6 Wiskunde II - Kromlijnige coördinaten

Het wiskundige apparaat dat we dienen te ontwikkelen voor de beschrijving van de algemene relativiteitstheorie is formidabel. Voordat we gekromde ruimtetijd gaan bestuderen, bekijken we eerst kromlijnige coördinaten in de euclidische ruimte. Hierdoor kunnen we een fors deel van de wiskundige machinerie ontwikkelen in een vertrouwde situatie. Daarna is de stap naar gekromde ruimten relatief eenvoudig.

In een cartesisch coördinatenstelsel geven we een punt $\mathcal{P}$ in de vlakke 2D euclidische ruimte aan met coördinaten x en y. We kunnen ook een ander coördinatenstelsel gebruiken, waarbij we $\mathcal{P}$ aangeven met ξ en η. Vergelijking (88) geeft dan de transformatie $\Lambda^{\alpha'}_{\ \beta}$ tussen beide systemen. Voor de afstand tussen twee nabij gelegen punten geldt

$$\begin{aligned} \xi = \xi(x,y), \qquad \Delta\xi &= \tfrac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y, \\ \eta = \eta(x,y), \qquad \Delta\eta &= \tfrac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + \tfrac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y. \end{aligned} \tag{242}$$

Wiskundig is het belangrijk dat de afbeelding één op één is en dat vereist dat de Jacobiaan van de coördinatentransformatie ongelijk is aan nul[61]. Dus

$$\det\begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \neq 0. \tag{243}$$

We demonstreren het bovenstaande met een beschouwing over poolcoördinaten.

<u>Voorbeeld:</u> poolcoördinaten in het euclidische vlak.

In het euclidische 2D-vlak kunnen we de cartesische coördinaten x en y of de poolcoödinaten $\{r,\theta\}$ gebruiken. Er geldt $r=\sqrt{x^2+y^2}$ en $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, en de inverse relaties $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$. Kleine veranderingen Δx en Δy produceren veranderingen Δr en $\Delta\theta$ volgens

$$\begin{aligned} \Delta r &= \tfrac{x}{r}\Delta x + \tfrac{y}{r}\Delta y &&= \cos\theta\Delta x + \sin\theta\Delta y, \\ \Delta\theta &= -\tfrac{y}{r^2}\Delta x + \tfrac{x}{r^2}\Delta y &&= -\tfrac{1}{r}\sin\theta\Delta x + \tfrac{1}{r}\cos\theta\Delta y, \end{aligned} \tag{244}$$

in eerste orde benadering.

6.1 Vectoren en 1-vormen

De traditionele manier waarop een vector gedefinieerd wordt, is door te stellen dat hij onder willekeurige coördinatentransformaties op dezelfde manier transformeert als de verplaatsing. Hiermee bedoelen we dat een vector $\Delta\vec{r}$ voorgesteld kan worden als een verplaatsing $(\Delta x, \Delta y)$, of in poolcoördinaten als $(\Delta r, \Delta\theta)$, of in het algemeen door $(\Delta\xi, \Delta\eta)$. Voor kleine $(\Delta x, \Delta y)$ geldt dan

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}. \tag{245}$$

[61] Stel we hebben in systeem $\mathcal{O}$ de punten P en Q met coördinaten (x_1,y_1) en (x_2,y_2), respectievelijk. Deze punten worden afgebeeld op P' en Q' in systeem $\mathcal{O}'$. Stel dat de afbeelding $P\to P'$ door de volgende twee lineaire vergelijkingen gegeven wordt: $a_1x_1 + a_2y_1 = x_1'$ en $b_1x_1 + b_2y_1 = y_1'$. Evenzo voor $Q \to Q'$. Als in $\mathcal{O}$ de punten P en Q samenvallen, dan dienen ook de punten P' en Q' in $\mathcal{O}'$ samen te vallen. Dan geldt $a_1\Delta x + a_2\Delta y = 0$ en $b_1\Delta x + b_2\Delta y = 0$. Als we hieruit Δx en Δy elimineren vinden we de uitdrukking $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. In dat geval is het systeem singulier en wordt er op $(0,0)$ afgebeeld, terwijl P en Q *niet* samenvallen (en dus $\Delta x \neq 0$ en $\Delta y \neq 0$). We eisen voor een bijectie dat de jacobiaan ongelijk aan nul is.

We stellen nu dat een willekeurige vector $\vec{V}$ op precies dezelfde manier dient te transformeren. Dus geldt

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} V^{\beta} \qquad \text{met} \qquad \Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{246}$$

waarbij de index β refereert aan het systeem (x, y) en index α' aan het systeem (ξ, η).

