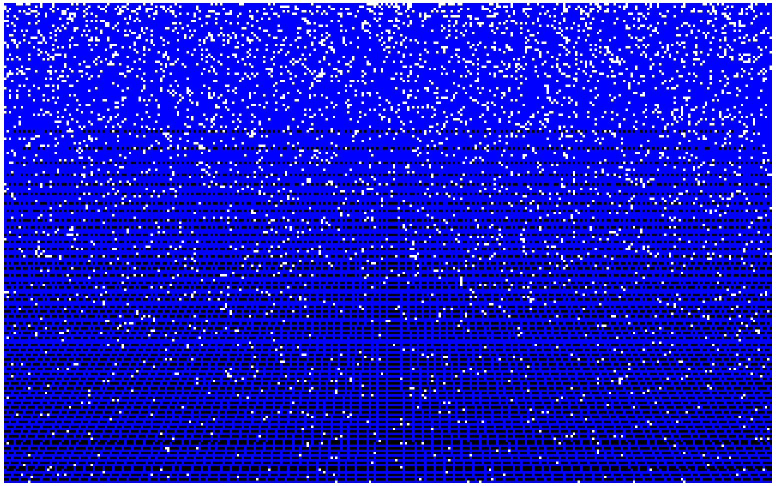
Gravitatie en kosmologie

FEW cursus



Jo van den Brand

Relativistische kosmologie I: 1 december 2015

Inhoud

- **Inleiding**
  - Overzicht
- **Klassieke mechanica**
  - Galileo, Newton
  - Lagrange formalisme
- **Quantumfenomenen**
  - Neutronensterren
- **Wiskunde I**
  - Tensoren
- **Speciale relativiteitstheorie**
  - Minkowski
  - Ruimtetijd diagrammen
  - Lagrangiaan en EM
- **Wiskunde II**
  - Algemene coördinaten
  - Covariante afgeleide
- **Algemene relativiteitstheorie**
  - Einsteinvergelijkingen
  - Newton als limiet
  - Sferische oplossingen
  - Zwarte gaten
- **Kosmologie**
  - Friedmann
- **Gravitatiestraling**
  - Theorie en experiment

Relativistische kosmologie

Theorie van de oerknal:

ontstaan van ruimtetijd,

het heelal dijt uit

Waarneembaar deel van het heelal valt binnen de lichtkegel van de waarnemer

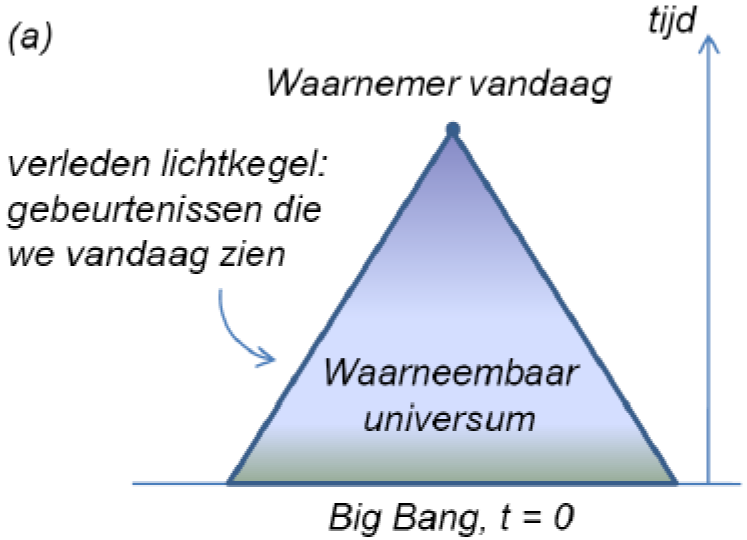
Er zijn grenzen aan het waarneembaar gebied: de deeltjeshorizon

In de toekomst ziet hij meer van het heelal

Twee stelsels in tegenovergestelde richting en op grote afstand van de waarnemer

Stelsels hebben geen tijd gehad om te communiceren

Dit is het Big Bang scenario zonder inflatie



Isotropie van heelal

ART is voldoende voor beschrijving van Big Bang:

- sterke en zwakke WW enkel op femtometers
- sterrenstelsels en andere materie elektrisch neutraal

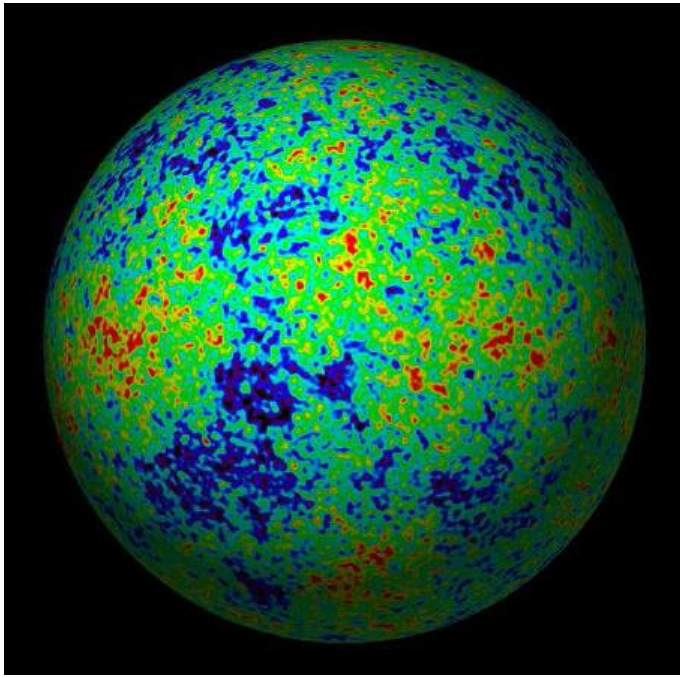
Nachthemel ziet er in elke richting hetzelfde uit op een schaal groter dan 100 Mpc

Kosmische microgolf achtergrondstraling (CMBR)

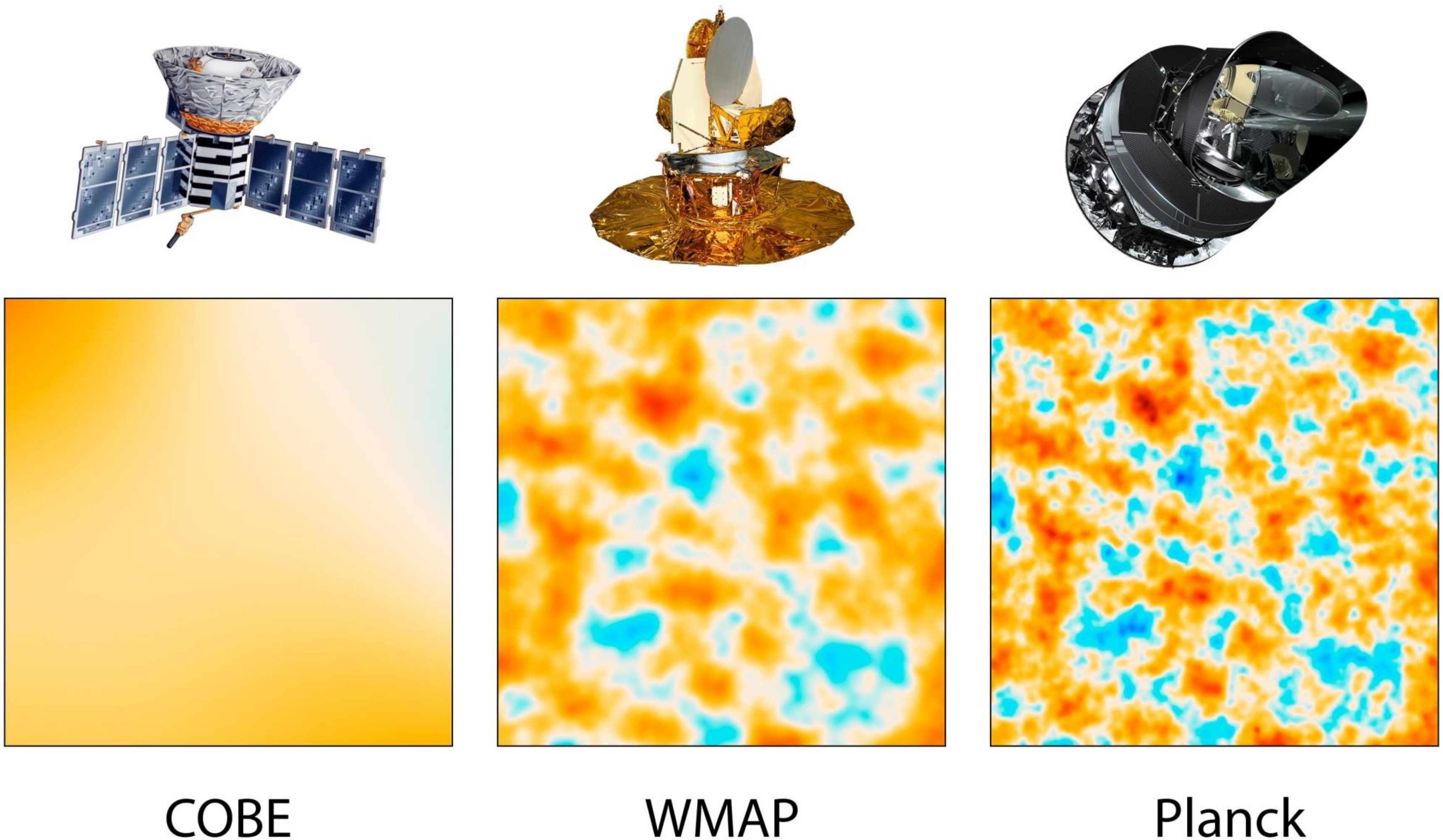
- $T \approx 2.725$ K zwarte straler binnen 50 ppm
- isotroop binnen 10 ppm

