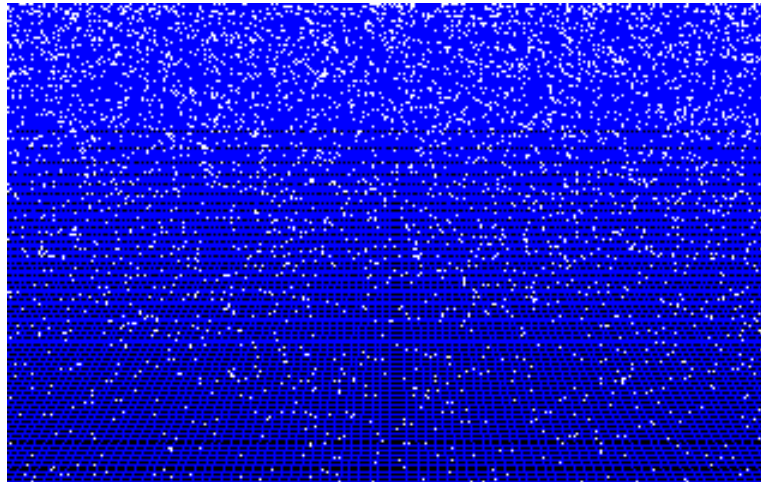


Gravitatie en kosmologie

FEW cursus



Jo van den Brand & Joris van Heijningen
Sferische oplossingen: 10 November 2015

Copyright (C) Vrije Universiteit 2009

Inhoud

- **Inleiding**
 - Overzicht
- **Klassieke mechanica**
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- **Quantumfenomenen**
 - Neutronensterren
- **Wiskunde I**
 - Tensoren
- **Speciale relativiteitstheorie**
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen
 - Lagrangiaan en EM

- **Wiskunde II**
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- **Algemene relativiteitstheorie**
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
 - Sferische oplossingen
 - Zwarte gaten
- **Kosmologie**
 - Friedmann
- **Gravitatiestraling**
 - Theorie en experiment

Schwarzschild ruimtetijd

Schwarzschild ontdekte in 1916 de eerste exacte oplossing van de Einstein vergelijkingen. Het is een vacuümoplossing voor de metriek van ruimtetijd buiten een sferisch symmetrische massaverdeling:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

We zien de Schwarzschild coördinaten en metriek $g_{\mu\nu}(x)$

De metriek hangt niet van de tijd t af

De metriek is sferisch symmetrisch en voor constante r en t geldt $d\Sigma^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$

Limiet voor zwakke velden $ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$

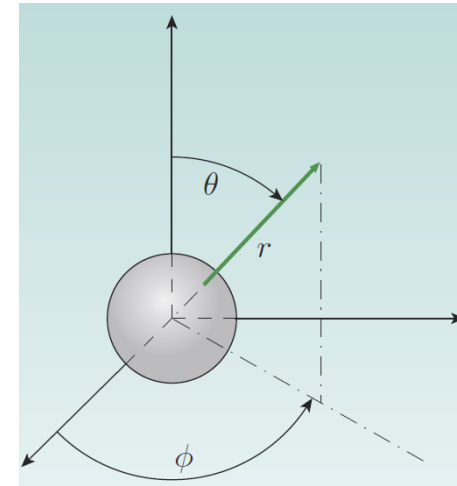
Dit is conform de limiet voor een statisch, zwak veld met een Newtoniaanse gravitatiepotentiaal gegeven door

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

We associeren de constante M in $g_{\mu\nu}(x)$ met de totale massa en de bron van kromming

We gebruiken de baan van een testmassa en de wet van Kepler om de bron van kromming M te bepalen (materie, straling, etc.). Er geldt

$$\frac{v^2}{R} = \left(\frac{2\pi R}{P}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{GM}{R^2} \quad \longrightarrow \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \quad \longrightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{R^3}{P^2}$$



Geometrische eenheden

Schwarzschild metriek in [kg m s] eenheden

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Als we $c = 1$ gebruiken, dan krijgen we [kg m] eenheden en hebben ruimte en tijd dezelfde eenheid: [m]

Er geldt dan de conventie $t \text{ [m]} = ct \text{ [s]} = 3 \times 10^8 t \text{ [s]}$

Deze *natuurlijke eenheid* is gebruikelijk in de SRT

Als we ook $G = 1$ gebruiken, dan kunnen we massa uitdrukken in lengte

Er geldt dan de conventie

$$M \text{ [m]} = \frac{G}{c^2} M \text{ [kg]} = \frac{6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} M \text{ [kg]} = 7.416 \times 10^{-28} M \text{ [kg]}$$

