

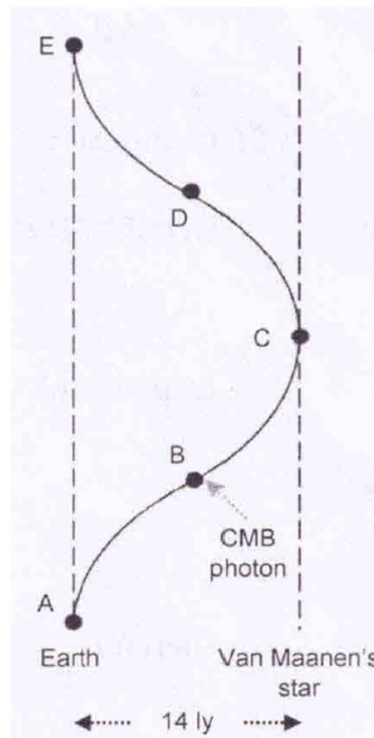
OPGAVEN WEEK 5

Opgave 1: We bespreken kort Rindler space en de connectie met de Tweelingparadox. We kijken naar een uniform versnelde waarnemer (we beschouwen enkel de x -richting) die met zijn ruimteschip een wereldlijn volgt die gegeven wordt door

$$t(\sigma) = \frac{1}{g} \sinh \sigma \quad \text{en} \quad x(\sigma) = \frac{1}{g} (\cosh \sigma - 1), \quad (1)$$

met g een constante.

- (a) Bereken de eigentijd τ van de astronaut als functie van σ , en gebruik $\tau = 0$ voor $\sigma = 0$.
- (b) Bereken de viersnelheid $\mathbf{u}$ van de astronaut als functie van τ .
- (c) Bereken de vierversnelling $\mathbf{a}$ van de astronaut als een functie van τ .
- (d) Toon aan dat de grootte $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$ van de vierversnelling constant is.



Figuur 1: Ruimtetijddiagram voor de schematische weergave van de Tweelingparadox.

Stel dat een astronaut een reis maakt in een raket van de Aarde naar een ster op een afstand van 14 lichtjaar. De reis omvat 4 fases, zoals aangegeven in Fig. 1. Elke fase wordt uitgevoerd met een constante versnelling van $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Voor de eerste helft van de heenreis (van A tot B) versnelt de astronaut in de $+x$ -richting. Aangekomen in B draait de astronaut de motor 180° om en versnelt in de $-x$ -richting, terwijl hij reist van B naar C , en ook van C naar D . Bij D aangekomen draait hij de motor weer terug in de originele stand en versnelt de raket in de $+x$ -richting totdat hij in rust aankomt op Aarde op E (neem voor het gemak aan dat zowel de Aarde als de betreffende ster in rust zijn in een gemeenschappelijk inertiaalsysteem).

(e) Wat is de eigentijd (in jaren) die voor de astronaut verstrijkt op zijn retour-reis van de Aarde naar de ster en terug?

(f) Wat is de eigentijd (in jaren) die voor een waarnemer op Aarde verstrijkt?

(g) Bereken de relativistische factor γ voor de astronaut ten opzichte van het inertiaalsysteem verbonden met de Aarde op punt B . Hoe kan dit de astronaut helpen om uit te leggen dat hij een rondreis van 28 lichtjaar heeft gemaakt in minder dan 28 jaren van zijn eigentijd?

Opgave 2: Via het formalisme van Lagrange kunnen we aantonen dat het kortste pad tussen twee punten in een Euclidische ruimte, een rechte lijn is; dit is op het college voorgerekend. We vragen ons in deze opgave af of iets analoogs geldt in een Minkowski-ruimtetijd. Oftewel: is het kortste pad tussen twee *puntgebeurtenissen* ook een rechte lijn?

(a) Laat zien dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen wordt gegeven door de volgende integraal:

$$S = \int \left(- \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} dx. \quad (2)$$

(b) Kies een Lorentzstelsel waarin de twee gebeurtenissen plaatsvinden op hetzelfde tijdstip. Gebruik daarna de Euler-Lagrange vergelijkingen om aan te tonen dat S minimaal is wanneer het pad tussen de twee gebeurtenissen een rechte lijn is.