Voorspeld door Gamow

Ontdekt door Penzias en Wilson (1965)



Kosmische microgolf-achtergrondstraling



Isotropie van heelal: CMBR en Planck

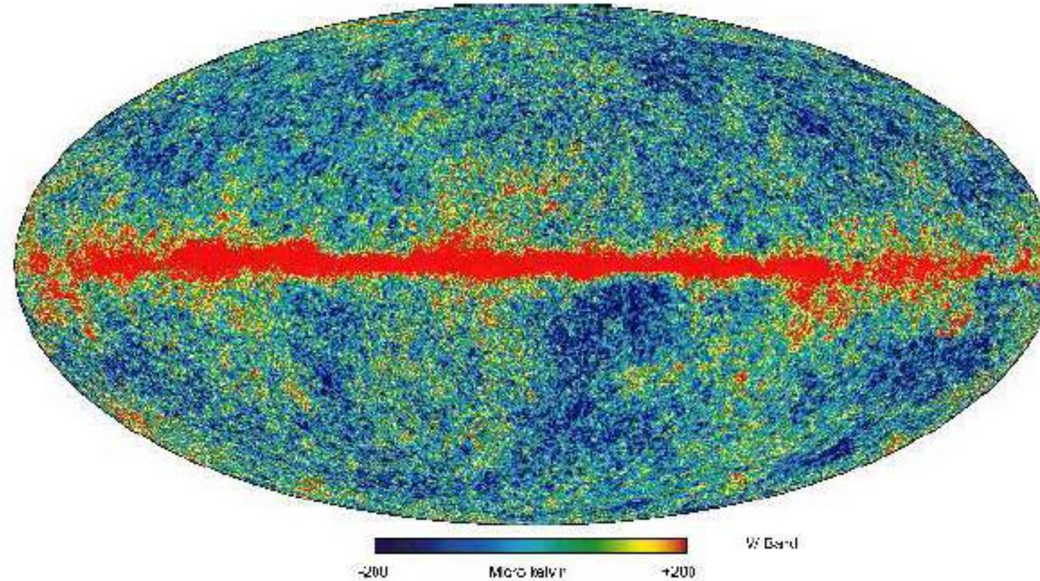
Temperatuurverdeling in
galactische coordinaten

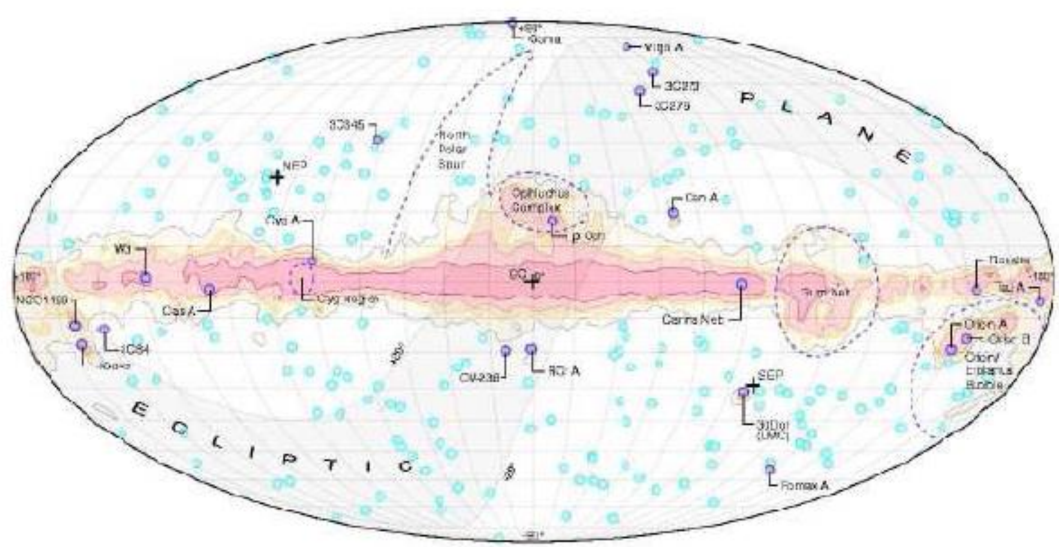
Straling van 380.000 jaar >BB
daarvoor H-atoom instabiel

T-variaties: Sachse-Wolf effect:
gravitationele roodverschuiving

Conclusies: Planck

- leeftijd 13.789 ± 0.037 Gjaar
- diameter > 78 Gly
- gewone materie: 4.82 ± 0.05%
- donkere materie: 25.8 ± 0.4%
- donkere energie: 69.2 ± 1.0%
- consistent met inflatiemodel
- H_0 = 67.80 ± 0.77 km/s/Mpc
- eeuwige expansie





Isotropie van heelal: materieverdeling

Galaxy Redshift Survey: SDDS

> 1 miljoen objecten (sterrenstelsels)

In binnengebied: gaten, knopen en draden

Op grote schaal isotroop

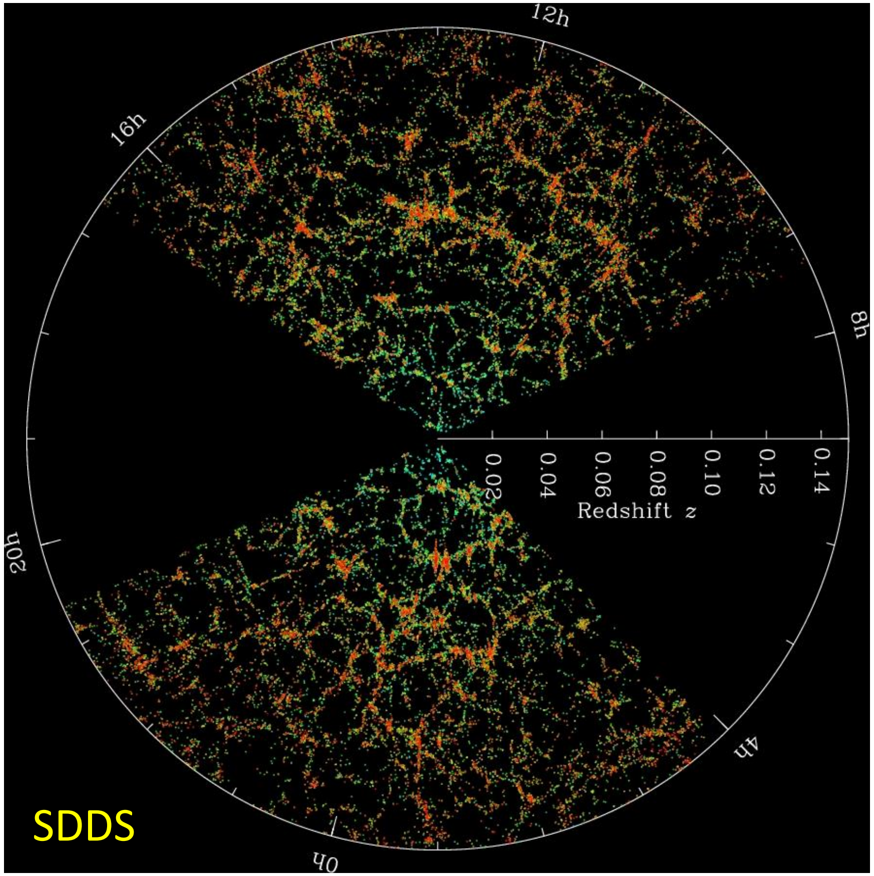
Aanname: aarde neemt geen speciale plaats in