Voorbeeld: de massa van de Zon is $M_{\odot} = 1.47 \text{ km}$ en van de Aarde $M_{\oplus} = 0.44 \text{ cm}$

Dergelijke *geometrische eenheden* zijn gebruikelijk in de ART

Singulariteiten in de Schwarzschild metriek

Schwarzschild metriek in [kg m s] eenheden

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Schwarzschild metriek in geometrische eenheden

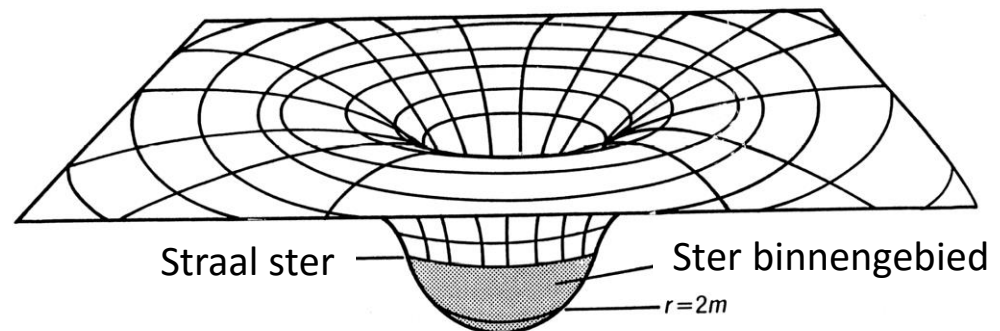
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

De limiet $M = 0$ or $r \rightarrow \infty$ levert de Minkowski metriek in sferische coördinaten

Veel bronnen zijn sferisch symmetrisch: sterren, zwarte gaten, neutronensterren

Metriek singulier op $r = 0$ en $r = 2M$

- $r = 0$: Echte singulariteit met oneindige ruimtetijdkromming
- $r = 2M$: Blijkt singulier vanwege keuze coördinatensysteem



Theorema van Birkhoff



Meest algemene sferisch symmetrische metriek

$$ds^2 = -A(r, t)dt^2 + 2B(r, t)drdt + C(r, t)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Termen $g_{i\theta}$ en $g_{i\phi}$ vanwege sferische symmetrie $\phi \rightarrow \phi'$

Coördinatentransformatie: $t \rightarrow t + f(r, t)$

Vul in $t = t' + f(r, t')$

Kruisterm $drdt'$ wordt dan $2drdt \left[A \frac{\partial f}{\partial r} + B \left(1 + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right]$

Kies f zodanig dat deze term nul wordt! $\rightarrow g_{rt} = 0$

Herlabel t en schrijf $ds^2 = -e^{2\Phi(r, t)}dt^2 + e^{2\Lambda(r, t)}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$

Gebruik de Einsteinvergelijkingen in vacuüm

$$G_{tt} = \frac{1 - e^{-2\Lambda}}{r^2} + \frac{2\Lambda_{,r}}{r} e^{-2\Lambda} = 0 \quad (i),$$

$$G_{rt} = \frac{2\Lambda_{,t}}{r} e^{-(\Lambda+\Phi)} = 0 \quad (ii), \rightarrow \Lambda_{,t} = 0 \rightarrow \Lambda(r, t) = \Lambda(r)$$

$$G_{rr} = \frac{2\Phi_{,r}}{r} e^{-2\Lambda} + \frac{e^{-2\Lambda} - 1}{r^2} = 0 \quad (iii), \rightarrow \Lambda_{,r} + \Phi_{,r} = 0 \quad (\text{met (i)})$$

$$G_{\phi\phi} = \left(\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}^2 - \Phi_{,r}\Lambda_{,r} + \frac{\Phi_{,r}}{r} - \frac{\Lambda_{,r}}{r} \right) e^{-2\Lambda} = (\Lambda_{,tt} + \Lambda_{,t}^2 - \Lambda_{,t}\Phi_{,t}) e^{-2\Phi} = 0 \quad (iv), \quad \hookrightarrow \Phi(r, t) = -\Lambda(r) + f(t)$$

$$G_{\theta\theta} = \sin^2 \theta G_{\phi\phi} = 0 \quad (v).$$

Theorema van Birkhoff

Herdefinieer de tijd $d\tilde{t} = e^{f(t)} dt$

Hiermee vinden we $ds^2 = -e^{-2\Lambda(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$

Dit is een *statische* metriek!

