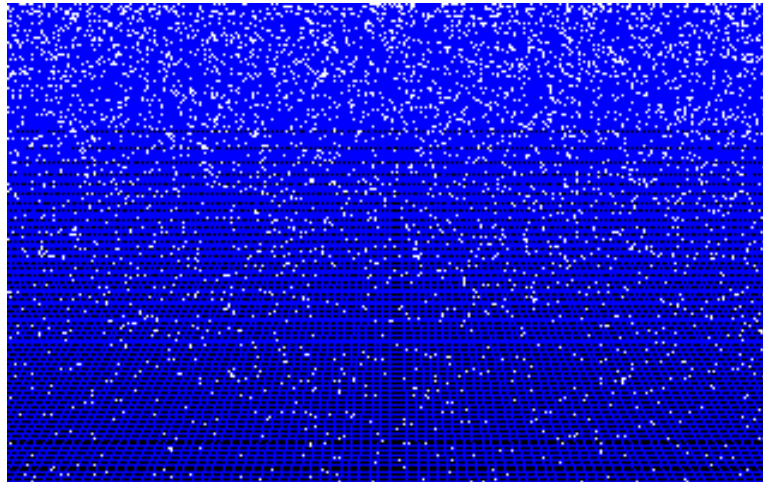


GRAVITATIE EN KOSMOLOGIE

FEW cursus



Jo van den Brand

Relativistische inflatie: 3 december 2012

Inhoud

- **Inleiding**
 - Overzicht
- **Klassieke mechanica**
 - Galileo, Newton
 - Lagrange formalisme
- **Quantumfenomenen**
 - Neutronensterren
- **Wiskunde I**
 - Tensoren
- **Speciale relativiteitstheorie**
 - Minkowski
 - Ruimtetijd diagrammen

- **Wiskunde II**
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- **Algemene relativiteitstheorie**
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
 - Sferische oplossingen
- **Kosmologie**
 - Friedmann
 - Inflatie
- **Gravitatiestraling**
 - Theorie
 - Experiment

Tekortkomingen van SM kosmologie

Horizon probleem, vlakheidsprobleem, afwezigheid van exotische deeltjes

Horizon: grootste afstand waarover invloeden gereisd kunnen hebben om een waarnemer te bereiken: zichtbare Heelal van deze waarnemer

Thermisch evenwicht tussen gebieden in Heelal bewerkstelligd door middel van fotonen (straling)

Fotonen ontkoppelden ongeveer 100.000 jaar na Big Bang en toen was de horizon veel kleiner dan nu



Je verwacht dat gebieden met ongeveer gelijke temperatuur relatief klein zijn, maar dat is niet zo



Inflatie: je begint met een klein Universum met thermisch evenwicht en inflanteert dit met een enorme factor. Steeds meer van dit Universum komt nu onze horizon binnen

Vlakheidsprobleem en exotische deeltjes

Experimenteel gegeven: Universum nu heeft bij goede benadering een *vlakke* Robertson – Walker metriek

In het vroege Heelal leek de metriek nog meer op een perfect vlakke RWM om de huidige vlakheid te verklaren

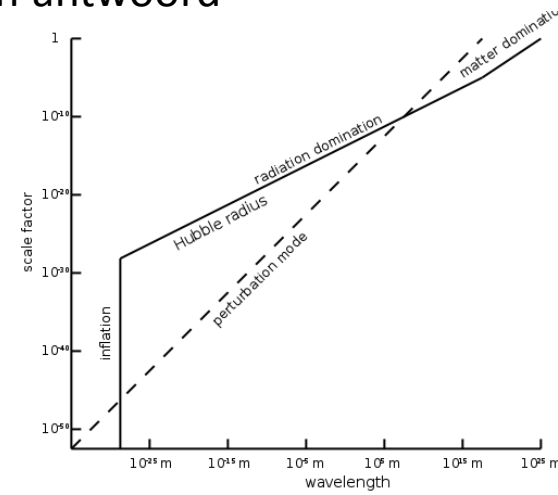
Vlakheidsprobleem: via welk mechanisme is de vroegste vlakheid zo dicht bij de vlakke RW metriek komen te liggen?

Als je aanneemt dat het Heelal altijd precies vlak is geweest, dan is het Heelal begonnen met precies de kritische dichtheid. Waarom?

Klassieke Standaard Model van de kosmologie geeft hierop geen antwoord

Moderne deeltjesfysica voorspelt exotische deeltjes: supersymmetrische deeltjes, monopolen, ...

