5 De speciale relativiteitstheorie

5.1 Historische introductie en Einsteins postulaten

De relativiteitstheorie is geboren in het prille begin van de twintigste eeuw. De negentiende eeuw was net ten eind gekomen, en de natuurkunde bevond zich in een unieke positie: voor het eerst in de geschiedenis leken alle fundamentele vraagstukken opgelost te zijn. Al in de 17e eeuw had Sir Isaac Newton (1643-1727) een theoretisch model opgesteld waarmee beweging en krachten in detail konden worden berekend en voorspeld, samengevat in drie wetten die nu zijn naam dragen. Tezamen met Newtons universele wet van de zwaartekracht konden deze drie wetten zelfs de banen van de planeten om de zon perfect[51] beschrijven. Ook konden deze wetten, wanneer toegepast op de aanname dat materie bestaat uit vele miniscule deeltjes in constante botsing, de wetten van de warmteleer reproduceren; hiermee was het vakgebied van de thermodynamica vrijwel geheel[52] verklaard, wat een triomf is van de newtoniaanse bewegingsleer.

Verder was er nog de theorie van de elektrische en magnetische velden, onderzocht door Faraday, Oersted, Coulomb en Savart, en uiteindelijk halverwege de 19e eeuw tot een wiskundig geheel samengesmeed door James Clerk Maxwell (1831-1879); de vier wetten van deze theorie dragen nu zijn naam. Er geldt

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} &= 4\pi \mathbf{J}, \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,
\end{aligned} \tag{177}$$

voor de elektrische en magnetische velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ in vacuüm in eenheden waarbij $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$. Hierbij stelt ρ de dichtheid van elektrische lading voor en $\mathbf{J}$ de stroomdichtheid.

Ook deze theorie, de elektrodynamica geheten, was uitermate succesvol. Het beschrijft, onder andere, de interactie tussen elektriciteit en magnetisme en laat zien dat zij eigenlijk een aspect zijn van een en dezelfde kracht. Ook laten de wetten van Maxwell zien dat elektrische en magnetische velden verstoord kunnen worden, en dat deze verstoring zich voortplant met een snelheid van 299.800 kilometer per seconde, een waarde nu universeel aangegeven door de letter c.[53] Dit is precies de snelheid waarvan men al lang eerder gemeten had dat het licht zich ermee voortplant, en de conclusie werd dan ook al snel getrokken dat licht niets anders is dan een verstoring in het elektromagnetische veld. Al snel konden alle regels uit de lenzen- en spiegelleer afgeleid worden uit de elektrodynamica, en hiermee werd het gehele vakgebied van de optica een solide fundament gegeven.

Het was dan ook geen wonder dat de natuurkundigen aan het eind van de negentiende eeuw in een euforische staat verkeerden. Er waren weliswaar nog bepaalde berekeningen in detail uit te voeren, maar niets leek erop te wijzen dat er meer zou bestaan dan de elektromagnetische kracht en de zwaartekracht, en dat alle relaties tussen krachten en bewegingen beschreven konden

[51] Later zullen we zien dat er wel degelijk een afwijking bekend was van de planeetbanen zoals beschreven door newtoniaanse wetten, te weten de periheliumverschuiving van Mercurius. Het verklaren van deze afwijking was een van de eerste experimentele verificaties van Einsteins theorie van de zwaartekracht: de algemene relativiteitstheorie. We komen hier in latere hoofdstukken op terug.

[52] Ook hier geldt een kleine opmerking: er waren enkele onduidelijkheden (zoals de Gibbs correctiefactor) die later verklaard zijn door de quantummechanica.

[53] De keuze voor de letter c komt van het Griekse woord voor snelheid, *celeritas*.

worden door de leer van Newton. Alle andere krachten en verschijnselen (licht, warmte, ..) waren al aangetoond een direct gevolg te zijn van de wetten van Newton of de wetten van Maxwell (of een combinatie van beide), en er waren simpelweg weinig aanwijzingen om te vermoeden dat de natuur zich aan meer wetten hield dan deze.

Er waren in het begin van de twintigste eeuw dan ook maar weinig natuurkundigen die zich realiseerden dat er wel degelijk een fundamenteel probleem verscholen zat in deze twee grote theorieën. Het probleem zat hem niet in de theorieën afzonderlijk, maar in hun *combinatie*. De wetten van Maxwell laten zien, zoals we besproken hebben, dat er golven bestaan die zich voortplanten door de ruimte en dat zij dit doen met precies de snelheid van het licht. De elektrodynamica zegt bovendien dat deze snelheid dezelfde is voor alle waarnemers, ook als deze zich ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen. Dat is op zichzelf wel wonderlijk, maar hoeft nog geen probleem te zijn (zolang het maar niet door experiment tegengesproken wordt). Het probleem openbaart zich pas wanneer nu tegelijkertijd de wetten van Newton worden beschouwd: deze zeggen namelijk dat *alle* snelheden (ook die van het licht) wel degelijk behoren te verschillen tussen waarnemers die zelf een snelheid hebben ten opzichte van elkaar: dit zit onmiskenbaar ingebouwd in de wetten van Newton. Het was dan ook duidelijk dat de wetten van Newton en de wetten van Maxwell elkaar op enkele punten tegenspreken, en dat een van deze sets aangepast zou moeten worden. Het bleken de wetten van Newton te zijn. Het is deze noodzaak tot aanpassing die de jonge Albert Einstein in 1905 leidde tot de theorie die wij nu de speciale relativiteitstheorie (SRT) noemen.

Als startpunt van de SRT nam Einstein twee *postulaten*, twee principes waar geen bewijs van bekend is, maar waarvan hij vermoedde dat de natuur die altijd in acht nam. Beide zijn gebaseerd op vermoedens gevoed door de elektrodynamica, en beide zullen nu in zeker detail besproken worden.

De wetten van Maxwell laten zien dat een elektromagnetische verstoring zich voortplant met de snelheid van het licht ongeacht met welke snelheid een waarnemer zelf beweegt. Dit is een wonderlijk resultaat: als waarnemer A een foton voorbij ziet vliegen met de snelheid van het licht, c, en een waarnemer B beweegt zich met een zekere snelheid v ten opzichte van A in dezelfde richting als het foton, dan zegt het 'gezond verstand' dat waarnemer B het foton met een snelheid $c - v$ ziet bewegen. De wetten van Maxwell zeggen echter dat *ook* waarnemer B het foton met c ziet bewegen, en dat hetzelfde geldt voor *alle* waarnemers C, D, ... die zich met een constante snelheid bewegen ten opzichte van waarnemer A. Nogmaals: de verklaring voor dit gegeven is niet bekend, maar Einstein nam het als een *gegeven*, een feit van de natuur. Hij breidde het zelfs uit: waar de elektrodynamica suggereert dat dit een eigenschap is van louter en alleen het licht, nam Einstein aan dat alles wat zich met deze snelheid beweegt aan deze eigenschap voldoet. Dit vormt dan het eerste postulaat van de SRT:

Postulaat 1: de lichtsnelheid heeft dezelfde waarde voor alle waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid.

Dit gegeven staat bekend als het *principe van de invariantie van de lichtsnelheid*. De fysische (en zelfs filosofische!) implicaties van dit postulaat zijn enorm, omdat het direct tot gevolg heeft dat de duur van tijd en de grootte van afstanden niet hetzelfde kunnen zijn voor al deze waarnemers.

Het tweede postulaat komt voort uit een andere eigenschap van de elektrodynamica. Zoals verteld gaat de elektrodynamica over de relatie tussen elektrische velden en magnetische velden, waar een elektrisch veld een maat is voor de invloed van een stilstaand geladen deeltje op alle andere geladen deeltjes in zijn omgeving; een magnetisch veld is een maat voor de invloed van een bewegend geladen deeltje op alle andere geladen deeltjes in zijn omgeving. Op het eerste gezicht lijken deze definities in elkaar over te gaan. Immers, een stilstaand deeltje kan ook gezien worden als een bewegend deeltje wanneer de waarnemer van een stilstaand geladen deeltje besluit met constante snelheid te gaan bewegen; dientengevolge zal het elektrisch veld van het deeltje gedeeltelijk overgaan in een magnetisch veld. In zoverre lijkt het verschil tussen de twee velden slechts een keuze. Echter, er is een heel fysisch verschil tussen de twee velden, en dat is dat een ervan voldoet aan twee van de vier wetten van Maxwell, waar het andere veld voldoet aan de twee andere wetten van Maxwell, met fysisch heel verschillende eigenschappen. Bovendien is het gevolg van een elektrisch veld op een tweede geladen deeltje een kracht $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ die *parallel* is aan het elektrische veld, waar het gevolg van een magnetisch veld een kracht $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ is die *loodrecht* staat op het magnetische veld. Als het verschil tussen elektrische en magnetische velden slechts een keuze is van de snelheid van de waarnemer, hoe kan het dan zijn dat een fysisch meetbaar verschijnsel als kracht op een geladen deeltje zo verschillend is? Blijkbaar is er wel degelijk een heel fundamenteel verschil tussen elektrische en magnetische velden.

Ondanks dit schijnbare verschil, is er de volgende wonderlijke eigenschap van de elektrodynamica: als twee waarnemers, die relatief ten opzichte van elkaar bewegen met constante snelheid, de wetten van Maxwell toepassen op een en hetzelfde systeem van geladen deeltjes, dan zullen zij tot dezelfde fysische resultaten komen, ongeacht alle schijnbaar fundamentele verschillen tussen elektrische en magnetische velden. De waarnemers verschillen dan wel van mening over welke richting de krachten op wijzen, of de deeltjes al dan niet bewegen, en elektrische velden voor de ene waarnemer zijn magnetische voor de ander, maar het *totaal* van al deze effecten geeft uiteindelijk precies dezelfde fysische voorspellingen. Hiermee wordt bedoeld dat als de twee waarnemers hun voorspellingen corrigeren voor het feit dat zij met onderling snelheid bewegen ten opzichte van elkaar, deze altijd precies overeenkomen: de wetten van Maxwell kunnen dus worden toegepast door beide waarnemers zonder op onderlinge tegenstrijdigheden te stuiten. Blijkbaar maakt de natuur, in ieder geval wat elektromagnetische velden betreft, geen onderscheid tussen waarnemers met onderling verschillende constante snelheden. Einstein nam dit aan als een *gegeven*, en nam aan dat dit geldt voor *alle* natuurkundige verschijnselen (niet alleen de elektromagnetische). Dit vormt het tweede postulaat van de SRT:

Postulaat 2: de natuur maakt geen onderscheid tussen waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen met constante snelheid.

Praktisch betekent dit postulaat dat het onmogelijk is om via experimenten te bepalen of een waarnemer in absolute beweging is of niet: het verschil tussen verschillende waarnemers is fundamenteel niet meetbaar. Hierdoor is elke waarnemer even 'correct' als elke andere waarnemer die zich met constante snelheid beweegt ten opzichte van de eerste. In het bijzonder betekent dit dat er geen waarnemersstelsel is ten opzichte waarvan fysische grootheden gemeten moeten worden: elk ander stelsel voldoet namelijk even goed. De gemeten waarden van de grootheden verschillen in het algemeen[54] per waarnemer, maar de *wetten* waaraan deze grootheden voldoen dienen allemaal precies hetzelfde te zijn. Daarom moet bij elke meting van een grootheid aangegeven worden ten opzichte van welke waarnemer het gemeten is. Dit wil zeggen: uitkomsten van metingen hebben nooit absolute betekenis, maar slechts louter relatief. Dit postulaat staat daarom bekend als het *relativiteitsprincipe*. Dit levert een wiskundig voorschrift: teneinde een theorie te formuleren die voldoet aan het relativiteitsprincipe, moeten de wiskundige wetten van deze theorie geschreven worden in een vorm die geen onderscheid maakt tussen waarnemers met verschillende constante snelheden. Dit zullen we dan ook expliciet doen in het vervolg.

5.2 Het minkowskilijnelement

Nu de twee postulaten van de SRT zijn gemotiveerd, kunnen we deze gaan gebruiken om de relatie tussen tijd en ruimte te onderzoeken, en de wetten van beweging af te leiden. Startpunt

[54] Er zijn uitzonderingen op deze regel: er bestaan ook grootheden die hetzelfde zijn voor alle waarnemers. Een ervan is al genoemd: de lichtsnelheid c.

is het lijnelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{178}$$

De metriek speelt zoals altijd de hoofdrol. In het geval van de SRT (en wanneer geschreven in cartesische coördinaten) wordt de metriek gegeven door

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{179}$$

Deze metriek draagt de naam *minkowskimetriek*, en wordt conventioneel aangeduid door de griekse letter η, oftewel $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. De inverse van de minkowskimetriek is eenvoudig te vinden, en blijkt precies dezelfde vorm te hebben als de metriek zelf,

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{180}$$

Als we het lijnelement uitschrijven vinden we

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{181}$$

Dit kunnen we meteen gebruiken om een fysische interpretatie toe te kennen aan het lijnelement. Ten eerste kan worden opgemerkt dat de laatste drie termen precies de stelling van Pythagoras vormen[55]. Dit betekent dat als een waarnemer de afstand tussen twee punten in ruimtetijd meet, en dat op hetzelfde tijdstip doet, voor deze waarnemer geldt dat ds^2 niets anders is dan de afstand tussen deze twee punten. Verder kan worden opgemerkt dat als een waarnemer het tijdsverschil meet tussen twee gebeurtenissen en dat doet zonder ondertussen van positie te veranderen ten opzichte van de gebeurtenissen (dit wil zeggen: deze waarnemer is in rust ten opzichte van de gebeurtenissen!), de laatste drie termen van het lijnelement gelijk zijn aan nul; voor deze waarnemer geldt dus dat het lijnelement de interpretatie heeft van minus de verstreken tijd tussen twee gebeurtenissen. *Het lijnelement is een maat voor de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van deze gebeurtenissen,* $ds^2 = -c^2 d\tau^2$.

5.3 Tijddilatatie

We zullen nu de eerste paar directe gevolgen van het minkowskilijnelement beschouwen. Zoals al eerder aangestipt, suggereert het eerste postulaat dat verschillende waarnemers van mening zullen verschillen over de afstand en het tijdverschil tussen twee gebeurtenissen. Allereerst zal het effect van tijddilatatie worden beschouwd. Startpunt is het lijnelement

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{182}$$

Hierin is $d\tau$ op te vatten als de tijd die verstrijkt op de klok van een waarnemer (W1) voor wie de twee gebeurtenissen plaatsvinden op dezelfde positie, en is dt de tijd die verstrijkt tussen die gebeurtenissen zoals gemeten door een andere waarnemer (W2). Wanneer nu de rechterkant van deze vergelijking gedeeld wordt door $c^2 dt^2$, kan de relatie tussen verstreken tijd van de eerste waarnemer ($d\tau$) en die van de tweede waarnemer (W2) (dt) geschreven worden als

$$d\tau = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \quad \rightarrow \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma}. \tag{183}$$

[55]Merk op dat met de definitie $dT \equiv icdt$, we het lijnelement kunnen schrijven als $ds^2 = dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Het plusmin-teken van deze uitdrukking is het wiskundige gevolg van het nemen van een wortel; fysisch zijn we echter alleen geïnteresseerd in het plusteken, aangezien een minteken zou impliceren dat de twee waarnemers tegengesteld lopende tijden ervaren. We zullen daarom vanaf nu altijd het plusteken gebruiken. Verder is geschreven $v \equiv \frac{dx}{dt}$, oftewel het is de afstand tussen de twee gebeurtenissen zoals gemeten door de tweede waarnemer, gedeeld door de tijdsduur zoals gezien door de tweede waarnemer (W2). Dit is de snelheid v waarmee deze waarnemer zich beweegt ten opzichte van de twee gebeurtenissen (en hiermee ook ten opzichte van de eerste waarnemer, die immers stil staat ten opzichte van de gebeurtenissen). Uit de gevonden vergelijking blijkt dat de twee waarnemers hun tijden verschillend registeren: de hoeveelheid tijd die voor de ene waarnemer verstrijkt tussen twee gebeurtenissen is niet dezelfde als die voor de ander. De factor $\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2}$ is een maat daarvoor. Deze factor wordt de *lorentzfactor* genoemd, en zal nog vaker voorkomen in de SRT; hij wordt conventioneel aangeduid met de letter γ, waarbij

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{184}$$

Merk alvast op dat deze factor oneindig groot wordt als de twee waarnemers een onderlinge snelheid hebben gelijk aan c; verder kan al worden opgemerkt dat als de twee waarnemers een onderlinge snelheid hebben groter dan c, de factor imaginair wordt en daardoor nooit fysisch relevant kan zijn. Dit is een eerste hint dat de lichtsnelheid niet alleen invariant is, maar ook de *maximale* snelheid is die fysisch mogelijk is. Voor het effect van tijddilatatie is het alleen nodig op te merken dat de lorentzfactor altijd groter is dan 1. Hieruit volgt dat $d\tau$ kleiner is dan dt, oftewel: de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen is voor de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de twee gebeurtenissen, kleiner dan voor de waarnemer die zich met snelheid v beweegt ten opzichte van de gebeurtenissen ($d\tau < dt$). Wat betekent dit nu fysisch? Op eerste gezicht lijkt dit te betekenen dat de tijd sneller verloopt voor de eerste waarnemer (W1) dan voor de tweede: immers, de eerste waarnemer heeft minder tijd nodig om van een gebeurtenis naar de andere te gaan. We kunnen het echter ook vanuit de andere waarnemer W2 bekijken. Laat de eerste gebeurtenis het moment zijn waarop de twee waarnemers nog gelijk lopende klokken hebben, en waarop beide waarnemers kijken naar de slinger van de klok van waarnemer W1, die net op het punt staat een slinger te maken. Na een zekere tijd T heeft de slinger de andere kant bereikt, gezien vanuit de waarnemer die de klok bij zich heeft: $d\tau = T$. De stilstaande waarnemer W2 kijkt ondertussen naar dezelfde klok (die zich ten opzichte van hem voortbeweegt met snelheid v), en voor deze waarnemer doet de slinger er een tijd $dt = \gamma d\tau$ over: langer. Dit wil dus zeggen, dat de stilstaande waarnemer observeert dat de voorbijvliegende klok langer nodig heeft dan T om een enkele slinger te maken. De conclusie van de stilstaande waarnemer zou dan ook zijn dat de voorbijkomende klok te langzaam loopt. Dit is wat er bedoeld wordt met tijddilatatie: voor een stilstaande waarnemer lijkt een voorbij komende klok langzamer te lopen dan voor de waarnemer die met de klok meebeweegt. Dit wordt vaak aangeduid met de slogan 'bewegende klokken lopen langzamer'; echter, de lading zou wellicht beter gedekt zijn door de uitspraak 'voor een stilstaande waarnemer lijkt de bewegende klok langzamer te lopen'.

