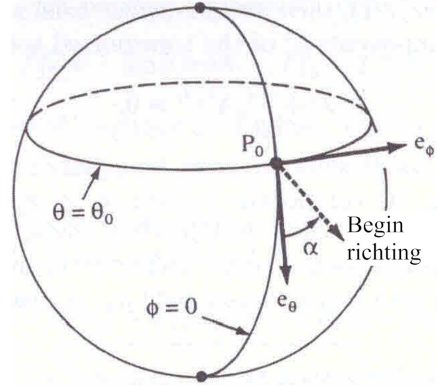


Tentamen: Gravitatie en kosmologie

Docent: Jo van den Brand
Datum uitreiken: 3 december 2012
Datum inleveren: 14 december 2012 (bij Marja of voor 17:00 in mijn postvak)
Datum mondeling: 17 - 21 december 2012 (afspraak maken via email)

- Vermeld uw naam op elke pagina.
- Het is toegestaan om literatuur en programmatuur te raadplegen. Geef in het laatste geval een uitdraai mee.
- Geef aan met wie u samenwerkt (indien van toepassing).
- Motiveer uw resultaat teneinde een maximale score te bereiken. Onleesbaarheden worden fout gerekend.
- Alle opgaven tellen even zwaar (alle onderdelen ook).
- Antwoorden inleveren bij secretaresse (of postvak): Marja Herronen, kamer T2.24.
- Veel succes!

Opgave 1. Beschouw een bol met straal a , voorzien van de gebruikelijke coördinaten $u^1 \equiv \theta$, $u^2 \equiv \phi$. De hoeken θ en ϕ kennen we van de sferische coördinaten, met $0 \leq \theta \leq \pi$ en $0 \leq \phi \leq 2\pi$. We transporteren een vector $\vec{\lambda}$ parallel langs een cirkel met latitude γ gegeven door $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 = \text{constant}$), beginnend en eindigend op punt P_0 met $\phi = 0$ of 2π (zie onderstaande figuur).



Figuur 1: Parallel transport over een cirkel met bepaalde latitude $\theta = \theta_0 = \text{constant}$.

Opgave 1a) Bij aanvang maakt de eenheidsvector $\vec{\lambda}$ op punt P_0 een hoek α (oostelijk ten opzichte van het zuiden) met $\mathbf{e}_\theta$. Welke hoek heeft $\vec{\lambda}$ ten opzichte van zijn oorspronkelijke richting als hij volledig over de cirkel is getransporteerd voor $\theta_0 = 85^\circ$?

Opgave 1b) Over welke hoek wordt $\vec{\lambda}$ gedraaid voor een cirkel met $\theta_0 = 5^\circ$ (nabij de Noordpool)?

Opgave 1c) Over welke hoek wordt $\vec{\lambda}$ gedraaid voor transport langs een geodeet? Wat zijn de geodeten op het oppervlak van een bol?

Opgave 2. We beschouwen een vlak FRW universum met metriek

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1)$$

dat gevuld is met relativistisch materiaal en een kosmologische constante Λ . We nemen aan dat de ruimte een Big Bang heeft ondergaan op coördinatentijd $t = 0$.

Opgave 2a) Schrijf de Einsteinvergelijkingen op voor dit universum en gebruik voor de perfecte vloeistof met toestandsvergelijking $P = w\rho$ de energie-impuls tensor

$$T^a_b = \rho \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Schrijf de tt -term van de Einsteinvergelijkingen uit en toon aan dat

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right). \quad (3)$$

Opgave 2b) Gebruik het feit dat een relativistische vloeistof een toestandsvergelijking heeft met $w = \frac{1}{3}$ en laat zien dat

$$\rho = \frac{3\beta^2}{8\pi G} a^{-4}, \quad (4)$$

met β^2 een integratieconstante.