(c) De conclusie uit opgave (b) is dat voor deze *specifieke* waarnemer inderdaad geldt dat de afstand tussen twee puntgebeurtenissen een rechte lijn is. Beargumenteer, zonder opnieuw de Euler-Lagrange vergelijkingen op te lossen, dat dezelfde conclusie ook moet gelden voor *alle waarnemers* in Minkowski-stelsels.

Opgave 3: In Stanford, Californie, staat een lineaire deeltjesversneller genaamd SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) Two-mile Accelerator. Dit is een instrument van ongeveer 2 mijl lang waarin een constant elektrisch veld $\mathcal{E}$ is aangebracht, dat sterk genoeg is om elektronen vanuit rust te doen versnellen tot zij een energie E hebben van 40 GeV (zoals gemeten in het ruststelsel van het apparaat). We nemen aan dat het ruimtelijk deel van de relativistische impuls $\vec{p}$ voldoet aan de volgende bewegingsvergelijking:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{\mathcal{E}}, \quad (3)$$

waarin t de tijd is zoals gemeten in het ruststelsel van de pijp, en e de elektrische lading van het elektron (hierdoor is $e\vec{\mathcal{E}}$ niets anders dan de kracht $\vec{F}$ op het elektron).

(a) Neem aan dat het elektron start vanuit rust aan een kant van het apparaat, en dat het elektrisch veld langs de x -as is. Gebruik de bewegingsvergelijking om uit te rekenen wat de positie x is van het elektron als functie van de tijd t . Hint: bereken eerst $v(t)$; wanneer deze gevonden is, integreer deze om $x(t)$ te vinden. U houdt een integratieconstante over; kies deze zodanig dat geldt dat het elektron een positie $x = 0$ heeft op tijdstip $t = 0$.

(b) Laat zien dat de elektronen, ten opzichte van het apparaat, niet sneller kunnen gaan dan het licht. (Opmerking: via opgave 4b, volgt hieruit dat de elektronen niet sneller kunnen gaan dan het licht ten opzichte van *elke* waarnemer.)

(c) De elektronen versnellen door de aanwezigheid van het elektrisch veld $\mathcal{E}$, en winnen daardoor aan energie, zoals gezien vanuit het apparaat. Schrijf de uitdrukking op voor deze energie als functie van de tijd t . Schrijf ook de energie op gezien vanuit het elektron.

(d) De lengte van de versneller is twee mijl. Gebruik uw antwoorden uit (a) en (c) om te bepalen hoe groot het elektrisch veld moet zijn opdat de elektronen een energie (ten opzichte van het apparaat) van $E = 40$ GeV hebben wanneer zij aan de andere kant van de versneller uitkomen (opmerking: de wetten van de elektrodynamica dicteren dat de elektronen een beetje energie verliezen ten gevolge van hun versnelling; dit effect mag u verwaarlozen).

(e) Welke snelheid, ten opzichte van het apparaat, hebben de elektronen, wanneer zij de versneller uitkomen?

Opgave 4. We beschouwen de consequenties van het bestaan van tachyonen (deeltjes die sneller dan het licht reizen).

Opgave 4a) Beargumenteer dat het bestaan van een type deeltjes die altijd *sneller* dan het licht bewegen, consistent is met Lorentzinvariantie in de zin dat als in één stelsel de snelheid groter is dan de lichtsnelheid, die groter dan de lichtsnelheid zal zijn in alle stelsels (dergelijke hypothetische deeltjes worden *tachyonen* genoemd).

Opgave 4b) Toon aan dat de raakvector (tangent vector) van een baan van een tachyon ruimtelijk is en geschreven kan worden als $u^\alpha = dx^\alpha/ds$, met s het ruimtelijke interval langs de baan. Toon aan dat $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$.

Opgave 4c) Bereken de componenten van de viersnelheid $\mathbf{u}$ van een tachion in termen van de driesnelheid $\vec{V} = d\vec{x}/dt$.

Opgave 4d) Definieer de vierimpuls door $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ en leid een relatie af tussen energie en impuls voor een tachion.

Opgave 4e) Toon aan dat er een inertiaalsysteem bestaat waarin de energie van elk tachion negatief is.

Opgave 4f) Laat zien dat wanneer tachyonen wisselwerken met normale deeltjes, een normaal deeltje een tachyon zou kunnen uitzenden waarbij totale energie en drie-impuls behouden blijven.

Opgave 4g) Als deeltjes met negatieve energie zouden bestaan, wat zegt dat dan over de stabiliteit van normale materie?