Een vraag komt dan al snel op: loopt een bewegende klok nu 'echt' langzamer dan de stilstaande klok? Want goed beschouwd hebben we hier alleen maar laten zien dat de bewegende klok langzamer *lijkt* te lopen wanneer bekeken door een stilstaande waarnemer. Het antwoord is dat er geen verschil is tussen langzamer *lijken* te lopen, en daadwerkelijk langzamer lopen: fysica gaat immers alleen over gemeten effecten, wat wil zeggen dat wij over alle effecten die zich niet via een meting openbaren, geen zinnige (dat wil zeggen testbare) uitspraak kunnen doen. Elke gemeten waarneming is net zo 'waar' als elke andere gemeten waarneming. Het heeft dan ook geen zin ons af te vragen of de slinger van een klok nu 'echt' langzamer slingert wanneer het beweegt, of dat het alleen maar zo 'lijkt' in onze waarneming: alleen onze meting geldt.

Wat de relativiteitstheorie ons nu geleerd heeft, is dat de gemeten tijdsduur van een proces afhankelijk is van de snelheid van de waarnemer, en de vraag hoe snel een proces nu 'echt' verloopt, is onzinnig geworden. Dit is, zoals ook al genoemd in de discussie over het relativiteitsprincipe, de kern van het woord 'relativiteit': er is geen absoluut antwoord meer op de vraag wat de 'werkelijke' waarde is van bepaalde grootheid; elke waarde is waarnemer-afhankelijk geworden, en elke gemeten waarde is even 'waar'.

Enkele laatste opmerkingen over tijddilatatie. Het moge duidelijk zijn dat dit verschijnsel niets te maken heeft met de mechaniek van de klokken. Het is een puur geometrisch verschijnsel, direct voortkomend uit de minkowskimetriek. Het verschijnsel beperkt zich dan ook niet tot klokken, en geldt voor elk fysisch meetbaar tijdsverschil: de slinger van een klok, de duur van een harteklop, het verval van een atoomkern, de levensduur van een mens, het vallen van een steen, etc, *alle* verschijnselen lijken langzamer te gaan voor een waarnemer, wanneer deze verschijnselen zich bewegen ten opzichte van deze waarnemer.

5.4 Lorentzcontractie

Een tweede direct gevolg van het minkowskilijnelement is de lorentzcontractie: afstanden tussen gebeurtenissen zijn korter voor een waarnemer die beweegt ten opzichte van de gebeurtenissen. Startpunt is wederom het invariante lijnelement ds^2 en we kiezen de x-as als richting van relatieve beweging. Er geldt

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 = -c^2dt'^2 + dx'^2. \tag{185}$$

Om lorentzcontractie aan te tonen beschouwen we allereerst een waarnemer $\mathcal{O}'$ die met snelheid $\vec{v}$ beweegt ten opzichte van een meetlat. Voor deze waarnemer vinden de volgende twee gebeurtenissen plaats: de voorkant van de lat passeert de waarnemer, en de achterkant van de lat passeert deze waarnemer. Voor deze waarnemer vinden de twee gebeurtenissen plaats op dezelfde positie, dus geldt $dx' = 0$. De tijd die de lat erover doet om de waarnemer te passeren, dt', kan gebruikt worden door deze waarnemer als een maat voor de lengte van de lat. Als de lat passeert met een snelheid v, concludeert deze waarnemer dat de lat een lengte heeft van $L' = vdt'$. De rechterkant van deze vergelijking kan dan ook worden geschreven als

$$-c^2dt^2 + dx^2 = -\frac{c^2L'^2}{v^2}. \tag{186}$$

De linkerkant van deze vergelijking heeft betrekking op een andere waarnemer, $\mathcal{O}$, die stilstaat ten opzichte van de lat. Voor deze waarnemer vinden de twee gebeurtenissen (het de eerste waarnemer passeren van voor en achterkant van de lat) plaats op een onderlinge afstand van L, de lengte van de lat zoals gemeten door deze tweede waarnemer. De tijdsduur tussen de twee momenten, dt is echter anders voor deze waarnemer, omdat er een tijddilatatie optreedt[56]. Er geldt $dt' = \gamma^{-1}dt$. Als we dan vervolgens weer gebruiken dat de tijd dt' een maat is voor de lengte L' van de lat zoals gemeten door de eerste waarnemer, dan kan vergelijking (186) geschreven worden als

$$-c^2\gamma^2\frac{L'^2}{v^2} + L^2 = -\frac{c^2L'^2}{v^2}. \tag{187}$$

Dit is nu een relatie tussen de lengte van de lat zoals gemeten door de waarnemer die de lat stil ziet staan, en zoals gemeten door de waarnemer die de lat ziet passeren met een snelheid v. Vereenvoudigd is deze relatie

$$L = \gamma L'. \tag{188}$$

[56] De correcte plaatsing van de lorentzfactor γ kan soms verwarrend zijn: welke waarnemer meet nu een langere tijdsduur? De vuistregel is altijd, dat de waarnemer die in rust is ten opzichte van de twee gebeurtenissen, de kortste tijdsduur meet tussen de twee gebeurtenissen. Dit betekent hier dat $\frac{dt'}{dt} < 1$, wat aangeeft hoe de factor γ geplaatst dient te worden.

Wanneer herinnerd wordt dat γ altijd groter is dan 1, zien we nu dat de lengte van een lat korter lijkt voor iemand die de lat ziet bewegen, dan iemand die de lat in rust ziet. Dit is de lorentz-contractie: afstanden lijken korter wanneer waargenomen door een bewegende waarnemer. Merk op dat dit niet alleen geldt voor latten, maar natuurlijk voor *alle* fysisch meetbare afstandsverschillen. Net als tijddilatatie, is lorentzcontractie een puur geometrisch effect, een direct gevolg van het minkowskilijnelement. Bovendien geldt ook hier weer dat er geen absoluut antwoord is op de vraag hoe lang een lat nu 'echt' is: afstand is een snelheids-afhankelijke grootheid geworden, en kan dientengevolge alleen bepaald worden *ten opzichte van* een gegeven waarnemer: het relativiteitsprincipe!

5.5 De lorentztransformaties

Uit het relativiteitsprincipe volgde al dat het lijnelement invariant dient te zijn onder transformaties van coördinaten. Dit betekent dat er een beperkte set waarnemers is die onderling het minkowksilijnelement mogen gebruiken. We vragen ons af welke transformaties tussen waarnemers het minkowskilijnelement niet van vorm doen veranderen.

Wiskundig gezien betekent dit het beantwoorden van de vraag welke functies $x' = x'(t, x, y, z)$, $y' = y'(t, x, y, z)$, $z' = z'(t, x, y, z)$ de volgende vergelijking oplossen,

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \tag{189}$$

Er zijn meerdere transformaties te bedenken die hieraan voldoen. De makkelijkste die we bedenken kunnen is dat we gewoon bij elke coordinaat een constante optellen,

$$t' = t + a_t, \qquad x' = x + a_x, \qquad y' = y + a_y, \qquad z' = z + a_z. \tag{190}$$

Ingevuld in vergelijking (189) laat direct zien dat dit een oplossing is. Fysisch betekent deze oplossing niets anders dan dat de twee waarnemers een (vaste) afstand van elkaar staan (a_x, a_y, a_z), en dat de klok van een van de waarnemers een (vaste) hoeveelheid tijd voor of achter loopt op die van de ander (a_t). Zulke transformaties noemt men *translaties.*

Een tweede set transformaties die het lijnelement gegeven in vergelijking (189) invariant laten, kan bijvoorbeeld gevonden worden door veranderingen in de tijd en één van de plaats-coördinaten (we kiezen hier voor z) niet te beschouwen. In dat geval moet voldaan worden aan

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2, \tag{191}$$

oftewel de som van twee kwadraten dient niet te veranderen. Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen door te schrijven

$$x' = A_x x + A_y y \qquad y' = B_x x + B_y y, \tag{192}$$

waar A_x, A_y, B_x, B_y constanten zijn. Ingevuld in vergelijking (191) laat dan zien dat voor deze constanten dient te gelden

$$A_x^2 + B_x^2 = 1, \qquad A_y^2 + B_y^2 = 1 \qquad A_x A_y = -B_x B_y. \tag{193}$$

Aan de eerste twee eisen kan direct voldaan worden: als een som van twee kwadraten een constante moet opleveren, dan ligt het voor de hand om sinussen en cosinussen te proberen, aangezien voor deze functies geldt $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ voor elke hoek α. Men kan dus kiezen $A_x = \cos\alpha, B_x = \sin\alpha$ en $A_y = \cos\beta, B_y = \sin\beta$ om aan de eerste twee vergelijkingen te voldoen; aan de derde vergelijking is dan ook voldaan wanneer gekozen wordt $\beta = -\alpha$. Op deze manier is de transformatie compleet, en vinden we

$$x' = (\cos\alpha)x + (\sin\alpha)y, \qquad y' = (\sin\alpha)x - (\cos\alpha)y. \tag{194}$$

Deze transformatie correspondeert met een draaiing om de z-as over een hoek α. Bijvoorbeeld, als die hoek $\frac{\pi}{2}$ is (een draaiing van 90°), dan is $x' = y$, en $y' = x$: de twee waarnemers staan stil ten opzichte van elkaar, maar zijn onderling 90° gedraaid. Transformaties als deze heten *rotaties*. In het voorgaande hebben we alleen een draaiing over de z-as beschouwd, maar de uitbreiding naar draaiingen om de andere assen zijn net zo eenvoudig te vinden.

Een derde soort transformatie kan gevonden worden door nu niet de tijd en een plaatscoördinaat constant te houden, maar in plaats daarvan twee ruimtelijke coördinaten (bijvoorbeeld y en z). In dat geval dient de transformatie te voldoen aan

$$-c^2 dt'^2 + dx'^2 = -c^2 dt^2 + dx^2. \tag{195}$$

Door nu te schrijven

$$ct' = A_t ct + A_x x, \qquad x' = B_t ct + B_x x, \tag{196}$$

(waar A_t, A_x, B_t, B_x constanten zijn) en in te vullen in vergelijking (195), wordt gevonden dat de constanten moeten voldoen aan

$$A_t^2 - B_t^2 = 1, \qquad -A_x^2 + B_x^2 = 1 \qquad A_t A_x = B_t B_x. \tag{197}$$

Deze keer zullen sinussen en cosinussen niet voldoen, omdat hier nu het *verschil* van twee kwadraten een constante moet zijn om aan de eerste twee vergelijkingen te voldoen. Dit is precies wat de *hyperbolische functies* cosh en sinh definieert: voor deze geldt namelijk dat $\cosh^2\eta - \sinh^2\eta = 1$, voor elke waarde van η. Het ligt dan ook voor de hand te kiezen $A_t = \cosh\eta, B_t = \sinh\eta$ en $A_x = \sinh\rho, B_x = \cosh\rho$ zodat aan de eerste twee vergelijkingen is voldaan. Aan de derde vergelijking kan vervolgens voldaan worden door $\rho = \eta$ te kiezen. Hiermee is dan de transformatie compleet, en vinden we

$$ct' = (\cosh\eta)ct + (\sinh\eta)x, \qquad x' = (\sinh\eta)ct + (\cosh\eta)x. \tag{198}$$

Wiskundig is dit een draaiing in ruimtetijd, maar dan over een 'hyperbolische hoek' η in plaats van een normale. Maar wat betekent dit fysisch? Met name: wat is de betekenis van de hyperbolische hoek η? Dit kan worden gevonden door de tijddilatatie te beschouwen: we hadden al gezien dat de tijden van twee waarnemers die met snelheid v ten opzichte van elkaar bewegen, gerelateerd zijn via vergelijking (183).

Als we de differentiaalvorm nemen van vergelijking (198) en kiezen $dt' = d\tau$, dan kunnen we de eerste uitdrukking in vergelijking (198) schrijven als

$$d\tau = (\cosh\eta)dt + (\sinh\eta)\frac{1}{c}dx \tag{199}$$

Kwadrateren, delen door dt^2 en vergelijken met de tijddilatatie formule geeft dan

$$\cosh^2\eta + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sinh^2\eta + 2\left(\frac{v}{c}\right)\cosh\eta\sinh\eta = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{200}$$

Dit is een kwadratische vergelijking voor de variabele $\frac{v}{c}$, en geeft een relatie tussen de snelheid v en de hyperbolische hoek η. Zo is al meteen te zien dat η niets anders is dan een ingewikkelde manier om de snelheid tussen twee waarnemers te beschrijven[57]. Wat de precieze relatie is tussen

[57] Deze alternatieve maat voor de snelheid wordt in sommige takken van de fysica meer gebruikt dan de snelheid v; hij heeft als naam de *rapidity*. De reden voor deze voorkeur is dat de snelheid v tussen waarnemers nooit groter kan zijn dan de lichtsnelheid, terwijl de rapidity wel degelijk ∞ groot kan worden. Rapidity is ook een continue parameter van de Lorentzgroep.

v en η vraagt nog een beetje meer rekenwerk. Allereerst moet vergelijking (200) herschreven worden tot

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{c}\right)^2(1+\sinh^2\eta)+2\left(\frac{v}{c}\right)(\cosh\eta\sinh\eta)+(\cosh^2\eta-1) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad \left(\frac{v}{c}\right)^2(\cosh^2\eta)+2\left(\frac{v}{c}\right)(\cosh\eta\sinh\eta)+(\sinh^2\eta) &= 0. \end{aligned} \tag{201}$$

waar in de laatste stap de relatie $\cosh^2\eta-\sinh^2\eta=1$ is gebruikt. Deze vergelijking kan worden opgelost voor $\frac{v}{c}$ met behulp van de abc-formule. Het resultaat is het directe verband tussen $\frac{v}{c}$ en η,

$$\left(\frac{v}{c}\right)=-\frac{\sinh\eta}{\cosh\eta}\equiv-\tanh\eta \qquad \Rightarrow \qquad \eta=-\mathrm{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right) \tag{202}$$

Dit kan nu worden gebruikt om de transformatievergelijking (202) uit te drukken in de snelheid v, wat vaak een inzichtelijker grootheid is dan de hyperbolische hoek η. Hiervoor kunnen de volgende rekenregels worden gebruikt[58],

$$\begin{aligned} \cosh\left(-\mathrm{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)\right) &= \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\gamma \\ \sinh\left(-\mathrm{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right)\right) &= -\left(\frac{v}{c}\right)\sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=-\left(\frac{v}{c}\right)\gamma. \end{aligned} \tag{203}$$

Merk op dat de lorentzfactor γ hier op natuurlijke wijze zijn intrede doet. Hiermee is dan gevonden dat de transformaties tussen de twee waarnemers gegeven worden door

$$\left.\begin{aligned} cdt' &= \gamma\left(cdt-\left(\tfrac{v}{c}\right)dx\right) \\ dx' &= \gamma(dx-vdt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz, \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} dx^{0'} \\ dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \rightarrow dx^{\mu'}=\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}dx^{\nu} \tag{204}$$

(waar de relaties tussen de y en z afstanden ook weer zijn toegevoegd). Hierbij is $\beta=v/c$ de snelheid als fractie van de lichtsnelheid. Verder gebruiken we x^μ met $x^0=ct$, $x^1=x$, $x^2=y$ en $x^3=z$, alsook de transformatiematrix $\Lambda^{\nu'}{}_{\mu}$.