⇒

Heelal ziet er hetzelfde uit vanuit elke positie

⇒

Homogeniteit



Kosmologisch principe: combinatie van isotropie en homogeniteit

Energie en materie gelijkmatig verdeeld op schaal groter dan 100 Mpc

Materieverdeling: SDDS

Zie http://www.sdss.org/

Kosmologisch principe en metriek

Metriek die consistent is met KP kent geen voorkeursrichting of voorkeurspositie (dan heeft de energieverdeling dat ook niet)

Voorbeeld: Schwarzschildmetriek is isotroop, maar niet homogeen
Voorbeeld: Minkowskimetriek is isotroop en homogeen
echter oplossing van Einsteinvergelijkingen voor een leeg heelal

Voeg tijdafhankelijkheid toe aan Minkowskimetriek (dat is consistent met KP)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}$$

Schaalfactor *a(t)*

Vlakke Robertson – Walker metriek
Voor het lijn-element geldt
voor waarnemer die afstanden
wil meten (*dt = 0*)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2dt^2 + a^2(t)dx^2 + a^2(t)dy^2 + a^2(t)dz^2 \\ &= a^2(t)dx^i dx_i \\ &= a^2(t)d\vec{x}^2, \end{aligned}$$

Eindige afstand
$$\begin{aligned} S &= \int a(t)d\vec{x} \\ &= a(t)\int d\vec{x}. \end{aligned}$$

Coördinatenafstand $d\vec{x}$

Snelheid waarmee heelal uitdijt $\dot{a}(t)$

Kosmologische roodverschuiving

Lichtstraal volgt een lichtachtig pad
(neem aan langs x-richting)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 \\ &\equiv 0. \end{aligned}$$

Lichtstraal uitgezonden op t_e (emissie) en ontvangen op t_o
Afgelegde coördinaatafstand *R* tussen emissie en ontvangst

$$R = \int_0^R dx = \int_{t_e}^{t_o} \frac{c\,dt}{a(t)}$$

Beschouw zender op grote coördinaatafstand *R* van ontvanger
Zender stuurt 2 pulsen met tijdverschil δt_e

Ontvanger meet δt_o tijdverschil (groter want heelal dijt uit)

Coördinaatafstand verandert niet (meebewegend stelsel – comoving frame)

$$\Rightarrow \quad c\int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \quad \text{met} \quad \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o+\delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o+\delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = 0$$

Neem aan δt_e en δt_o zo klein dat $a(t)$ constant $\Rightarrow$

$$\frac{\delta t_o}{\delta t_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$$

Er geldt dus kosmologische roodverschuiving

$$1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \qquad (\ \Delta\lambda/\lambda \equiv z\ )$$

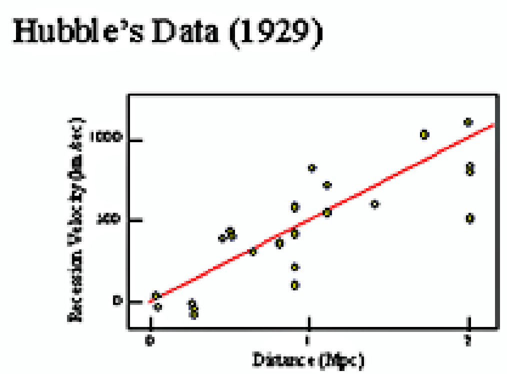
Wet van Hubble

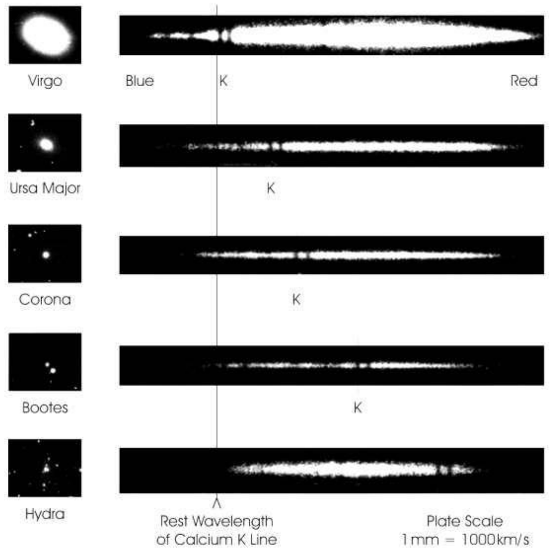
Roodverschuiving in spectra

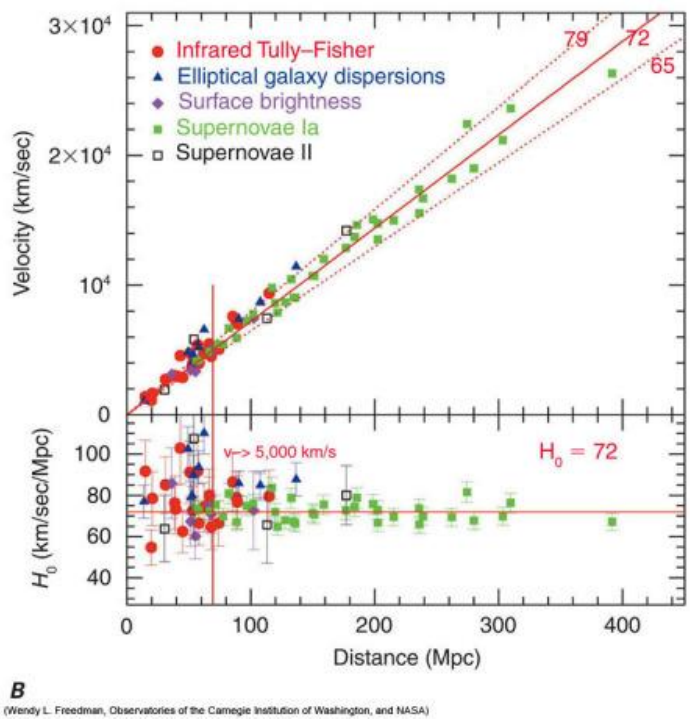
Hubble's orginele data

Standaardkaarsen

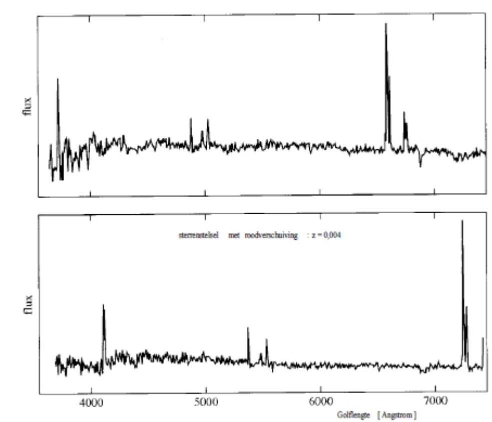
- Cepheid variabelen
- Supernovae Ia







Expansie van het heelal



Wet van Hubble

Kosmologische roodverschuiving $$1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}$$

