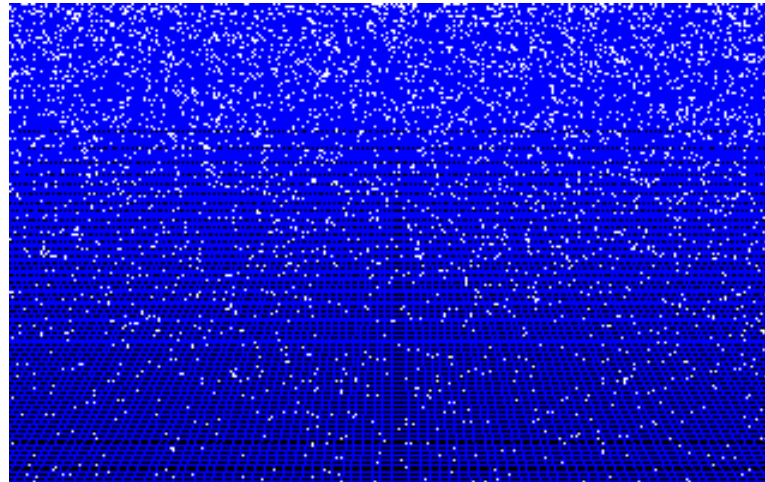


# Gravitatie en kosmologie

*FEW cursus*



Jo van den Brand

Relativistische kosmologie II: 8 december 2015

Copyright (C) Vrije Universiteit 2009

# Inhoud

- **Inleiding**
  - Overzicht
- **Klassieke mechanica**
  - Galileo, Newton
  - Lagrange formalisme
- **Quantumfenomenen**
  - Neutronensterren
- **Wiskunde I**
  - Tensoren
- **Speciale relativiteitstheorie**
  - Minkowski
  - Ruimtetijd diagrammen
  - Lagrangiaan en EM
- **Wiskunde II**
  - Algemene coördinaten
  - Covariante afgeleide
- **Algemene relativiteitstheorie**
  - Einsteinvergelijkingen
  - Newton als limiet
  - Sferische oplossingen
  - Zwarte gaten
- **Kosmologie**
  - Friedmann
- **Gravitatiestraling**
  - Theorie en experiment

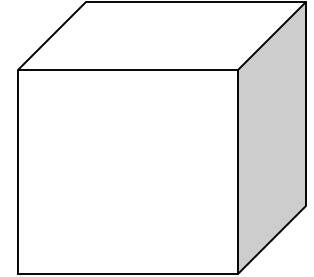
# ***Thermodynamica in het vroege heelal***

# Druk

Beschouw gas met deeltjesdichtheid  $n = N/V$  in denkbeeldige doos

Druk: hoeveelheid impuls die per second een oppervlakte-element  $dA$  met normaalvector  $\mathbf{n}$  passeert

Beschouw wand met  $\mathbf{n}$  in positieve  $x$ -richting met oppervlak  $A$



$$\text{Druk } P = F/A = (dp/dt)/A$$

Stel: alle deeltjes bewegen in  $x$ -richting met impuls  $p = |\mathbf{p}|$

In tijd  $dt$  botsen deeltjes in volume  $Av(p)dt$  met de wand

Dat zijn  $dN = nAv(p)dt$  deeltjes

Impulsoverdracht per botsing  $2p$

Totale impulsoverdracht  $dp = (2p)dN = (2p) \times nAv(p)dt$

Druk is dan  $P = \frac{F}{A} = 2npv(p)$

Voor isotrope verdeling beweegt gemiddeld 1/6-deel in de positieve  $x$ -richting

In het algemeen hebben deeltjes een impulsverdeling  $n(p)$



$$P = \int_0^{\infty} \frac{1}{3} p v(p) n(p) dp$$

# Druk en dichtheid

Druk van een gas

$$P = \int_0^{\infty} \frac{1}{3} p v(p) n(p) dp$$

Niet-relativistische deeltjes:  $v = p/m$

Dit levert 
$$P = \int_0^{\infty} \frac{1}{3} p \left(\frac{p}{m}\right) n(p) dp = \int_0^{\infty} \frac{1}{3} (2E_{\text{kin}}) n(p) dp = \frac{2}{3} \rho_{\text{kin}}$$

Druk is evenredig met de *kinetische* energiedichtheid  $\rho_{\text{kin}} = 3P/2$

Voor ultra-relativistische deeltjes:  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc$

Dit levert 
$$P = \int_0^{\infty} \frac{1}{3} p c n(p) dp = \int_0^{\infty} \frac{1}{3} E n(p) dp = \frac{\rho}{3}$$

Druk is evenredig met de energiedichtheid  $\rho = 3P$

Bijvoorbeeld fotonen

Algemeen geldige relaties: onafhankelijk van de impulsverdeling

# Toestandsvergelijkingen

Toestandvergelijking  $\rho = \alpha \cdot P$

↑  
constante

Niet-relativistische materie:  $\rho$  wordt gedomineerd door rustmassa  $mc^2 \gg P$

⇒ Vloeistof is dan drukloos:  $\alpha = 0$

We noemen dit stof ("dust")

Voor straling geldt  $P = \rho/3$  en  $\alpha = 1/3$

Voor vacuum-energie  $P = -\rho$  en dus  $\alpha = -1$

Continuïteitsvergelijking  $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0$  en  $\dot{\rho} + 3(1 + \alpha)H\rho = 0$

Invullen levert  $\rho = \text{const} \cdot a^{-3(1+\alpha)}$

We vinden weer voor straling  $\rho \propto \frac{1}{a^4}$  en materie  $\rho \propto \frac{1}{a^3}$

# Tijdsevolutie schaalfactor

Friedmannvergelijkingen leveren  $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$

Ansatz  $a \propto t^\beta$

We vinden  $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\alpha)}}$

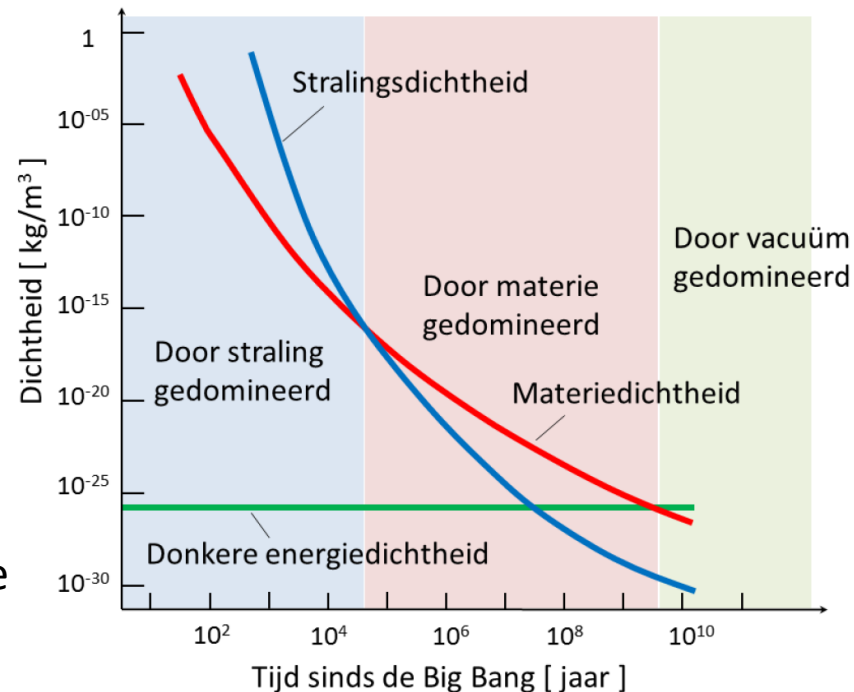
Voor een door straling gedomineerd heelal vinden we  $a(t) \propto \sqrt{t}$

Voor materie gedomineerd  $a(t) \propto t^{2/3}$

In beide gevallen  $\rho(t) \propto t^{-2}$

Kosmologische constante levert  $a(t) \propto e^{Ht}$

Het is niet mogelijk een analytische oplossing te geven voor een willekeurig mengsel van materie straling en vacuumenergie