De inverse transformaties kunnen we vinden door v door $-v$ te vervangen. We vinden

$$\left.\begin{aligned} cdt &= \gamma(cdt'+\beta dx') \\ dx &= \gamma(dx'+vdt') \\ dy &= dy' \\ dz &= dz', \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} dx^{0} \\ dx^{1} \\ dx^{2} \\ dx^{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^{0'} \\ dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{pmatrix} \rightarrow dx^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}dx^{\nu'}. \tag{205}$$

We zien dan dat vergelijking (204) de differentiaalvorm is van $x^{\mu'}=\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}x^{\nu}$, terwijl voor de inverse relaties (205) we de differentiaalvorm van $x^{\mu}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}x^{\nu'}$ hebben verkregen. Deze vergelijkingen heten de *lorentztransformaties*, en spelen een hoofdrol in de SRT. Fysisch stellen zij het verschil voor tussen afstanden en tijdsduren zoals gemeten door waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid v in x-richting. Zulke vergelijkingen zijn eenvoudig af te leiden voor waarnemers die zich met snelheid v in andere richtingen bewegen. Tezamen met de translaties in alle richtingen en de rotaties om de drie ruimte-assen, vormen de

[58] Deze rekenregels zijn eenvoudig te bewijzen met behulp van de definities: $\cosh x\equiv\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $\sinh x\equiv\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, $\mathrm{arctanh}\ x=\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

lorentztransformaties de volledige set transformaties die het lijnelement niet veranderen, oftewel: onder deze transformaties is het relativiteitprincipe veilig gesteld. De conclusie is dan ook de volgende: zolang waarnemers maar louter getranslateerd en/of geroteerd zijn ten opzichte van elkaar, of alleen met constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen, kunnen zij allen het minkowskilijnelement blijven gebruiken, en gelden dus alle wetten afgeleid in dit hoofdstuk voor de coördinaatsystemen voor al zulke waarnemers. Zulke stelsels noemen we *inertiaalstelsels*. Dit is wat de speciale relativititeitstheorie het predikaat 'speciaal' geeft: alle wetten afgeleid gelden voor een beperkte set waarnemers. Door differentiaalvormen te gebruiken en deze te integreren kunnen we zelfs deeltjes beschrijven die versnellingen ondergaan in het inertiaalsysteem van een waarnemer $\mathcal{O}$. In latere hoofdstukken zullen we onze bevindingen uitbreiden naar *alle* waarnemers, leidend tot de theorie van de *algemene* relativiteit. Voor nu zullen we in de rest van dit hoofdstuk altijd louter inertiaalstelsels beschouwen: vanaf nu zal er met 'waarnemer' een waarnemer bedoeld worden die zich in een inertiaalstelsel bevindt.

De lorentztransformaties geven ons alle mogelijke relaties tussen de tijdsduren en afstanden zoals gemeten door verschillende waarnemers die zich bewegen met snelheid v ten opzichte van elkaar. Twee specifieke voorbeelden van zulke relaties hadden we al eerder gezien, toen nog direct afgeleid uit het minkowskilijnelement: de tijddilatatie en de lorentzcontractie. Deze liggen dan ook automatisch opgesloten in de lorentztransformaties. Voor tijddilatatie hoeven we alleen maar te kijken naar het speciale geval dat een van de waarnemers een tijdsduur meet tussen twee gebeurtenissen die ten opzichte van hem op een en dezelfde positie plaatsvinden, zodat $dx = 0$; voor deze waarnemer schrijven we $dt = d\tau$; er volgt dan direct uit vergelijking (205) dat een andere waarnemer een tijdsduur meet tussen deze twee gebeurtenissen gelijk aan $dt' = \gamma d\tau$. Dit is precies de tijddilatatieformule in vergelijking (183). Verder, om de lorentzcontractie af te leiden uit de lorentztransformaties hoeft alleen naar het speciale geval gekeken te worden dat de twee gebeurtenissen de metingen zijn van voor- en achterkant van een lat door een waarnemer die deze metingen doet op een en hetzelfde tijdstip (immers: als dat niet het geval is, zal de lat 'voorbij' vliegen in de tijd die deze waarnemer wacht tussen meting van voor- en achterkant, en stelt de afstand tussen gemeten positie van voor- en achterkant dus niet meer de lengte van de lat voor). Voor deze waarnemer geldt dan ook $dt = 0$, en zal de lengte van de lat gegeven zijn door $dx = L$; volgens vergelijking (205) meet de waarnemer in rust ten opzichte van de lat een lengte van $dx' = L = \gamma L$. Dit is precies de lorentzcontractie formule, vergelijking (188).

De tijddilatatie en lorentzcontractie zijn slechts speciale gevallen van de lorentztransformaties, een set algemene relaties tussen tijdsduren en afstanden zoals gemeten door waarnemers die bewegen ten opzichte van elkaar met een snelheid v.

5.6 Invariantie van de lichtsnelheid

We zijn nu op het punt aangekomen dat we ons kunnen buigen over de vraag hoe snelheden veranderen tussen waarnemers die zich bewegen ten opzichte van elkaar. Snelheid is niets anders dan een verandering van positie gedeeld door de verstreken tijd benodigd om de afstand tussen de begin- en eindposities te overbruggen. Maar zoals al gezien, zijn afgelegde afstanden en verstreken tijden niet meer absoluut: zij verschillen van waarnemer tot waarnemer. Het is dan ook te verwachten dat het concept gemeten snelheid op een nieuwe manier zal transformeren tussen verschillende waarnemers. Hiervoor beschouwen we twee waarnemers, 1 en 2, die ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid v. Beiden kijken naar een bewegend deeltje, en meten daar de snelheid van, waarbij u_1 de snelheid is zoals gemeten door waarnemer 1, en u_2 de snelheid zoals gemeten door waarnemer 2. De vraag is nu hoe deze twee gemeten snelheden zich tot elkaar verhouden. Voor het gemak kiezen we alle snelheden in de x-richting.

Per definitie is de snelheid zoals gemeten door waarnemer 2 gegeven door

$$u_2 \equiv \frac{dx_2}{dt_2}. \tag{206}$$

De transformatie tussen tijd- en positieverschillen wordt gegeven door de lorentztransformatie, vergelijking (205); teller en noemer kunnen dan ook direct worden ingevuld, en worden uitgedrukt in de gemeten afstand en verstreken tijd dx_1 en dt_1 zoals gemeten door waarnemer 1. Dit levert

$$u_2 = \frac{\gamma}{\gamma}\frac{dx_1 + v dt_1}{dt_1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) dx_1} = \frac{\frac{dx_1}{dt_1} + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right)\frac{dx_1}{dt_1}} = \frac{u_1 + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) u_1}, \tag{207}$$

waarin is gebruikt dat dx_1 gedeeld door dt_1 precies de snelheid u_1 is zoals gemeten door waarnemer 1.

Dit is de zogenaamde *regel van Einstein voor het samenstellen van snelheden*: gegeven de snelheid u_1 van een object zoals gemeten door waarnemer 1, geeft deze formule ons de snelheid u_2 van dit object zoals gemeten door waarnemer 2 die zich zelf met snelheid v beweegt ten opzichte van waarnemer 1. Voor kleine snelheden gaat de relatie over in de normale optelling van snelheden in de klassieke mechanica: $u_2 = u_1 + v$.

Een aantal interessante eigenschappen kan nu worden opgemerkt. Zo kan eenvoudig worden aangetoond dat als een waarnemer een deeltje ziet bewegen met een snelheid lager dan de lichtsnelheid (oftewel $u_1 < c$), elke andere waarnemer dit deeltje ook ziet bewegen met een snelheid lager dan de lichtsnelheid ($u_2 < c$). Ook kan worden aangetoond dat als een waarnemer het deeltje ziet bewegen met een snelheid hoger dan de lichtsnelheid, elke andere waarnemer dit deeltje ook ziet bewegen met een snelheid hoger dan de lichtsnelheid. Dit laatste is overigens alleen wiskundig waar: het zal later worden aangetoond dat niets sneller kan gaan dan het licht[59].

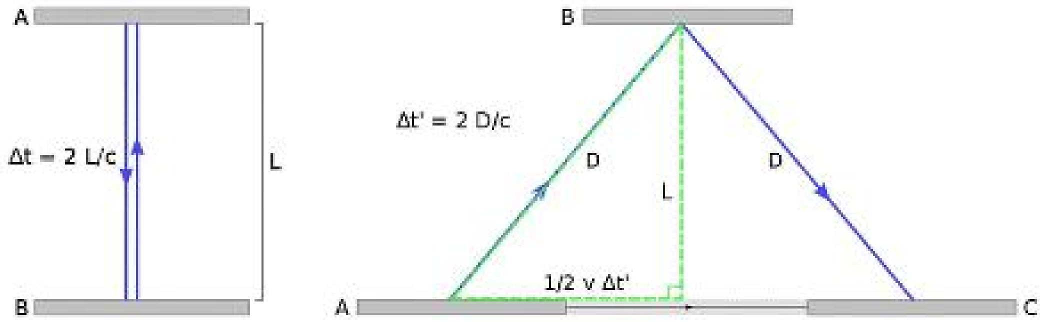
Het belangrijkste gevolg van Einsteins snelheidsregel is dat alle waarnemers dezelfde snelheid voor een lichtsignaal zullen meten, ongeacht de onderlinge snelheden tussen deze waarnemers: voor elke waarnemer zal een foton zich voortplanten met snelheid c. Neem als bewegend object een foton, dat voor waarnemer 1 met een snelheid van $u_1 = c$ beweegt. Einsteins snelheidsregel zegt dan vervolgens dat ook waarnemer 2 dit foton met snelheid $u_2 = c$ ziet bewegen,

$$u_2 = \frac{u_1 + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) u_1}\Big|_{u_1 = c} = \frac{c + v}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)} = c. \tag{208}$$

Dit betekent dat licht zich altijd (dit wil zeggen voor elke waarnemer in elk inertiaalsysteem) met de lichtsnelheid voortbeweegt! Stel dat waarnemer 1 een lichtstraal afvuurt. De fotonen snellen met de lichtsnelheid weg ten opzichte van waarnemer 1. Waarnemer 2 besluit om met hoge snelheid het licht achterna te gaan. Hiertoe beweegt hij bijvoorbeeld met 99% van de snelheid ten opzichte van waarnemer 1. Als hij nu een meting uitvoert van de snelheid van de lichtbundel uitgezonden door waarnemer 1, meet hij toch weer dezelfde snelheid c. Ten opzichte van het licht heeft hij geen enkele vordering gemaakt! De snelheid v tussen de twee waarnemers blijkt geheel irrelevant (hij werd weggedeeld in de laatste stap). Blijkbaar maakt het niet uit hoe snel de twee waarnemers zich bewegen ten opzichte van elkaar: als een van hen een foton ziet dat met de lichtsnelheid gaat, dan ziet elke andere waarnemer dit ook. De conclusie is dan ook: *licht gaat voor elke waarnemer met de lichtsnelheid.* Men zegt ook wel: de lichtsnelheid is *invariant.* Op deze manier hebben we Einsteins oorspronkelijke eerste postulaat teruggevonden, louter en alleen door uit te gaan van de minkowskimetriek en het relativiteitsprincipe.

[59]Dit geldt in de conventionele leer van de natuurkunde. Er zijn wel degelijk exotische theorieën waarin deeltjes bestaan die sneller gaan dan het licht (de zogenaamde *tachyonen*); echter, theorieën met tachyonen hebben doorgaans de eigenschap instabiele materie te voorspellen. Zulke deeltjes zullen daarom niet worden beschouwd.

Tijddilatatie kan ook direct worden afgeleid uit de constantheid van de lichtsnelheid voor verschillende waarnemers. Om dit duidelijk te maken beschouwen we een eenvoudige klok gebaseerd op reflecterend licht. De klok is weergegeven in Fig. 39. Elke kloktik correspondeert met de heen- en



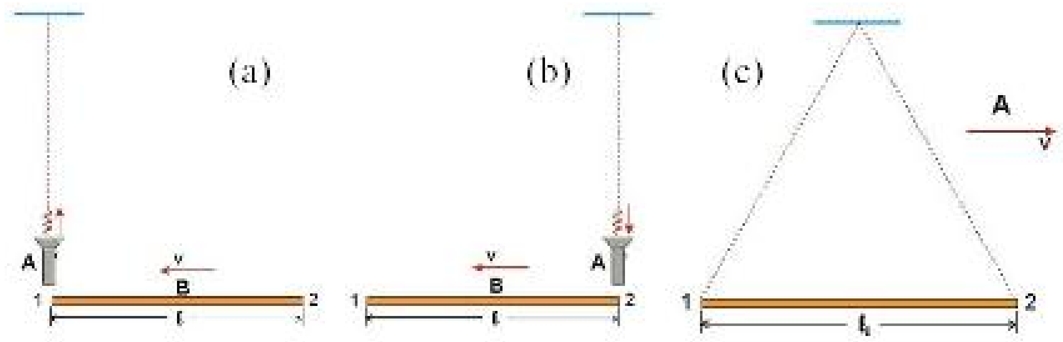
Figuur 39: *Een klok gebaseerd op een foton dat reflecteert tussen twee spiegels. Links: de klok is in rust en een kloktik komt overeen met de vluchttijd van het foton. Rechts: een waarnemer die een bewegende klok ziet, meet dat deze klok langzamer loopt.*

terugreis van een foton tussen de spiegels. Voor een stilstaande klok duurt een kloktik $\Delta t = \frac{2L}{c}$. Als de klok ten opzichte van een waarnemer beweegt met snelheid v, dan ziet deze waarnemer het foton een langere weg afleggen om de heen- en terugreis te maken. De geometrie laat toe om de kloktik van de bewegende klok te bepalen. Er geldt $\Delta t' = \frac{2D}{c}$ en de diagonale afstand D kan met behulp van de stelling van Pythagoras bepaald worden als $D = \sqrt{L^2 + \frac{1}{4}v^2(\Delta t')^2}$. Invullen en oplossen van $\Delta t'$ levert $\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{2L}{c} = \gamma\Delta t$. We vinden hiermee weer de formule voor tijddilatatie.

Een goed voorbeeld van tijddilatatie zijn muonen die gecreëerd worden door bosingen van hoogenergetische kosmische deeltjes met de buitenste laag van de aardatmosfeer en die richting de aarde bewegen. Vanwege tijddilatatie is hun levensduur beduidend langer dan de levensduur zoals die op aarde (in het rustsysteem van de muonen) gemeten wordt: 2.2 μs. Dit laat toe dat dergelijke kosmische muonen een grotere weg afleggen en het oppervlak van de aarde bereiken kunnen. Voor een waarnemer die meereist met een muon nadert de aarde met een snelheid in de buurt van de lichtsnelheid, maar kan de afgelegde weg desondanks niet meer dan $c\Delta t = (3 \times 10^8$ m/s$)(2.2 \times 10^{-6}) = 660$ m afleggen. Toch bereiken deze muonen het aardoppervlak, terwijl de afstand van de buitenste laag van de atmosfeer tot het oppervlak ongeveer 20 km is. De verklaring is dat deze lengte van 20 km voor de meereizende waarnemer lorentz-gecontraheerd is tot minder dan 660 m.

We kunnen onze lichtklok ook gebruiken om lorentzcontractie te begrijpen. We tonen de geometrie in Fig. 40. Twee waarnemers A en B hebben een relatieve snelheid v ten opzichte van elkaar. Waarnemer B houdt een staaf vast in de richting van v (en is dus in rust ten opzichte van de staaf). We beschouwen eerst de situatie vanuit waarnemer A. Panel (a) toont de situatie waarbij uiteinde 1 van de staaf waarnemer A passeert. Op dat moment stuurt A een lichtflits in de richting van de spiegel. In panel (b) wordt de situatie getoond waarbij uiteinde 2 van de staaf waarnemer A passeert. De afstand tussen waarnemer A en de spiegel is dusdanig dat precies op dit tijdstip de lichtflits weer bij A aankomt. Voor A is er inmiddels een tijd Δt verstreken. Waarnemer A die op deze manier de lengte van een ten opzichte van hem bewegende staaf meet, concludeert dus dat de lengte van de staaf L' gegeven wordt[60] door $L' = v\Delta t$. Panel (c) schetst

[60]We gebruiken het accent om aan te geven dat hij de lengte van een ten opzichte van hem *bewegende* staaf



Figuur 40: *Een klok gebaseerd op een foton dat reflecteert tussen twee spiegels. Panel (a): uiteinde 1 van de staaf passeert waarnemer A; panel (b): uiteinde 2 passeert A; panel (c): de situatie zoals gezien door waarnemer B.*

de situatie voor de met de staaf meebewegende waarnemer B. B ziet A's lichtklok langskomen met snelheid v. In B's tijd $\Delta t'$ legt deze klok een afstand L af[61]. Dus geldt $L = v\Delta t'$. Vervolgens gebruikt hij de tijddilatatie formule, $\Delta t' = \gamma \Delta t$ en vindt $L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{\gamma}$.

5.7 Verlies van universele definitie van tijd en gelijktijdigheid

Als twee gebeurtenissen plaatsvinden op verschillende plaatsen, maar een waarnemer meet dat ze gelijktijdig gebeuren, dan kan het zo zijn dat een andere waarnemer (die beweegt ten opzichte van de eerste) meet dat ze voor hem niet gelijktijdig gebeuren. We noemen dit het *verlies van gelijktijdigheid*. Voor Newton en Galileo hadden *voor* en *na* een invariante betekenis: iedereen zou het erover eens zijn dat gebeurtenis A plaatsvond vóór gebeurtenis B. Dit lijkt alleen maar logisch omdat A wel eens de reden kan zijn dat B gebeurt, en het zou weleens tegenstrijdig kunnen zijn als iemand anders bepaalt dat B vóór A heeft plaatsgevonden. In de SRT is het alleen vereist dat de begrippen vóór en na nodig zijn als de gebeurtenissen elkaar kunnen beïnvloeden. Dus als A de gebeurtenis B kan veroorzaken, dan moet iedereen het erover eens zijn dat A eerder was. Echter A kan alleen B veroorzaken als licht (of een langzamer signaal) kan reizen van A naar B: geen enkele invloed kan sneller reizen dan het licht. Derhalve, als B te ver verwijderd is om licht van A te ontvangen tegen de tijd dat B plaatsvindt, dan is er geen logische reden dat verschillende waarnemers het erover eens moeten zijn welke van de gebeurtenissen het eerst plaatsvond.