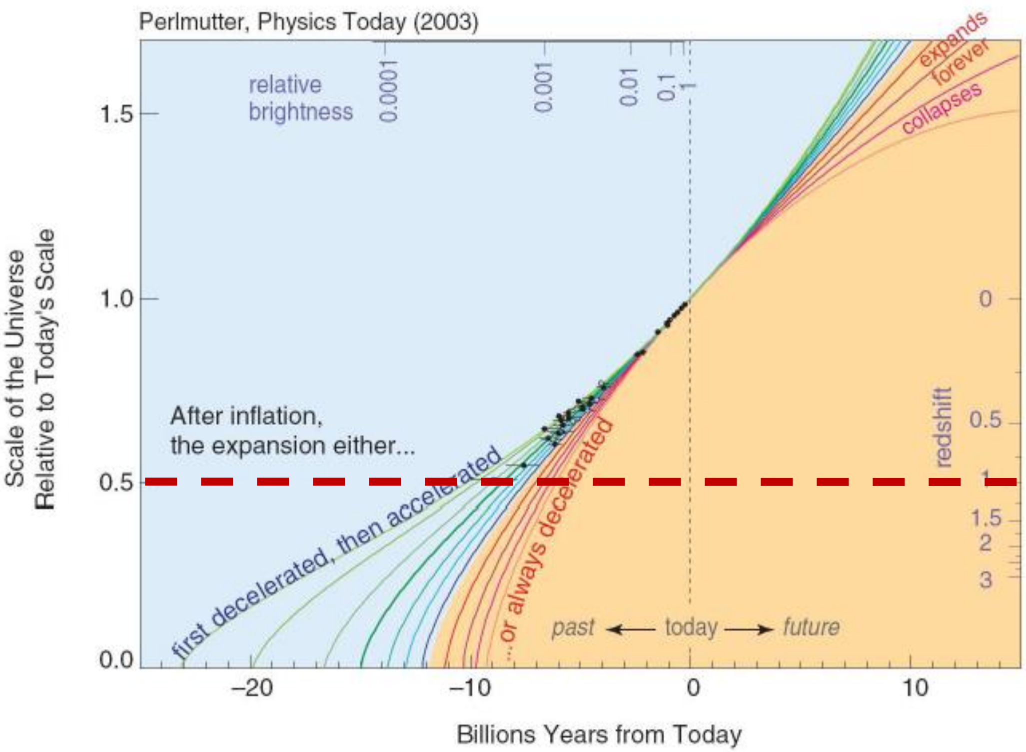
Voor sterren die niet te ver weg staan ($a \approx$ constant) geldt $$a(t_e) \approx a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o)$$

$$\Rightarrow \quad 1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \approx a(t_o)\Big(a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o)\Big)^{-1}$$ (gebruik $(1+x)^m \approx 1 + mx$

$$\approx 1 + \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}(t_o - t_e), \quad \Rightarrow \quad z \approx \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)} cd$$

Hubble constante

$$H(t_o) = 70,1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$$
$$H(t_o) = 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$



Kosmologische roodverschuiving:

heden → *z = 0*

10 Gyr geleden → *z = 1*

z = 1 → heelal half zo groot

Hubble constante is niet constant!

Friedmannvergelijkingen

Wat is de exacte vorm van de functie voor de schaalfactor *a(t)*?

Metriek volgt uit Einsteinvergelijkingen voor correcte energie-impulstensor $T_{\mu\nu}$

Complicatie: tijdafhankelijkheid metriek heeft invloed op $T_{\mu\nu}$ (*e.g.* ballonmodel en *P*)

Kosmologisch principe:

- geen plaatsafhankelijkheid
- perfecte vloeistof

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu} \qquad \rho \text{ nu als energiedichtheid}$$

Gebruik CMRF $\Rightarrow$ $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$

Bereken Riccitensor en Riemannscalar voor Robertson-Walker metriek

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \qquad R = -6\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 6\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}.$$

$$R_{ij} = -\Big(2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)\Big)\delta_{ij},$$

Invullen van R_{mn}, R en $T_{\mu\nu}$ in Einsteinvergelijkingen $\Rightarrow$ Relaties (twee) tussen schaalfactor, druk en energiedichtheid

Voor $\mu = 0, \nu = 0$ $\quad \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t),$

$\mu = i, \nu = i$ $\quad \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}P(t)$

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 &= +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}\Big(3P(t) + \rho(t)\Big). \end{aligned}}$$

Oerknal en friedmannvergelijkingen

Dichtheid en druk zijn positieve grootheden (voor ons bekende materie en velden)

Dan $\ddot{a}(t)$ negatief volgens $$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\Big(3P(t)+\rho(t)\Big)$$

Uitdijingssnelheid neemt af in de tijd

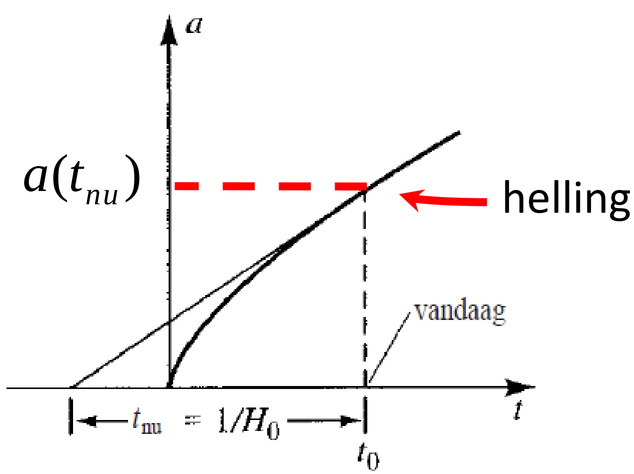
Volgens experiment, $\dot{a}(t_{\mathrm{nu}}) > 0$ dijt heelal nu uit

$\Rightarrow$ Schaalfactor $a(t)$ heeft ooit de waarde nul aangenomen

Friedmannvergelijkingen voorspellen

- alle materie en energie ooit opgesloten in volume *V = 0*
- ruimtetijd is begonnen als *singulariteit* met oneindige energiedichtheid
- generieke conclusie voor alle oplossingen van friedmannvergelijkingen

Leeftijd van het heelal



$$\dot{a}(t_{nu}) = \frac{a(t_{nu})}{t_{nu}} \Rightarrow t_{nu} = \frac{a(t_{nu})}{\dot{a}(t_{nu})} \approx \frac{1}{H}$$

Leeftijd van het heelal < 15 Gjaar

Energiedichtheid in heelal

Heelal bestaat uit

koude materie: atomen, molekulen, aarde, sterren, donkere materie, *etc.*

straling: fotonen van sterren, fotonen van CMB, neutrino's, *etc.*

kosmologische constante: donkere energie, vacuum energie, quintessence veld, *etc.*

Voor elk van deze soorten energie en materie geldt dat er een verband tussen energiedichtheid en druk bestaat

Toestandsvergelijking $P(t) = n\rho(t)$ volgt uit friedmannvergelijkingen

Energiedichtheid: energie gedeeld door fysisch volume

Fysisch volume bepaald door $a^3(t)$

Koude materie $\rho(t) = \dfrac{A}{a^3(t)}$ Hoeveelheid materie constant (= *A*) en wordt niet omgezet naar andere soorten energie

Straling $\rho(t) = \dfrac{A}{a^4(t)}$ Extra afname t.g.v. kosmologische roodverschuiving
$E = h\nu = \hbar\omega = (2\pi\hbar c)/\lambda$ evenredig met schaalfactor

Kosmologische constante $\rho(t) = \rho_c = \mathrm{const.}$ Neemt niet af tijdens uitdijen of krimpen van heelal

Heelal gedomineerd door koude materie

Koude materie $\rho(t) = \dfrac{A}{a^3(t)}$

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\dot a(t)}{a(t)}\right)^2 &= +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \\ \frac{\ddot a(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}\Big(3P(t)+\rho(t)\Big). \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \dot a^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2}\frac{A}{a(t)}, \\ \ddot a(t) &= -\frac{4\pi G}{3c^2}(1+3n)\frac{A}{a^2(t)}. \end{aligned}$$

Bepaal constante *n* ⇨ differentieer 1e FV $2\ddot a(t) = -\dfrac{8\pi G}{3c^2}\dfrac{A}{a^2(t)}$

invullen in 2e FV $-\dfrac{4\pi G}{3c^2}A = -\dfrac{4\pi G}{3c^2}(1+3n)A$

⇨ *n = 0, P = 0*

Er geldt

$$\begin{aligned} a(t)\dot a^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2}A, \\ a^2(t)\ddot a(t) &= -\frac{4\pi G}{3c^2}A. \end{aligned}$$

⇨ $\boxed{a(t) = Bt^{2/3}}$

Hieruit volgt ook direct $\dot a(t) > 0$ en $\ddot a < 0$

Heelal gedomineerd door straling

Straling $\rho(t) = \dfrac{A}{a^4(t)}$

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t),$$
$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\Big(3P(t) + \rho(t)\Big).$$

$\Rightarrow$ *n = 1/3* en dus $P(t) = \dfrac{A}{3}\dfrac{1}{a^4(t)}$

Er geldt

$$a^2(t)\dot{a}^2(t) = +\frac{8\pi G}{3c^2}A,$$
$$a^3(t)\ddot{a}(t) = -\frac{8\pi G}{3c^2}A.$$

$\Rightarrow$ $\boxed{a(t) = B\sqrt{t}}$

Hieruit volgt ook direct $\dot{a}(t) > 0$ en $\ddot{a} < 0$

Uitdijing van een stralingsgedomineerd heelal gaat sneller

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{2}Bt^{-\frac{1}{2}}$$

Heelal gedomineerd door Λ

Kosmologische constante $\rho(t) = \rho_c = \text{const.}$

Voor normale straling en materie neemt dichtheid af als energie over groter volume wordt uitgesmeerd

Eigenschap van ruimtetijd zelf (driekwart van alle energie is van deze vorm!)