# Intermezzo: evenwichtsthermodynamica

Beschouw ijl mengsel van deeltjes van soort  $i$

Bezettingsgraad van toestanden  $f_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/k_B T} \pm 1}$

↑ ↑ ↑  
energie  $E_i = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_i^2}$       chemische potentiaal      temperatuur

Bose-Einstein statistiek min-teken, Fermi-Dirac plus-teken

Quantumtoestanden: beschouw deeltjes in een “doos”

Dit levert  $\mathbf{p} = \frac{h}{L} (n_1 \hat{\mathbf{x}} + n_2 \hat{\mathbf{y}} + n_3 \hat{\mathbf{z}})$ ,  $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

Dichtheid van toestanden (# /  $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ ) is  $g(p) dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} dp$

↑  
statistisch gewicht

Deeltjesdichtheid tussen  $p$  en  $p + dp$  is  $n(p) dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/k_B T} \pm 1} dp$

Totale deeltjesdichtheid  $n = \int_0^\infty n(p) dp$



# Intermezzo: gas bij relatief lage $T$

Beschouw gas met  $mc^2 \gg E - \mu \gg kT$

$$\implies v(p) \approx \frac{p}{m}, \quad E = mc^2 + E_{\text{kin}} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

Dan geldt  $n(p)dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/kT} \pm 1} dp$

$$\implies n(p)dp = g_s \frac{4\pi p^2}{h^3} e^{-\left(mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \mu\right)/kT} dp = A p^2 e^{-p^2/2mkT} dp$$

$$A = g_s \frac{4\pi}{h^3} \exp[-(mc^2 - \mu)/kT]$$

Deeltjesdichtheid is dan

$$n = \int_0^\infty n(p)dp = \int_0^\infty A p^2 e^{-p^2/2mkT} dp = A (2mkT)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$$

$\uparrow x^2 = p^2/2mkT$

We vinden  $n = A (2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = g_s \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} e^{-(mc^2 - \mu)/kT} \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}_{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}$

Evenzo vinden we voor de druk

$$P = \frac{2}{3} \int_0^\infty A p^2 \frac{p^2}{2m} e^{-p^2/2mkT} dp = \frac{A}{3m} \int_0^\infty p^4 e^{-p^2/2mkT} dp = \frac{A}{3m} (2mkT)^{5/2} \underbrace{\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx}_{3\sqrt{\pi}/8}$$

# Intermezzo: gas bij relatief lage $T$

Deeltjesdichtheid  $n = A (2mkT)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = g_s \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-(mc^2 - \mu)/kT}$

Druk  $P = \frac{A\sqrt{\pi}}{8m} (2mkT)^{\frac{5}{2}}$

$\implies P/n = kT \rightarrow \boxed{P = nkT}$

Dit is de toestandsvergelijking voor een ideaal gas

Interpretatie: beschouw  $n = g_s \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\underbrace{(mc^2 - \mu)/kT}_{E - \mu \approx mc^2 \gg kT}}$

$\implies n \ll \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \equiv n_Q$

↑  
quantumconcentratie

Deeltje met energie  $p^2/2m \approx kT \implies p \approx (2mkT)^{1/2}$

De Broglie golflengte  $\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{h}{\sqrt{2mkT}} \implies n \ll \left( \frac{\pi}{\lambda^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi^{3/2}}{\lambda^3}$

Als de gemiddelde afstand  $d \sim n^{-1/3} \gg \lambda$  groter is dan de De Broglie golflengte, gedragen ze zich als klassieke puntdeeltjes

# Druk voor een fermion/boson gas

Deeltjesdichtheid  $n_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int f_i(\mathbf{p}) d^3p$

Energiedichtheid  $\rho_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int E_i(\mathbf{p}) f_i(\mathbf{p}) d^3p$

Druk  $P_i = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E_i(\mathbf{p})} f_i(\mathbf{p}) d^3p$

Ultra-relativistische benadering

$$\rho_{\text{Rel}} = \frac{g_i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{E^3}{e^{E/T} \pm 1} dE = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{7}{8} \left( \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 \right), & \text{Fermi Dirac} \end{cases}$$

$$n_{\text{Rel}} = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3, & \text{Bose Einstein} \\ \frac{3}{4} \left( \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_i T^3 \right), & \text{Fermi Dirac} \end{cases}$$

Gemiddelde energie  $\rho/n$  per relativistisch deeltje  $\langle E \rangle_{\text{BE}} \approx 2.70 \cdot T$   
 $\langle E \rangle_{\text{FD}} \approx 3.15 \cdot T$

Fotogas  $m_\gamma = 0$  en  $g_\gamma = 2$  heeft energiedichtheid  $\rho_\gamma = \sigma T^4$

$$\uparrow \sigma = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.670400 \times 10^{-8} \text{ Js}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

# Vrijheidsgraden

Energiedichtheid en druk

$$\rho_{\text{Rel}} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}(T) T^4$$

$$P_{\text{Rel}} = \frac{1}{3} \rho_{\text{Rel}}(T) = \frac{\pi^2}{90} g_{\text{eff}}(T) T^4$$

↑ telt het aantal vrijheidsgraden

Standaard model van de deeltjesfysica

Modelafhankelijk boven 1 TeV

Neutrino's hebben andere  $T$  dan fotonen

Definieer

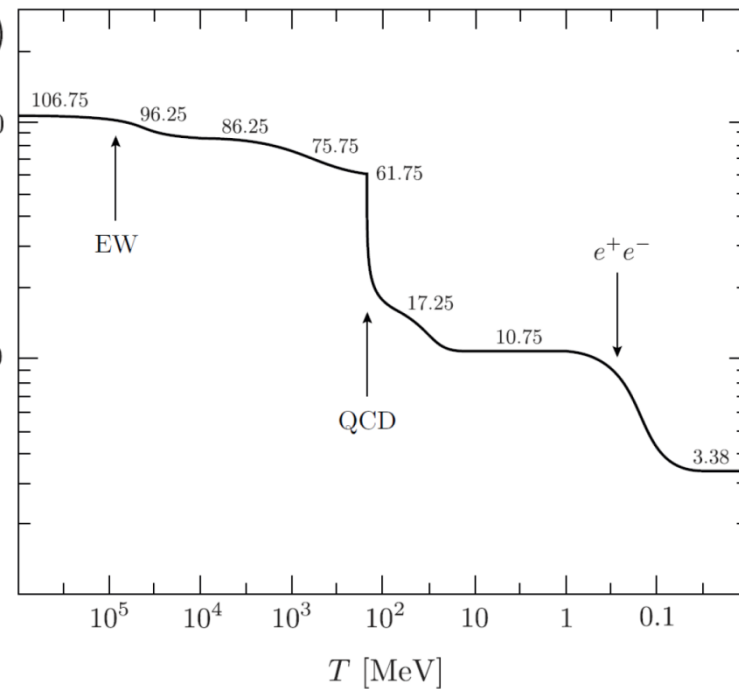
$$g_{\text{eff}} = \sum_{i=\text{bosonen}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermionen}} g_j \left(\frac{T_j}{T}\right)^4$$

Friedmannvergelijking

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{Rel}} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}} T^4 = 2.76 \frac{g_{\text{eff}}}{m_{\text{Pl}}^2} T^4$$

$$\Rightarrow H = 1.66 \sqrt{g_{\text{eff}}} \frac{T^2}{m_{\text{Pl}}}$$

Straling  $a(t) = a(0) \sqrt{t} \Rightarrow H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \Rightarrow$



$$t = 0.30 \frac{m_{\text{Pl}}}{\sqrt{g_{\text{eff}}} T^2} \approx \left(\frac{1 \text{ MeV}}{T}\right)^2 \text{ sec.}$$