Gebeurtenissen die op dezelfde tijd maar op verschillende posities plaatsvinden, zoals gezien door een waarnemer, zijn precies van dit soort: geen van beide kan de ander veroorzaken. Daarom geeft de SRT ze geen unieke volgorde: voor de ene waarnemer gebeuren ze gelijktijdig, voor een ander gebeurt A eerst, en voor een derde kan B eerst gebeuren. Echter alle drie de waarnemers zullen het erover eens zijn dat licht niet van de ene naar de andere gebeurtenis kan reizen, en er dus geen causaal verband tussen beide gebeurtenissen kan zijn.

Als echter licht *kan* reizen van A naar B, dan zullen alle waarnemers het hierover eens zijn en gebeurt B later dan A (maar wel met verschillende tijddilatatie effecten). Dus SRT behoudt het begrip van vóór en na, van toekomst en verleden, maar het past deze relatie niet toe op alle mogelijke paren gebeurtenissen.

Dit betekent dat het niet mogelijk is om Newtons idee van een drie-dimensionale absolute ruimte

meet.

[61]We gebruiken hier L zonder accent omdat de staaf ten opzichte van B stilstaat.

te handhaven, met tijd als alleen een parameter. In Newtons wereld zal iedereen het erover eens zijn hoe ruimte eruit ziet op een gegeven tijdstip. In Einsteins wereld is er alleen *ruimtetijd*, het vier-dimensionale continuüm van alle gebeurtenissen die op elk mogelijk tijdstip kunnen plaatsvinden. Gebeurtenissen zijn de punten in ruimtetijd. Een waarnemer zal een bepaalde verzameling gebeurtenissen groeperen in de drie-dimensionale ruimte op een bepaald tijdstip. Echter een andere waarnemer kan evenwel besluiten dat een andere verzameling gebeurtenissen ruimte vertegenwoordigt op een bepaald tijdstip.

Twee gebeurtenissen die geen causaal verband met elkaar kunnen hebben, worden *ruimtelijk gescheiden* in ruimtetijd genoemd. Twee gebeurtenissen die verbonden kunnen worden door iets dat reist met een snelheid lager dan de lichtsnelheid worden *tijdachtig gescheiden* genoemd. Gebeurtenissen die verbonden kunnen worden door één enkel foton worden *lichtachtig gescheiden* genoemd. Relativiteitstheorie mengt de begrippen ruimte en tijd. Als we het gezichtspunt van de waarnemer veranderen dan is er een transformatie van hoe we ruimte van tijd onderscheiden (zie vergelijkingen (205)), hoe we tijdverschillen behandelen en hoe we afstanden meten. Dit alles wordt door de lorentztransformaties uitgedrukt.

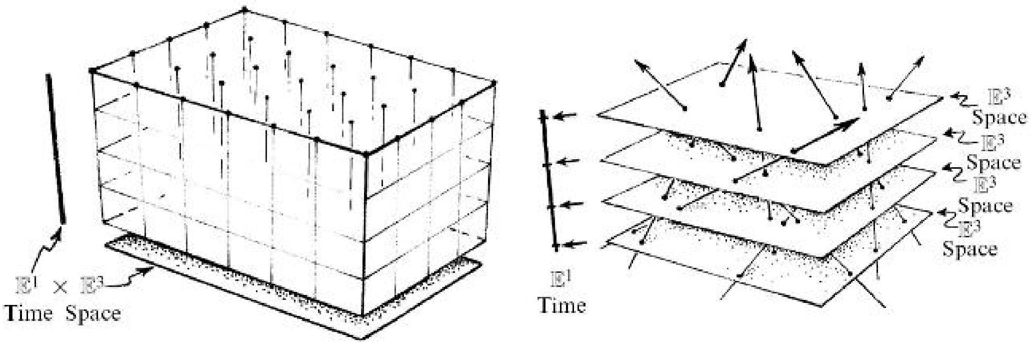
5.8 Ruimtetijd

Hier stellen we ons wederom de vraag: wat is ruimtetijd? Waarom is het onjuist om over ruimte en tijd als aparte grootheden te spreken in plaats van over ruimtetijd als geheel? In de natuurkunde van Aristoteles werd ruimte voorgesteld als een Euclidische drie-dimensionale ruimte $\mathbb{E}^3$. De punten van de ruimte behouden hun identiteit van het ene moment op het andere. Stel een deeltje bevindt zich in rust op een bepaald ruimtelijk punt. We nemen dan aan dat wanneer we dit ruimtelijk punt nu beschouwen en ook op een later tijdstip, we te maken hebben met hetzelfde ruimtelijk punt. Ons beeld van realiteit correspondeert dan met het scherm in een bioscoop, waar een bepaald punt op het scherm zijn identiteit behoudt wat er ook op dat scherm geprojecteerd wordt. Evenzo wordt tijd voorgesteld als een Euclidische ruimte, maar dat is de triviale $\mathbb{E}^1$ één-dimensionale ruimte[62]. De Euclidische ruimte geeft een definitie van het begrip afstand tussen punten. Verder is er een begrip van gelijktijdigheid. Het is dus absoluut zinvol om te spreken van gebeurtenissen die gelijktijdig hier en elders plaatsvinden. Om in de beeldspraak van de bioscoop te blijven: als we een bepaald frame van de film beschouwen dan worden alle gelijktijdige gebeurtenissen op verschillende plaatsen op het scherm geprojecteerd. De ruimtetijd van Aristoteles is het product

$$\mathcal{A} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3. \tag{209}$$

Het is eenvoudig de ruimte opgespannen door de paren $(t, \vec{x})$ voor te stellen, met t een element van $\mathbb{E}^1$, een tijd, en $\vec{x}$ een element van $\mathbb{E}^3$, een punt in de ruimte. Deze ruimtetijd wordt weergegeven in Fig. 41 (linker figuur). Laten we nu eens kijken wat Galileo's relativiteitsprincipe voor een gevolg heeft op ons begrip van ruimtetijd. Galileo vertelt ons dat de dynamische wetten hetzelfde zijn in elk inertiaalsysteem. Er is niets in de natuurkunde dat gebruikt kan worden om een systeem van rust te onderscheiden van een systeem dat met uniforme snelheid beweegt. Dit betekent dat er geen dynamische betekenis is in het stellen dat een bepaald ruimtelijk punt op dit moment hetzelfde is als het ruimtelijk punt een moment later. Het is zinloos te stellen dat het ruimtelijk punt waar mijn koffiekop zich nu bevindt, hetzelfde ruimtelijk punt is een minuut later. Gedurende deze minuut is de aarde om zijn as geroteerd en in dat systeem is mijn koffiekop op een ander ruimtelijk punt. Echter de aarde draait ook om de zon en dat levert weer een ander

[62]Tijd wordt door Aristoteles niet voorgesteld als een kopie van de reële lijn $\mathbb{R}$, want $\mathbb{R}$ bevat het voorkeurselement 0. Er is echter geen sprake van een voorkeur voor een oorsprong in de beschrijving van dynamische objecten.



Figuur 41: *Links: de ruimtetijd van Aristoteles $\mathcal{A} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ bestaat uit paren $(t, \vec{x})$. Rechts: de ruimtetijd van Galileo, $\mathcal{G}$, is een fiberruimte. Er is geen puntsgewijze connectie tussen verschillende $\mathbb{E}^3$ fibers: er bestaat geen absolute ruimte! Er is echter wel een unieke tijd voor elke ruimtetijd gebeurtenis: absolute tijd bestaat.*

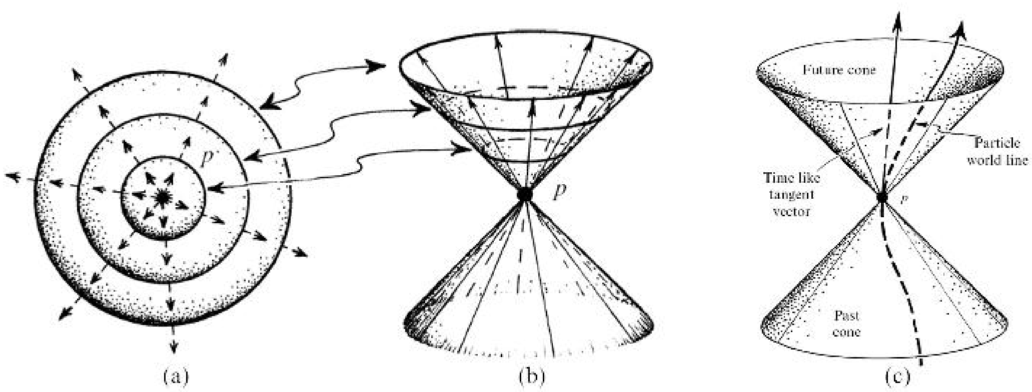
punt op. Kortom, de analogie van een projectiescherm is onjuist! We hebben niet één enkele Euclidische ruimte $\mathbb{E}^3$ als de arena waarin de acties van de fysische wereld zich in de tijd afspelen. We hebben verschillende $\mathbb{E}^3$s voor elk tijdstip en er is geen natuurlijke identificatie tussen deze verschillende $\mathbb{E}^3$s. Wiskundig gezien is Galileo's ruimtetijd $\mathcal{G}$ geen productruimte $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$, maar iets dat wiskundigen een *fiberbundel* noemen met als basis $\mathbb{E}^1$ en fiber $\mathbb{E}^3$. De situatie is geschetst in Fig. 41 (rechter figuur). Een fiberbundel heeft geen puntgewijze connectie tussen één fiber en de volgende. Desalnietemin vormen de fibers samen een geheel. Aan elk ruimtetijd element van $\mathcal{G}$ wordt een tijd toegekend, en deze laatste is een element van de 'klokruimte' $\mathbb{E}^1$.

Het bestaan van een lichtsnelheid die voor elke waarnemer hetzelfde is, heeft het verdwijnen van de absolute tijd tot gevolg. In Fig. 42 nemen we een gebeurtenis $\mathcal{P}$ in ruimtetijd en beschouwen we alle lichtstralen die door $\mathcal{P}$ gaan voor elke richting (zie Fig. 42a). We kunnen ruimtetijd voorstellen door horizontaal de x en y richting uit te zetten, terwijl we de tijdcoördinaat (ct) verticaal kiezen. De lichtstralen vormen een kegel in ruimtetijd, de zogenaamde *lichtkegel*. Als we de lichtsnelheid als fundamenteel nemen, dan betekent dit dat we de lichtkegel als fundamenteel nemen. De lichtkegel definieert een structuur in de tangentenruimte T_P die hoort bij $\mathcal{P}$. De lichtkegel wordt gevormd door gebeurtenissen waarvoor geldt

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta r^2 = 0. \qquad (210)$$

Gebeurtenissen die van $\mathcal{P}$ gescheiden zijn door een tijdachtig interval, vallen binnen de lichtkegel en er geldt $\Delta s^2 < 0 \rightarrow c^2 \Delta t^2 > \Delta r^2$. Dergelijke gebeurtenissen kunnen causaal verbonden zijn. Dat is niet mogelijk voor zogenaamde ruimtelijk gescheiden gebeurtenissen die buiten de lichtkegel vallen. Hiervoor geldt $\Delta s^2 > 0 \rightarrow c^2 \Delta t^2 < \Delta r^2$.

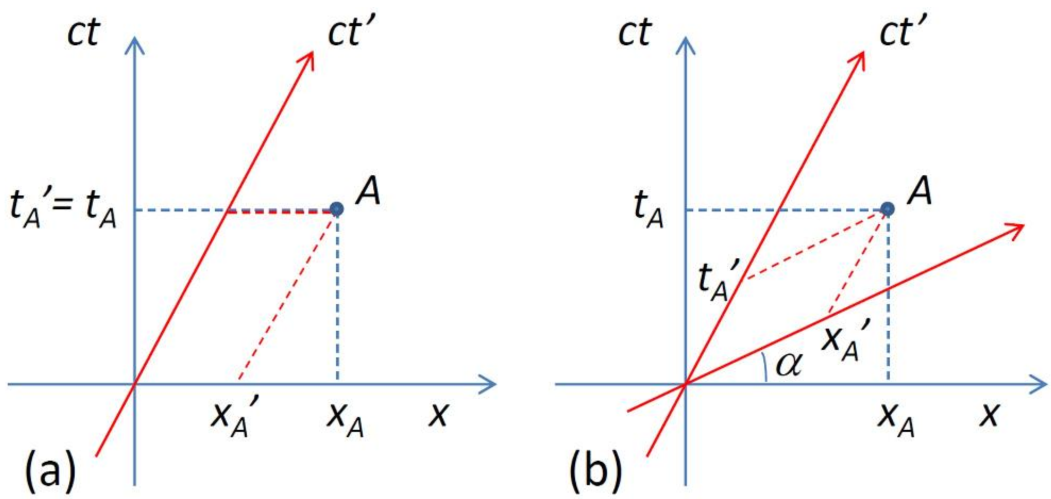
Merk op dat de lichtkegel uit twee delen bestaat: een *verleden* kegel en een *toekomst* kegel. We kunnen ons de verleden kegel voorstellen als de geschiedenis van een lichtflits die implodeert op $\mathcal{P}$. De toekomst kegel zien we als een lichtflits die explodeert vanuit punt $\mathcal{P}$. Fotonen liggen op de rand van de kegel, terwijl de wereldlijnen van massieve deeltjes die door $\mathcal{P}$ gaan, binnen de kegel dienen te liggen. De structuur van ruimtetijd in de SRT is zodanig dat voor elke gebeurtenis van ruimtetijd een lichtkegel bestaat die voor deze gebeurtenis de causale structuur bepaalt. We zullen dit uitdiepen in de volgende sectie.



Figuur 42: *De lichtkegel specificeert de fundamentele snelheid van het licht. In (a) worden de banen van de uitgezonden fotonen ruimtelijk geschetst als een bol die expandeert vanuit punt $\mathcal{P}$. In (b) zien we dat in ruimtetijd de fotonen een kegel uitsnijden. In (c) zien we dat de kegel ruimtetijd opsplitst in een verleden en een toekomst. De wereldlijn van een massief deeltje in $\mathcal{P}$ heeft een vector die naar de toekomst wijst en tijdachtig is. Deze vector ligt dus binnen de toekomst lichtkegel van $\mathcal{P}$.*

5.9 Ruimtetijddiagrammen

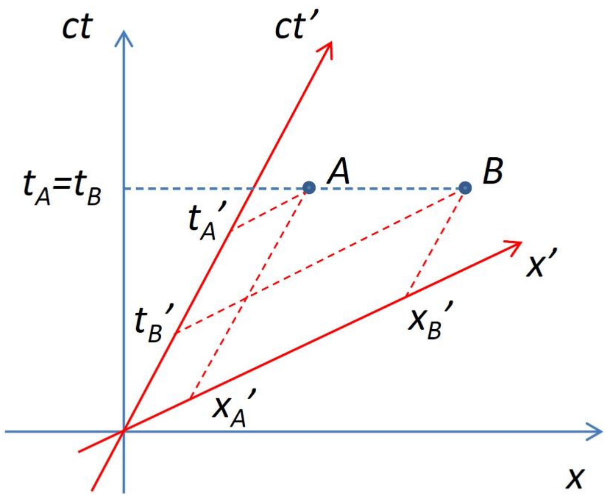
We kunnen ruimtetijddiagrammen gebruiken om gebeurtenissen in de vierdimensionale ruimtetijd op een geometrische wijze te beschrijven. In een ruimtetijd diagram (ook wel minkowskidiagram genoemd) tonen we één ruimtelijke dimensie op de x-as en de tijd op de y-as. Een ruimtetijd diagram stelt typisch het coördinatenstelsel van een waarnemer voor. Deze waarnemer is dan zelf in rust in dit systeem en zijn wereldlijn correspondeert met de tijd-as. Typisch wordt verticaal niet t, maar ct uitgezet, zodat de wereldlijn van een foton een rechte lijn wordt met een helling van 45°. We beginnen met het verhelderen van het verschil tussen de ruimtetijd van Galileo



Figuur 43: *Links: in de klassieke mechanica heeft een gebeurtenis A plaats op hetzelfde tijdstip. Rechts: in de SRT kennen verschillende waarnemers verschillende tijden toe aan gebeurtenis A.*

en die van de SRT. In de linker figuur stelt de schuine lijn de tijd-as voor van een waarnemer die ten opzichte van het coördinatensysteem beweegt met snelheid v. Op tijdstip $t = t' = 0$ vallen beide coördinatensystemen samen ($x = x' = 0$). De as van de bewegende waarnemer staat niet loodrecht op de x-as en de tijdschaal is uitgerekt. Beide waarnemers observeren gebeurtenis A en kennen er dezelfde tijd aan toe, omdat de klassieke mechanica een absolute tijd $t = t'$ voor gebeurtenissen kent. De plaats $x'_A = x_A - vt \neq x_A$ is verschillend, omdat de bewegende waarnemer naar gebeurtenis A toe beweegt. Deze grafische representatie noemen we een galileotransformatie.

Einstein ontdekte dat deze beschijving onjuist is. Het coördinatensysteem van een bewegende waarnemer dient getekend te worden zoals gedaan is in de rechter afbeelding in Fig. 43. Dit volgt direct uit de lorentztransformaties, zie vergelijking (204). Voor de hoek α geldt $\tan\alpha = \frac{v}{c}$. Er bestaat geen absolute tijd meer en beide waarnemers kennen verschillende tijden toe aan gebeurtenis A.