Inflatie $\dot{a}(t) > 0$, $\ddot{a}(t) > 0$



Friedmannvergelijkingen

Vorige week: *vlakke* Robertson – Walker metriek ($k = 0$). Algemeen geldt

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 d\Sigma^2 \quad d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2, \quad \text{where } d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Einsteinvergelijkingen $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ geven Friedmannvergelijkingen



$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} &= \frac{8\pi G}{3} \rho \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 &= -\frac{8\pi G}{c^2} p. \end{aligned}$$

Zonder kosmologische constante wordt

FV - 1

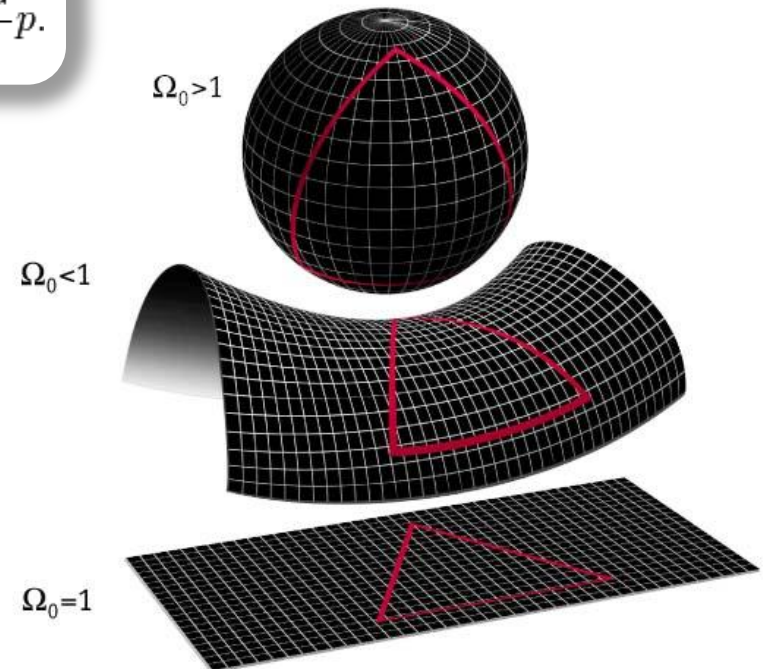
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

Kritische dichtheid: voor gegeven H
de dichtheid waarvoor $k = 0$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

$$10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$$

Dichtheid / kritische dichtheid: Ω



Friedmannvergelijkingen

Friedmannvergelijking 1 kan herschreven worden

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} &= \frac{8\pi G}{3}\rho \\ \rho_c &= \frac{3H^2}{8\pi G} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{3a^2}{8\pi G}H^2 &= \rho a^2 - \frac{3kc^2}{8\pi G} \\ \rho_c a^2 - \rho a^2 &= -\frac{3kc^2}{8\pi G} \end{aligned} \quad \boxed{(\Omega^{-1} - 1)\rho a^2 = \frac{-3kc^2}{8\pi G}.}$$

Rechts staan enkel constanten. Tijdens expansie neemt dichtheid af ($\sim a^3$)

Sinds Planck era is de ρa^2 met factor 10^{60} afgenomen

$(\Omega^{-1} - 1)$ moet met factor 10^{60} zijn toegenomen

WMAP en Sloan Digital Sky Survey stellen Ω_0 op 1 binnen 1%

Dan is $|\Omega^{-1} - 1| < 0.01$ en tijdens Planck era kleiner dan 10^{-62}

Vlakheidsprobleem: waarom was de initiële dichtheid van het Heelal zo dicht bij de kritische dichtheid?

Oplossingen: Anthropisch principe of inflatie (ρa^2 neemt snel toe in korte tijd)

Dynamica van kosmologische inflatie

Inflatie treedt op als rechterlid van FV – 2 positief is, dus voor $n < -1/3$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 &= +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(3P(t) + \rho(t)\right).\end{aligned}$$

Dat kan met een kosmologische contante, maar inflatie werkt anders

Neem scalairveld $\Phi(t)$ dat enkel van de tijd afhangt (kosmologisch principe)

Langrangiaan – dichtheid $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\Phi(t))(\partial_\nu\Phi(t)) - V(\Phi(t))$

Merk op: Minkowskimetrick levert de Klein Gordon vergelijking $\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi$

