

OPGAVEN WEEK 11

Opgave 1: In deze opgave wordt een ruimteschip beschouwd dat in een cirkelbaan rond een zwart gat valt. Rond een zwart gat geldt (in t, r, θ, ϕ coördinaten) de Schwarzschild-metrik, gegeven door

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2MG}{rc^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2MG}{rc^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

We nemen aan dat het ruimteschip alle motoren heeft uitgezet, en daarom beweegt onder louter de zwaartekracht. Onder deze voorwaarde wordt de beweging van het schip gegeven door de geodeet-vergelijkingen

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

Opgave a) Gebruik de metrik en zijn inverse om alle niet-nul connecties te berekenen. Bespaar u hierbij rekenwerk door gebruik te maken van de diagonaliteit van de metrik en zijn inverse.

Opgave b) Laat zien dat de vier geodeet-vergelijkingen in het geval van een circulaire beweging in het $\theta = \pi/2$ -vlak reduceren tot de volgende vergelijkingen,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} &= 0 \\ \frac{GM}{R^3} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 &= \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \\ 0 &= 0 \\ \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} &= 0 \end{aligned}$$

waarin R de straal is van de cirkelbaan.

De eerste van deze vergelijkingen laat zien dat, in een cirkelbaan, $\frac{dt}{d\tau}$ constant is, en de vierde vergelijking laat zien dat $\frac{d\phi}{d\tau}$ constant is. In de literatuur worden deze constanten respectievelijk als volgt geschreven

$$\frac{e}{1 - \frac{2MG}{Rc^2}}, \quad \frac{lc^2}{R^2}.$$

Hierin zijn e en l twee dimensieloze constanten, die we nu zullen gaan bepalen. Zij zijn aan elkaar gerelateerd via de tweede van uw geodeetvergelijkingen, gevonden in opgave b). Er is echter nog een relatie tussen de twee constanten.

Opgave c) Voor elke beweging $x^\mu(\tau)$ geldt de normalisatie $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$, waarin $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Gebruik dit feit om een tweede relatie af te leiden tussen de constanten e en l . Los vervolgens de twee relaties op, om unieke (dit wil zeggen: louter in termen van R en M) uitdrukkingen te vinden voor e en l .

Opgave d) Substitueer uw waarden voor e en l in de eerste en vierde geodeetvergelijking, en integreer dan elk van deze om de functies $t(\tau)$ en $\phi(\tau)$ te vinden.

Opgave e) Bereken hoeveel tijd t het kost voor het ruimteschip om een enkele omloop rond het zwarte gat te maken, en laat zien dat dit in overeenstemming is met de Derde Wet van Kepler.

De tijd-coördinaat t is niet de tijd die er gemeten wordt in het ruimteschip zelf, maar de tijd die gemeten wordt door een stationaire waarnemer op $r \rightarrow \infty$. In het schip zelf meet men de tijd τ .

Opgave f) Reken uit hoelang een omloop duurt voor de reizigers in het ruimteschip. Is dit meer of minder tijd dan een omloop duurt gezien door de waarnemer op $r \rightarrow \infty$?

Opgave 2. Uit de theorie van Killing-vectoren weten we dat als de vector $\xi^\mu(x)$ (gedefinieerd via een infinitesimale coördinaatstransformatie $x^\mu \rightarrow x'^\mu \equiv x^\mu + \xi^\mu(x)$) voldoet aan de Killing-vergelijking

$$D_\rho \xi_\sigma + D_\sigma \xi_\rho = 0, \quad (1)$$

(waarin $D_\nu A_\mu \equiv \frac{d}{dx^\nu} A_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda$), de contractie $g_{\mu\nu} u^\mu \xi^\nu$ constant is in de tijd wanneer $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ de vier-snelheid van een geodetische beweging is.

Opgave a) Laat zien dat als de metriek van willekeurige ruimtetijd niet van een coördinaat x^μ afhangt, de vector ξ^μ met ν -component $\delta^{\mu\nu}$ (waarin $\delta^{\mu\nu}$ het Kronecker symbool is) een oplossing is van de Killing vergelijking (1).

In deze opgave zullen we dit feit gebruiken om de geodetische beweging van een testdeeltje in de Schwarzschild ruimtetijd te beschouwen. Deze ruimtetijd wordt gegeven door

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2)$$

Opgave b) Laat zien dat de Schwarzschild metriek twee constanten van beweging kent (de zogenaamde Killing constanten) die geschreven kunnen worden als

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) u^t, \quad L = r^2 \sin^2 \theta u^\varphi. \quad (3)$$

In het vervolg zullen we, zonder verlies van algemeenheid, aannemen dat $\theta = \pi/2$. Deze twee bewegingsconstanten kunnen worden gebruikt om geodetische beweging in radiale richting te schrijven als een differentiaalvergelijking. Hiertoe kunnen we de normalisatie van viersnelheid gebruiken, $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$.

Opgave c) Laat zien dat de normalisatie van vier-snelheid leidt tot de differentiaalvergelijking

$$L^2 \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (4)$$

Opgave d) De differentiaalvergelijking bestaat ook in Newtoniaanse mechanica, maar mist dan de term $\propto r^{-3}$; deze laatste term is dus een relativistische bijdrage aan de beweging. Laat zien dat als we deze term verwaarlozen, de differentiaalvergelijking wordt opgelost door

$$r(\varphi) = \frac{a}{1 + e \cos y}, \quad (5)$$

waarin $y = \varphi + \varphi_0$, en φ_0 een willekeurige constante is. In deze oplossing zijn a en e constanten die een maat zijn voor, respectievelijk, de gemiddelde straal van de baan en haar eccentriciteit. Ze zijn gerelateerd aan de Killing constanten E en L . Druk E en L uit in a en e .

Opgave e) We zullen nu de relativistische term $\propto r^{-3}$ in acht nemen. Laat zien dat de differentiaalvergelijking (4) dan nog altijd wordt opgelost door (5) maar alleen als de coördinaat y en de hoek φ aan elkaar gerelateerd zijn via de vergelijking

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 1 - \frac{2M}{a}(3 + e \cos y). \quad (6)$$

Ook nu geldt weer dat a en e gerelateerd zijn aan de Killing constanten E en L . Druk E en L uit in a en e .

Opgave f) Laat zien dat de oplossing uit opgave d) reduceert tot de oplossing uit opgave c) wanneer de testmassa zich ver van de massa M bevindt, en beargumenteer waarom dit in de lijn der verwachting lag.

Opgave g) Gebruik (5) om uitdrukkingen te vinden voor het periastron en het apastron van de beweging. Gebruik deze resultaten om aan te tonen dat de afgelegde hoek $\Delta\varphi$ tussen twee opeenvolgende periastra exact gegeven wordt door de integraal

$$\Delta\varphi = \int_0^{2\pi} dy \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a}(3 + e \cos y)}}. \quad (7)$$

Laat tenslotte zien dat als de testmassa ver weg is van de massa M , de uitkomst van deze integraal gelijk is aan 2π , en dat voor massa's dichtbij de massa M de integraal een waarde heeft groter dan 2π . Dit resultaat is de beroemde periastron shift van de planeten in hun baan rond de zon: ze draaien iets sneller rond de zon dan op basis van louter de Newtoniaanse mechanica verwacht wordt.

Opgave h) Bereken de perihelion-precessie van Mercurius.