

Opgave 1. Een symmetrische ruimte

We bekijken een tweedimensionaal oppervlak ingebed in de vlakke driedimensionale Cartesische ruimte met coördinaten X^A , $A = 1, 2, 3$. Het oppervlak wordt voorzien van twee coördinaten $x^1 \equiv r$ en $x^2 \equiv \phi$. De inbedding is als volgt:

$$X^1 = r \sin \phi, \quad X^2 = r \cos \phi, \quad X^3 = f(r), \quad (1)$$

waarbij $f(r)$ een functie is.

Opgave 1a) Bewijs dat dit oppervlak cylinder-symmetrisch is rond de as $X^1 = X^2 = 0$.

Opgave 1b) Laat zien dat de covariante geïnduceerde metriek gegeven wordt door

$$g_{11}(x) = 1 + f'(r)^2, \quad g_{22}(x) = r^2, \quad g_{12}(x) = g_{21}(x) = 0. \quad (2)$$

Opgave 1c) Bereken de contravariante metriek.

Opgave 2: We beschouwen Elektromagnetisme in de Speciale Relativiteitstheorie. De Maxwellvergelijkingen voor de elektrische en magnetische velden in vacuüm, $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$, in drie-vector notatie worden gegeven door

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi \mathbf{J}, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

in eenheden waarbij $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$. Hierbij stelt ρ de dichtheid van elektrische lading voor en $\mathbf{J}$ de stroomdichtheid.

(a) We kunnen een *antisymmetrische* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{F}$ op ruimtetijd definiëren door vergelijkingen $F^{0i} = E^i$ ($i = 1, 2, 3$), $F^{xy} = B^z$, $F^{yz} = B^x$, $F^{zx} = B^y$. Leidt uit deze definities alle andere componenten $F^{\mu\nu}$ in dit referentiesysteem (frame) af en schrijf ze in de vorm van een matrix.

(b) Een rotatie over een hoek θ rond de z -as is een soort Lorentztransformatie met matrix

$$\Lambda^{\beta'}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Laat zien dat de nieuwe componenten van $\mathbf{F}$,

$$F^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha'}_{\mu} \Lambda^{\beta'}_{\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5)$$

nieuwe elektrische en magnetische drie-vector componenten definiëren (door de regel gegeven onder (a)), die hetzelfde zijn als de componenten van de oude $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ in de geroteerde drie-ruimte. (Dit laat zien dat een ruimtelijke rotatie van $\mathbf{F}$ resulteert in een ruimtelijke rotatie van de velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$.)

(c) Definieer de stroom viervector $\vec{J}$ door $J^0 = \rho, J^i = (J)^i$ en toon aan dat twee van de Maxwellvergelijkingen geschreven kunnen worden als

$$F^{\mu\nu}_{,\nu} = 4\pi J^\mu. \quad (6)$$

(d) Laat zien dat de andere twee Maxwellvergelijkingen gegeven worden door

$$F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0. \quad (7)$$

Merk op dat dit slechts vier onafhankelijke vergelijkingen voorstellen. We kunnen een indexwaarde gelijk aan bijvoorbeeld 0 kiezen. We kunnen dan de andere drie waarden (1, 2, 3) toekennen aan μ, ν, λ in willekeurige volgorde. Dit levert elke keer weer dezelfde vergelijking (afgezien van een algemeen minteken). Probeer het zelf: dit volgt uit de antisymmetrie van $F_{\mu\nu}$.

(e) We hebben de Maxwellvergelijkingen nu in tensorvorm uitgedrukt. Laat zien dat ladingsbehoud $J^\mu_{;\mu} = 0$ besloten ligt in vergelijking (6). (Hint: gebruik weer de antisymmetrie van $F_{\mu\nu}$.)

(f) De ladingsdichtheid wordt in elk frame gegeven door J^0 . De totale lading in ruimtetijd is daarom $Q = \int J^0 dx dy dz$, waar de integratie het volledige hyperoppervlak $t = \text{constant}$ bestrijkt. Definieer $\tilde{dt} = \tilde{n}$ als eenheidsnormaal op voor dit hyperoppervlak en toon aan dat

$$Q = \int J^\alpha n_\alpha dx dy dz. \quad (8)$$

(g) Gebruik de wet van Gauss en vergelijking (6) om aan te tonen dat de totale lading omsloten binnen elk willekeurig gesloten twee-oppervlak $\mathcal{S}$ in het hyperoppervlak $t = \text{constant}$, bepaald kan worden door een integraal over $\mathcal{S}$ zelf uit te voeren:

$$Q = \oint_{\mathcal{S}} F^{0i} n_i dS = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (9)$$

met $\mathbf{n}$ de eenheidsnormaal op $\mathcal{S}$ in het hyperoppervlak (en dat is *niet* hetzelfde als $\tilde{n}$ in vraag (f) hierboven).

(h) Voer een Lorentztransformatie van $F^{\mu\nu}$ uit van een frame $\overline{\mathcal{O}}$ dat met snelheid v in de x -richting beweegt relatief ten opzichte van het frame dat we in opgave (a) hierboven gebruikt hebben. Definieer in dit frame een drie-vector $\overline{\mathbf{E}}$ met componenten $\overline{E}^i = F^{\overline{0}i}$, en analoog als in opgave (a) voor $\overline{\mathbf{B}}$. Ontdek op deze manier hoe $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ zich gedragen onder een Lorentztransformatie: ze mengen! Dus $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ zijn zelf niet Lorentzinvariant, maar slechts componenten van $\mathbf{F}$, die de Faraday tensor genoemd wordt, en die de invariante beschrijving van elektromagnetische velden in relativiteitstheorie is. Als je hier zorgvuldig over nadenkt, dan zie je dat op fysische redenen ze niet invariant *kunnen* zijn. In het bijzonder worden magnetische velden veroorzaakt door bewegende ladingen; maar een lading die in een frame beweegt kan in rust zijn in een ander frame, en dus kan een magnetisch veld dat bestaat in een frame, niet bestaan in een ander frame. Wat hetzelfde is in *alle* frames is de Faraday tensor: enkel zijn componenten worden getransformeerd.