# Historie van het heelal

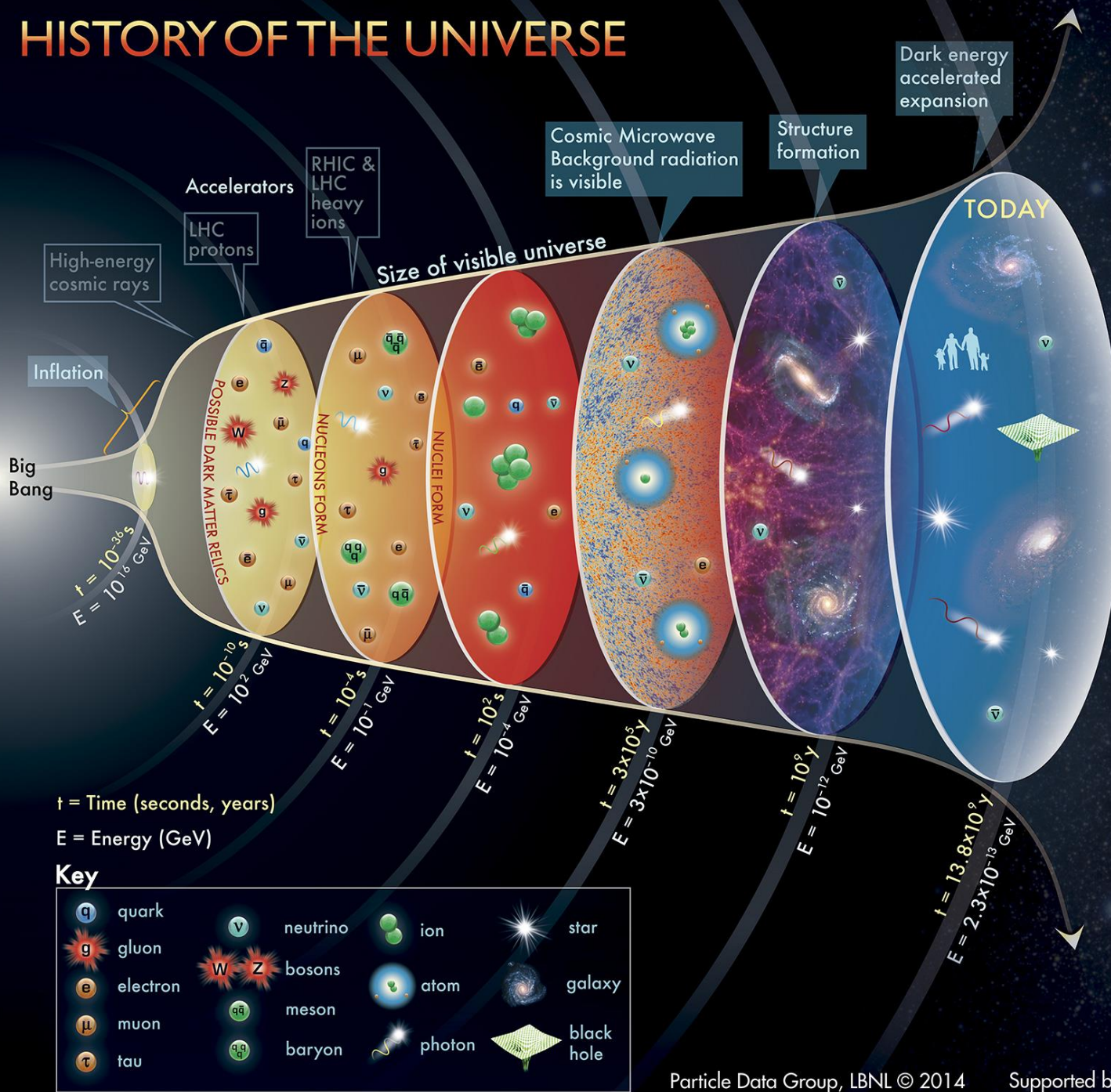
Fase-overgangen treden op bij bepaalde temperaturen

Table 1: *Belangrijke gebeurtenissen in de thermische geschiedenis van het heelal.*

Gebeurtenis	tijd $t$	roodverschuiving $z$	temperatuur $T$
Elektrozwakke transitie	20 ps	$10^{15}$	100 GeV
QCD phase transitie	20 $\mu$ s	$10^{12}$	150 MeV
Neutrino's ontkoppelen	1 s	$6 \times 10^9$	1 MeV
Elektron-positron annihilatie	6 s	$2 \times 10^9$	500 keV
Big Bang nucleosynthese	3 min	$4 \times 10^8$	100 keV
Straling - materie transitie	60 kjaar	3400	0.75 eV
Recombinatie	260 - 380 kjaar	1100 - 1400	0.26 - 0.33 eV
CMB ont koppeling	380 kjaar	1000 - 1200	0.23 - 0.28 eV
Reionisatie	100 - 400 Mjaar	11 - 30	2.6 - 7.0 meV
Donkere energie - materie transitie	9 Gjaar	0.4	0.33 meV
Heden	13.7 Gjaar	0	0.24 meV



# HISTORY OF THE UNIVERSE



# Elektrozwakke overgang

Het Higgs-veld

Bij hoge temperaturen zijn deeltjes massaloos

Na  $10^{-23}$  s vervallen top-quark,  $W$ ,  $Z$  en  $H$  bosonen

Voor tijden met  $kT \ll mc^2$  kunnen deze deeltjes niet meer gecreëerd worden: de EZ transitie

We kunnen uitrekenen wanneer dit gebeurt (gebruik  $T = m_{\text{Higgs}}/6$ )

$$t = 0.30 \frac{m_{\text{Pl}}}{\sqrt{g_{\text{eff}}} T^2} \approx \left( \frac{1 \text{ MeV}}{T} \right)^2 \text{ sec.}$$

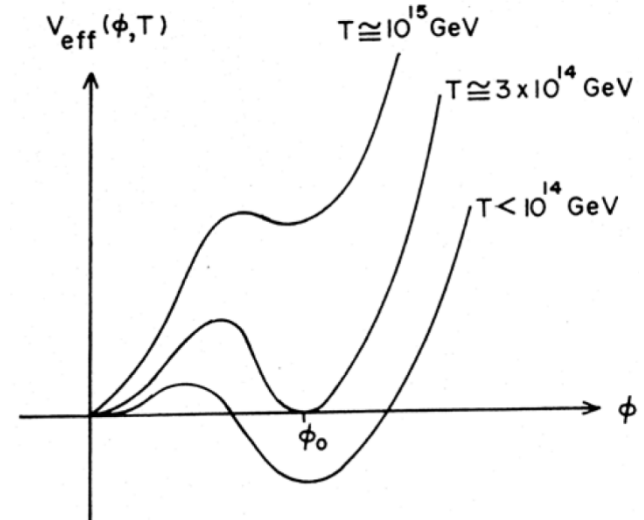
We vinden 20 ps na de Big Bang

We vinden de roodverschuiving uit  $T_{\text{gebeurtenis}} = T_0(1 + z_{\text{gebeurtenis}})$

$$\Rightarrow z = 10^{15}$$

↑ huidige temperatuur is 2.7 K

We kunnen ook uitrekenen hoe groot de schaalfactor toen was, want  $1 + z = 1/a$



# QCD fase-overgang

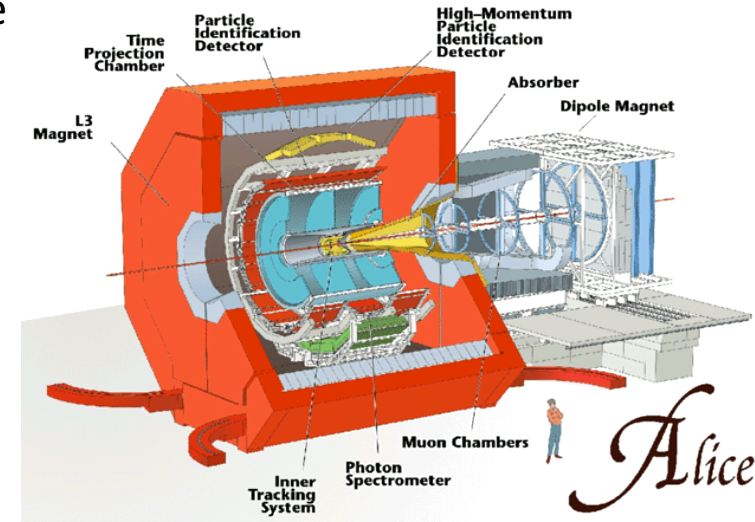
Bij 150 MeV ondergaat materie de QCD fase-transitie

