

Opgave 1: Deze opgave is bedoeld om uit te vinden of u op correcte wijze indices naar boven of beneden kunt halen. We beschouwen twee dimensies, waarbij de indices $A, B, \dots$ de waarden 1 of 2 kunnen aannemen. De metrische tensor wordt gegeven door

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} F & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

met F een constante. Beschouw de vectoren

$$a_A = (1, 0), \quad b_A = (0, 1), \quad c^A = (1, 0), \quad d^A = (0, 1). \quad (2)$$

(a) Bepaal de inverse van de metrische tensor g^{AB} .

(b) Bepaal $a^A, b^A, c_A, d_A, \vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{c}$ en $\vec{a} \cdot \vec{d}$.

Opgave 2: De relatie tussen cartesische (x, y) en poolcoördinaten (r, θ) wordt gegeven door $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ en de inverse relaties $x = r \cos \theta$ en $y = r \sin \theta$.

(a) Bereken alle elementen van de transformatiematrices $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ en $\Lambda^{\mu}_{\nu'}$ voor de transformatie van cartesische (het stelsel zonder accent) naar polaire (met accenten op de indices) coördinaten.

(b) Stel $f = x^2 + y^2 + 2xy$ en in cartesische coördinaten $\vec{V} \rightarrow (x^2 + 3y, y^2 + 3x)$, $\vec{W} \rightarrow (1, 1)$. Bereken f als functie van r en θ , en bepaal de componenten van $\vec{V}$ en $\vec{W}$ voor de polaire basis door ze uit te drukken als functies van r en θ .

(c) Bepaal de componenten van $\tilde{d}f$ in cartesische coördinaten en verkrijg ze in poolcoördinaten door (i) directe berekening in poolcoördinaten, en (ii) door transformeren van de cartesische componenten.

(d) Gebruik de metrische tensor in poolcoördinaten om de polaire componenten van de 1-vormen $\tilde{V}$ en $\tilde{W}$ geassocieerd met $\vec{V}$ en $\vec{W}$ te vinden.

(e) Bepaal de polaire componenten van $\tilde{V}$ en $\tilde{W}$ door transformatie van de cartesische componenten.

Opgave 3: De geometrie van de lege ruimte buiten een sferisch symmetrisch object met massa M , zoals een ster of zwart gat, wordt gegeven door de Schwarzschild metriek. Voor coördinaten $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ wordt het lijnelement in de Schwarzschild metriek gegeven door

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3)$$

Hierbij gebruiken we zogenaamde geometrische eenheden met $c = G = 1$.

(a) Beschouw de functie

$$f(x) = (5t^2 - 2r^2)/(2M)^2, \quad (4)$$

met t en r de Schwarzschild coördinaten. Bepaal de contravariante componenten $(\nabla f)^\alpha$ van de gradiënt van f .

(b) We beschouwen de basisvectoren $\{\vec{e}_\alpha\}$ voor een vrijvallende waarnemer. Er geldt

$$(\vec{e}_0)^\alpha = ((1 - 2M/r)^{-1}, -(2M/r)^{1/2}, 0, 0), \quad (5)$$

$$(\vec{e}_1)^\alpha = (-(2M/r)^{1/2}(1 - 2M/r)^{-1}, 1, 0, 0), \quad (6)$$

$$(\vec{e}_2)^\alpha = (0, 0, 1/r, 0), \quad (7)$$

$$(\vec{e}_3)^\alpha = (0, 0, 0, 1/(r \sin \theta)). \quad (8)$$

Laat expliciet zien dat deze vectoren een orthonormale set vormen.

(c) Bepaal de covariante componenten van elk van deze basisvectoren.

(d) Bepaal de contravariante componenten van de basisvectoren $\vec{e}^\alpha$ die dual is aan de gegeven set basisvectoren.

(e) Beschouw de vector $\vec{a}$ met contravariante componenten

$$\vec{a} = (4, 3, 0, 0) \quad (9)$$

op punt $(0, 3M, 0, 0)$. Bepaal de componenten a^α en a_α van deze vector in de gegeven orthonormale basis.

Opgave 4: Een intelligente mier beweegt zich over een vlakke plaat gemaakt van invar (daarvan is de uitzettingscoëfficiënt gelijk aan nul), die is voorzien van een Cartesisch coördinatensysteem $\{x^1, x^2\}$. De plaat heeft niet overal dezelfde temperatuur: de temperatuur varieert als functie van de afstand r tot de oorsprong. Dit heeft tot gevolg dat de meetlat waarmee de mier afstanden meet krimpt en uitzet. De mier heeft overigens geen idee van temperatuur.

Opgave a) Laat zien dat de mier de volgende covariante metriek zal vinden voor het Cartesische coördinatensysteem $\{x^1, x^2\}$,

$$g_{11}(x) = g_{22}(x) = f(r), \quad g_{12}(x) = g_{21}(x) = 0, \quad r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}. \quad (10)$$

Laat ook zien dat $f(r)$ kleiner is naarmate de temperatuur van de plaat hoger is.

Opgave b) Omdat de mier intelligent is, gaat hij liever over op poolcoördinaten $\{\xi^1, \xi^2\}$,

$$x^1 = \xi^1 \sin \xi^2, \quad x^2 = \xi^1 \cos \xi^2. \quad (11)$$

Laat zien dat in termen van deze coördinaten de metriek gegeven wordt door

$$g_{11}(\xi) = f(\xi^1), \quad g_{22}(\xi) = (\xi^1)^2 f(\xi^1), \quad g_{12}(\xi) = g_{21}(\xi) = 0. \quad (12)$$

In het vervolg gebruiken zowel de mier als wij deze coördinaten.

Opgave c) Geef de contravariante metriek.