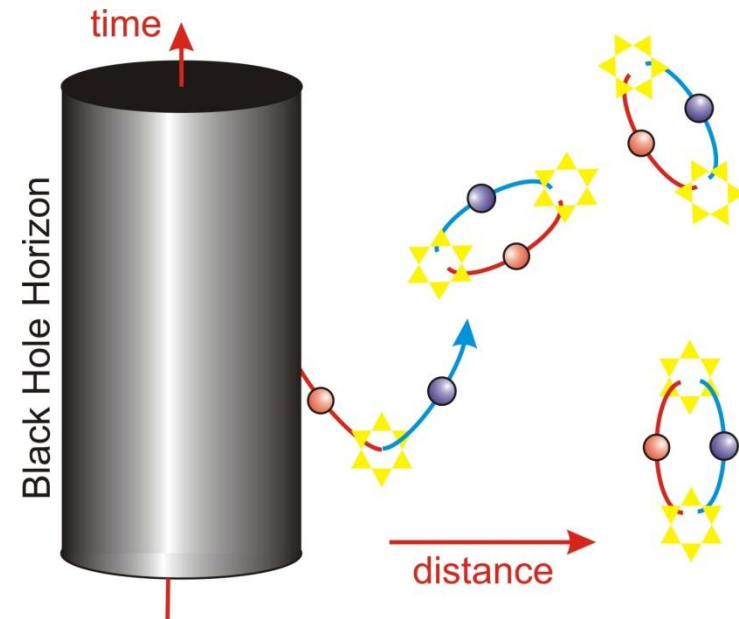
Hawking publiceerde in 1975 dat zwarte gaten een bron van straling zijn ten gevolge van quantumeffecten

Een zwart gat straalt als een lichaam met temperatuur  $T$  die omgekeerd evenredig is met de massa  $M$  van het zwarte gat

$$\text{Er geldt } T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k M} = 6.18 \times 10^{-8} \left( \frac{M_\odot}{M} \right) \text{ K}$$

Voor een Schwarzschild zwart gat met oppervlak  $A$  is het uitgestraalde vermogen

$$\frac{dE}{dt} \propto AT^4 \propto M^2 \times \left( \frac{1}{M} \right)^4 = \frac{1}{M^2}$$



Massa ZG	Temperatuur	Vermogen	Verdampingstijd
1 $M_{\text{zon}}$ ( $2 \cdot 10^{30}$ kg)	$6 \cdot 10^{-8}$ K	$10^{-28}$ W	$6 \cdot 10^{68}$ yr
1 $M_{\text{aarde}}$ ( $6 \cdot 10^{24}$ kg)	0.02 K	$10^{-17}$ W	$2 \cdot 10^{52}$ yr
1 kg	$1.2 \cdot 10^{23}$ K	$4 \cdot 10^{32}$ W	$2 \cdot 10^{-16}$ s