

Tentamen: Gravitatie en kosmologie

Docent: Jo van den Brand, Tjonnie Li
Datum uitreiken: 29 november 2010
Datum inleveren: 13 december 2010
Datum mondeling: 20 december 2010

- Vermeld uw naam op elke pagina.
- Het is toegestaan om literatuur en programmatuur te raadplegen. Geef in het laatste geval een uitdraai mee.
- Geef aan met wie u samenwerkt (indien van toepassing).
- Motiveer uw resultaat teneinde een maximale score te bereiken. Onleesbaarheden worden fout gerekend.
- Alle opgaven tellen even zwaar (alle onderdelen ook).
- Antwoorden inleveren bij secretaresse: Marja Herronen, kamer T2.24.
- Veel succes!

Opgave 1a) Stel dat een sterrenstelsel wordt waargenomen met een roodverschuiving $z = 1$. Neem aan dat we in een materie-gedomineerd FRW kosmologie leven. Op welke fractie t/t_0 van de huidige leeftijd van het universum verliet het licht dit sterrenstelsel?

Opgave 1b) In deze opgave geven we een alternatieve afleiding van $g_{00} = 1 + 2V/c^2$ in een zwak gravitatieveld gebruikmakende van het equivalentieprincipe. Laat een lichtbron met constante hoeksnelheid ω rond een waarnemer draaien. Wat is de golflengte verandering voor deze waarnemer? Schrijf deze golflengte verandering nu in termen van de centrifugaal potentiaal $V_c = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2$. Beredeneer vervolgens dat uit het equivalentieprincipe volgt dat $g_{00} = 1 + 2V/c^2$.

Opgave 2. Een symmetrische ruimte

We bekijken een tweedimensionaal oppervlak ingebed in de vlakke driedimensionale Cartesische ruimte met coördinaten X^A , $A = 1, 2, 3$. Het oppervlak wordt voorzien van twee coördinaten $x^1 \equiv r$ en $x^2 \equiv \phi$. De inbedding is als volgt:

$$X^1 = r \sin \phi, \quad X^2 = r \cos \phi, \quad X^3 = f(r), \quad (1)$$

waarbij $f(r)$ een functie is.

Opgave 2a) Bewijs dat dit oppervlak cylinder-symmetrisch is rond de as $X^1 = X^2 = 0$.

Opgave 2b) Laat zien dat de covariante geïnduceerde metriek gegeven wordt door

$$g_{11}(x) = 1 + f'(r)^2, \quad g_{22}(x) = r^2, \quad g_{12}(x) = g_{21}(x) = 0. \quad (2)$$

Opgave 2c) Bereken de contravariante metriek.

Opgave 2d) Bereken de Christoffel symbolen.

Opgave 2e) Geef de geodeet-vergelijkingen, en de kinematische conditie ($\dot{x}^i(s)\dot{x}_i(s) = 1 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ waarbij de indices i en j de waarden 1 en 2 kunnen aannemen).

Opgave 2f) Bekijk de geodeet-vergelijking voor $x^2 = \phi$. Laat zien dat deze wordt opgelost door

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{K}{r^2}, \quad (3)$$

waarbij K een constante is.

Opgave 2g) Vul het bovenstaande resultaat in in de kinematische conditie, en laat zien dat

$$r^2 (1 + f'(r)^2) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = r^2 - K^2. \quad (4)$$

Opgave 2h) Laat zien dat er een geodeet is waarvoor $r(s)$ constant is. Bereken deze waarde van $r(s)$.

Opgave 2i) Laat zien dat een geodeet met gegeven waarde van K nooit tot $r < K$ kan leiden.

Opgave 2j) Laat $f(r)$ gegeven zijn door

$$f(r) = \sqrt{1 - r^2} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - r^2}}{1 - \sqrt{1 - r^2}} \right) \quad (5)$$

voor $0 < r \leq 1$, en gelijk zijn aan nul voor $r > 1$. Laat zien dat

$$f'(r) = \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} \quad (6)$$

voor $r < 1$, en schets $f(r)$.