Friedmannvergelijkingen leveren *n = -1*
Druk is negatief!!!

$$P(t) = -\rho(t) = -\rho_c = \text{const.}$$

Er geldt

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c,$$
$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c.$$

$$\Rightarrow \quad a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c}\,t}$$

Uitdijing is exponentieel en verloopt steeds sneller

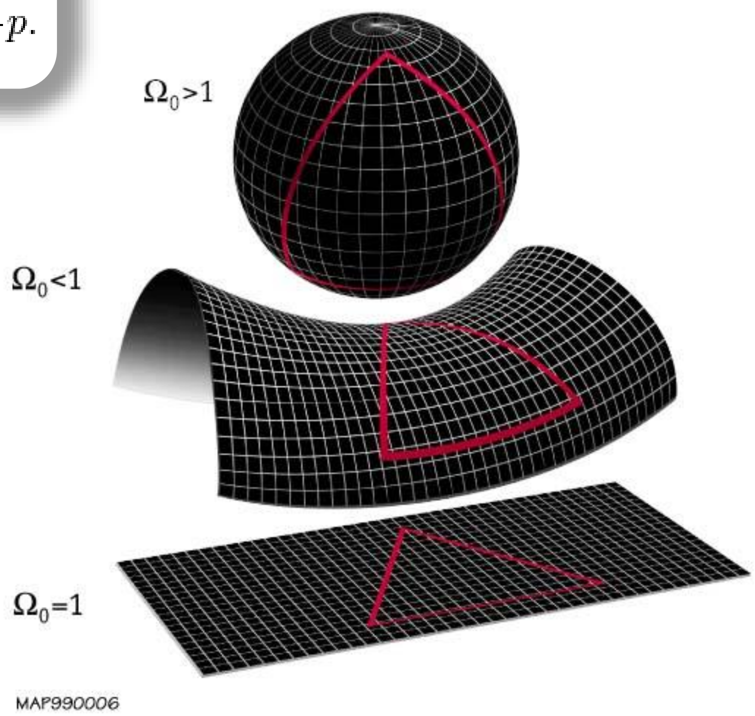
Friedmannvergelijkingen

Friedmann – Lemaitre – Robertson – Walker metriek. Er geldt

$$-c^2 \mathrm{d}\tau^2 = -c^2 \mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}^2 \quad \mathrm{d}\mathbf{\Sigma}^2 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2 \mathrm{d}\mathbf{\Omega}^2, \quad \text{where } \mathrm{d}\mathbf{\Omega}^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2.$$

Einsteinvergelijkingen $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ geven friedmannvergelijkingen

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} &= \frac{8\pi G}{3}\rho \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 &= -\frac{8\pi G}{c^2}p. \end{aligned}}$$



Zonder kosmologische constante wordt
FV - 1

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

Kritische dichtheid: voor gegeven *H*
de dichtheid waarvoor *k = 0*

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

10^{-26} kg m^{-3}

Dichtheid / kritische dichtheid: Ω

Kritische dichtheid

Beschouw een testdeeltje *m* en bereken de ontsnappingssnelheid

Behoud van energie volgens Newton $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{d} = 0$

Beschouw een bolvormig volume van het heelal dat expandeert met $v = H_0 d$

Massa binnen dit volume $M = \frac{4}{3}\pi\rho_c d^3$

Het deeltje zal net ontsnapping als ρ de kritische dichtheid is

Daarvoor geldt $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

Hetzelfde resultaat vonden we met de algemene relativiteitstheorie

Invullen van H_0 en G levert $\rho_0 = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$

Met definitie $h = H_0/(100 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc})$

Friedmannvergelijkingen

Friedmannvergelijking 1 kan herschreven worden

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

$$\frac{3a^2}{8\pi G}H^2 = \rho a^2 - \frac{3kc^2}{8\pi G}$$

$$\rho_c a^2 - \rho a^2 = -\frac{3kc^2}{8\pi G}$$

$$\boxed{(\Omega^{-1} - 1)\rho a^2 = \frac{-3kc^2}{8\pi G}.}$$

Rechts staan enkel constanten. Tijdens expansie neemt dichtheid af ($\sim a^3$)

Sinds Planck era is de ρa^2 met factor 10^{60} afgenomen

($\Omega^{-1} - 1$) moet met factor 10^{60} zijn toegenomen

Planck en Sloan Digital Sky Survey stellen Ω_0 op 1 binnen 1%

Dan is | Ω^{-1} - 1 | < 0.01 en tijdens Planck era kleiner dan 10^{-62}

Vlakheidsprobleem: waarom was de initiële dichtheid van het Heelal zo dicht bij de kritische dichtheid?

Oplossingen: Anthropisch principe of inflatie (ρa^2 neemt snel <u>toe</u> in korte tijd)

Evolutie van het heelal

Friedmannvergelijking $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad \rightarrow \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$

Herschrijven als $H^2 = H_0^2 \left(\Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_\Lambda\right)$

$$\Rightarrow \quad H^2 = H_0^2 \left[\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda\right]$$

Er geldt

$$H = \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{a(t)}{a_0}\right) = \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{1}{1+z}\right) = -\frac{1}{1+z}\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dz} = \frac{-(1+z)^{-1}}{H_0 \left[\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Leeftijd van het heelal

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \int_0^{z_1} \frac{dz}{(1+z)\left[\Omega_R (1+z)^4 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\Lambda\right]^{\frac{1}{2}}}$$