Actie $S = \int d^3x dt \sqrt{-g} \mathcal{L}$ $g = -a^6(t)$

Euler – Lagrange vergelijkingen leveren de bewegingsvergelijking

$$\Rightarrow \ddot{\Phi}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\Phi}(t) + c^2\partial_\Phi V(\Phi(t)) = 0$$

Details van evolutie hangen van de potentiele energie V af

Dynamica van kosmologische inflatie

Energie – impulstensor ($T + V$) die hoort bij Lagrangiaandichtheid ($T - V$)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\Phi(t))(\partial_\nu\Phi(t)) - V(\Phi(t)) \quad \Longrightarrow \quad T_{\mu\nu} = (\partial_\mu\Phi)(\partial_\nu\Phi) + g_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

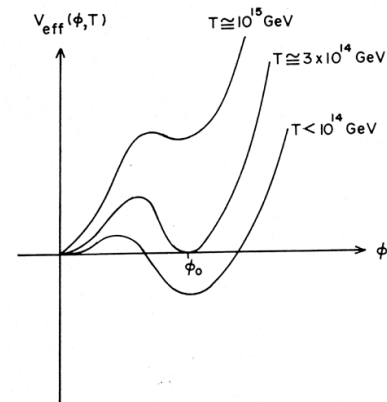
Vul Lagrangiaan en metriek in, en vergelijk met T voor Friedmann vloeistof

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t)) \\ P(t) &= \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}^2(t) - V(\Phi(t))\end{aligned}$$

Totale energiedichtheid van het scalaire veld

Kinetische energiedichtheid van het scalaire veld

Potentiele energiedichtheid van het scalaire veld



Tijdens inflatie is inflatonveld dominant

Inflatievergelijkingen

$$\begin{aligned}\ddot{\Phi}(t) + 3H(t)\dot{\Phi}(t) + c^2\partial_\Phi V(\Phi(t)) &= 0 \\ H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t))\right)\end{aligned}$$

Kosmologie: kies potentiele energiedichtheid en bepaal schaaftactor $a(t)$ en inflatonveld

Vereenvoudigde inflatievergelijkingen

Neem aan dat scalaire veld langzaam evolueert (Slow Roll Condition)

$$\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}^2(t) \ll V(\Phi(t)) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \rho(t) &\approx +V(\Phi(t)) \\ P(t) &\approx -V(\Phi(t)) \end{aligned} \quad \text{Toestandsvergelijking met } n = -1$$

Dit leidt tot inflatie, onafhankelijk van de details van inflatonveld

Neem verder aan dat de kinetische energiedichtheid lang klein blijft
(dit voorkomt dat inflatie te snel ten einde komt)

Vereenvoudigde inflatievergelijkingen (VIV)

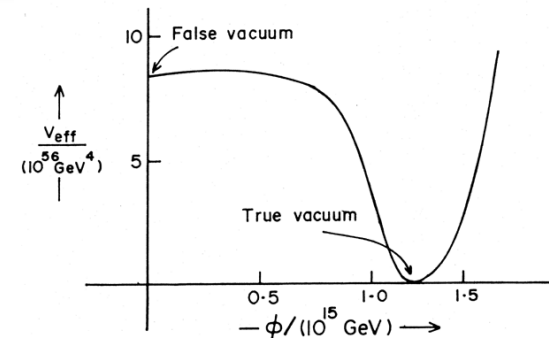
$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}(t) + 3H(t)\dot{\Phi}(t) + c^2 \partial_{\Phi} V(\Phi(t)) &= 0 \\ H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t)) \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 3H(t)\dot{\Phi}(t) + c^2 \partial_{\Phi} V(\Phi(t)) &= 0 \\ H^2(t) - \frac{8\pi G}{3c^2} V(\Phi(t)) &= 0 \end{aligned}$$

VIV zijn van toepassing als

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}^2(t)}{V(\Phi(t))} \ll 1, \quad \text{en} \quad \frac{\ddot{\Phi}(t)}{3H(t)\dot{\Phi}(t)} \ll 1$$



Inflatieparameters

Herschrijven met eerste VIV levert

$$3H(t)\dot{\Phi}(t) + c^2 \partial_{\Phi} V(\Phi(t)) = 0$$



$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}^2(t)}{V(\Phi(t))} &= \frac{1}{18H^2(t)} \frac{(\partial_{\Phi} V(\Phi(t)))^2}{V(\Phi(t))} \\ &= \underbrace{\frac{1}{6} \frac{c^4}{8\pi G} \left(\frac{\partial_{\Phi} V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))} \right)^2}_{\text{inflatieparameter } \epsilon} \ll 1 \end{aligned}$$