Terwijl het systeem (sferisch symmetrisch) mag pulseren of ineenstorten

Volgende stap: los ODE (i) op $-1 + e^{2\Lambda} + 2r\Lambda_{,r} = 0$

Substitueer $e^{-2\Lambda} = 1 + D(r) \rightarrow \frac{D_{,r}}{D} = -\frac{1}{r}$

Dit heeft als oplossing $D(r) = -\frac{2M}{r} \rightarrow \Lambda = \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{2M}{r} \right|$

Merk op: M is willekeurige integratieconstante

Invullen levert Schwarzschildmetriek

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Metriek moet asymptotisch vlak zijn (Minkowski als $\Lambda = 0$)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda(r) = 0 \rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Interpretatie van de coördinaten

De hoeken θ en ϕ

In 2D hypervlakken met $r = \text{constant}$ en $t = \text{constant}$ schrijven we $ds^2 = r^2 d\Omega^2$

Identiek aan beschrijving van een bol met constante straal in SRT

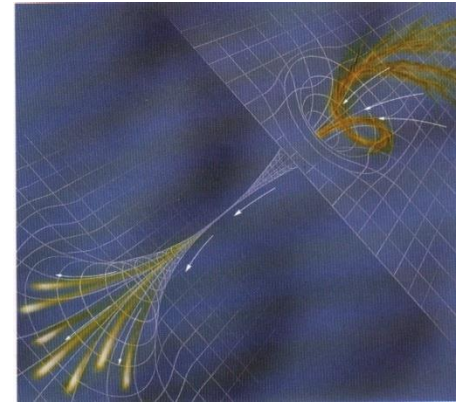
De hoeken θ en ϕ zijn de hoeken op een bol

De straal r

Oppervlak in gekromde ruimte wordt gegeven door ($g^{(2)}$ is gereduceerde metriek)

$$A = \int \sqrt{g^{(2)}} d^2x = \int r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi r^2$$

Straal r wordt gegeven door oppervlak van een bol $r(\mathcal{P}) = \sqrt{\frac{\tilde{A}}{4\pi}}$



Moeilijk om de tijd te meten

Eigenschappen

1. *Tijdsonafhankelijke afstanden* ($\partial g_{\alpha\beta} / \partial t = 0$) tussen lijnen van constante r, θ, ϕ
2. *Orthogonaliteit* ($g_{tr} = 0, g_{t\theta} = 0, g_{t\phi} = 0$) met $t = \text{constant}$ hypervlakken
3. *Asymptotisch equivalent met Minkowski-tijd*

Interpretatie van de coördinaten

We onderzoeken nu het verband tussen de waarden van coördinaten en de *fysisch relevante* intervallen van tijd en afstand

Als we in een uitdrukking geconfronteerd worden met de variabelen t en r , dan is het verleidelijk om direct te denken aan tijd en afstand tot de oorsprong

In de ART zijn coördinaten slechts markeringen om gebeurtenissen aan te duiden. Ze hebben geen directe metrische significantie

We onderscheiden drie locale referentiesystemen:

1. *Dat van een vrij-vallende waarnemer: hierin is gravitatie “uitgezet” en geldt de SRT met bijbehorende Minkowski metriek*
2. *Een systeem dat in rust is op een bepaalde locatie. Deze waarnemer moet iets doen om te voorkomen dat hij vrij valt. SRT kan lokaal gebruikt worden, maar er moet dan wel een fictieve gravitatiekracht ingevoerd worden*
3. *Het systeem van een waarnemer die zich op grote afstand van M bevindt. Hier is ruimtetijd weer vlak en geldt de SRT*

Gravitationele roodverschuiving

Beschouw twee gebeurtenissen met Schwarzschild coördinaten $(t_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$ en $(t_E + dt_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$ waarbij er licht wordt uitgezonden. Gebeurtenissen zijn gescheiden door dt_E terwijl $dr_E = d\theta_E = d\phi_E = 0$

De ruimtetijd afstand is dan $ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}\right) c^2 dt^2$

De *proper time* tussen de events zoals

gemeten door een klok in rust ter plaatse is

$$d\tau_E = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}} dt_E$$

Tijdverschil gemeten met een plaatselijke klok is minder dan het coördinatenverschil dt_E

Een waarnemer in rust op een andere locatie r_O vindt voor het coördinatenverschil dt_O dezelfde waarde $dt_O = dt_E$