Opgave 2c) Gebruik dit resultaat in de 'tt' Einsteinvergelijking en bereken de kosmologische schaafactor $a^2(t)$. Laat zien dat dit gelijk is aan

$$a^2(t) = \beta \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left(2t \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \right). \quad (5)$$

Opgave 2d) Laat zien dat deze oplossing voldoet aan de randvoorwaarden: $a(t=0) = 0$, terwijl voor $t \rightarrow \infty$ we een exponentieel expanderend universum dienen te vinden, op precies dezelfde manier als wanneer we de stralingsdichtheid ρ verwaarloosd hadden.

Opgave 2e) Beschrijf de asymptotische beweging van een foton dat langs de positieve $\hat{x}$ -as reist. Laat de beweging beginnen op de oorsprong op $t = 0$. (Gebruik hierbij Mathematica of iets dergelijks. Analytisch kan het ook door hypergeometrische functies te gebruiken.)

Opgave 2f) Laat zien dat voor "late" tijden de positie van het foton in essentie "bevriest": de voortgang is exponentieel langzamer en langzamer naarmate de coördinatentijd naar oneindig gaat. Als t_i laat genoeg is zodat het universum gedomineerd wordt door Λ , dan zal het foton binnen de oneindigheid van tijd tot het eind van het universum, slechts een eindige afstand afleggen, gegeven door

$$x(\infty) - x(t_i) = \left(\frac{12}{\beta^2 \Lambda} \right) e^{-t_i \sqrt{\Lambda/3}}. \quad (6)$$

Opgave 3. We beschouwen de geodetische beweging van een testdeeltje in de Schwarzschild ruimtetijd. Deze ruimtetijd wordt gegeven door

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin \theta d\varphi^2. \quad (7)$$

Opgave 3a) Laat zien dat de Schwarzschild metriek twee constanten van beweging kent (de zogenaamde Killing constanten) die geschreven kunnen worden als

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) u^t, \quad L = r^2 \sin \theta u^\varphi. \quad (8)$$

In het vervolg zullen we, zonder verlies van algemeenheid, aannemen dat $\theta = \pi/2$. Deze twee bewegingsconstanten kunnen worden gebruikt om geodetische beweging in radiale richting te schrijven als een differentiaalvergelijking. Hiertoe kunnen we de normalisatie van viersnelheid gebruiken, $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$.

Opgave 3b) Laat zien dat de normalisatie van vier-snelheid leidt tot de differentiaalvergelijking

$$L^2 \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right). \quad (9)$$

Opgave 3c) De differentiaalvergelijking bestaat ook in Newtoniaanse mechanica, maar mist dan de term $\propto r^{-3}$; deze laatste term is dus een relativistische bijdrage aan de beweging. Laat zien dat als we deze term verwaarlozen, de differentiaalvergelijking wordt opgelost door

$$r(\varphi) = \frac{a}{1 + e \cos y}, \quad (10)$$

waarin $y = \varphi + \varphi_0$, en φ_0 een willekeurige constante is. In deze oplossing zijn a en e constanten die een maat zijn voor, respectievelijk, de gemiddelde straal van de baan en haar eccentriciteit. Ze zijn gerelateerd aan de Killing constanten E en L . Druk E en L uit in a en e .

Opgave 3d) We zullen nu de relativistische term $\propto r^{-3}$ in acht nemen. Laat zien dat de differentiaalvergelijking (9) dan nog altijd wordt opgelost door (10) maar alleen als de coördinaat y en de hoek φ aan elkaar gerelateerd zijn via de vergelijking

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 1 - \frac{2M}{a}(3 + e \cos y). \quad (11)$$

Ook nu geldt weer dat a en e gerelateerd zijn aan de Killing constanten E en L . Druk E en L uit in a en e .

Opgave 3e) Laat zien dat de oplossing uit opgave 3d reduceert tot de oplossing uit opgave 3c wanneer de testmassa zich ver van de massa M bevindt, en beargumenteer waarom dit in de lijn der verwachting lag.