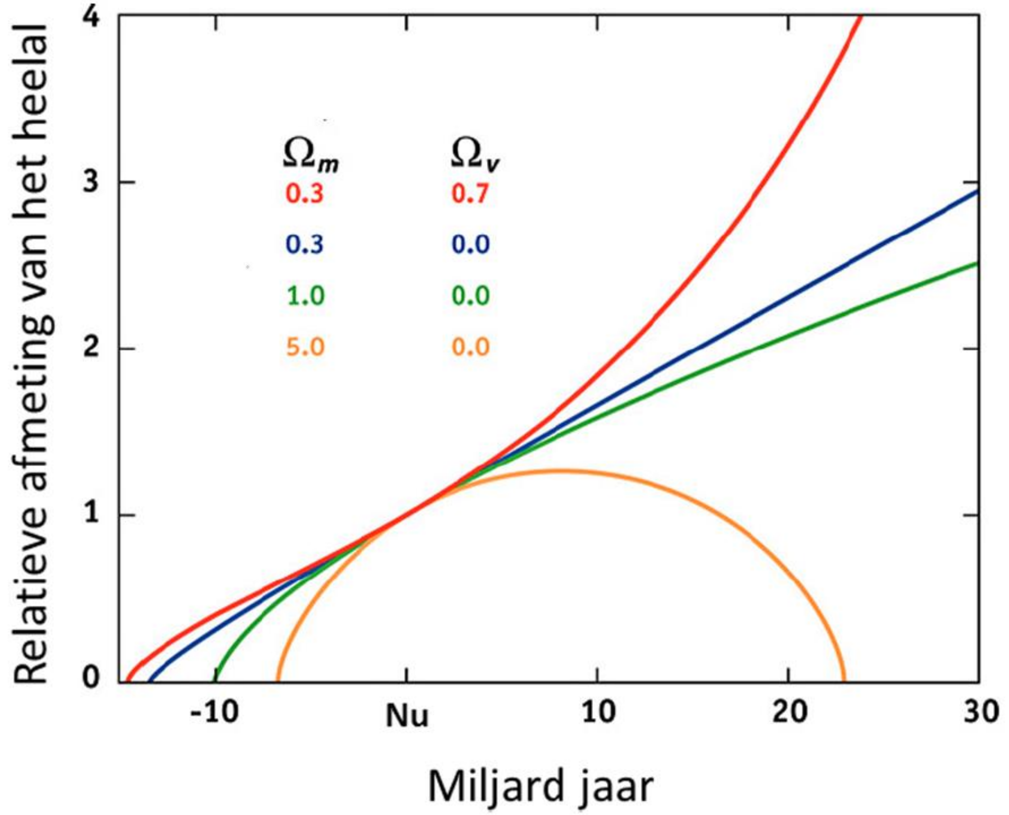
Evolutie van het heelal

We vinden: $t = t(z)$

We weten: $1 + z = 1/a$

$a = a(t)$

De figuur toont enkele voorbeelden



Afstanden in FLRW metriek

Meebewegende afstand χ

Er geldt:

$$\chi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz}{H(z)}$$

Neem aan dat we de *absolute* helderheid L van een bron kennen (standaardkaars)

In euclidische ruimte geldt voor de *waargenomen* flux $F = \frac{L}{4\pi\chi^2}$

In FLRW ruimte gelden de volgende modificaties:

- Als op tijdstip t_0 het licht de aarde bereikt, is het eigenoppervlak een bol met de supernova als centrum en heeft het de waarde $4\pi d_m^2$. Een telescoop met apertuur A neemt dus een fractie licht waar ter grootte $A/4\pi d_m^2$.
- Vanwege de roodverschuiving is het aantal fotonen dat per seconde aankomt, een factor $1/(1+z)$ kleiner dan het aantal fotonen dat per seconde werd uitgezonden.
- De energie E_0 van elk ontvangen foton is vanwege dezelfde roodverschuiving een factor $1/(1+z)$ lager dan de energie E_1 die het had toen het werd uitgezonden.

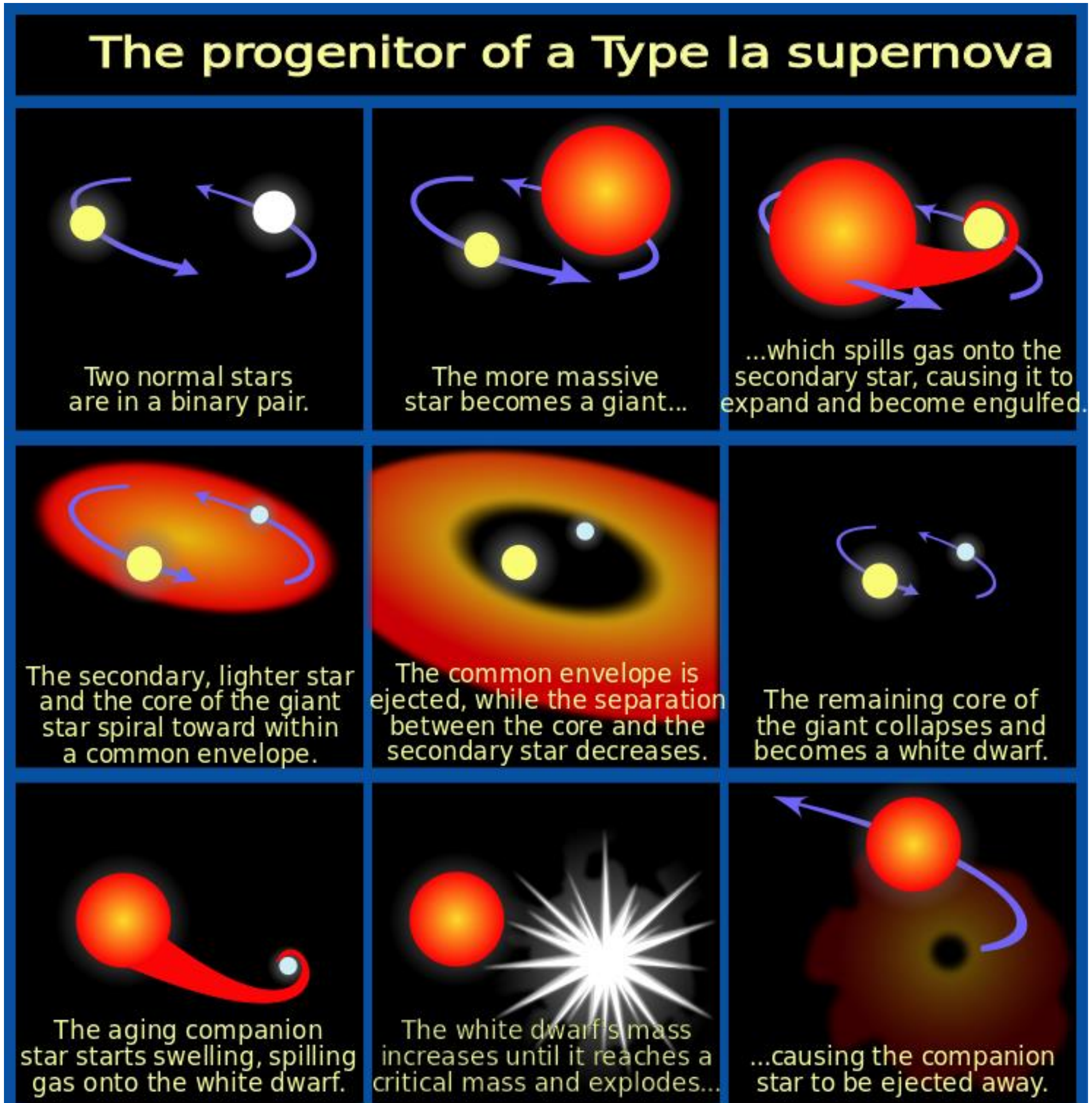
We vinden

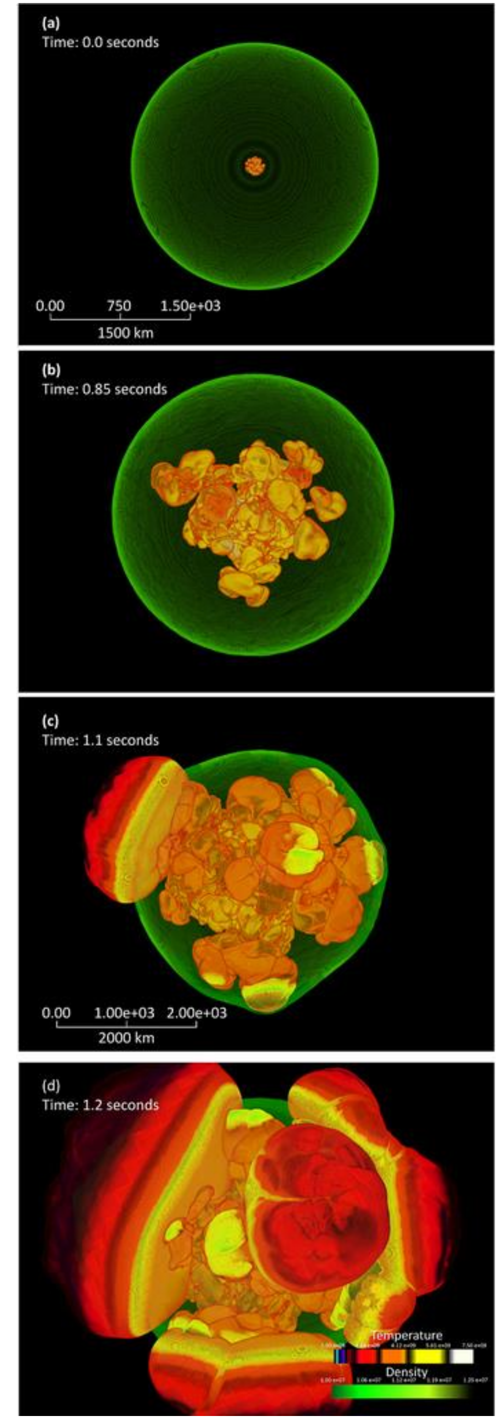
$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2 (1+z)^2} \equiv \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad \rightarrow \quad d_L = d_m(1+z)$$

helderheidsafstand d_L

Supernovae Type IA

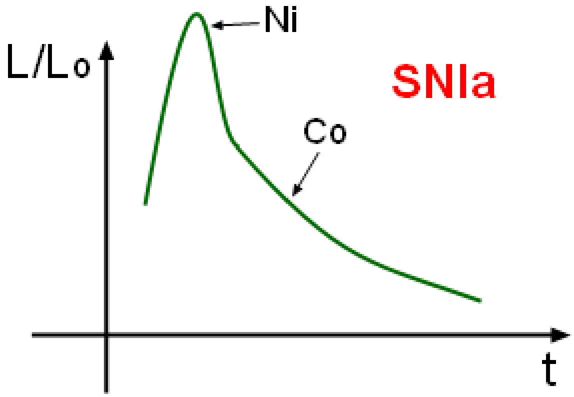
Supernovae Type IA zijn standaardkaarsen