Figuur 44: *Ruimtetijddiagram voor een stilstaande waarnemer heeft assen x en ct, terwijl het diagram voor een waarnemer die met snelheid v ten opzichte van de eerste beweegt, de assen x' en ct' heeft. Voor de stilstaande waarnemer $\mathcal{O}$ vinden gebeurtenissen A en B gelijktijdig plaats. Dat is niet zo voor de bewegende waarnemer $\mathcal{O}'$.*

Ook het verdwijnen van gelijktijdigheid kunnen we direct zien in een ruimtetijd diagram; zie Fig. 44. Hiertoe beschouwen we twee waarnemers die relatief ten opzichte van elkaar bewegen met snelheid v. Het coördinatensysteem van de bewegende waarnemer is aangegeven met x' en ct' in het systeem van de stilstaande waarnemer. De oriëntatie van deze assen kan gevonden worden uit de lorentztransformaties. We beschouwen twee ruimteachtig gescheiden gebeurtenissen A en B. Deze gebeurtenissen kunnen geen causaal verband met elkaar hebben, omdat ze niet door fotonen (dat zijn lijnen onder $\pm 45°$) of langzamere signalen verbonden kunnen worden. De gebeurtenissen gebeuren gelijktijdig in het systeem van de stilstaande waarnemer. In het systeem van de bewegende waarnemer gebeurt B op tijdstip C en gebeurtenis A op tijdstip D. In zijn systeem gebeurt B eerder dan A. Er is echter ook een systeem te vinden waarin A eerder gebeurt dan B. Dat is een waarnemer die met snelheid $-v$ beweegt ten opzichte van stilstaande waarnemer. We zien dat tijd haar absolute betekenis heeft verloren. Welke deelverzameling gebeurtenissen van ruimtetijd de gelijktijdige gebeurtenissen vormt, hangt af van de beweging van de waarnemer.

5.10 Relativistisch Dopplereffect

De verandering van het begrip tijd in de SRT leidt tot een eenvoudige modificatie van de formule voor de roodverschuiving van een foton, zie vergelijking (13) en ook Fig. 2. In sectie 2.4 telden we het aantal golffronten dat een bewegende detector passeert, en vergeleken dat met het aantal dat een detector in rust registreerde. Het aantal golffronten dat per tijdseenheid passeert is de frequentie van de golf. We dienen nu in rekening te brengen dat de klok van een bewegende detector iets langzamer loopt dan die van een detector in rust. Dit betekent dat als de detector in rust N golffronten telt in tijd t, dan telt de bewegende detector $N' = N(1 - \frac{v}{c})$ golffronten (zie Fig. 2) in een tijd $t' = t/\gamma$ (Einsteins tijddilatatie). Als we het aantal golffronten delen door de tijd, dan meet de stilstaande detector een frequentie $f = N/t$, terwijl de bewegende detector een frequentie $f' = N'/t'$ meet. Dit levert

$$f' = (1 - \frac{v}{c})\gamma f = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} f. \tag{211}$$

Bovenstaande relatie geldt als de bewegende waarnemer zich verwijdert van de lichtbron, zoals gezien door een waarnemer in rust. Dit produceert een verlaging van de frequentie, een roodverschuiving. In het geval de waarnemer de bron nadert, spreken we over een blauwverschuiving. Omdat de noemer altijd kleiner is dan 1, zijn de waarden van de rood- of blauwverschuiving *groter* dan die op basis van de niet-relativistische Doppler formule. Merk op dat er zelfs een verschuiving is als de bewegende waarnemer loodrecht beweegt op de richting naar de lichtbron. In dat geval is de niet-relativistische Doppler verschuiving gelijk aan nul, omdat de loodrechte beweging geen golffronten toevoegt of aftrekt van het aantal dat geteld wordt door een stilstaande detector. Echter is er nog steeds de tijddilatatie en die reduceert de hoeveelheid tijd dat een bewegende detector kan meten. Dit produceert een blauwverschuiving in de SRT, terwijl er geen effect is in de klassieke Doppler formule. Dit wordt het transversale Dopplereffect genoemd.

5.11 Relativistische mechanica

De lagrangiaanse methode beschreven in sectie 2.8 leent zich uitstekend voor de uitbreiding van de mechanica van Newton naar een versie die overeenkomt met het relativiteitsprincipe. Allereerst zullen we een vrij deeltje beschouwen, oftewel een deeltje met massa m dat beweegt zonder beïnvloed te worden door een kracht. De lagrangiaan voor een dergelijk deeltje bestaat dan alleen uit een kinetische term,

$$L = K. \tag{212}$$

In de klassieke mechanica wordt de kinetische energie gegeven door $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Deze uitdrukking kunnen we echter niet overnemen in de relativiteitstheorie. Immers, het relativiteitsprincipe eist dat de natuurwetten zodanig geformuleerd dienen te worden, dat zij niet van vorm veranderen wanneer naar een ander inertiaalstelsel wordt getransformeerd. Dit betekent dat de gezochte lagrangiaan invariant moet zijn onder transformaties tussen inertiaalstelsels, en daar voldoet bovenstaande uitdrukking zeker niet aan. Echter, met enige aanpassing is er een vorm te vinden die erg lijkt op de oude uitdrukking, maar die wel degelijk invariant is. Hiervoor schrijven we eerst de oude uitdrukking uit als

$$L = K = \frac{1}{2} m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt}, \tag{213}$$

met $i = 1, 2, 3$ en waar Einsteins sommatieconventie gebruikt is: $dx^i dx_i = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Wat de invariantie van deze uitdrukking in de weg staat zijn twee dingen: allereerst zijn de dx-en inertiaalstelsel-afhankelijk; ten tweede zijn de dt's dat eveneens. We hadden immers al gezien dat waarnemers in verschillende inertiaalsystemen, verschillende afstanden en tijdsduren meten. Deze uitdrukking kan daarom nooit voldoen aan het relativiteitsprincipe. Echter, wanneer we $dx^i dx_i$ vervangen door $dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ staat in de teller nu precies het lijnelement ds^2, waarvan bekend is dat dit invariant is. Op dezelfde manier ligt een uitbreiding van de twee dt's ook voor de hand: vervang $dtdt$ door $d\tau^2$, zodat ook dit nu invariant is geworden. Een natuurlijke suggestie voor een relativistische lagrangiaan van een vrij deeltje is dan

$$L = \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \tag{214}$$

Deze overwegingen zijn natuurlijk geen *bewijs* voor de geldigheid van deze uitdrukking: het is een aanname. Er zijn ook andere Lagrangianen denkbaar die voldoen aan het relativiteitsprincipe. Echter, deze uitdrukking is de meest eenvoudige, en bovendien zal blijken dat de bewegingswetten die hieruit volgen, reduceren tot de oude vertrouwde bewegingswetten van Newton wanneer ze toegepast worden in situaties waarbij snelheden veel lager zijn dan de lichtsnelheid. Uiteindelijk zal het echter aan het experiment zijn om aan te tonen of de gevonden wetmatigheden correct zijn. Tot nu toe wijzen alle experimenten uit dat dit inderdaad het geval is.

De actie S behorend bij deze lagrangiaan wordt verkregen door de lagrangiaan te integreren over de tijd. Ook hier moet het relativiteitsprincipe in acht worden genomen: de uitdrukking moet worden geïntegreerd over de eigentijd $d\tau$ (in tegenstelling tot over de waarnemer-afhankelijke tijd t) om zo de invariantie van de actie te waarborgen. De actie wordt dan dus

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\} d\tau. \tag{215}$$

Om de bewegingswet voor het deeltje af te leiden, dient het principe van extreme actie weer te worden toegepast: er moet gezocht worden naar het pad $x^\mu(\tau)$ dat de waarde van deze integraal minimaal of maximaal maakt. De Euler-Lagrange vergelijkingen voor deze situatie hebben de vorm[63]

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)} \right). \tag{216}$$

Merk op dat dit vier vergelijkingen zijn: voor elk van de vier coordinaten van het pad $x^\mu(t)$ is er een vergelijking die moet worden opgelost. Wanneer de relativistische lagrangiaan wordt ingevuld en beide zijden van de Euler-Lagrange vergelijkingen worden uitgerekend, wordt gevonden dat een vrij relativistisch deeltje een pad $x^\mu(\tau)$ volgt waarvan de componenten voldoen aan de vergelijkingen

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \tag{217}$$

Dit lijkt sprekend op de tweede wet van Newton voor een vrij deeltje, met twee subtiele verschillen.

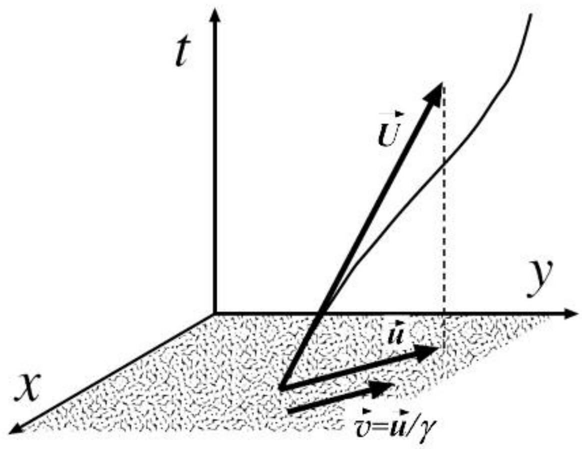
Ten eerste doet de wet van Newton uitspraken over de drie plaatscoördinaten van het deeltje, waar deze nieuwe uitdrukking ook uitspraak doet over de tijd. Deze laatste stelt dat

$$m \frac{dt^2}{d\tau^2} = 0, \tag{218}$$

waaruit volgt dat $\frac{dt}{d\tau}$ gelijk is aan een constante. Dat is niet verrassend: we hadden immers al gezien dat de tijd τ zoals gemeten door een waarnemer die het deeltje ziet stilstaan, een andere is dan de tijd t gemeten door een waarnemer die het deeltje ziet bewegen. Dit was precies het tijddilatatie effect zoals besproken in sectie 5.3, en de waarde van deze constante laat zich dan ook aflezen van vergelijking (183): het is precies de lorentzfactor γ.

Het tweede verschil met de wet van Newton is het feit dat er hier afgeleiden worden genomen naar de eigentijd τ, waar in Newtons theorie afgeleiden werden genomen naar de tijd t. Dit

[63] Dit is een generalisatie van vergelijking (33). Het bewijs van deze stelling gaat op eenzelfde wijze aan dat van vergelijking (33).



Figuur 45: *Ruimtetijddiagram in een specifiek lorentzframe dat de 3D ruimte toont op $t = 0$, alsook de viersnelheid $\vec{U} = (U_0, \vec{u})$ van een deeltje dat deze 3D ruimte passeert (op $t = 0$) als raakvector aan het pad, en twee 3D vectoren die in deze 3D ruimte liggen: het ruimtelijke deel van de viersnelheid $\vec{U}$ en de gewone snelheid $\vec{v}$ van het deeltje.*

maakt van deze nieuwe afgeleide een soort 'gemengd-object': de gemeten afstanden x worden genomen zoals gemeten door een willekeurige waarnemer ten opzichte van wie het deeltje beweegt, waar de tijd gemeten wordt door de waarnemer die stilstaat ten opzichte van het bewegende deeltje. Dit object wordt de *viersnelheid* $\vec{U}$ met componenten $U^\mu(t) = (U^0, \vec{u})$ genoemd. Er geldt $\vec{U} = d\vec{x}/d\tau$ en voor de componenten geldt $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$. Dit betekent voor de gewone snelheid $\vec{v}$ dat $v^j \equiv \frac{dx^j}{dt} = \frac{dx^j/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{U^j}{U^0}$. Deze relatie in combinatie met de normering van $\vec{U}$: $U_\mu U^\mu = dx_\mu dx^\mu/d\tau^2 = -ds^2/d\tau^2 = -c^2 d\tau^2/d\tau^2 = -c^2$ en dus $U_\mu U^\mu = -1$ voor eenheden met $c = 1$. Hiermee vinden we $\vec{U}^2 = g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = -(U^0)^2 + \delta_{ij}U^i U^j = -c^2$, betekent dat de componenten van de viersnelheid van de vorm $U^0 = \gamma c, U^i = \gamma v^i$, met $\gamma = 1/(1 - \delta_{ij}v^i v^j)^{\frac{1}{2}}$ zijn. We vatten een en ander nog een samen in Fig. 45. Het is nuttig om v^j te zien als de componenten van een 3D vector $\vec{v}$, de gewone snelheid, die leeft in de 3D euclidische ruimte $t =$ constant van het gekozen lorentzstelsel. Deze 3D ruimte is niet goed gedefinieerd totdat er een lorentzstelsel gekozen is, en daarom hangt het bestaan van $\vec{v}$ af van de specifieke keuze. Op het moment dat een lorentzframe gekozen is, kunnen we $\vec{v}$ zien als een coördinaten-onafhankelijk object.

Teneinde weer contact te maken met de klassieke mechanica, schrijven we de viersnelheid om naar een meer natuurlijk object (te weten: afstand en tijd gemeten door een en dezelfde waarnemer). Dit kunnen we doen door te beseffen dat de verlopen tijd gemeten door het deeltje, en die door een andere waarnemer, met elkaar gerelateerd zijn via de formule van tijddilatatie: $d\tau = \gamma^{-1}dt$. Op deze manier is de gevonden wet uit te drukken als

$$m\gamma^2 \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = 0. \tag{219}$$

De wet van Newton kan nu gezien worden als een speciaal geval van deze nieuwe wet. Als we aannemen dat het deeltje veel langzamer beweegt dan het licht ten opzichte van de waarnemer in wiens tijdsduur en afstand we nu alles hebben uitgedrukt (oftewel we nemen aan dat $v \ll c$), dan kan vergelijking (219) benaderd worden door

$$m\gamma^2 \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \equiv \frac{m}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \approx m\left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \approx m\frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = 0, \tag{220}$$

waar gebruik is gemaakt van de wiskundige regel $(1+x)^m \approx 1+mx$, welke geldt als $x \ll 1$. Dit is precies de wet van Newton! Zo is nu aangetoond dat de wet van Newton slechts een speciaal geval is van een meer algemene bewegingswet, vergelijking (217)! Dit geeft ons vertrouwen dat onze keuze voor de lagrangiaan waarschijnlijk de juiste was: hij voldoet aan het relativiteitsprincipe, en geeft ons bovendien onze oude vertrouwde bewegingswetten terug.

Met dit in het achterhoofd kunnen we nu verder gaan met het afleiden van wetten betreffende de energie en impuls. Zoals besproken in sectie 2.8, volgt een impuls uit een gegeven lagrangiaan via vergelijking (41). Toegepast op de relativistische lagrangiaan levert dit voor de impuls van het vrije deeltje

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\alpha}{d\tau}} = m\frac{dx^\nu}{d\tau}\eta_{\alpha\nu}, \tag{221}$$

en na beide kanten te contraheren met de inverse $\eta^{\mu\alpha}$ van de minkowksimetriek wordt dit

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = mU^\mu = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix}. \tag{222}$$

Merk op dat door de metriek te gebruiken we de covariante vector p_μ vinden en als we deze contraheren met de vector p^μ verkrijgen we de invariant

$$p_\mu p^\mu = m^2 U_\mu U^\mu = -m^2c^2. \tag{223}$$

Wederom lijkt de uitdrukking voor p^μ in vergelijking (222) erg op de impuls zoals bekend uit de mechanica van Newton: een massa vermenigvuldigd met een snelheid. Echter, de snelheid is hier nu weer de viersnelheid, en deze nieuwe impuls wordt dan ook de *vierimpuls* genoemd. Merk op dat dit uiteraard een contravariante viervector is. Vergeleken met de uitdrukking voor de newtoniaanse variant, vergelijking (42), gaan weer twee verschillen op: ten eerste is er een nul-component aanwezig, en ten tweede is het weer een 'gemengd-object': afgelegde afstand gemeten door een willekeurige waarnemer, en tijdsduur gemeten door een waarnemer die stilstaat ten opzichte van het deeltje. Het tweede verschil kunnen we weer een plaats geven door de relatie tussen eigentijd en tijd te gebruiken. Dit levert

$$p^\alpha = m\gamma\frac{dx^\alpha}{dt}, \tag{224}$$

en via dezelfde benaderingsmethode als gebruikt in vergelijking (220) volgt direct dat de i-component ($i = 1, 2, 3$) hiervan reduceert tot de impuls zoals bekend uit de mechanica van Newton, wanneer het deeltje veel langzamer beweegt dan het licht. De $i = 1, 2, 3$ componenten van dit object worden daarom opgevat als de relativistische uitdrukkingen van de impuls. Wat de nul-component betreft, deze moet nog een interpretatie krijgen. Deze component is

$$p^0 = mc\gamma. \tag{225}$$

Via een dimensie-analyse is meteen te zien dat cp^0 de dimensie van een energie heeft, en dit wekt de suggestie dat het gaat om de energie van het vrije deeltje. De vraag dringt zich dan al snel op: op welke manier is deze uitdrukking gerelateerd aan de newtoniaanse uitdrukking voor de energie van een vrij deeltje, $K = \frac{1}{2}mv^2$? Ook hier biedt de benadering van lage snelheden uitkomst. Er geldt

$$cp^0 = mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \underbrace{mc^2 + K}_{E}, \tag{226}$$

waar de uitdrukking voor de newtoniaanse energie K van een vrij deeltje is ingevuld. Hier blijkt nu dat, in de benadering van lage snelheden, de nul-component van de relativistische impuls reduceert tot de newtoniaanse energie plus een extra term. Afgezien van deze constante term, is de nul-component bij lage snelheden inderdaad gelijk aan de kinetische energie van het deeltje zoals voorspeld door de newtoniaanse mechanica. Het ligt dan ook voor de hand om aan te nemen dat we cp^0 ook bij hoge snelheden mogen opvatten als de energie van het deeltje. Wat de constante term betreft kan de vraag worden gesteld hoe fysisch interessant deze is. Immers, in de klassieke natuurkunde kennen alleen energie*verschillen* een meetbare betekenis[64], en dus zal elke extra constante term toegevoegd aan de energie van een systeem uit de berekening vallen wanneer een energieverschil opgeschreven wordt. Toch heeft de constante term m hier wel degelijk een fysische betekenis: het is namelijk niet zomaar een willekeurige constante, het is een constante die een eigenschap van het deeltje bevat (de massa)! Deze energie is ook aanwezig wanneer het deeltje geen bewegingsenergie heeft voor een gegeven waarnemer, $K = 0$; we spreken dan ook over *rust-energie*, en deze is gelijk aan

$$E = mc^2. \tag{227}$$

Dit is wellicht de bekendste formule uit de natuurkunde. Hij zegt dat elke massa een energie met zich meedraagt gelijk aan deze massa maal c^2, en dat dit energie is die zich niet laat wegtransformeren door naar een ander inertiaalstelsel te gaan. Het is daarom een fundamentele hoeveelheid energie voor een gegeven massa m: voor *alle* waarnemers geldt dat een massa op zijn minst deze hoeveelheid energie met zich meedraagt.