Vrije quarks raken gebonden in hadronen

Aantal vrijheidsgraden verandert

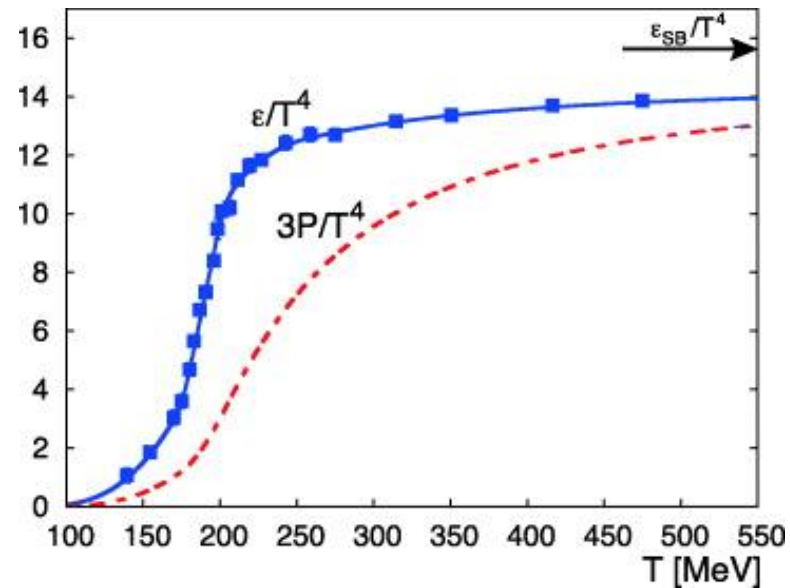
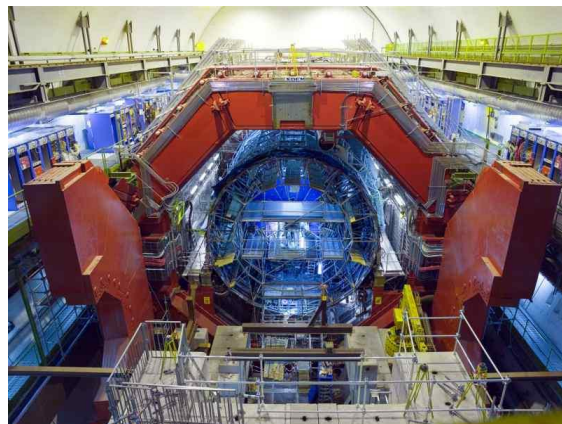
$$g_{\text{eff}}^* = 2 + 3 + \frac{7}{8} \times (4 + 4 + 6) = 17.25$$

fotonen
pionen



Treedt op 20 us na de Big Bang, bij  $z = 10^{12}$

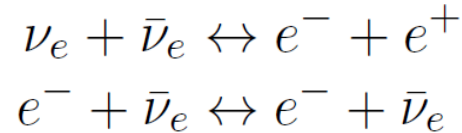
ALICE experiment bij LHC:  $\rho$  en  $P$  (lattice QCD)





# Neutrino's ontkoppelen

Neutrino's koppelen aan het plasma  
( $T > 4$  MeV)



Interactie via W en Z bosonen  $G_F^2 s / m_W^4$

↑ ↑ maat voor energie  $s = E_{\text{totaal}}^2$   
constante van Fermi

Interactiesnelheid voor relativistische deeltjes  $\Gamma = n \langle \sigma v \rangle \approx \frac{G_F^2 T^5}{m_W^4}$   
↑ dichtheid  $n \approx T^3$

Heelal koelt af en de interactiesnelheid neemt sterk af

Interactiesnelheid wordt onvoldoende om Hubble expansiesnelheid bij te houden

$$\frac{\Gamma}{H} \approx \frac{G_F^2 m_{\text{Pl}} T^3}{m_W^4} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{ontkop}} \approx \left( \frac{m_W^4}{G_F^2 m_{\text{Pl}}} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 4 \text{ MeV}$$

Neutrino's ontkoppelen van het plasma

Neutrino's hebben Fermi-Dirac verdeling; zwarte straler met  $T_\nu = T_{\text{ontkop}} \frac{a_{\text{ontkop}}}{a} \propto \frac{1}{a}$

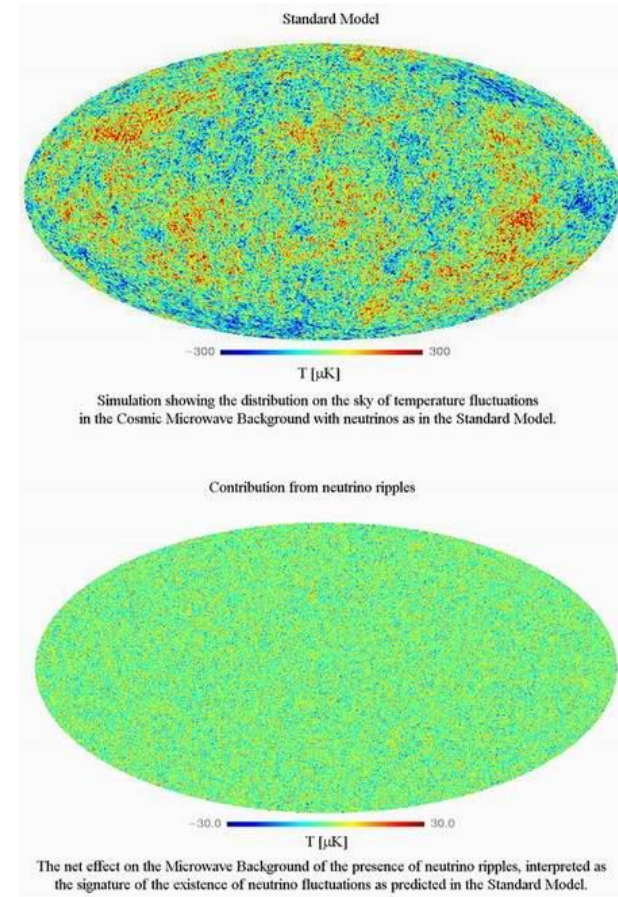
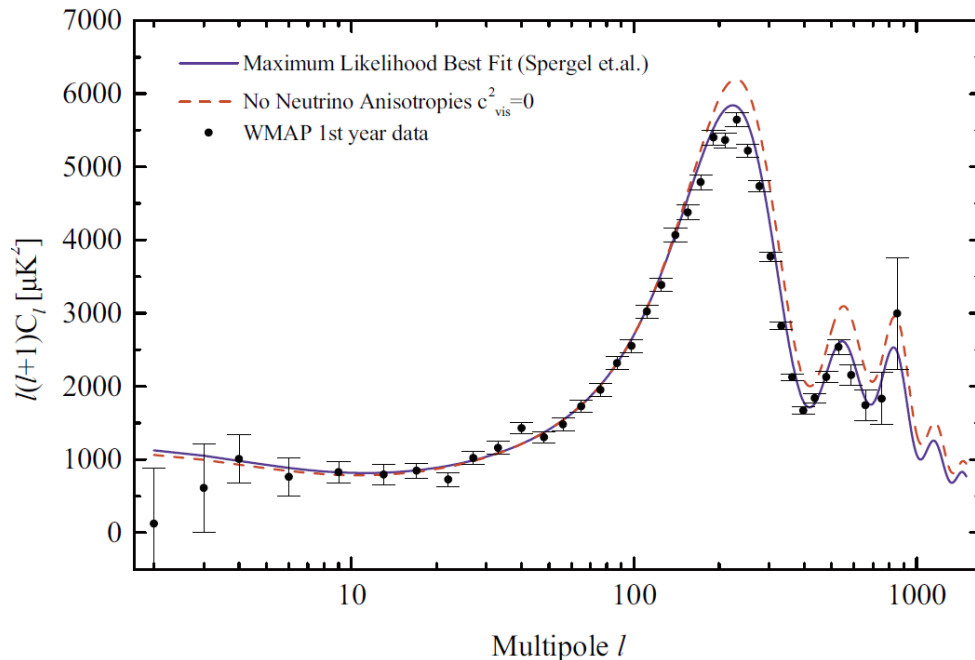
# Primordiale neutrino's