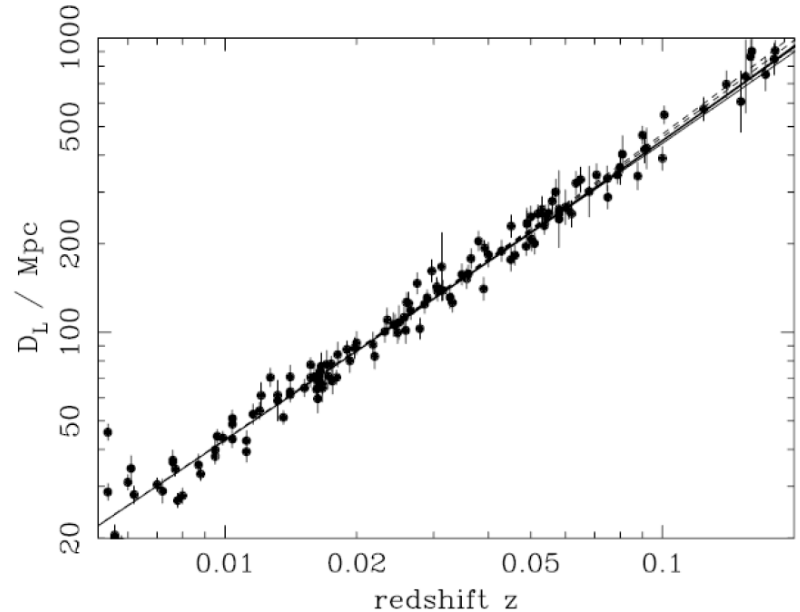


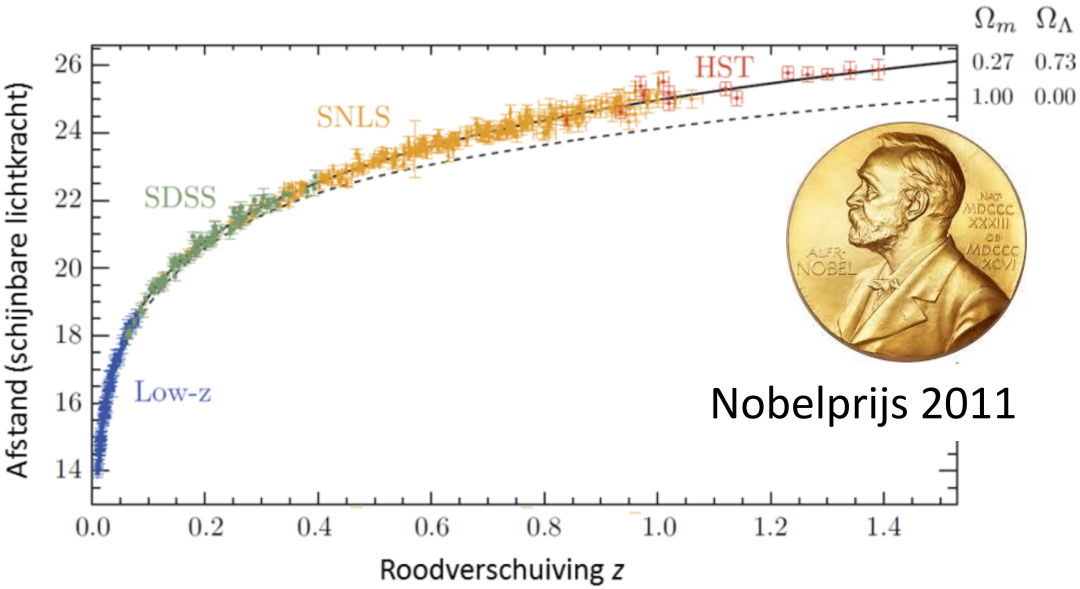


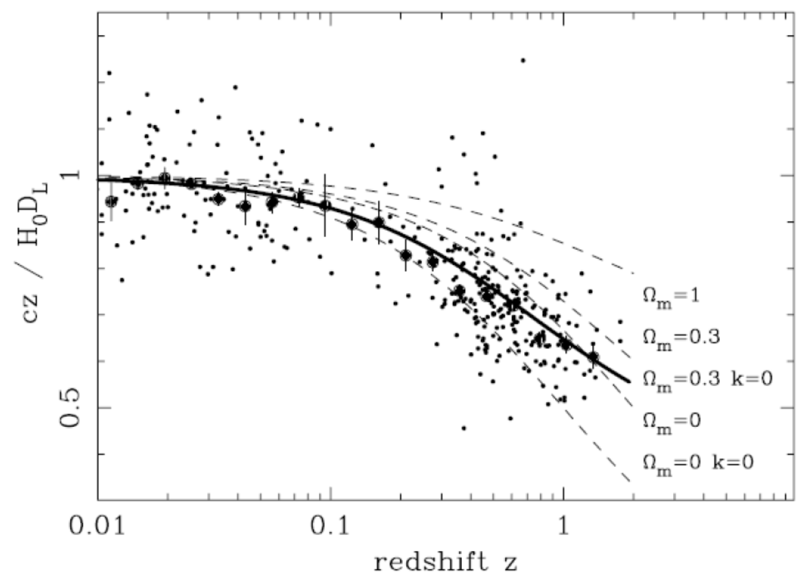
Supernovae Type IA

Supernovae Type IA zijn standaardkaarsen







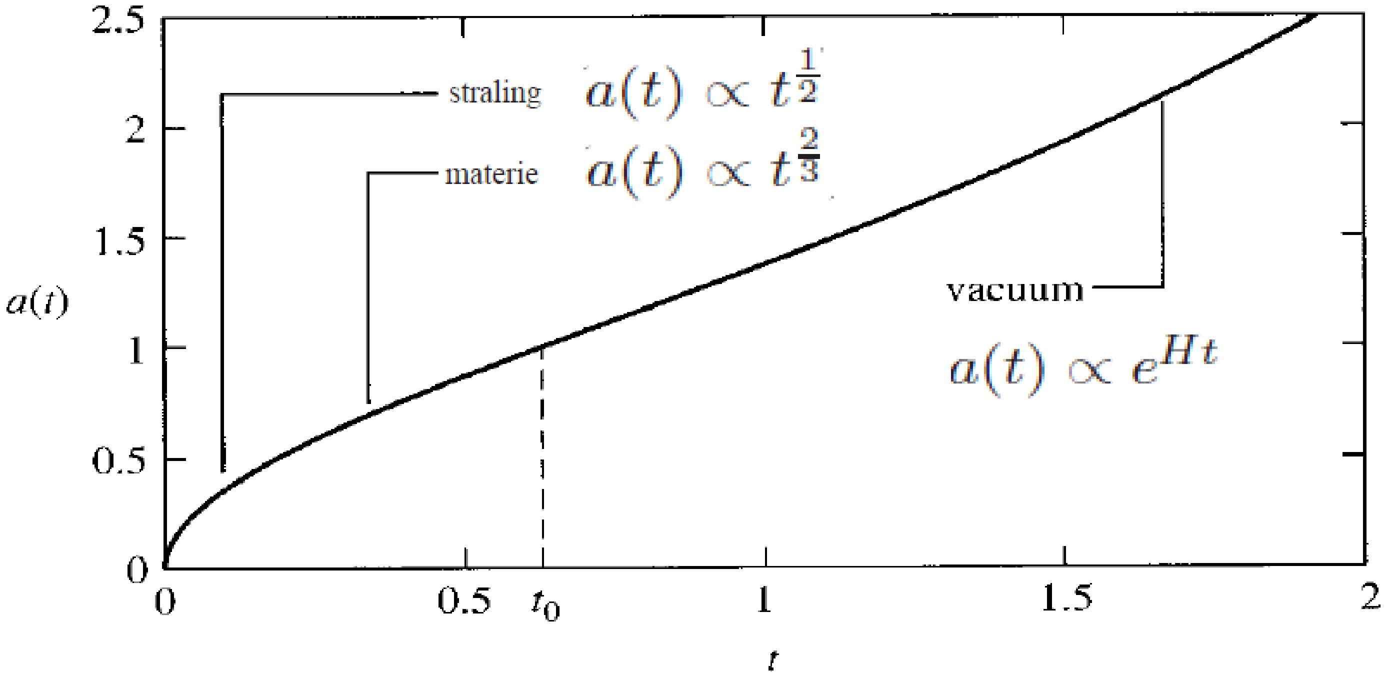


Standaardmodel van de kosmologie

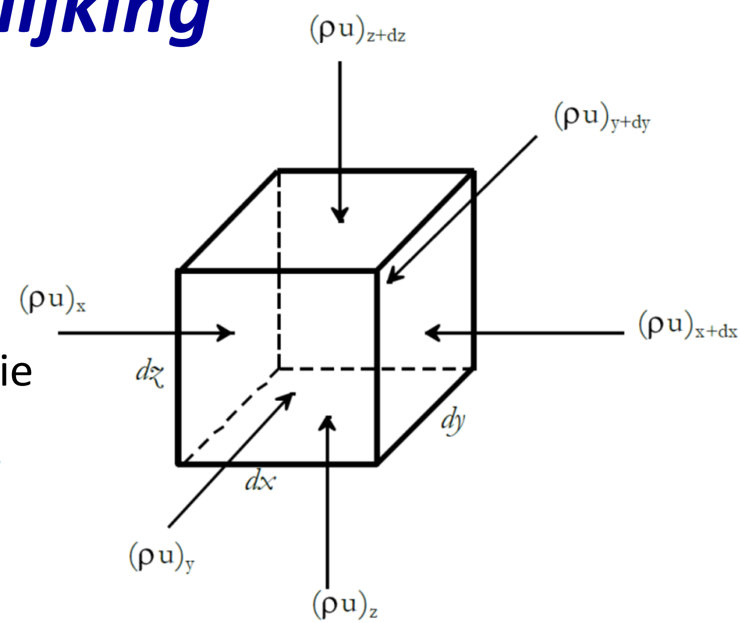
Evolutie heelal voor vlakke FRW model.

Aanname: energie gelijk verdeeld over
straling, materie en vacuum

Conclusies ΛCDM model



Continuiteitsvergelijking



Beschouw klein “vloeistofelement”

Massastroom door linkervlak $\partial_t m_x = \rho u_x dydz$

Massastroom door rechtervlak (gebruik Taylor-expansie

$$\partial_t m_{x+dx} = \partial_t m_x + \left.\frac{\partial(\partial_t m_x)}{\partial x}\right|_x dx + \ldots = \rho u_x dydz + \frac{\partial\left(\rho u_x\right)}{\partial x} dxdydz$$

Combineer alle vlakken

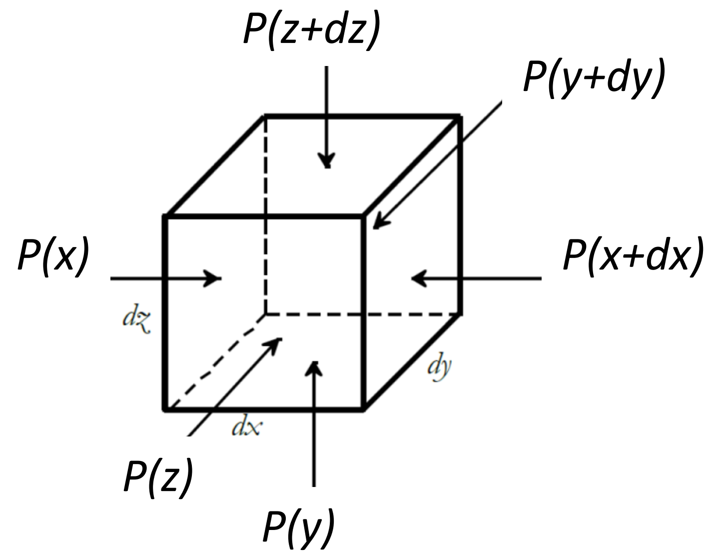
$$\partial_t m_{\mathrm{totaal}} = \left(-\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho u_z}{\partial z}\right) dxdydx = \partial_t m \; dxdydx$$

Gebruik de divergentie-operator

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \dot{\mathbf{r}}) = 0}$$

Dit is de *continuiteitsvergelijking*: als de dichtheid in het element verandert, dan stroomt er vloeistof door de wanden van het element

Vergelijking van Euler



Beschouw kracht op een “vloeistofelement”

Kracht op linkervlak $f(x) = P(x)dydz$

Druk op rechtervlak (gebruik Taylor-expansie)

$$P(x+dx) = P(x) + \frac{\partial P}{\partial x}dx + \ldots$$

Schrijf druk als $P = P_0 + p$

We vinden $$df_x = -\frac{\partial}{\partial x}(P_0 + p)\, dxdydx = -\frac{\partial p}{\partial x}dV \quad \to \quad d\mathbf{f} = -\nabla p dV,$$

Tweede wet van Newton $$d\mathbf{f} = dm\ \mathbf{a} = dm\frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \text{en} \quad dm = \rho dV \quad \to \quad \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p = 0$$

Kettingregel $$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}u_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}u_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}u_z + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$