Opgave 3f) Gebruik (10) om uitdrukkingen te vinden voor het periastron en het apastron van de beweging. Gebruik deze resultaten om aan te tonen dat de afgelegde hoek $\Delta\varphi$ tussen twee opeenvolgende periastra exact gegeven wordt door de integraal

$$\Delta\varphi = \int_0^{2\pi} dy \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a}(3 + e \cos y)}}. \quad (12)$$

Laat tenslotte zien dat als de testmassa ver weg is van de massa M , de uitkomst van deze integraal gelijk is aan 2π , en dat voor massa's dichtbij de massa M de integraal een waarde heeft groter dan 2π . Dit resultaat is de beroemde periastron shift van de planeten in hun baan rond de zon: ze draaien iets sneller rond de zon dan op basis van louter de Newtoniaanse mechanica verwacht wordt.

Opgave 3g) Bereken de perihelion-precessie van Mercurius.

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we een stofbal waarvan de ruimtetijdromming wordt beschreven door de Schwarzschild metriek. Zoals al is afgeleid in de vorige opgave geldt dat een stofdeeltje in deze ruimtetijd twee Killingconstanten E en L kent. De componenten van de 4-snelheid zien er dan als volgt uit:

$$\begin{aligned} u^0 &= g^{0\nu} u_\nu = g^{00} u_0 = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E, \\ u^r &= \frac{dr}{d\tau}, \\ u^\theta &= 0, \\ u^\phi &= g^{\phi\nu} u_\nu = g^{\phi\phi} u_\phi = \frac{1}{r^2} L. \end{aligned} \quad (13)$$

Opgave 4a) Gebruikmakend van de normalisatie van de 4-snelheid ($u^\mu u_\mu = -1$), toon aan dat

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) = \frac{1}{2} E^2. \quad (14)$$

Opgave 4b) Volledige gravitationele ineenstorting vindt plaats wanneer de druk niet langer voldoende is om een ster te in stand te houden. Het eenvoudigste model is er een waarbij de druk

helemaal is weggevallen ($P = 0$), maar de dichtheid is uiteraard nog steeds niet nul. De materie heeft dan de energie-momentum tensor van drukloos stof:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (15)$$

Laten we aannemen dat we te maken hebben met een stofbal die homogeen en isotroop is. Deze begint op rust, met een eindige straal R . Buiten de stofbal is er alleen maar sferisch symmetrische vacuüm-ruimtetijd, waarvan we veronderstellen dat hij asymptotisch vlak is. Volgens de stelling van Birkhoff is dit uitwendige gedeelte van de ruimtetijd dus van de Schwarzschild-vorm.

Aan het oppervlak van de stofbal bewegen stofdeeltjes op geodeten van de uitwendige Schwarzschild-ruimtetijd. Gebruikmakend van vgl. (14) en de beginvoorwaarden, toon aan dat de beweging aan het oppervlak beschreven wordt door

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{R} \frac{R-r}{r}. \quad (16)$$

Op een factor $2M/R$ na, is dit een welbekende differentiaalvergelijking, namelijk die van een cycloïde. Beschouw een punt P op een wiel dat in de x -richting rolt. Laat η de hoek zijn tussen de verticale as en een lijn die het midden van het wiel verbindt met het punt P . Als de straal van het wiel $\mathcal{R}$ is, toon aan dat de x - en y -componenten als volgt afhangen van η :

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{R}(\eta + \sin \eta), \\ y &= \mathcal{R}(1 + \cos \eta). \end{aligned} \quad (17)$$

Bewijs ook dat

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2\mathcal{R} - y}{y}. \quad (18)$$

Door vergelijking (18) te vergelijken met (16), leid een parametrische oplossing af voor (16).