Inflatieparameter: maat voor steilheid V
(V moet vlak zijn)

Uit VIV volgt $-\frac{\dot{H}(t)}{H^2(t)} = \frac{1}{3}\epsilon$

$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$

$$1 - \frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)} = \frac{1}{3}\epsilon \ll 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} \gg 0$$



$$\ddot{a}(t) \gg 0$$

De eis $\epsilon \ll 1$ garandeert ook inflatie zal optreden

Verder geldt

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\Phi}(t)}{3H(t)\dot{\Phi}(t)} &= -\frac{1}{9H^2(t)} \left(c^2 \partial_{\Phi}^2 V(\Phi(t)) + 3\dot{H}(t) \right) \\ &= \underbrace{-\frac{c^4}{24\pi G} \frac{\partial_{\Phi}^2 V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))}}_{\text{parameter } \eta} + \cancel{\frac{\epsilon}{9}} \ll 1, \end{aligned}$$

parameter η

Bepaalt de snelheid waarmee V van steilheid verandert.

We willen dat V lang vlak blijft ($\eta \ll 1$)

Een inflatiemodel

Massief inflatonveld: quantumveld van deeltjes met massa m

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2(t) - \underbrace{\frac{m^2}{2} \left(\frac{c}{\hbar}\right)^2 \Phi^2(t)}_{\text{Potentiele energiedichtheid}}$$

VIV worden nu $3H(t)\dot{\Phi}(t) + m^2 \left(\frac{c^4}{\hbar^2}\right) \Phi(t) = 0$

$$H^2(t) - \frac{8\pi G}{6} \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi(t) = 0$$

Potentiele $V(\Phi(t))$
energiedichtheid

Twee gekoppelde DV: neem wortel van VIV - 2

$$H(t) = \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{6} \frac{m}{\hbar}} \Phi(t)$$

Invullen in VIV - 1: $\pm 3\sqrt{\frac{8\pi G}{6} \frac{m}{\hbar}} \Phi(t)\dot{\Phi}(t) + m^2 \frac{c^4}{\hbar^2} \Phi(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\Phi}(t) \pm \frac{mc^4}{3\hbar} \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} = 0$

Oplossen levert $\Phi(t) = \Phi_0 \mp \frac{mc^4}{3\hbar} \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} t$



Amplitude inflatonveld op $t = 0$

Invullen van inflatonveld in VIV - 2 levert

$$\begin{aligned} H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} &= \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{6} \frac{m}{\hbar}} \left(\Phi_0 \mp \frac{mc^4}{3\hbar} \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} t \right) \\ &= \pm \sqrt{\frac{8\pi G}{6} \frac{m}{\hbar}} \Phi_0 - \frac{m^2 c^4}{3\hbar^2} t. \end{aligned}$$

Uitdijend heelal: gebruik + teken

Oplossen met $a(t) = e^{-(\kappa + \lambda t)^2}$ levert dan

$$\dot{a}(t) = \left(\sqrt{\frac{8\pi G}{6} \frac{m}{\hbar}} \Phi_0 - \frac{m^2 c^4}{3\hbar^2} t \right) a(t) \Rightarrow -2\kappa\lambda - 2\lambda^2 t = \sqrt{\frac{8\pi G}{6} \frac{m}{\hbar}} \Phi_0 - \frac{m^2 c^4}{3\hbar^2} t \Rightarrow \kappa = \frac{\sqrt{8\pi G}}{2c^2} \Phi_0 \quad \lambda = \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{6}}$$

Een inflatiemodel

Als oplossingen vinden we

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \Phi_0 - \frac{mc^4}{3\hbar} \sqrt{\frac{6}{8\pi G}} t, \\ a(t) &= e^{-\left(-\frac{\sqrt{8\pi G}}{2c^2} \Phi_0 + \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{6}} t\right)^2}\end{aligned}$$

Fysische interpretatie:
inflatonveld neemt af in
de tijd

Inflatieparameter

$$\begin{aligned}\epsilon &\equiv \frac{1}{6} \frac{3c^4}{8\pi G} \left(\frac{\partial_\Phi V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))} \right)^2 & \eta &\equiv -\frac{c^4}{24\pi G} \left(\frac{\partial_\Phi^2 V(\Phi(t))}{V(\Phi(t))} \right) \\ &= \frac{c^4}{12\pi G} \frac{1}{\Phi^2(t)} \ll 1. & &= -\frac{c^4}{12\pi G} \frac{1}{\Phi^2(t)} \\ & & &= -\epsilon.\end{aligned}$$