De ruimtetijd afstand op die locatie is dan

$$ds_O^2 = -c^2 d\tau_O^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_O}\right) c^2 dt_O^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_O}\right) c^2 dt_E^2$$

De proper time tussen de waarnemingen van beide signalen is $d\tau_O = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_O}} dt_E$

Voor een waarnemer op $r = \infty$ vinden we $dt_E = d\tau_\infty$

We vinden de gravitationele roodverschuiving $d\tau_\infty = \frac{d\tau_E}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}}}$

Geodetische beweging

We vinden de wereldlijn van een testmassa uit de vergelijking voor een geodeet

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \sum_{\nu, \rho} \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

We dienen alle connectiecoëfficiënten te bepalen (huiswerk)

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{A'}{2A}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B}, & A(r) &= \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) \\ \Gamma_{22}^1 &= -r/B, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, & B(r) &= \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{32}^3 &= \cot \theta & A' &\equiv dA/dr \quad B' \equiv dB/dr \end{aligned}$$

Hiermee vinden we de volgende vier differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{GM}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \right] = 0$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0.$$

We kunnen het vinden van oplossingen simplificeren door gebruik te maken van bewegingsconstanten of van een Lagrangiaanse behandeling

Bewegingsconstanten

De norm van de raakvector blijft behouden langs een geodeet. Er geldt

$$n^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \text{constant}$$

Voor een massief deeltje met snelheid U^μ geldt

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -c^2$$

We vinden dan $n^2 = -c^2$

Metriek invullen levert $c^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$

Er zijn diepe relaties tussen symmetrieën en behouden grootheden. Zo hangt bijvoorbeeld de Schwarzschild metriek niet van de tijd af en dit leidt tot behoud van energie

Invariantie onder rotaties geeft sferische symmetrie en leidt tot behoud van impulsmoment

Een behouden grootheid met de rol van totale energie $\frac{E}{mc^2} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau}$

Behoud van impulsmoment (een vector) leidt tot drie behouden scalaire grootheden.

Typisch gebruikt met de grootte per massa eenheid J/m en twee hoeken voor de richting

Wij kiezen de coördinaten zo dat $\theta = \pi/2$ en dus $d\theta/dt = 0$ voor de richting

De derde conditie is dan $\frac{J}{m} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}$

We vinden
$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]$$

Baanbeweging

We vinden de baan in het $\theta = \pi/2$ vlak door r uit te drukken als functie van ϕ

We hebben een differentiaalvergelijking voor $r(\tau)$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]$$

Gebruik $\frac{dr}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\phi}$ en $J/m = r^2 d\phi/d\tau$  $\frac{dr}{d\tau} = \frac{J}{r^2 m} \frac{dr}{d\phi}$

Invullen $\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - m^2 r^3 \frac{2GM}{J^2} = \left(\frac{r^2 m c}{J}\right)^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]$

Verandering van variabele $u = 1/r$

Baanvergelijking

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{J^2} + \frac{3GMu^2}{c^2}$$

Newtoniaanse analyse levert $\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{J^2}$

De relativistische term kan verwaarloosd worden voor kleine u en we vinden hiermee weer Newtoniaanse banen als de afstand tot de ster groot is

Dicht bij de horizon $2GM/c^2$ spelen relativistische effecten een grote rol

Effectieve potentiaal

We herschrijven $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]$

En benadrukken de rol van energie

$$\underbrace{\frac{c^2}{2} \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]}_{\text{Bewegingsconstante}} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}_{\text{Kinetische term}} + \underbrace{\frac{J^2}{2m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{GM}{r}}_{\text{Effectieve potentiaal } V_{\text{eff}}}$$

Bewegingsconstante

bepaald door baanenergie

Kinetische
term

Effectieve potentiaal V_{eff}

We vinden $\frac{c^2}{2} \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}$

Newtoniaanse analyse: $\frac{E^{\text{Newton}}}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{\text{eff}}^{\text{Newton}}$ met $V_{\text{eff}}^{\text{Newton}} = \frac{J^2}{2m^2 r^2} - \frac{GM}{r}$

Vergelijken levert $V_{\text{eff}} = \frac{J^2}{2m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{GM}{r}$