Opgave 2k) Laat zien dat de geodeet in dit geval voldoet aan

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{r^2 - K^2}. \quad (7)$$

Opgave 2l) Laat zien dat de oplossing voor de geodeet wordt gegeven door

$$r(s) = K \cosh(s - s_0), \quad \phi(s) = \phi_0 + \frac{1}{K} \tanh(s - s_0), \quad (8)$$

zolang $r(s) < 1$, waarbij s_0 en ϕ_0 constanten zijn.

Opgave 2m) Schets de projectie van de geodeet op het (X^1, X^2) vlak voor $s_0 = \phi_0 = 0$ en $K = 1$.
Let op: geef jezelf goed rekenschap van de vorm van de geodeet voor $r(s) > 1$!

Opgave 3. Onder welk van de volgende aannamen zou er in de hete Big Bang minder ${}^4\text{He}$ geproduceerd zijn dan voorspeld door het ‘standaard model’? Minder ${}^2\text{H}$ (deuterium)?

Opgave 3a) Neem aan dat de baryondichtheid in het heelal op dit moment groter is dan we denken.

Opgave 3b) Neem aan dat de koppelingsconstante van de zwakke wisselwerking kleiner is dan we nu denken.

Opgave 3c) Neem aan dat er op dit moment veel meer neutrino’s dan antineutrino’s of fotonen in de kosmische achtergrond zijn.

Opgave 3d) Neem aan dat er op dit moment veel meer antineutrino’s dan neutrino’s of fotonen in de kosmische achtergrond zijn.

Opgave 3e) Neem aan dat de waarde van de gravitatie constante G van de kosmologische tijd afhangt en dat die in het verleden een beetje groter was.

Opgave 4. Voor massieve deeltjes kan de geodetische vergelijking geschreven worden als

$$\frac{du_\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} \partial_\nu g_{\mu\sigma} u^\mu u^\sigma. \quad (9)$$

Hieruit kunnen we opmaken dat wanneer alle componenten van de metriek onafhankelijk zijn van x^ν voor een bepaalde index ν , dan $\partial_\nu g_{\mu\sigma} = 0$, en u_ν is constant langs de hele geodeet: het is een *bewegingsconstante*.

In de Schwarzschild-metriek zijn alle componenten onafhankelijk van t , dus is u_0 een bewegingsconstante. Het is behulpzaam een nieuwe constante E als volgt te definiëren:

$$E \equiv -u_0. \quad (10)$$

Merk op dat $u_0 = p_0/m$, met p^μ het 4-momentum en m de rustmassa; E is dus de energie per eenheid rustmassa. De metriek is eveneens onafhankelijk van de hoek ϕ , zodat u_ϕ een bewegingsconstante is, en we definiëren

$$L \equiv u_\phi, \quad (11)$$

waarbij L het baanimpuls per eenheid rustmassa is. Omwille van sferische symmetrie gebeurt de beweging in een vlak. Zonder beperking kunnen we veronderstellen dat dit het equatoriale vlak is ($\theta = \pi/2$), en $u_\theta = d\theta/d\tau = 0$.

De componenten van de 4-snelheid zien er dan als volgt uit:

$$\begin{aligned} u^0 &= g^{0\nu} u_\nu = g^{00} u_0 = m \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E, \\ u^r &= \frac{dr}{d\tau}, \\ u^\theta &= 0, \\ u^\phi &= g^{\phi\nu} u_\nu = g^{\phi\phi} u_\phi = \frac{1}{r^2} L. \end{aligned} \quad (12)$$

Opgave 4a) Gebruik makend van de normalisatie van de 4-snelheid ($u^\mu u_\mu = -1$), toon aan dat

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + 1\right) = \frac{1}{2} E^2. \quad (13)$$

Opgave 4b) Volledige gravitationele ineenstorting vindt plaats wanneer de druk niet langer voldoende is om een ster te onderhouden. Het eenvoudigste model is er een waarbij de druk helemaal is weggevallen ($P = 0$), maar de dichtheid is uiteraard nog steeds niet nul. De materie heeft dan de energie-momentum tensor van drukloos stof:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (14)$$

Laten we aannemen dat we te maken hebben met een stofbal die homogeen en isotroop is. Deze begint op rust, met een eindige straal R . Buiten de stofbal is er alleen maar sferisch symmetrische vacuüm-ruimtetijd, waarvan we veronderstellen dat hij asymptotisch vlak is. Volgens de stelling van Birkhoff is dit uitwendige gedeelte van de ruimtetijd dus van de Schwarzschild-vorm.