Kosmische neutrino-achtergrond van  $n_\nu \sim 57/\text{cm}^3$  per soort

Temperatuur 1.9 K

Effect op expansiesnelheid van heelal, CMBR en structuurvorming

Zie ook: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0412066>



# Intermezzo: thermodynamica

Thermodynamische parameters: bijvoorbeeld temperatuur, druk, volume, interne energie, entropie, enthalpie

Niet onafhankelijk van elkaar: dimensie van de toestandruimte (bijvoorbeeld  $D = 2$ )

Thermodynamische toestand en de waarde van *toestandsvariabelen*: hangen enkel van de huidige toestand af en niet van de historie

In tegenstelling tot *procesvariabelen*, zoals warmte en mechanische arbeid

Voorbeeld: mono-atomisch gas

Volg een “pad” in de toestandruimte en meet  $P(t)$  en  $V(t)$

De arbeid is dan 
$$W(t_0, t_1) = \int_{\text{toestand } 0}^{\text{toestand } 1} P dV = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \frac{dV(t)}{dt} dt$$

We dienen het pad te kennen: arbeid is een procesvariabele

Stel dat we geïnteresseerd zijn in de som van arbeid ( $PdV$ ) en  $VdP$

$$U(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \frac{dV(t)}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} V(t) \frac{dP(t)}{dt} dt = P(t_1)V(t_1) - P(t_0)V(t_0)$$

We hoeven de functie  $P(t)V(t)$  en op de begin- en eindtoestand te kennen. Het product  $PV$  is een toestandsfunctie

# Intermezzo: entropie

Entropie volgens definitie  $dS(V, T) = \frac{1}{T} [d(\rho(T)V) + P(T)dV]$

We herkennen de eerste hoofdwet van thermodynamica  $dU = \delta Q - PdV$ .

De differentiaal  $dS(V, T) = \frac{\partial S(V, T)}{\partial V} dV + \frac{\partial S(V, T)}{\partial T} dT$

Vergelijken levert  $\frac{\partial S(V, T)}{\partial V} = \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T))$  en  $\frac{\partial S(V, T)}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT}$

Tweede afgeleiden  $\frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S(V, T)}{\partial T \partial V}$

$$\implies \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T)) \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT} \right)$$

We vinden  $\frac{dP(T)}{dT} = \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T))$

Invullen in de definitie:  $dS(V, T) = \frac{1}{T} d[(\rho(T) + P(T))V] - \frac{V}{T^2} (\rho(T) + P(T)) dT$

Integreren levert  $S(V, T) = \frac{V}{T} (\rho(T) + P(T))$

# Entropie in expanderend heelal

We vonden met de friedmannvergelijkingen  $\dot{P}a^3 = \frac{d}{dt} (a^3 [\rho + P])$

Combineer dit met  $\frac{dP(T)}{dT} = \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T))$

Dit levert  $\frac{d}{dt} \left( \frac{a^3}{T} [\rho(T) + p(T)] \right) = 0 \quad \Rightarrow$  Entropie  $S(T)$  is constant

Entropiedichtheid  $s(T) \equiv \frac{S(V, T)}{V} = \frac{\rho(T) + P(T)}{T}$

In het vroege heelal (met  $P = \rho/3$ ) geldt  $s = \frac{2\pi^2}{45} g_{\text{eff}}^s T^3$

Hierbij gebruiken we  $g_{\text{eff}}^s = \sum_{i=\text{bosonen}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{fermionen}} g_j \left( \frac{T_j}{T} \right)^3$

Merk op dat geldt  $n_\gamma = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \rightarrow s = \frac{\pi^4}{45\zeta(3)} g_{\text{eff}}^s n_\gamma \approx 1.8 g_{\text{eff}}^s n_\gamma$

# Elektron-positron annihilatie

Behoud van entropie levert  $g_{\text{eff}}^s (aT)^3 = \text{const}$

$$\implies T \approx (g_{\text{eff}}^s)^{-1/3} a^{-1}$$

Zolang  $g_{\text{eff}}$  niet verandert, lijken neutrino's in thermisch evenwicht met het plasma

Annihilatie van elektronen en positronen volgens  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$

Beneden  $T = 1$  MeV is reactie  $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$  niet meer mogelijk

$$\begin{aligned} \text{Vrijheidsgraden } (g_{\text{eff}}^s)_{\text{voor ontkoppeling}} &= 2 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} + 2 = \frac{11}{2} \\ (g_{\text{eff}}^s)_{\text{na ontkoppeling}} &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{Behoud van entropie } \left( g_{\text{eff}}^s (aT)^3 \right)_{\text{voor ontkoppeling}} = \left( g_{\text{eff}}^s (aT)^3 \right)_{\text{na ontkoppeling}}$$

$$\text{Hieruit volgt } (aT)_{T \leq 1 \text{ MeV}} = \left( \frac{11}{4} \right)^{\frac{1}{3}} (aT)_{T \geq 1 \text{ MeV}} \approx 1.4 (aT)_{T \geq 1 \text{ MeV}}$$

$$\text{Bij de ontkoppeling wordt entropie overgedragen aan de fotonen } T_\nu = \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma$$

$$\text{Dit wordt } \textit{reheating} \text{ genoemd. De neutrino-achtergrond nu heeft } T_\nu = 1.95 \text{ K}$$

# Huidige bijdrage van straling

Straling bestaat op dit moment uit fotonen en drie soorten neutrino's

Neem aan dat neutrino's massaloos zijn (en dus relativistisch)

Vrijheidsgraden  $g_{\text{eff}}^{\text{totaal}}(\text{vandaag}) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} = 3.36$

$$g_{\text{eff}}^s(\text{vandaag}) = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{4}{11}\right) = 3.91.$$

Huidige stralingsdichtheid  $\rho_{R\gamma} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{eff}}^{\text{totaal}} T^4 = 8 \times 10^{-34} \text{ g/cm}^3$