Er is een moderne en meer natuurlijke manier om vectoren en 1-vormen te introduceren. Hiertoe beschouwen we een scalair veld ϕ. Gegeven de coördinaten (ξ, η) is het altijd mogelijk om de afgeleiden $\partial\phi/\partial\xi$ en $\partial\phi/\partial\eta$ te vormen. We *definiëren* de 1-vorm $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ als het geometrisch object met componenten

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}, \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) \tag{247}$$

in het coördinatenstelsel (ξ, η). Dit is de algemene definitie van een oneindig aantal 1-vormen, en we vinden een andere 1-vorm voor elke keuze van het scalaire veld ϕ. De transformatie van de componenten volgt uit de kettingregel,

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial y}, \tag{248}$$

en evenzo voor $\frac{\partial\phi}{\partial\eta}$. We vinden hiermee

$$\begin{pmatrix} \partial\phi/\partial\xi \\ \partial\phi/\partial\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \end{pmatrix} \qquad \text{met} \qquad \Lambda^{\alpha}_{\ \beta'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix}. \tag{249}$$

We zien dat componenten van 1-vormen transformeren met $\Lambda^{\alpha}_{\ \beta'}$ en dat is tegenovergesteld aan het transformatiegedrag van vectorcomponenten, zoals gegeven in vergelijking (246).[62]

We beschouwen nu de afgeleide $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$ van een scalair veld ϕ langs een curve met parameter s (zie ook sectie 4.5.2). Deze afgeleide hangt af van de parameter s en als we die veranderen, dan verandert ook de afgeleide. We kunnen dit schrijven als

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = <\tilde{\mathrm{d}}\phi, \vec{V}>, \tag{251}$$

waarbij $\vec{V}$ de vector met componenten $(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s, \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s)$, notatie $<\tilde{p}, \vec{V}> \equiv \tilde{p}(\vec{V})$. De vector $\vec{V}$ hangt alleen van de curve af, terwijl $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ alleen van ϕ afhangt. Daarom is $\vec{V}$ karakteristiek voor de curve en wordt de *tangent* vector (of raakvector) genoemd. We kunnen een vector dus opvatten als een object dat $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$ produceert als ϕ gegeven is. Dit leidt tot de moderne opvatting dat een tangent vector aan een curve $\mathrm{d}/\mathrm{d}s$ genoemd moet worden[63]. Elke curve (met parameter s) heeft

[62] Het is van belang expliciet te controleren dat $\Lambda^{\alpha'}_{\ \beta}$ en $\Lambda^{\beta}_{\ \alpha'}$ elkaars inverse zijn. Dus $\Lambda^{\alpha'}_{\ \beta}\Lambda^{\gamma}_{\ \alpha'}$ is

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial\xi} & \frac{\partial\xi}{\partial\eta} \\ \frac{\partial\eta}{\partial\xi} & \frac{\partial\eta}{\partial\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{250}$$

Merk op dat een en ander volgt uit de definitie van partiële afgeleide en uit het feit dat ξ en η onafhankelijke variabelen zijn en dus geldt dat $\frac{\partial\xi}{\partial\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = 0$.

[63] Wellicht dat een andere kijk op deze zaak verhelderend is: we gaan weer uit van vergelijking (251) en omdat $\phi = \phi(\xi, \eta)$ verwacht je voor de afgeleide van ϕ langs de raakvector $\vec{V}$ van de curve

$$\nabla_{\vec{V}}\phi = V^{\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}. \tag{252}$$

een tangent vector $\vec{V}$ gedefinieerd als een lineaire functie die een 1-vorm als argument neemt en afbeeldt naar het reële getal $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$.

Onder een coördinatentransformatie gebeurt er niets met s (de definitie van deze parameter had niets met coördinaten te maken), maar veranderen de componenten van $\vec{V}$ volgens de kettingregel als

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}s} \\ \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix}. \tag{257}$$

Dit is dezelfde transformatiewet die we eerder voor vectoren hebben gevonden; vergelijk dit met uitdrukking (246) en op basis van deze correspondentie mogen we $\vec{V}$ een vector noemen. Met deze informatie kunnen we onze beschouwing in poolcoördinaten voortzetten.

<u>Voorbeeld:</u> basis 1-vormen en vectoren in poolcoördinaten.

Voor de basiscoördinaten geldt $\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\vec{e}_\beta$ en dit levert

$$\vec{e}_r = \Lambda^x{}_r\vec{e}_x + \Lambda^y{}_r\vec{e}_y = \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y, \tag{258}$$

en op dezelfde wijze

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial\theta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}\vec{e}_y = -r\sin\theta\vec{e}_x + r\cos\theta\vec{e}_y. \tag{259}$$

Merk op dat we gebruiken dat $\Lambda^x{}_r = \frac{\partial x}{\partial r}$. Op dezelfde wijze kunnen we de andere kant op transformeren met $\Lambda^r{}_x = \frac{\partial r}{\partial x}$. De transformatiematrices zijn eenvoudig: we hoeven alleen te kijken naar welke index boven of beneden is en we weten welke afgeleide we dienen te gebruiken.