Aan het oppervlak van de stofbal bewegen stofdeeltjes op geodeten van de uitwendige Schwarzschild-ruimtetijd. Gebruik makend van vgl. (13) en de beginvoorwaarden, toon aan dat de beweging van het oppervlak beschreven wordt door

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2M}{R} \frac{R-r}{r}. \quad (15)$$

Op een factor $2M/R$ na, is dit een welbekende differentiaalvergelijking, namelijk die van een cycloïde. Beschouw een punt P op een wiel dat in de x -richting rolt. Laat η de hoek zijn tussen de verticale as en een lijn die het midden van het wiel verbindt met het punt P . Als de straal van het wiel $\mathcal{R}$ is, toon aan dat de x - en y -componenten als volgt afhangen van η :

$$\begin{aligned} x &= \mathcal{R}(\eta + \sin \eta), \\ y &= \mathcal{R}(1 + \cos \eta). \end{aligned} \quad (16)$$

Bewijs ook dat

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2\mathcal{R} - y}{y}. \quad (17)$$

Door vgl. (17) te vergelijken met (15), leid een parametrische oplossing af voor (15).

Opgave 4c) Leg uit waarom de inwendige geometrie van de stofbal die van een in elkaar stortend, gesloten ($k = +1$) RW-universum moet zijn. De Einsteinvergelijkingen worden dan twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de schaalfactor a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{16\pi\rho}{3} - \frac{1}{a^2}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi}{3}\rho, \end{aligned} \quad (18)$$

waarbij het punt de afgeleide m.b.t. de eigentijd van het stof aanduidt. Leid een parametrische oplossing af voor a (met beginwaarde a_m), alsook voor de eigentijd τ , allebei in termen van een parameter η zoals hierboven. Leid ook een uitdrukking af voor de dichtheid als functie van η .

Opdat dit model geloofwaardig zou zijn, moet de omtrek van het steroppervlak dezelfde zijn wanneer ze gemeten wordt via de interne RW-metrick en de externe Schwarzschild-metrick. Met andere woorden, als $\mathcal{C}$ de evenaar is op een willekeurig tijdstip, dan

$$\int_{\mathcal{C}} |g_{\alpha\beta}^S dx^\alpha dx^\beta|^{1/2} = \int_{\mathcal{C}} |g_{\alpha\beta}^F dx^\alpha dx^\beta|^{1/2}, \quad (19)$$

waarbij g^F de $k = 1$ RW-metrick is met lijnelement

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (20)$$

Toon aan dat het inderdaad mogelijk is om aan (19) te voldoen voor alle tijdstippen. Hoe relateert deze voorwaarde de massa M en initiële straal R aan de initiële schaafactor a_m en de waarde van de radiële coördinaat χ_0 van de rand?

Opgave 4d) Een waarnemer A beweegt mee met het oppervlak van de stofbal. Leid uitdrukkingen af in termen van M en R voor de tijd die volgens A verstrijkt alvorens de volgende dingen gebeuren:

- (a) de vorming van een horizon;
- (b) het verschijnen van een singulariteit.

Neem aan de initiële straal en de massa van de ster gelijk waren aan die van de Zon. Wat zijn in dat geval de tijden (a) en (b)? (Vergeet niet de nodige machten van G en c in te voeren.)

Een andere waarnemer B kijkt vanop een zeer grote afstand naar de ineenstorting van de ster. Men kan aantonen dat de eigentijd t van B als volgt gerelateerd is aan de bovenstaande parameter η :

$$t = 2M \ln \left| \frac{(R/2M - 1)^{1/2} + \tan(\eta/2)}{(R/2M - 1)^{1/2} - \tan(\eta/2)} \right| + 2M(R/2M - 1)^{1/2} [\eta + (R/4M)(\eta + \sin \eta)]. \quad (21)$$

Deze uitdrukking divergeert wanneer een bepaalde waarde van η wordt benaderd. Wat is r op dat moment? Bespreek.