Als één parameter klein is, dan is de andere dat ook

Invullen van het inflatonveld in de uitdrukking voor de inflatieparameter levert

$$t \ll \frac{3\hbar}{mc^4} \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \Phi_0 - \frac{\hbar}{mc^2} \sqrt{6} \quad \text{Inflatie houdt aan tot deze tijd, en stopt op} \quad t_{\text{eind}} \equiv \frac{3\hbar}{mc^4} \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \Phi_0$$

Voor schaafactor geldt

$$-\left(-\frac{\sqrt{8\pi G}}{2c^2} \Phi_0 + \frac{mc^2}{\hbar\sqrt{6}} t\right)^2 = -\frac{8\pi G}{4c^4} \Phi_0^2 + \sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \Phi_0 t - \cancel{\frac{m^2}{\hbar^2}} t^2$$

$$\Rightarrow a(t) = e^{-\frac{8\pi G}{4c^4} \Phi_0^2} \cdot e^{+\sqrt{\frac{8\pi G}{6}} \frac{m}{\hbar} \Phi_0 t} \quad \text{Inflatie treedt op!}$$

Specifiek model:

$$m \approx 10^{13} \frac{\text{GeV}}{c^2} \approx 10^{-14} \text{kg}, \quad \Phi_0 \approx 10^{23} \frac{\sqrt{\text{m} \cdot \text{kg}}}{\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &\approx 10^{-35} \text{ s} \\ \frac{a(\text{eind})}{a(\text{begin})} &= e^{\frac{8\pi G}{4c^4} \Phi_0^2} \end{aligned}$$

Einde inflatie: verhittingsfase

Inflatonveld vervalst naar nieuwe deeltjes (die straling opleveren)

De potentiële energiedichtheid V heeft ergens een diepe en steile dip

Inflatieparameter niet meer klein: inflatie breekt af

Inflatievergelijkingen $\ddot{\Phi}(t) + (3H(t) + \Gamma) \dot{\Phi}(t) + \partial_{\Phi} V(\Phi(t)) = 0$



Wrijvingsterm toevoegen

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\rho_{\Phi}(t) + \rho_{\gamma}(t) \right)$$



Straling toevoegen

Tweede Friedmannvergelijking $\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(\rho_{\gamma}(t) + 3P_{\gamma}(t) + \rho_{\Phi} + 3P_{\Phi}(t) \right)$

$$P_{\Phi} = n(t)\rho_{\Phi} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(2\rho_{\gamma}(t) + (3n(t) + 1)\rho_{\Phi}(t) \right)$$

Deze vergelijkingen vertellen ons

hoe inflatonen omgezet worden in straling,

hoe het inflatonveld afneemt,

hoe de schaalfactor evolueert tijdens dit proces

Geef Γ , V en $n(t)$ en
alles ligt vast

Verhittingsvergelijkingen

Elimineer het inflatonveld

Er geldt $\rho_\Phi(t) = \frac{1}{2c^2} \dot{\Phi}^2(t) + V(\Phi(t)) \Rightarrow \dot{\rho}_\Phi(t) = \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}(t) \ddot{\Phi}(t) + \dot{\Phi}(t) \partial_\Phi V(\Phi(t))$

Invullen in $\ddot{\Phi}(t) + (3H(t) + \Gamma) \dot{\Phi}(t) + \partial_\Phi V(\Phi(t)) = 0$

Gebruik ook $\frac{1}{c^2} \dot{\Phi}(t) = \rho_\Phi(t) + P_\Phi(t)$

$$P_\Phi = n(t) \rho_\Phi$$

Differentieel FV – 1 en gebruik FV – 2
om $\ddot{a}/a$ te elimineren

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 &= + \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= - \frac{4\pi G}{3c^2} (3P(t) + \rho(t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_\Phi(t) &= - (3H(t) + \Gamma) (n(t) + 1) \rho_\Phi(t), \\ \dot{\rho}_\gamma(t) &= -4H(t) \rho_\gamma(t) + \Gamma (n(t) + 1) \rho_\Phi(t), \\ H^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho_\Phi(t) + \rho_\gamma(t)). \end{aligned}$$

Verhittingsvergelijkingen zijn drie gekoppelde differentiaalvergelijkingen

Geef Γ , V en $n(t)$ en
alles ligt vast

Na inflatie is Heelal gedomineerd door straling (daarna relativistische kosmologie)