Bijdrage tot de dichtheid  $\Omega_{R\gamma} h^2 = 4 \times 10^{-5}$

Straling speelt nu geen rol van betekenis in de dynamica van het heelal

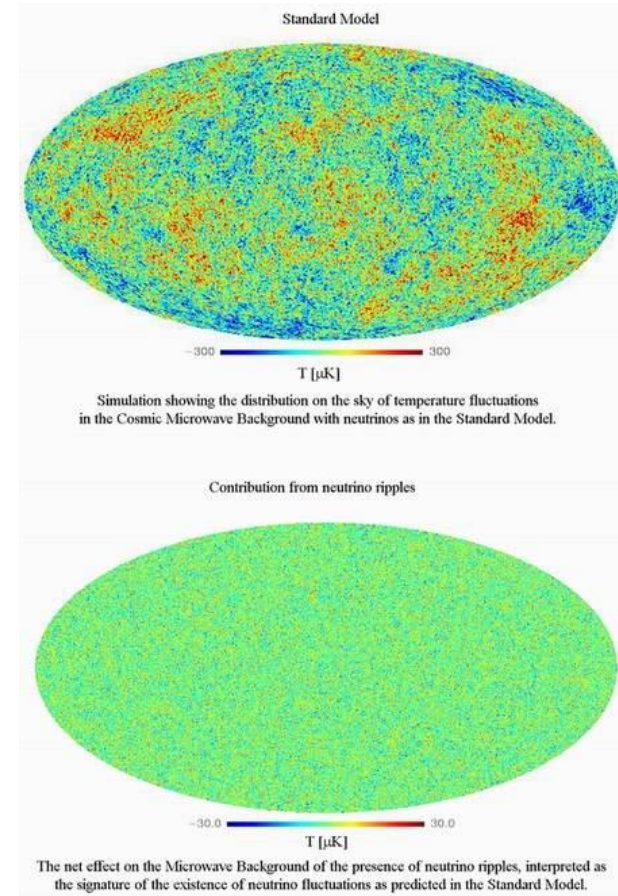
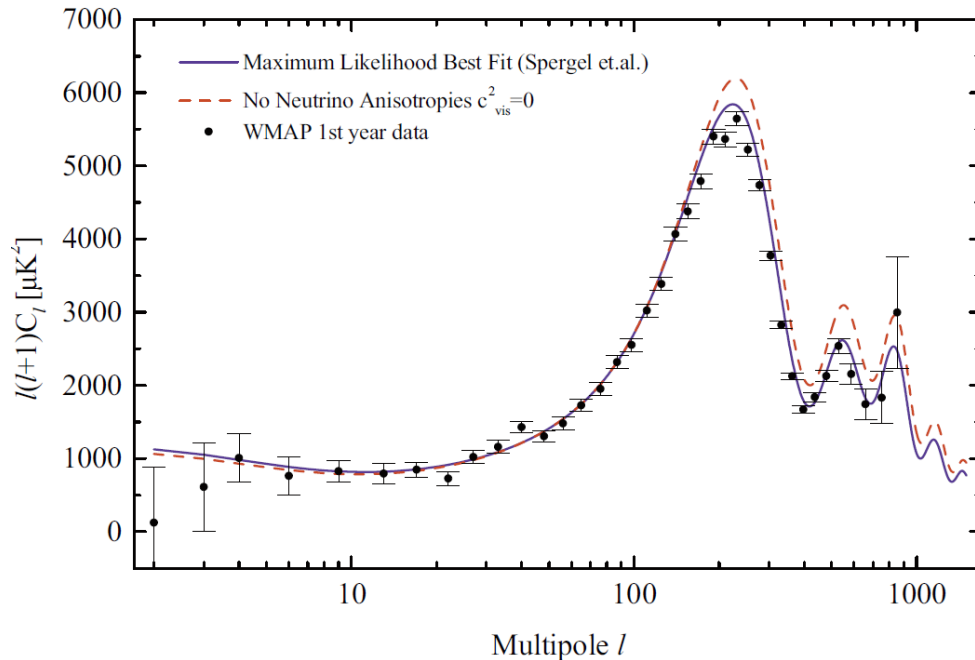
# Primeordiale neutrino's

Kosmische neutrino-achtergrond van  $n_\nu \sim 57/\text{cm}^3$  per soort

Temperatuur 1.9 K

Effect op expansiesnelheid van heelal, CMBR en structuurvorming

Zie ook: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0412066>





# Dominantie van materie

Huidige bijdrage materie tot de energiedichtheid  $\rho_M = 1.9 \times 10^{-29} \Omega_M h^2 \text{ g/cm}^3$

Als functie van de tijd geldt  $\rho_m = \rho_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \rho_M (1+z)^3$

Evenzo de bijdrage van straling  $\rho_r = \rho_R \left(\frac{g_{\text{eff}}}{g_{\text{eff}}^{\text{nu}}}\right) (1+z)^4$

We hadden  $\Omega_{R\gamma} h^2 = 4 \times 10^{-5}$

Stel dit gelijk  $\rho_m = \rho_r \rightarrow (1+z_{\text{gelijk}}) \propto \frac{\rho_M}{\rho_R} = 2.3 \times 10^4 \Omega_M h^2$

$$\Rightarrow z_{\text{gelijk}} = 3400$$

Relatie tussen roodverschuiving en leeftijd heelal

$$t = 0.30 \frac{m_{\text{Pl}}}{\sqrt{g_{\text{eff}}} T^2} \approx \left(\frac{1 \text{ MeV}}{T}\right)^2 \text{ sec.}$$

$$T_{\text{gebeurtenis}} = T_0 (1 + z_{\text{gebeurtenis}})$$

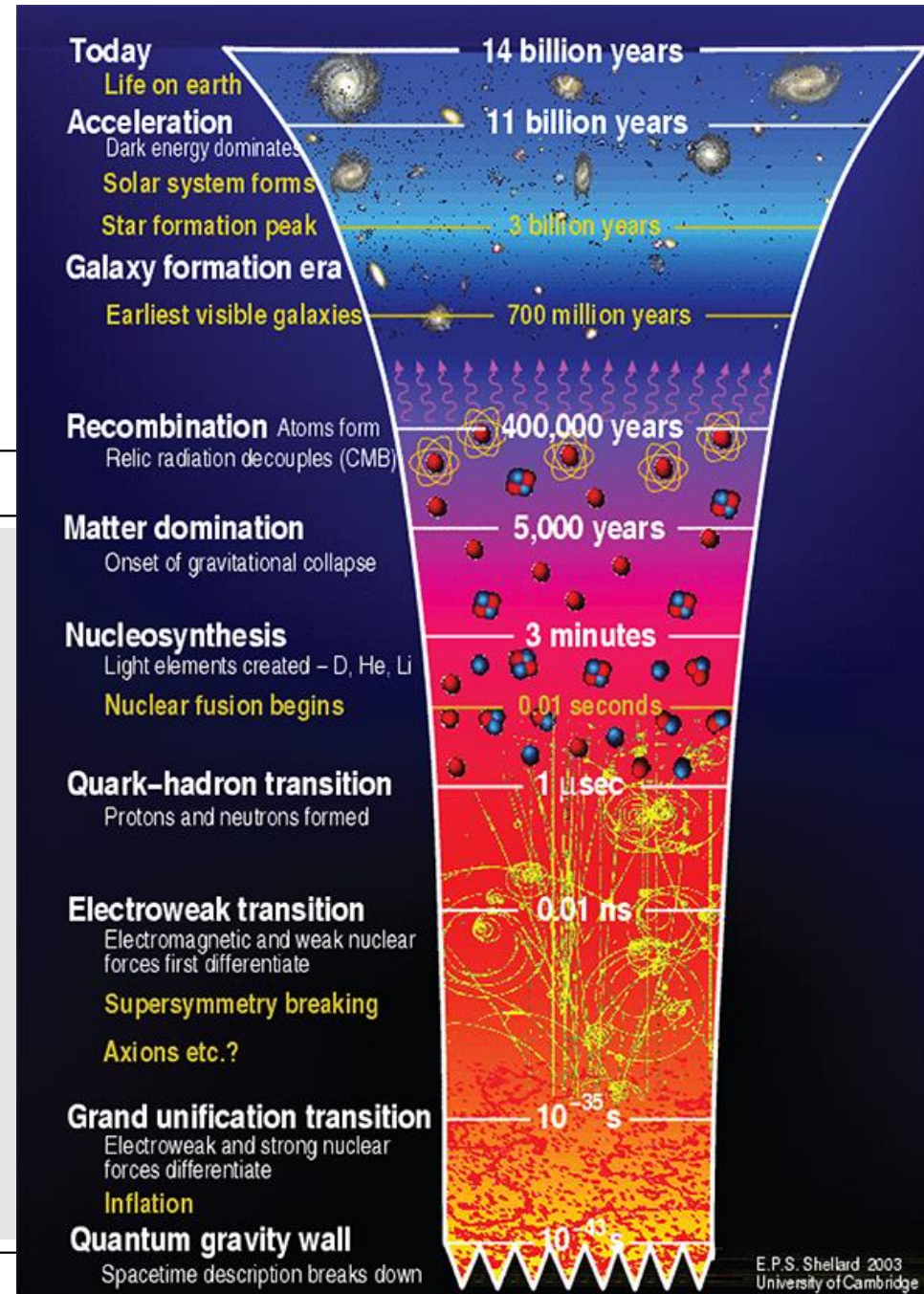
We vinden dat dominantie door materie 60.000 jaar na de oerknal begon