Opgave 4c) Leg uit waarom de inwendige geometrie van de stofbal die van een in elkaar stortend, gesloten ($k = +1$) RW-universum moet zijn. De Einsteinvergelijkingen worden dan twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de schaafactor a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{1}{a^2}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi}{3}\rho, \end{aligned} \quad (19)$$

waarbij het punt de afgeleide naar de eigentijd van het stof aanduidt. Leid een parametrische oplossing af voor a (met beginwaarde a_m), alsook voor de eigentijd τ , allebei in termen van een parameter η zoals hierboven. Leid ook een uitdrukking af voor de dichtheid als functie van η .

Opdat dit model geloofwaardig zou zijn, moet de omtrek van het steroppervlak dezelfde zijn wanneer ze gemeten wordt via de interne RW-metrik en de externe Schwarzschild-metrik. Met andere woorden, als $\mathcal{C}$ de evenaar is op een willekeurig tijdstip, dan

$$\int_{\mathcal{C}} |g_{\alpha\beta}^S dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} = \int_{\mathcal{C}} |g_{\alpha\beta}^F dx^\alpha dx^\beta|^{1/2}, \quad (20)$$

waarbij g^F de $k = 1$ RW-metrik is met lijnelement

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (21)$$

Toon aan dat het inderdaad mogelijk is om aan (20) te voldoen voor alle tijdstippen. Hoe relateert deze voorwaarde de massa M en initiële straal R aan de initiële schaalfactor a_m en de waarde van de radiële coördinaat χ_0 van de rand?

Opgave 4d) Een waarnemer A beweegt mee met het oppervlak van de stofbal. Leid uitdrukkingen af in termen van M en R voor de tijd die volgens A verstrijkt alvorens de volgende dingen gebeuren:

- (a) de vorming van een horizon;
- (b) het verschijnen van een singulariteit.

Neem aan de initiële straal en de massa van de ster gelijk waren aan die van de Zon. Wat zijn in dat geval de tijden (a) en (b)? (Vergeet niet de nodige machten van G en c in te voeren.)

Een andere waarnemer B kijkt vanop een zeer grote afstand naar de ineenstorting van de ster. Men kan aantonen dat de eigentijd t van B als volgt gerelateerd is aan de bovenstaande parameter η :

$$t = 2M \ln \left| \frac{(R/2M - 1)^{1/2} + \tan(\eta/2)}{(R/2M - 1)^{1/2} - \tan(\eta/2)} \right| + 2M(R/2M - 1)^{1/2} [\eta + (R/4M)(\eta + \sin \eta)]. \quad (22)$$

Deze uitdrukking divergeert wanneer een bepaalde waarde van η wordt benaderd. Wat is r op dat moment? Bespreek.

Voor massieve deeltjes kan de geodetische vergelijking geschreven worden als

$$\frac{du_\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} u^\mu u^\sigma. \quad (23)$$

Hieruit kunnen we opmaken dat wanneer alle componenten van de metriek onafhankelijk zijn van x^ν voor een bepaalde index ν , dan $\partial_\nu g_{\mu\sigma} = 0$, en u_ν is constant langs de hele geodeet: het is een *bewegingsconstante*.

In de Schwarzschild-metriek zijn alle componenten onafhankelijk van t , dus is u_0 een bewegingsconstante. Het is behulpzaam een nieuwe constante E als volgt te definiëren:

$$E \equiv -u_0. \quad (24)$$

Merk op dat $u_0 = p_0/m$, met p^μ het 4-momentum en m de rustmassa; E is dus de energie per eenheid rustmassa. De metriek is eveneens onafhankelijk van de hoek ϕ , zodat u_ϕ een bewegingsconstante is, en we definiëren

$$L \equiv u_\phi, \quad (25)$$

waarbij L het baanimpuls per eenheid rustmassa is. Omwille van sferische symmetrie gebeurt de beweging in een vlak. Zonder beperking kunnen we veronderstellen dat dit het equatoriale vlak is ($\theta = \pi/2$), en $u_\theta = d\theta/d\tau = 0$.