Resumerend is nu gevolgd dat onze keuze voor de lagrangiaan ons een uitdrukking geeft voor de impuls, waarvan de i-componenten netjes reduceren tot de impuls zoals die in de newtoniaanse mechanica bekend was; de nul-component van de vierimpuls blijkt overeen te komen met de energie van het deeltje. We schrijven dan ook

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = mU^\mu = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}, \tag{228}$$

waarin geldt

$$E = \gamma mc^2, \qquad p^i = \gamma m v^i. \tag{229}$$

We vinden ook direct de handige relaties $\gamma = E/m$ en $\vec{\beta} = \vec{p}/E = \vec{v}/c$. De naam is niet de enige overeenkomst tussen de vierimpuls en viersnelheid: beide transformeren op dezelfde manier tussen inertiaalsystemen. Met name de lorentztransformaties werken op deze objecten op dezelfde manier; dit betekent dat twee waarnemers die zich in de x-richting met snelheid v bewegen ten opzichte van elkaar, verschillende energie (E en E') en impuls (p_x en p'_x) meten van een en hetzelfde deeltje, en dat deze zich tot elkaar verhouden als

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{E'}{c} &=& \gamma\left(\frac{E}{c} - \left(\frac{v}{c}\right)p_x\right) \\ p'_x &=& \gamma\left(p_x - v\frac{E}{c^2}\right) \\ p'_y &=& p_y \\ p'_z &=& p_z \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} p^{0'} \\ p^{1'} \\ p^{2'} \\ p^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \rightarrow p^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu p^\nu \tag{230}$$

Bovendien kunnen we de contractie $p_\mu p^\mu$ van de vierimpuls met zichzelf nemen, omdat we al gezien hadden dat de contractie van een viervector met zichzelf altijd een invariant oplevert. Het is dan eenvoudig om aan te tonen dat deze invariant gelijk is, op een factor $-c^2$ na, aan de massa

[64]Denk bijvoorbeeld aan de relatie tussen een kracht F in de x-richting en de potentiële energie V: $F = -\frac{dV}{dx}$, oftewel een meetbare grootheid is uitgedrukt als een verschil in energie.

van het deeltje in het kwadraat. Er geldt

$$\begin{aligned}\eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} &= -\left(\frac{E}{c}\right)^2 + p^2 \\ &= -m^2c^2\gamma^2 + m^2v^2\gamma^2 \\ &= -m^2c^2\gamma^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = -m^2c^2. \end{aligned} \tag{231}$$

Dit leidt dan tot de volgende uitdrukking voor de relatie tussen de energie en de impuls,

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{232}$$

Deze is bijna geheel[65] equivalent aan de eerder gevonden uitdrukking voor de relativistische energie, vergelijking (226), maar is in de praktijk soms te prefereren omdat deze ons in staat stelt de energie van een deeltje uit te rekenen zonder de snelheid v van het deeltje te hoeven kennen. Met name in de deeltjesfysica, waar men vaak de *impulsen* van de deeltjes beter kan meten dan louter hun snelheid, wordt deze formule veel gebruikt.

Het belang van energieën en impulsen in de relativiteitstheorie is dezelfde als die in de Newtoniaanse mechanica. Daar is het een experimenteel gegeven dat energie en impuls behouden grootheden zijn; dit levert enorme voordelen op tijdens het berekenen van mechanische processen. Het blijkt experimenteel dat dit nog steeds geldt voor onze nieuwe uitdrukkingen voor de energie en impuls: *elk experiment toont aan dat deze twee grootheden niet veranderen tijdens fysische processen.* Dit maakt het uitermate handig om met energie en impuls te werken wanneer een relativistisch probleem wordt beschouwd. Het is hier nu van belang om het verschil tussen 'behouden' en 'invariant' te onderstrepen: een grootheid is *behouden* wanneer geldt dat zijn waarde voor en na een proces dezelfde is; een grootheid is *invariant* als geldt dat zijn waarde voor alle waarnemers in verschillende inertiaalstelsels dezelfde is. Enkele voorbeelden: de lichtsnelheid c is een invariant en is behouden; de massa van een deeltje is invariant maar in het algemeen niet behouden; de energie van een deeltje is behouden maar niet invariant; snelheden zijn in het algemeen zowel niet behouden noch invariant.

Nog enkele woorden over snelheden. Zoals al besproken, volgt uit de minkowskimetriek de snelheidsregel van Einstein, waaruit we hebben laten volgen dat het onmogelijk is een deeltje sneller te zien gaan dan het licht als het voor een enkele waarnemer niet sneller gaat dan het licht. De vraag *of* er een waarnemer bestaat voor wie het deeltje sneller gaat dan het licht is nog niet aan de orde gekomen. Met de uitdrukking voor de relativistische energie kan die vraag nu definitief worden beantwoord, en wel als volgt. De uitdrukking gegeven in vergelijking (226) voor de relativistische energie vertelt ons dat er in een deeltje dat zich ten opzichte van ons met snelheid v beweegt, een energie E verscholen is. Omgekeerd kan de relatie ook gelezen worden als de hoeveelheid energie benodigd om een deeltje vanuit stilstand tot deze snelheid te versnellen. Als wij nu een deeltje naar de lichtsnelheid willen versnellen, dan geldt $v = c$ en wordt de noemer van vergelijking (226) gelijk aan nul: de benodigde energie E wordt oneindig groot. Dit is een andere manier van zeggen dat het onmogelijk is een deeltje de lichtsnelheid te geven! Hiermee is dan ook aangetoond dat deeltjes voor deze waarnemer niet sneller kunnen gaan dan de lichtsnelheid; via Einsteins snelheidsregel volgt dan direct dat geen enkele andere waarnemer het deeltje sneller dan het licht kan zien bewegen.

[65] Er is een subtiel maar belangrijk verschil: deze uitdrukking geeft niet de energie van een deeltje, maar het *kwadraat* van de energie; er moet dus nog een wortel worden genomen! Nu heeft een kwadratische vergelijking altijd twee oplossingen: een met een plusteken, en een met een minteken. De laatste oplossing duidt op deeltjes met een negatieve energie, iets wat vergelijking (226) nog niet deed! Het correct interpreteren van deze nieuwe oplossingen leidde Paul Dirac tot het voorspellen van het bestaan van antimaterie.

Er is een uitzondering op deze regel. Om tot de energie E van ∞ te komen, hebben we opgemerkt dat een deeltje met snelheid $v = c$ de noemer in vergelijking (226) gelijkmaakt aan nul, en delen door nul geeft oneindig. Dit is inderdaad waar, *mits de teller niet gelijk is aan nul.* Als de teller van een breuk *ook* gelijk is aan nul, levert delen door nul niet altijd meer oneindig op. De waarde van de uitkomst is dan onbepaald: afhankelijk van de context kan er iets eindigs uitkomen. Hier staat in de teller van de breuk de massa van het deeltje, dus al met al ziet het ernaar uit dat er wel degelijk deeltjes zouden kunnen bestaan die met precies de lichtsnelheid bewegen *mits de massa van zulke deeltjes maar gelijk is aan nul*[66]. Zulke deeltjes kennen we: fotonen[67] gaan met de lichtsnelheid, en deze hebben inderdaad een massa gelijk aan nul. Dit volgt uit alle metingen, maar het is interessant om te zien dat dit resultaat ook *volgt* uit puur theoretische overwegingen. De impuls van een foton heeft de waarde $p_\mu p^\mu = 0 \rightarrow E = |\vec{p}|c$. Zoals elke keer weer blijkt dit een direct gevolg te zijn van de minkowskimetriek en het relativiteitsprincipe!

De vraag dient zich dan aan wat de waarde is van de energie van een foton: wat is hier de uitkomst van nul gedeeld door nul? De uitdrukking voor de relativistische energie doet geen uitspraak. Dit betekent niet dat er geen antwoord bestaat voor de energie van een massaloos deeltje, maar alleen dat deze waarde niet door vergelijking (226) of door de relativiteitstheorie bepaald kan worden, en dat een andere formule nodig is. In het geval van een foton is de formule bekend uit de quantummechanica,

$$E = hf \tag{233}$$

waar f de frequentie (kleur) van het licht is, en h de constante van Planck. De ontdekking van deze formule door Max Planck in 1900, was de start van de studie van de quantummechanica. Samen met de ontdekking van de speciale relativiteitstheorie leidde de ontwikkeling van de quantummechanica tot een gehele herschrijving van de grondslagen van de natuurkunde.

5.12 Lorentztransformaties vormen een groep

Groeptheorie is een belangrijk deel van de wiskundige beschrijving van de moderne fysica. In het volgende zullen we enkele aspecten hiervan demonstreren aan de hand van de Lorentztransformaties. We beginnen met de abstracte definities en gaan dan over naar representaties met matrices.

5.12.1 Definities

Een groep G is een verzameling van elementen, $g_1, g_2, .., g_n$ met een definitie van vermenigvuldiging. Dit betekent

1. $g_i \cdot g_j = g_k \in G$. Producten van elementen zijn ook elementen van de groep,
2. vermenigvuldiging is *associatief*, $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$,
3. het identiteits-element bestaat en is een element van de groep, $1 \in G$, $1 \cdot g_i = g_i \cdot 1 = g_i$,
4. de groep bevat een unieke inverse voor elk element, $g_i \in G \rightarrow g_i^{-1} \in G$, zodat $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = 1$.

[66]Een omgekeerde conclusie kan ook worden getrokken uit vergelijking (226): als een deeltje een massa gelijk aan nul zou hebben maar niet zou bewegen met de lichtsnelheid, zou alleen de teller nul zijn, en daarmee de hele uitdrukking voor de energie. Deeltjes zonder energie bestaan niet (alles heeft energie), en dus volgt nu ook dat als een deeltje geen massa heeft, het noodzakelijkerwijs met de lichtsnelheid moet bewegen.

[67]Er zijn nog meer massaloze deeltjes die met de lichtsnelheid bewegen: gluonen en gravitonen. Voor het gemak spreken we alleen over de fotonen, maar impliciet bedoelen we hier alle massaloze deeltjes mee.

Merk op dat het niet nodig is dat vermenigvuldiging commutatief is. We onderscheiden

$$\begin{aligned} g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i \quad &(\text{commutatief}) \quad \text{een Abelse groep}, \\ g_i \cdot g_j \neq g_j \cdot g_i \quad &(\text{niet} - \text{commutatief}) \quad \text{een niet} - \text{Abelse groep}. \end{aligned} \tag{234}$$

Als het aantal elementen eindig is ($n < \infty$), dan hebben we te maken met een eindige of discrete groep. De kleinste groep is de triviale groep met $n = 1$ en met enkel het element $g = 1$. Ga maar na dat aan alle eisen op een triviale manier voldaan is. In de natuurkunde hebben de relevante groepen een oneindig aantal elementen, maar kunnen de individuele elementen g gespecificeerd worden door een eindig aantal parameters N. Er geldt

$$g = G(x_1, x_2, .., x_N). \tag{235}$$

Van bijzonder belang zijn groepen waarvan de parameters continue variëren over een bepaald bereik. Het aantal parameters is eindig, maar het aantal elementen is dan oneindig. Als het bereik van deze parameters gebonden is (dus niet oneindig wordt), dan noemen we een dergelijke groep *compact*. Bijvoorbeeld, de parameterruimte van de compacte groep SO(3) is een bol met straal π. Tenslotte hebben de groepen die wij nu gaan beschouwen de additionele eigenschap dat de afgeleiden $\partial g/\partial x_i$ naar alle parameters bestaat. Groepen met deze eigenschap worden Lie groepen genoemd.

Als we naar het gedrag bij de oorsprong van de parameterruimte kijken, dan geldt per definitie dat

$$g(0, 0, .., 0) \equiv 1 \tag{236}$$

het identiteits-element is. In de buurt van de oorsprong van de parameterruimte corresponderen de groepelementen met infinitesimale transformaties en zijn de afgeleiden erg belangrijk. Men spreekt over de *generatoren* X_k en er geldt

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_{x_i=0,\ \text{all}\ j} \equiv X_k. \tag{237}$$

De generatoren definiëren de N-dimensionale algebra (vectorruimte), waar zowel optelling (van elementen van de algebra) als vermenigvuldiging met constanten gedefinieerd zijn. Het algemene element van deze Lie algebra kan worden uitgedrukt als een lineaire combinatie van de generatoren

$$\vec{X} = \sum_{k=1}^{N} c_k X_k. \tag{238}$$

Dit is analoog aan de vertrouwde drie-dimensionale vectorruimte, afgezien van het feit dat hier de generatoren de basisvectoren zijn (in plaats van $\vec{i}, \vec{j}$ en $\vec{k}$). We kunnen ons de generatoren voorstellen in termen van een soort Taylor expansie van de groepelementen in de buurt van de oorsprong. De groepelementen kunnen verkregen worden uit de elementen van de algebra door exponentiëren (we komen hier straks over te spreken).

De algebra laat ook de definitie van een vector product (uitproduct) toe, dat weer een element van de algebra produceert. De algebra is gesloten onder deze operatie. Dit product is de vertrouwde commutator

$$[X_k, X_l] \equiv X_k X_l - X_l X_k = C_{klm} X_m. \tag{239}$$

De tensor C_{ijk} wordt de *structuurconstante(n)* van de algebra genoemd en specificeert volledig de structuur van de algebra en hiermee van de groep zelf (in de buurt van de oorsprong van de parameterruimte).

5.12.2 Groeptheoretische aspecten van de Lorentztransformaties

We kunnen Lorentztransformaties (we kiezen als voorbeeld een boost in de z-richting) uitdrukken in matrixnotatie als

$$p^{\mu'} \equiv \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} p^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \tag{240}$$

De invariantie van het scalair product impliceet de volgende eigenschap voor de matrixrepresentatie van de boost

$$p_1^{\mu'} p_{2\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} p_1^{\nu} g_{\mu\sigma'} \Lambda^{\sigma'}{}_{\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} g_{\nu\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} p_{2\nu} \rightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\nu} g_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}{}_{\delta} = g_{\nu\sigma}. \tag{241}$$

Als we de eerste Λ transponeren, kunnen we de laatste relatie opschrijven in conventionele matrixnotatie. Er geldt

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \tag{242}$$

We gebruiken nu de eigenschappen van de metriek, $g^2 = 1$, $g = g^{-1} = g^T$ (merk op dat 1 staat voor de eenheidsmatrix) en vermenigvuldigen vergelijking (242) met g en vinden (merk op dat deze resultaten niet van de keuze van de metriek afhangen)

$$1 = g\Lambda^T g \Lambda \equiv \Lambda^{-1}\Lambda \rightarrow \Lambda^{-1} = g\Lambda^T g. \tag{243}$$

We hebben hiermee aangetoond dat zowel Λ als Λ^{-1} bestaat en het is ook makkelijk aan te tonen dat het resultaat van achtereenvolgende boosts weer een boost is, $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_3$. Dit zijn de eigenschappen die we eisen als boosts een groep moeten vormen. Het is ook eenvoudig te demonstreren dat boosts, net als rotaties, in het algemeen niet commuteren (dus $\Lambda_1\Lambda_2 \neq \Lambda_2\Lambda_1$). We verwachten dat de matrixvoorstelling van de boosts de representatie van een niet-Abelse groep is (dat is een groep waarvan de elementen niet commuteren). De groep is kwestie is de Lorentzgroep SO(3,1), waar de O staat voor "orthogonaal" en de notatie (3,1) uitdrukt dat we 3 ruimtelijke dimensies en 1 tijddimensie hebben, met verschillende tekens in de metriek.

Algemene 4×4 reële matrices hebben 16 reële parameters. We hebben echter te maken met bepaalde eisen die gesteld worden aan de Lorentzgroep. De matrixvergelijkingen (242) leveren 10 relaties (1 voor elke term op de diagonaal en 6 voor de niet-diagonale elementen)[68]. Er zijn dus $6 = 16 - 10$ parameters die de groep beschrijven. We laten geen reflecties toe in de "proper" Lorentzgroep (dat duiden we aan met de letter "S" in SO(3,1)) en eisen verder dat $\det(\Lambda) = +1$ (en niet -1). We staan ook de vorm $\mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1)$ niet toe, hetgeen een reflectie in alle 4 dimensies voorstelt.