Hiermee begon de vorming van structuur in het heelal

# Historie van het heelal

## Gebeurtenis

Elektrozwakke transitie  
QCD phase transitie  
Neutrino's ontkoppelen  
Elektron-positron annihilatie  
Big Bang nucleosynthese  
Straling - materie transitie  
Recombinatie  
CMB ontkoppeling  
Reionisatie  
Donkere energie - materie transitie  
Heden



# *Big Bang nucleosynthese*

Heelal was de eerste 60.000 jaar door straling gedomineerd

Quarks smolten samen tot baryonen na  $10^{-4}$  seconden

Baryonen smolten samen tot atoomkernen na 100 seconden

Elektronen werden aan atoomkernen gebonden na 100.000 jaar

Heelal bestaat uit 25% helium-4 en kleine fracties  $^3\text{He}$ ,  $\text{D}$  en  $^7\text{Li}$ ; de rest is waterstof

Opgave: maak schatting van helium-4 productie in Melkweg

Leeftijd Melkweg:  $10^{10}$  jaar

Luminositeit:  $L_{\star} = 4 \times 10^{36} \text{ W}$

Conversie 1 kg waterstof naar helium-4 levert energie:  $6 \times 10^{14} \text{ J}$

Antwoord: geproduceerde massa helium-4

$$M_{\text{He}} = \frac{(4 \times 10^{36} \text{ W})(10^{10} \text{ jaar})(3 \times 10^7)}{(6 \times 10^{14} \text{ J})} = 2 \times 10^{39} \text{ kg}$$

De totale massa van de Melkweg is ongeveer  $3 \times 10^{41} \text{ kg}$

Conclusie: de waargenomen helium-4 is maar voor klein deel in sterren geproduceerd

# Big Bang nucleosynthesis

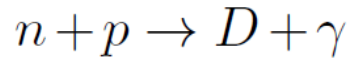
Thermodynamische berekeningen met gekoppelde kanalen

BBN begon toen heelal afgekoeld was tot 3 miljard K (ongeveer 1 MeV)

Donkere materie niet relevant, want dynamica wordt door straling gedomineerd

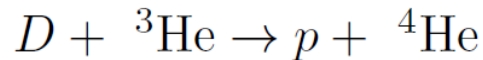
Helium-4 heeft hoge bindingsenergie van 28 MeV