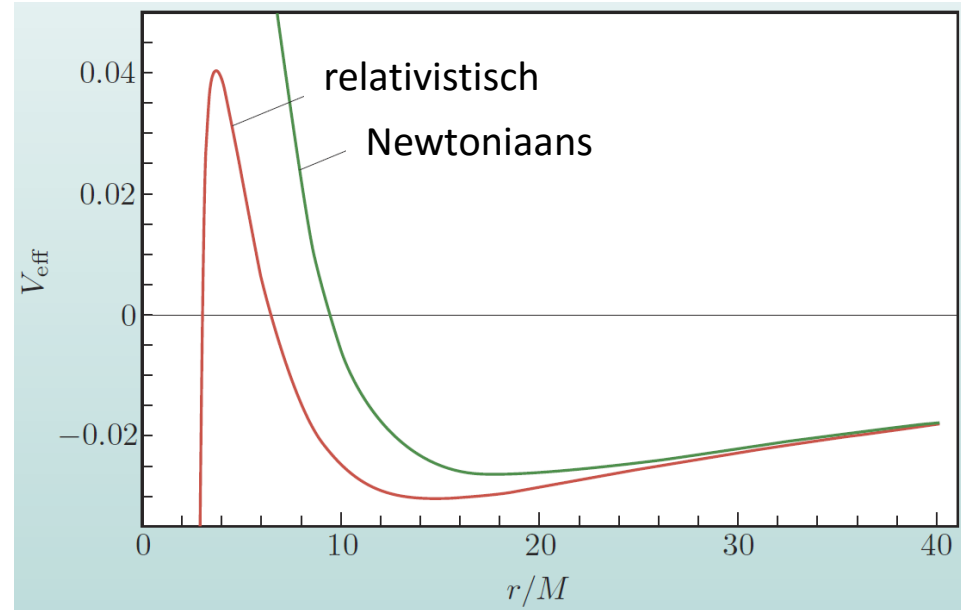
Relativistische term

Effectieve potentiaal

Effectieve potentiaal voor baanbeweging van een deeltje met impulsmoment J

$$V_{\text{eff}} = \frac{J^2}{2m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{GM}{r}$$

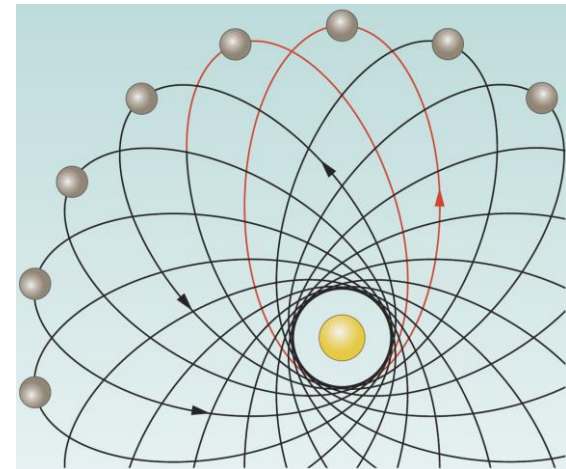
In de klassieke mechanica is impulsmoment J de bron van een oneindig hoge potentiaalbarrière die deeltjes verbiedt $r = 0$ te bereiken



In de Schwarzschild metriek is er ook een ondergrens voor de straal van een stabiele cirkelvormige baan (ISCO – Innermost Stable Circular Orbit), die overeenkomt met

$$J/m = 2\sqrt{3}GM/c$$

Ook vinden we een perihelium verschuiving (de baan is geen ellips). Mercurius: 43''/eeuw
Dat zijn 12 miljoen omwentelingen per rozet



Relativistische sterren

Algemene metriek $ds^2 = -e^{-2\Lambda(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

Beschouw statische sterren; enkel $U^0 = e^{-\Phi}, U_0 = -e^{-\Phi}$

Energie-impuls tensor (perfecte vloeistof) $T_{00} = T_{tt} = (P + \rho)U^0U_0 = \rho e^{-2\Lambda},$

Introduceer $g_{rr} = e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$

$$\begin{aligned} T_{rr} &= P e^{2\Lambda}, \\ T_{\theta\theta} &= P r^2, \\ T_{\phi\phi} &= \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Einsteinvergelijkingen

$$G_{tt} = 8\pi T_{tt} \rightarrow \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \text{Er geldt } M_p = \int \rho(r) \sqrt{-g^{(3)}} d^3x$$

$$G_{rr} = 8\pi T_{rr} \rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m(r))}$$

Energie en impulsbehoud $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \rightarrow (\rho + P) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dP}{dr}$

Druk-dichtheidsrelatie $P = P(\rho, S)$

Tolman-Oppenheimer-Volkof vergelijking

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}$$

Dit geeft $P_c = \rho \frac{1 - \sqrt{1 - 2M/R}}{3\sqrt{1 - 2M/R} - 1}$