Wet van Euler

$$\boxed{\rho\left[\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}\right] = -\nabla P}$$

Dit geeft de versnelling van een vloeistofelement door krachten ten gevolge van drukverschillen

Een klassiek heelal

Neem aan dat we te maken hebben met een klassiek heelal dat bestaat uit “stof”

Stof heeft uniforme dichtheid $\rho(t)$

Het heelal ondergaat uniforme expansie $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{c}$ (met **c** de beginpositie)

Dan geldt $\dot{\mathbf{r}} = H(t)\mathbf{r}$ met Hubble parameter $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$

De continuiteitsvergelijking $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \dot{\mathbf{r}}) = 0$

Hieruit volgt $\dot{\rho} + 3\rho H = 0 \;\Longrightarrow\; a\dot{\rho} + 3\dot{a}\rho = 0$

Integreren levert $\rho a^3 = \text{constant}$

In relatie tussen huidige waarde, vinden we $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$

De vergelijking van Euler $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\right) \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ (met **F** de kracht per massa-eenheid)

Met $\dot{\mathbf{r}} = H(t)\mathbf{r} \;\Longrightarrow\; \left(\dot{H} + H^2\right)\mathbf{r} = \mathbf{F}$

Er geldt $\nabla \cdot \mathbf{F} = -4\pi G\rho$

$$\left.\begin{array}{l} 3\left(\dot{H} + H^2\right) = -4\pi G\rho \\ H = \dot{a}/a \end{array}\right\} \quad \boxed{3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho}$$

Net als friedmannvergelijkingen

Een klassiek heelal

Voor klassiek heelal dat bestaat uit "stof"

$$\boxed{3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho}$$

Gebruik $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$

We vinden $2\ddot{a} + \frac{A^2}{a^2} = 0, \quad \text{met} \quad A^2 = \frac{8\pi G\rho_0 a_0^3}{3}$

Vermenigvuldig met $\dot{a}$ en integreer $\Rightarrow$ $\dot{a}^2 + k = \frac{A^2}{a}$

integratieconstante

Beschouw dit als een vergelijking voor de energie van het heelal

$$\dot{a}^2 - \frac{A^2}{a} = -k$$

Kinetische energie

Totale energie: *k = -1, 0, of 1* (friedmann)

Potentiele energie