Deuteronen gevormd bij  $T < 10^9$  K

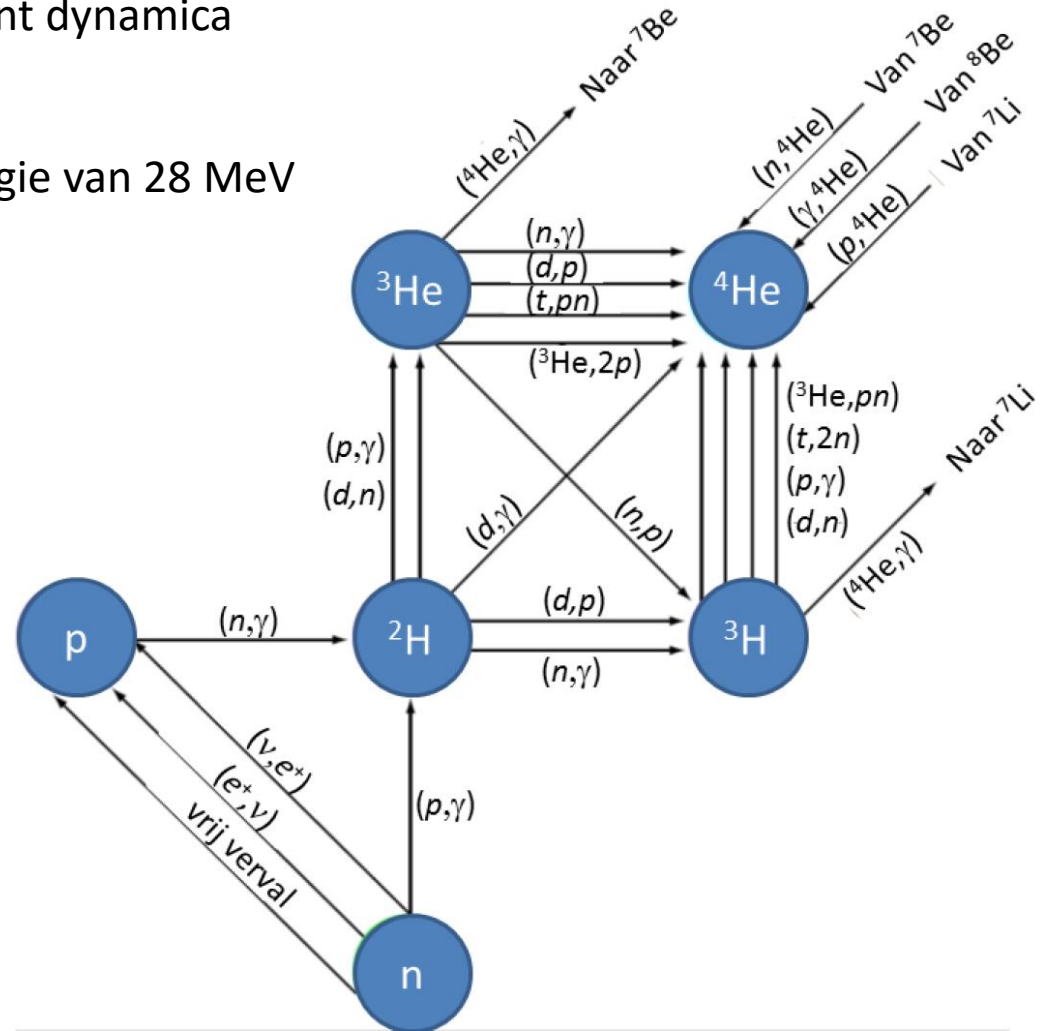


Neutron- en protonvangst leidt tot  $^3\text{H}$  en  $^3\text{He}$

Reacties als



Vorming van  $^7\text{Li}$  en  $^7\text{Be}$



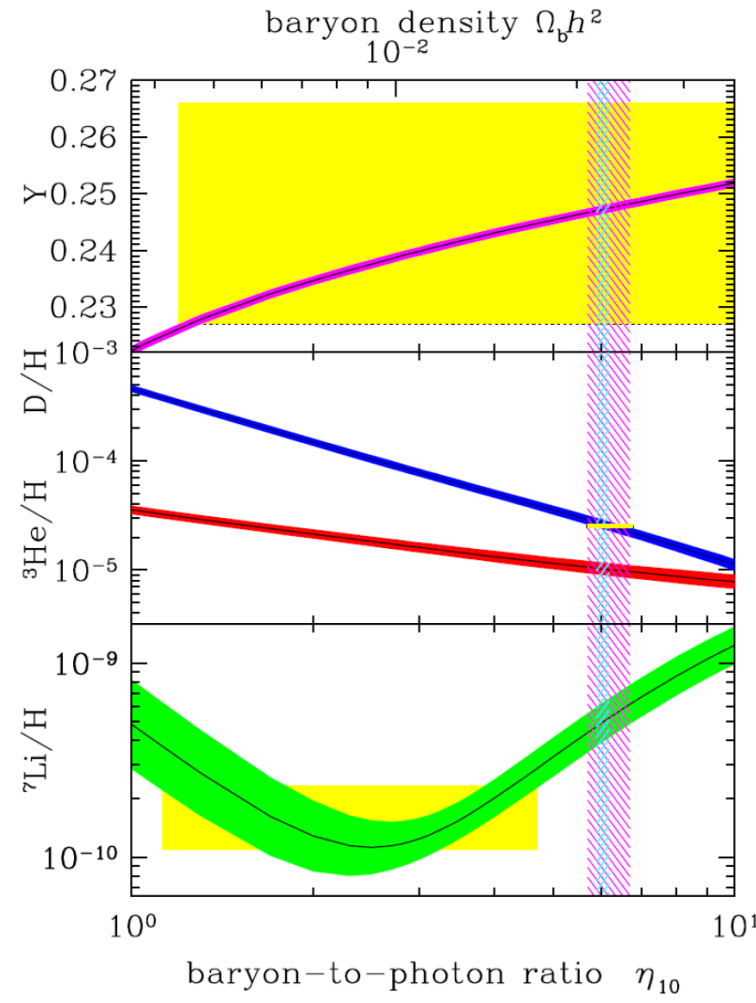
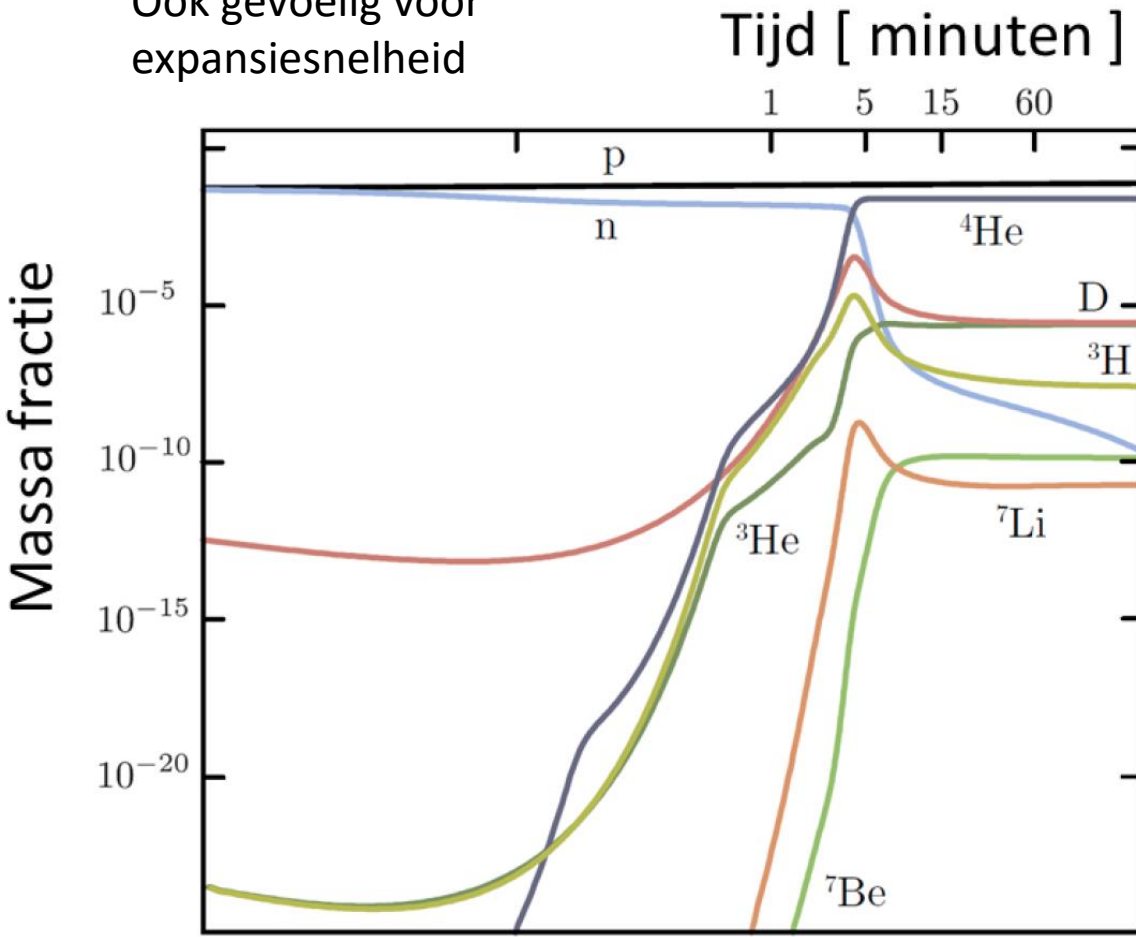
# Big Bang nucleosynthesis

Hoeveelheden  $^2\text{H}$ ,  $^3\text{H}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^4\text{He}$ , en  $^7\text{Li}$  gevoelig voor baryondichtheid

We drukken dit uit als de verhouding baryonen tot fotonen: ongeveer

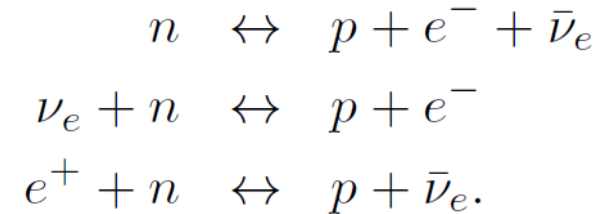
BBN begint eerder bij hogere baryondichtheid

Ook gevoelig voor  
expansiesnelheid



# Abondantie van helium-4

Bij hoge temperatuur zorgen zwakke interacties voor thermisch evenwicht



Massaverschil tussen proton en neutron  $\Delta m \equiv m_n - m_p = 1.29 \text{ MeV}$

Voor  $T \gg \Delta m$  evenveel protonen als neutronen in het plasma

Voor  $T$  lager dan 1 MeV geldt  $\frac{n_n}{n_p} = e^{-\Delta m/T} = e^{-(1.29 \text{ MeV})/T}$  Zie vergelijking (183)

Als dit het hele verhaal was, dan gaat de ratio naar 0 naarmate het heelal afkoelt

Voor  $T < 0.8 \text{ MeV}$  wordt de reactiesnelheid kleiner dan de Hubble expansiesnelheid

$$\Gamma(\nu_e + n \leftrightarrow p + e^-) \approx 2.1 \left( \frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^5 \text{ sec}^{-1}$$

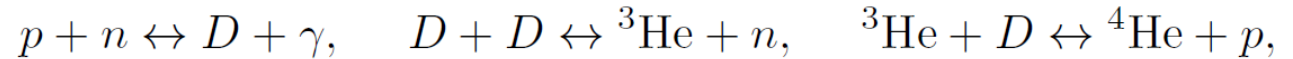
Er treedt “freeze-out” op van de abundantie en neutronen wordt niet meer vernietigd (ze vervallen echter nog steeds met levensduur 887 seconde)

Verhouding  $\frac{n_n}{n_p} = e^{-\Delta m/0.8} \approx 0.2$  wordt “ingevroren”

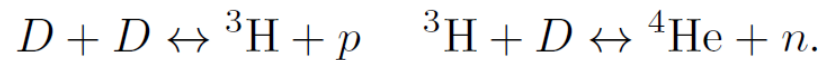


# Abondantie van helium-4

Voordat de neutronen vervallen eindigen ze in helium-4 via de reeksen kernreacties



of



Drempel wordt gevormd door reactie  $p + n \leftrightarrow D + \gamma$

$$\text{Er geldt } \frac{\Gamma_{pn}}{H} \approx 2 \times 10^3 \left( \frac{T}{0.1 \text{ MeV}} \right)^5 \frac{n_p}{n_p + n_n} \Omega_B h^2$$

Verhouding is groot voor  $T \gg 0.1 \text{ MeV}$ , want door hoge fotondichtheid is foto-disintegratie van deuterium efficiënt. De D-dichtheid blijft dan laag (abondantie  $< 10^{-10}$ )

Reacties  $D + D$  gaan kwadratisch in deutron-dichtheid

Voor  $T < 0.1 \text{ MeV}$  wordt foto-disintegratie inefficiënt, neem D-dichtheid sterk toe, en worden nagenoeg alle neutronen geconsumeert om helium-4 te produceren

$$\text{Dan geldt } Y({}^4\text{He}) \equiv \frac{4n_{\text{He}}}{n_{\text{tot}}} = \frac{4(n_n/2)}{n_n + n_p} = \frac{2n_n/n_p}{1 + n_n/n_p} \implies Y({}^4\text{He}) \approx 0.24$$