Deze 6 parameters kunnen makkelijk begrepen worden als de 3 Euler hoeken die de gebruikelijke rotaties in de 3D-ruimte voorstellen (dat zijn orthogonale transformaties die de lengte van 3-vectoren invariant houden) plus de 3 parameters die de boosts zelf beschrijven. Deze laatste transformaties kunnen we ons voorstellen als de "hyperbolische" (imaginaire) rotaties die de tijddimensie met een van de ruimtelijke dimensies mengt. Ze zijn orthogonaal in de zin dat ze de lengte van 4-vectoren behouden die gedefinieerd zijn in termen van het geschikte scalaire product. Het feit dat de metriek de 4 dimensies niet op dezelfde manier behandelt, verklaart de $(3,1)$ notatie[69]. De relatie is bijzonder helder als we de uitdrukking voor de gebruikelijke rotatie over een hoek ϕ om de z-as (hetgeen de x en y componenten mengt; zie ook vergelijking (194))

[68] De elementen boven de diagonaal zijn identiek aan die onder de diagonaal, want als de vergelijking transponeren, krijgen we weer dezelfde vergelijking: $(\Lambda^T g\Lambda)^T = \Lambda^T g\Lambda$.

[69] In de Euclidische 4D-ruimte, waarin de metriek $\mathrm{diag}(1,1,1,1)$ is, vindt men SO(4).

vergelijken met een boost in de z-richting geschreven in termen van de rapidity y_u (hetgeen de t en z componenten mengt; zie ook vergelijking (198)). We vinden

$$\Lambda(\{x,y\},\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{244}$$

en

$$\Lambda(\{t,z\},y_u) = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}. \tag{245}$$

De basisvormen zien er hetzelfde uit. De boosts hebben enkel hyperbolische functies.

We kunnen de volledige transformatie uitdrukken in exponentiële vorm als

$$\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + ... \tag{246}$$

waar L zelf weer een reële 4×4 matrix is. We kunnen ons L voorstellen als een generator van "kleine" transformaties, die we dan itereren ot een volledige transformatie Λ. Omdat we enkel de "proper" transformatie toestaan, geldt

$$\det(\Lambda) = e^{\mathrm{Tr}(L)} = 1 \to \mathrm{Tr}(L) = 0. \tag{247}$$

We vinden dus dat L traceless en reëel moet zijn. Evenzo hebben we

$$\Lambda^T = e^{L^T} = 1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + ... \tag{248}$$

en

$$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g = e^{-L} = g\left(1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + ...\right) g = gg + gL^T g + \frac{gL^T ggL^T g}{2} + ... = e^{gL^T g}. \tag{249}$$

We nemen de logaritme van bovenstaande uitdrukking en gebruiken $g = g^{-1} = g^T$ en vinden

$$gL^T g = -L \to L^T g = (gL)^T = -gL. \tag{250}$$

Aldus vinden we dat gL zowel spoorloos als antisymmetrisch is, terwijl L spoorloos is en gemengde symmetrie heeft. Hij heeft precies de 6 vrije componenten die we nodig hebben om SO(3,1) te representeren: de 6 niet-diagonale componenten van een spoorloze, antisymmetrische 4×4 tensor. We kunnen de algemene uitdrukking voor L schrijven als

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}, \tag{251}$$

met L_{01}, L_{02} en L_{03} de boosts en L_{12}, L_{13} en L_{23} de rotaties.

In de 6-dimensionale vectorruimte van deze matrices kunnen we de volgende verzameling matrices als basis kiezen. Deze matrices vormen een representatie van de generatoren van SO(3,1), dus van de elementen van haar algebra. We kiezen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{252}$$

We herkennen de eerste rij als de gebruikelijke basisset voor rotaties: S_1 genereert een rotatie om de x-as (en mengt y en z), S_2 een rotatie om de y-as en S_3 om de z-as. De matrices in de tweede rij representeren de corresponderende generatoren van de boosts in de x, y en z richtingen. Het is eenvoudig te controleren dat zowel S_i^2 als K_i^2 diagonale matrices zijn (elke S_i^2 heeft twee -1 elementen op de diagonaal, terwijl elke K_i^2 twee $+1$ elementen heeft). Verder geldt $S_i^3 = -S_i$ en $K_i^3 = K_i$. Bijvoorbeeld

$$S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{253}$$

Vervolgens definiëren we twee reële vectoren

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad \text{en} \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3), \tag{254}$$

die de 6 parameters bevatten die we nodig hebben. Met de producten

$$\begin{aligned} \vec{\theta} \cdot \vec{S} &\equiv \theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + \theta_3 S_3, \\ \vec{y} \cdot \vec{K} &= y_1 K_1 + y_2 K_2 + y_3 K_3, \end{aligned} \tag{255}$$

kan men eenvoudig laten zien dat

$$\begin{aligned} \left(\vec{\theta} \cdot \vec{S}\right)^3 &= -\vec{\theta} \cdot \vec{S} \left|\vec{\theta}\right|^2, \\ \left(\vec{y} \cdot \vec{K}\right)^3 &= -\vec{y} \cdot \vec{K} |\vec{y}|^2. \end{aligned} \tag{256}$$

Bovenstaande relaties vereenvoudigen de taak van het expanderen van de volgende uitdrukkingen

$$L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K} \quad \text{en} \quad \Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^{-\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}}, \tag{257}$$

waar de keuze van het teken (-1) aangeeft dat we het referentiesysteem transformeren, en niet de toestandsvectoren. We demonstreren het formalisme aan de hand van twee voorbeelden.

Voorbeeld: passieve rotatie van de assen rond de z-as

We kiezen de vectoren $\vec{\theta} = (0, 0, \phi)$ en $\vec{y} = (0, 0, 0)$. Het is eenvoudig te verifiëren dat

$$-\vec{\theta} \cdot \vec{S} = -\phi S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & -\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{258}$$

Ook geldt

$$\left(-\vec{\theta}\cdot\vec{S}\right)^2 = \phi^2 S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \left(-\vec{\theta}\cdot\vec{S}\right)^3 = -\phi^2(-\phi S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^3 & 0 \\ 0 & \phi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{259}$$

We schrijven

$$e^{-\phi S_3} = -S_3\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + ...\right) - S_3^2\left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + ...\right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{260}$$

We gebruiken de reeksontwikkelingen van de goniometrische functies en vinden

$$e^{-\phi S_3} = -S_3\sin\phi - S_3^2\cos\phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{261}$$

We herkennen de "passieve" rotatie om de z-as (vergelijk dit met uitdrukking (244).

<u>Voorbeeld:</u> een boost langs de z-as

We kiezen de vectoren $\vec{\theta} = (0,0,0)$ en $\vec{y} = (0,0,y_u)$. We schrijven weer

$$-\vec{y}\cdot\vec{K} = -y_u K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{262}$$

Ook geldt

$$\left(-\vec{y}\cdot\vec{K}\right)^2 = y_u^2 K_3^2 = \begin{pmatrix} y_u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_u^2 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \left(-\vec{y}\cdot\vec{K}\right)^3 = -y_u^2(-y_u K_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{263}$$

We schrijven de volledige boost als

$$e^{-y_u K_3} = -K_3\left(y_u - \frac{y_u^3}{3!} + ...\right) + K_3^2\left(1 - \frac{y_u^2}{2!} + ...\right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{264}$$

We gebruiken de reeksontwikkelingen van de hyperbolische functies en vinden

$$e^{-y_u K_3} = -K_3\sinh y_h + K_3^2\cosh y_u + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}. \tag{265}$$

We herkennen de boost langs de z-as (vergelijk dit met uitdrukking (245).

We weten dat een groep waarvan de elementen geparametriseerd zijn in termen van continue variabelen (in ons specifieke geval de θ_i en y_i) een Lie groep wordt genoemd. De partiële afgeleiden van de groepelementen naar deze parameters in de buurt van het identiteitselement (dat is nabij de oorsprong in de parameterruimte)

$$\left.\frac{\partial\Lambda(\vec{\theta},\vec{y})}{\partial\theta_k}\right|_{\vec{\theta}=0,\vec{y}=0} \equiv -S_k, \quad \text{en} \quad \left.\frac{\partial\Lambda(\vec{\theta},\vec{y})}{\partial y_l}\right|_{\vec{\theta}=0,\vec{y}=0} \equiv -K_l \tag{266}$$

worden de *generatoren* van de groep genoemd (modulo factoren i). Zoals reeds eerder opgemerkt is deze naamgeving toepasselijk omdat deze matrices (operatoren) geassocieerd zijn met het genereren van infinitesimale transformaties. De commutatoren van de generatoren definiëren de Lie algebra van de (Lie) groep. We hebben bijvoorbeeld

$$[S_1, S_2] = S_3,\ [S_2, S_3] = S_1 \quad \text{en} \quad [K_1, K_2] = -S_3,\ [S_1, K_2] = K_3, \tag{267}$$

etc. De algemene structuur is bespreken we in de volgende sectie.

5.12.3 Connectie met quantummechanica

We hebben de Lorentzgroep beschouwd en gevonden dat

$$g(\vec{\theta}, \vec{y}) = \Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^L, \quad \text{met} \quad L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}. \tag{268}$$

We herkennen de matrices $\vec{S}$ en $\vec{K}$ als matrixrepresentaties van (minus) de generatoren van de groep SO(3,1). We hebben gezien dat de verschillende matrices niet commuteren en de elementen van de groep doen dat ook niet,

$$e^{-\theta_1 S_1} e^{-\theta_2 S_2} \neq e^{-\theta_2 S_2} e^{-\theta_1 S_1} \neq e^{-\theta_1 S_1 - \theta_2 S_2}. \tag{269}$$

Dit is een niet-Abelse groep. Merk op dat in het algemeen geldt dat

$$e^A e^B = e^B e^A \quad \text{enkel en alleen als} \quad [A, B] = 0. \tag{270}$$

Als geldt dat

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0; \quad [A, B] \neq 0, \tag{271}$$

dan vinden we

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}. \tag{272}$$

Dit wordt het Baker-Hausdorf Lemma genoemd.

De matrices S en K werden als reële matrices gedefinieerd. We willen echter de generatoren van de groep relateren aan fysische operatoren in de quantummechanica, en dat zijn *Hermitische* operatoren die waarschijnlijkheid behouden. We verwachten dat deze operatoren door Hermitische matrices gerepresenteerd worden (dus dat geldt $M^\dagger = \left(M^T\right)^\star = M$). Met deze Hermitische notatie definiëren we 6 nieuwe matrices

$$J_k = iS_k \quad \text{en} \quad \tilde{K}_k = iK_k \ (k = 1, 2, 3), \tag{273}$$

waar de J_k (maar niet de $\tilde{K}_k$) Hermitische matrices zijn. Er geldt

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \tilde{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{274}$$

We herkennen de J_k als de Hermitische representatie van de operatoren voor het impulsmoment. Met deze keuze wordt de SO(3,1) groep gerepresenteerd door

$$\Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J} + i\vec{y} \cdot \vec{\tilde{K}}}. \tag{275}$$

Verder definiëren we de generatoren als

$$\left.\frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_{x_j=0 \quad \text{voor alle } j} \equiv Y_k \quad \text{en} \quad [Y_j, Y_k] = iC_{jkl}Y_l, \tag{276}$$

en vinden de gebruikelijke uitdrukkingen in de quantummechanische context. We kunnen de specifieke uitdrukkingen voor de matrices gebruiken en vinden de elementen van de structuurconstanten van de groep SO(3,1) in Hermitische vorm als

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l, \quad \left[J_j, \tilde{K}_k\right] = i\epsilon_{jkl}\tilde{K}_l, \quad \text{en} \quad \left[\tilde{K}_j, \tilde{K}_k\right] = -i\epsilon_{jkl}J_l. \tag{277}$$

We gebruiken het Levi-Civita symbool ϵ_{jkl} dat een unieke volledige antisymmetrische 3-tensor in 3 dimensies voorstelt $(j,k,l = 1,2,3))$, $1 = \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321}$, terwijl alle andere componenten gelijk aan nul zijn (merk op dat $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$). We zien dat het product van twee rotaties weer een rotatie is. De rotaties vormen een groep. Deze groep is SO(3) en kennen we uit de quantummechanica. Dat geldt echter niet voor het product van twee boosts (in verschillende richtingen), hetgeen resulteert in de combinatie van een boost en een rotatie.

We kunnen het formalisme nog verder voeren en beschouwen hiertoe de matrices J_k en $\tilde{K}_k$ als de 6 niet-nul componenten van een antisymmetrische tensor in de 4-dimensionale ruimtetijd, in plaats van als 2 verschillende 3-vectoren. We maken dit expliciet en definiëren de tensoren $M_{\mu\nu}$ en $\omega^{\mu\nu}$ met $\mu, \nu = 0,1,2,3$ als

$$\begin{aligned} M_{kl} = \epsilon_{klm}J_m \quad k,l,m = 1,2,3, \quad \text{en} \quad M_{k0} = \tilde{K}_k = -J_{0k}, \\ \omega^{kl} = \epsilon_{klm}\theta_m \quad k,l,m = 1,2,3, \quad \text{en} \quad \omega^{k0} = y_k = -\omega^{0k}. \end{aligned} \tag{278}$$

We kunnen de groep nu representeren als

$$\Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J} + i\vec{y}\cdot\vec{\tilde{K}}} = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}. \tag{279}$$

De transformaties van de groep SO(3,1) behouden niet alleen de "lengte" van 4-vectoren (dus $r^\mu r_\mu$), maar laten ook de twee tensoren $g_{\mu\nu}$ (de metrische tensoren) en $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ (het 4D analogon van ϵ_{ijk}) invariant.

Wigner realiseerde zich dat de echte symmetriegroep voor deeltjesfysica niet de homogene Lorentzgroep is, maar dat die ook de translaties in ruimtetijd dient te bevatten. Deze inhomogene Lorentzgroep staat bekend als de Poincaré groep. De generator van ruimtetijd translaties P_μ wordt gegeven door

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + a^\mu \quad \text{en} \quad P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{280}$$

Er zijn 4 translatie operatoren in de Poincaré groep, en ook 3 generatoren voor Lorentz boosts en 3 generatoren voor rotaties. In totaal zijn er 10 generatoren in de Poincaré groep, die we met behulp van vergelijking (278) kunnen schrijven als

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i\left(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right), \quad (\mu,\nu,\rho,\sigma = 0,1,2,3). \tag{281}$$

De commutatierelaties voor de translatie generatoren zijn

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= i\left(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho\right). \end{aligned} \tag{282}$$

De algemene inhomogene Lorentztransformaties die de Lorentz boosts, rotaties en ruimtetijd translaties bevatten, worden gegeven door

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{283}$$

waarbij de matrix Λ die de boosts en rotaties bevat, gegeven wordt door vergelijking (279). Noethers theorema is bekend uit de mechanica en stelt dat er met elke symmetrie die door lokale acties gegenereerd wordt, een behouden stroom correspondeert. Met symmetrie wordt bedoeld de covariantie van de vorm die een natuurkundige wet heeft met betrekking tot een één-dimensionale Lie groep. We kunnen Noethers theorema toepassen op bovenstaande symmetriën en vinden dat de translatie in de tijd leidt tot de wet van behoud van energie, translaties in positie tot behoud van impuls, en de rotaties tot behoud van impulsmoment.

We kunnen de algemene transformatie van de Poincaré groep aangeven met de notatie $\{\Lambda, a\}$. Het eenheidselement wordt aangegeven met $\{1, 0\}$ en de samengestelde transformatie $\{\bar{\Lambda}, \bar{a}\}\{\Lambda, a\}$ levert

$$x^{\mu\prime\prime} = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \left(x^{\nu\prime}\right) + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \left(\Lambda^\nu{}_\rho x^\rho + a^\nu\right) + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho + \left(\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu + \bar{a}^\mu\right). \tag{284}$$

Tenslotte merken we op dat er slechts twee invarianten zijn in de Poincaré groep die commuteren met alle generatoren. Dat zijn de Casimir invarianten (of Casimir operatoren)[70]. De eerste Casimir invariant C_1 is geassocieerd met de massa invariantie, en de tweede Casimir invariant C_2 refereert aan spin invariantie. Er geldt

$$C_1 \equiv P^\mu P_\mu, \quad \text{en} \quad C_2 \equiv W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1), \tag{285}$$

met s de spin van het deeltje, en W_μ de zogenaamde Pauli-Lubanski pseudo-vector die gedefinieerd is als

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma. \tag{286}$$

Het is opmerkelijk dat slechts uitgaande van de Minkowski-metriek en het bijbehorende Lorentz-invariante lijnelement, toepassing van wiskunde in de vorm van de groeptheoretische beschouwing van transformaties die dit lijnelement invariant laten, ons geleid hebben tot belangrijke behoudswetten en essentiële definities van massa en spin in de vorm van Casimir operatoren.

5.13 De elektromagnetische tensor

De Maxwellvergelijkingen voor de elektrische en magnetische velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ in vacuüm in eenheden waarbij $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$ luiden

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi \mathbf{j}, \qquad & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \qquad & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{287}$$

Hierbij stelt ρ de dichtheid van elektrische lading voor en $\mathbf{j}$ de stroomdichtheid.

We definiëren de antisymmetrische elektromagnetische veldtensor $\mathbf{F}$ met componenten

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \tag{288}$$

[70] De Poincaré groep heeft rang 2, zodat er enkel twee invarianten zijn. In het algemeen is de rang van een SO(N) groep gelijk aan $N/2$ als N even is en $(N-1)/2$ als N oneven is.

en zien dat de elektrische en magnetische velden gegeven worden door

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = (E^x, E^y, E^z) = \left(F^{01}, F^{02}, F^{03}\right), \\ \mathbf{B} = (B^x, B^y, B^z) = \left(F^{23}, F^{31}, F^{12}\right).\end{aligned} \tag{289}$$

We definiëren ook de stroom viervector $\mathbf{J} = (\rho, j^x, j^y, j^z)$. Hiermee kunnen we de Maxwellvergelijkingen schrijven als

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu}{}_{,\nu} &= 4\pi J^\mu, \\ F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} &= 0,\end{aligned} \tag{290}$$

met $F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$. We hebben nu de Maxwellvergelijkingen uitgedrukt in tensorvorm.

De eerste van deze vergelijkingen impliceert het behoud van elektrische lading. Dan geldt

$$J^\mu{}_\mu = 0 \rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \tag{291}$$

hetgeen de continuiteitsvergelijking voorstelt. We kunnen dat inzien als we de eerste covariante Mawellvergelijking contraheren en vinden

$$4\pi J^\mu{}_\mu = F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} = F^{\nu\mu}{}_{,\mu\nu} = -F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} \rightarrow F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} = 0 \rightarrow J^\mu{}_\mu = 0. \tag{292}$$

Door een Lorentztransformatie uit te voeren naar een referentiesysteem dat met snelheid v in de x-richting beweegt, kunnen we uitrekenen hoe de elektrische en magnetische velden veranderen. Er geldt

$$F^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}. \tag{293}$$

We vinden dan dat $\mathbf{E}_\| = E^x$ onveranderd blijft, terwijl

$$\mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{294}$$

waarbij $\mathbf{E}_\|$ en $\mathbf{E}_\perp$ de elektrische velden zijn parallel en loodrecht met $\hat{\mathbf{x}}$. We zien dus dat $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ mengen.

De vierkracht op een deeltje met lading q en snelheid $\mathbf{U}$ in een elektromagnetisch veld is

$$K^\mu = qF^{\mu\nu}U_\nu = q\gamma\left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right). \tag{295}$$

Het ruimtelijke deel van K^μ is de Lorentzkracht en de tijdcomponent is de arbeid die door deze kracht per tijdseenheid wordt verricht.

Door $\mathbf{J} = q\mathbf{U}$ te schrijven, vinden we met behulp van de Maxwellvergelijkingen

$$K^\mu = -T^{\mu\nu}{}_{,\nu}, \tag{296}$$

met

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right). \tag{297}$$

Dit is de energie-impuls tensor voor het elektromagnetische veld. Merk op dat $T^{\mu\nu}$ zoals vereist symmetrisch is en dat de energiedichtheid gegeven wordt door

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right). \tag{298}$$

5.14 De extra traagheid van druk

We hebben gezien hoe SRT geïsoleerde lichamen beïnvloedt als ze sneller bewegen: klokken (lopen trager), afstanden (worden korter), versnelde deeltjes (hun energie neemt toe), etc. De SRT heeft echter ook gevolgen voor een verzameling deeltjes, een gas. Met name speelt de gasdruk een belangrijke rol in de traagheid van het gas. We zullen ontdekken dat hoe hoger de gasdruk, hoe moeilijker het is om het gas te versnellen (de traagheid neemt toe). Dit heeft belangrijke gevolgen voor de ART. Als we neutronensterren bestuderen zullen we ontdekken dat dit effect ervoor zorgt dat het neutronengas een groter gewicht heeft. Dit zal ertoe leiden dat de ster een grotere gasdruk krijgt, hetgeen ervoor zorgt dat het gewicht toeneemt, etc. Deze druk-terugkoppeling leidt er uiteindelijk toe dat het onmogelijk wordt voor de ster om zichzelf in stand te houden: de traagheid van de gasdruk leidt de ineenstorting tot een zwart gat in.

De traagheid van de gasdruk is terug te leiden op de lorentzcontractie. We bekijken het effect alleen voor kleine snelheden, waar SRT correcties relatief klein zijn. We beschouwen een doos met volume V die gevuld is met een uniform gas met massadichtheid ρ en gasdruk P. Stel dat we een kleine kracht uitoefenen op de doos, waardoor we haar versnellen tot een snelheid v, die klein is ten opzichte van c. De vraag is nu: hoeveel energie hebben we moeten leveren om het gas een snelheid v te geven? Ter vereenvoudiging spreken we alleen over het gas en niet over de doos (astronomische objecten als sterren zitten niet in een doos ...).

Als het gas een snelheid v heeft, dan heeft het kinetische energie. Men zou dus kunnen verwachten dat de totale energie die we hebben moeten toevoegen aan de doos om het gas te versnellen gelijk is aan deze kinetische energie: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho V v^2$. Dit is echter niet het hele verhaal, omdat de lorentzcontractie de lengte van de doos kleiner heeft gemaakt en daarmee het volume veranderd heeft. De doos kleiner maken, terwijl er een gas of vloeistof met druk P in zit, betekent het verrichten van arbeid. Deze arbeid is gelijk aan $\vec{F}\cdot d\vec{s} = -P\Delta V$, met ΔV de volumeverandering. Het minteken is nodig omdat de volumeverandering (ΔV)negatief is, terwijl de verrichte arbeid positief is. Deze extra energie vertegenwoordigt de extra traagheid van het gas: het is moeilijker om het gas te versnellen, omdat niet alleen arbeid verricht dient te worden om de bestaande energie te versnellen, maar ook om het gas te comprimeren, zoals de lorentzcontractie vereist.

De lengteverandering door de lorentzcontractie is gelijk aan

$$\Delta L = L\sqrt{1-\frac{v^2}{c}} - L \approx -\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}L. \tag{299}$$

De extra energie die nodig is, is gelijk aan $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}PV$. Deze energie verdwijnt niet, maar gaat naar de interne energie van het gas (op welke wijze hangt af van het type gasmolecuul). Een deel van de energie wordt gebruikt om het gas te verwarmen (de random kinetische energie van de moleculen). De totale energie die nodig is om het gas te versnellen kunnen we schrijven als

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - P\Delta V = \frac{1}{2}\rho V v^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}PV = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)v^2 V. \tag{300}$$

We zien dat de energie die nodig is om het gas te versnellen evenredig is met de som $\rho + \frac{P}{c^2}$. Dus voor een bepaalde uitgeoefende kracht zal de doos minder versnellen dan we zouden verwachten op basis van alleen haar massa, omdat een deel van de energie gaat naar de interne energie van het gas. We zien dus dat de traagheid groter is dan alleen haar rustmassa. We noemen de grootheid $\rho + \frac{P}{c^2}$ de traagheid van de massadichtheid van het gas.

5.15 De energie-impuls tensor

Vergelijking (300) geeft de energie die nodig is om een gas te versnellen. De energie is echter afhankelijk van het referentiestelsel, want het is de 0-component van de vierimpuls gegeven door vergelijking (228). Alhoewel deze vierimpuls een volledige beschrijving geeft van de energie en impuls van een individueel deeltje, zullen we in het vervolg vaak uitgebreide systemen bespreken die zijn samengesteld uit grote aantallen deeltjes. In plaats van het toekennen van vierimpulsen aan ieder individueel deeltje, kiezen we ervoor om het hele systeem als een vloeistof te beschrijven - een continuum dat gekarakteriseerd wordt door macroscopische grootheden als druk, dichtheid, entropie en viscositeit. In het algemeen heeft deze vloeistof een bepaald viersnelheidveld.

Een enkel impuls-viervectorveld is onvoldoende om de energie en impuls van de vloeistof te beschrijven. We definiëren een energie-impuls tensor (ook wel de stress tensor genoemd) met componenten $T^{\mu\nu}$. Deze symmetrische $\binom{2}{0}$ tensor vertelt ons alles wat we moeten weten van de energie-achtige eigenschappen van een systeem: energiedichtheid, druk, spanning, etc.

Een algemene definitie van $T^{\mu\nu}$ is de flux van vierimpuls p^μ door een oppervlak met constante x^ν. Beschouw bijvoorbeeld een oneindig klein vloeistofelement in zijn rustsysteem. Dan is T^{00} de flux van p^0 (energie) in de x^0 (tijd) richting: het is de energiedichtheid ρ in het rustsysteem. Op dezelfde manier zien we dat in dit frame $T^{0i} = T^{i0}$ de impulsdichtheid is. De ruimtelijke componenten T^{ij} zijn de impulsflux, ofwel de stress, en vertegenwoordigen de krachten tussen aangrenzende volume elementen. Een diagonale term als T^{11} geeft de $x-$component van de kracht die per eenheid oppervlakte door het element wordt uitgeoefend in de $x-$richting. We interpreteren dit als de $x-$component van de druk (P_x). De druk heeft drie dergelijke componenten, $P_i = T^{ii}$, in het rustsysteem van de vloeistof.

We zullen het bovenstaande concreter maken door ‘stof’ (engels: dust) als voorbeeld te nemen. Kosmologen hebben de neiging om materie als synoniem voor stof te gebruiken. We definiëren stof in de vlakke ruimtetijd als een verzameling deeltjes die in rust zijn ten opzichte van elkaar. Het viervector snelheidsveld $U^\mu(x)$ is de constante viersnelheid van de individuele deeltjes. De componenten zijn hetzelfde op elk punt. We definiëren de flux viervector als

$$N^\mu = nU^\mu, \tag{301}$$

met n de deeltjesdichtheid gemeten in het rustsysteem. Dan is N^0 de deeltjesdichtheid gemeten in een ander systeem, terwijl N^i de deeltjesflux is in de x^i-richting. Verder nemen we aan dat elk deeltje massa m heeft. In het rustsysteem wordt de energiedichtheid van de stof gegeven door

$$\rho = nm. \tag{302}$$

Per definitie specificeert de energiedichtheid de stof volledig. Echter ρc^2 meet de energiedichtheid in het rustsysteem. Hoe zit het met de andere systemen? Merk op dat zowel n als m de $0-$componenten zijn van viervectoren in hun rustsysteem, namelijk $N^\mu = (n, 0, 0, 0)$ en $p^\mu = mU^\mu = (mc, 0, 0, 0)$. We zien dus dat ρc^2 de $\mu = 0,\ \nu = 0$ component is van de tensor $p \otimes N$ gemeten in het rustsysteem. Dit leidt tot de volgende definitie van de energie-impuls tensor voor stof,

$$T^{\mu\nu}_{\text{stof}} = p^\mu N^\nu = mnU^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu, \tag{303}$$

met ρc^2 de energiedichtheid in het rustsysteem. We zien dat de druk van het stof in elke richting gelijk is aan nul. Dat klopt ook wel, omdat wij stof gedefinieerd hebben als een verzameling deeltjes zonder random bewegingen.

Stof is onvoldoende voor een algemene beschrijving van belangrijke fenomenen in de ART. Hiervoor is het concept van een ‘perfecte vloeistof’ nodig. Een perfecte vloeistof kan volledig worden gespecificeerd door twee grootheden: de energiedichtheid ρ in het rustsysteem, en een isotrope druk P in het rustsysteem. De parameter P geeft de druk in elke richting. Een consequentie van de isotropie is dat $T^{\mu\nu}$ diagonaal is in het rustsysteem. Verder moeten de diagonale componenten allemaal gelijk zijn: $T^{11} = T^{22} = T^{33}$. Er zijn dus slechts twee onafhankelijke parameters en dat is de energiedichtheid $\rho = T^{00}$ en de druk $P = T^{ii}$. De energie-impuls tensor van een perfecte vloeistof heeft daarmee de volgende vorm in het rustsysteem,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \tag{304}$$

We willen uiteraard een formule die geldig is in elk systeem, een tensorvergelijking. Voor stof hadden we $T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$, dus we gokken op $(\rho + P/c^2)U^\mu U^\nu$. Dit geeft

$$\begin{pmatrix} \rho c^2 + P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{305}$$

en we zien dat dat niet correct is. We dienen er de volgende bijdrage bij op te tellen,

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}, \tag{306}$$

hetgeen we kunnen schrijven als $Pg^{\mu\nu}$, met $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ in de SRT. Hiermee vinden we voor de algemene vorm van de energie-impuls tensor voor een perfecte vloeistof

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2)U^\mu U^\nu + Pg^{\mu\nu}. \tag{307}$$

Gegeven dat vergelijking (304) de vorm van $T^{\mu\nu}$ in het rustsysteem is, en dat vergelijking (307) een tensorvergelijking is die in het rustsysteem reduceert tot vergelijking (304), weten we dat we met vergelijking (307) de correcte uitdrukking voor elk coördinatenstelsel hebben gevonden.

Het concept van een perfecte vloeistof is algemeen genoeg om een grote verscheidenheid van vormen van materie te beschrijven. We specificeren de toestandsvergelijking om de evolutie van een dergelijke vloeistof te bepalen. De toestandsvergelijking relateert de druk aan de energiedichtheid, $P = P(\rho)$. Stof is een speciaal geval waarvoor $P = 0$, terwijl een isotroop gas bestaande uit fotonen $P = \frac{1}{3}\rho$ heeft. Een meer exotisch voorbeeld is de energie van het vacuum, waarvoor de energie-impuls tensor evenredig is met de metriek, $T^{\mu\nu} = -\rho_{\text{vacuum}} g^{\mu\nu}$. Het idee van een energiedichtheid van het vacuum is zinloos in de SRT, omdat daar de absolute schaal van de energie niet relevant is, alleen de energieverschillen tussen toestanden. In de ART koppelt alle energie echter met gravitatie (en veroorzaakt kromming van ruimtetijd), en wordt de mogelijkheid van het bestaan van vacuumenergie een belangrijke beschouwing.

Behalve dat $T^{\mu\nu}$ symmetrisch is, heeft hij de belangrijke eigenschap dat hij behouden is. Energie- en impulsbehoud worden uitgedrukt door het feit dat de divergentie gelijk is aan nul,

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{308}$$

Bovenstaande uitdrukking is een verzameling van vier vergelijkingen, een voor elke waarde van ν. De uitdrukking met $\nu = 0$ correspondeert met energiebehoud, terwijl $\partial_\mu T^{\mu k} = 0$ met $k = 1, 2, 3$ behoud van de $k-$de component van de impuls uitdrukt. Laten we dit eens toepassen op de perfecte vloeistof. We vinden dan

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu(\rho + P/c^2)U^\mu U^\nu + (\rho + P/c^2)(U^\nu \partial_\mu U^\mu + U^\mu \partial_\mu U^\nu) + \partial^\nu P. \tag{309}$$

Om te analyseren wat deze uitdrukking betekent, is het nuttig om afzonderlijk te beschouwen wat er gebeurt als we een en ander projecteren langs en loodrecht op het viersnelheidsveld U^μ. Allereerst merken we op dat de normalisatie $U_\nu U^\nu = -c^2$ de volgende identiteit levert,

$$U_\nu \partial_\mu U^\nu = \frac{1}{2}\partial_\mu (U_\nu U^\nu) = 0. \tag{310}$$

Projecteren komt neer op contraheren met U_ν en we vinden

$$U_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = -\partial_\mu (\rho U^\mu) - P\partial_\mu U^\mu. \tag{311}$$

Als we dit gelijkstellen aan nul vinden we de relativistische vergelijking voor energiebehoud van een perfecte vloeistof. Het ziet er vertrouwder uit in de niet-relativistische limiet, waar geldt

$$U^\mu = (1, v^i), \qquad |v^i| \ll 1, \qquad P \ll \rho. \tag{312}$$

De laatste vergelijking is aannemelijk, omdat druk alleen van de random bewegingen van de individuele deeltjes komt, en in deze limiet zijn deze bewegingen (net als de beweging van de bulk met U^μ) klein. We vinden dus in niet-relativistische taal

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \tag{313}$$

hetgeen de continuïteitsvergelijking is voor de energiedichtheid.

Tenslotte gaan we naar het deel van vergelijking (309) dat loodrecht staat op de viersnelheid. Om een vector loodrecht op U^μ te projecteren, moeten we die vermenigvuldigen met de projectie tensor

$$P^\sigma{}_\nu = \delta^\sigma_\nu + U^\sigma U_\nu. \tag{314}$$

We kunnen controleren dat bovenstaande projectie tensor zijn werk doet door een vector $V^\nu_\parallel$ parallel aan U^μ en een andere vector $W^\mu_\perp$ loodrecht op U^μ te nemen. We vinden dan

$$\begin{aligned} P^\sigma{}_\nu V^\nu_\parallel &= 0, \\ P^\sigma{}_\nu W^\nu_\perp &= W^\sigma_\perp. \end{aligned} \tag{315}$$

Toepassen op $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ levert

$$P^\sigma{}_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = (\rho + P/c^2) U^\mu \partial_\mu U^\sigma + \partial^\sigma P + U^\sigma U^\mu \partial_\mu P. \tag{316}$$

We interpreteren deze vergelijking in de niet-relativistische limiet. Als we de ruimtelijke componenten gelijkstellen aan nul, vinden we

$$\rho\left[\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] + \nabla P + \vec{v}(\partial_t P + \vec{v}\cdot\nabla P) = 0. \tag{317}$$

Merk op dat de laatste paar termen afgeleiden hebben van P keer de driesnelheid $\vec{v}$, waarvan we aannemen dat die klein is. Deze termen zijn verwaarloosbaar ten opzichte van de ∇P term. We houden dan over

$$\rho\left[\partial_t \vec{v} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla P, \tag{318}$$

en dit is de vergelijking van Euler uit de vloeistofmechanica.