De basis 1-vormen vinden we op analoge wijze. Er geldt $\tilde{\mathrm{d}}p^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_\beta\tilde{\mathrm{d}}p^\beta$ en dus

$$\tilde{\mathrm{d}}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x + \frac{\partial\theta}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y = -\frac{1}{r}\sin\theta\tilde{\mathrm{d}}x + \frac{1}{r}\cos\theta\tilde{\mathrm{d}}y, \tag{260}$$

en ook

$$\tilde{\mathrm{d}}r = \cos\theta\tilde{\mathrm{d}}x + \sin\theta\tilde{\mathrm{d}}y. \tag{261}$$

In Fig. 46 trachten we de basisvectoren en 1-vormen grafisch weer te geven. We tekenen de 1-vormen door oppervlakken te tekenen met constante r of θ voor respectievelijk $\tilde{\mathrm{d}}r$ en $\tilde{\mathrm{d}}\theta$. Merk op dat de bases veranderen van punt tot punt! Ook de lengten van de bases zijn niet constant. We vinden bijvoorbeeld $|\vec{e}_\theta|^2 = \vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta =$

Het symbool $\nabla_{\vec{V}}$ betekent de waarde van de richtingsafgeleide van een scalairveld in de richting gegeven door vector $\vec{V}$. Dus geldt

$$\nabla_{\vec{V}} = V^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)_{\text{langs de curve}}. \tag{253}$$

Merk op dat we nu de volgende situatie hebben,

$$\nabla_{\vec{V}} = V^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \text{en} \quad \vec{V} = V^\alpha\vec{e}_\alpha, \tag{254}$$

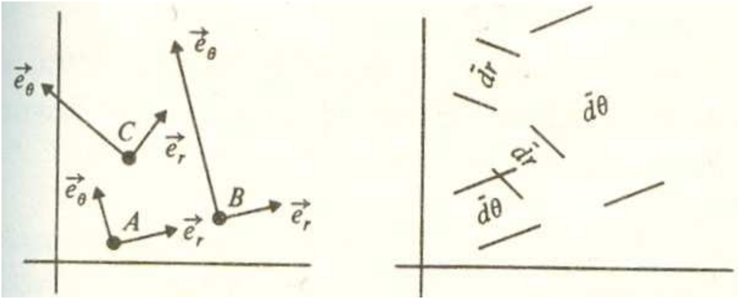
en zien dat beide uitdrukkingen dezelfde expansiecoëfficiënten V^α hebben. De eerste vergelijking is voor een richtingsafgeleide en de tweede beschrijft een vector. Er is dus een isomorfisme tussen vectoren en richtingsafgeleiden. We mogen derhalve schrijven

$$\vec{V} = \nabla_{\vec{V}} = \partial_{\vec{V}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \tag{255}$$

en voor de basisvectoren

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \tag{256}$$

Voor een wiskundige is de tangentruimte de ruimte opgespannen door de richtingsafgeleiden op punt $\mathcal{P}$. Deze richtingsafgeleiden hebben dus hun eigen ruimte.



Figuur 46: *Links: basisvectoren voor poolcoördinaten; rechts: basis 1-vormen.*

$r^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$, zodat de lengte van $\vec{e}_\theta$ toeneemt met haar afstand tot de oorsprong. We hebben dus ook geen eenheidsbasis meer. Er geldt $|\vec{e}_r| = 1, |\tilde{\mathrm{d}}r| = 1, |\vec{e}_\theta| = r, |\tilde{\mathrm{d}}\theta| = r^{-1}$.

De inproducten kunnen worden uitgerekend, omdat we de metriek in cartesische coördinaten (x, y) kennen: $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1$ en $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$. In tensornotatie is dat $g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ voor cartesische coördinaten. De metriek $\mathbf{g}$ heeft in poolcoördinaten de componenten $g_{\alpha'\beta'} = g(\vec{e}_{\alpha'}, \vec{e}_{\beta'}) = \vec{e}_{\alpha'} \cdot \vec{e}_{\beta'}$ en dit levert $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = r^2$ en $g_{r\theta} = 0$. We kunnen de componenten van $\mathbf{g}$ ook schrijven als

$$(g_{\alpha\beta})_{\text{pool}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{en ook} \quad \mathrm{d}\vec{l}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}r\vec{e}_r + \mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta|^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2. \tag{262}$$

De laatste formule in bovenstaande uitdrukking[64] geeft de lengte van een willekeurige en oneindig kleine verplaatsing $\mathrm{d}\vec{l}$, hetgeen een handige manier is om de componenten van de metrische tensor en tegelijkertijd de coördinaten van het lijnelement $\mathrm{d}\vec{l}$ te tonen.

De metriek heeft een inverse

$$(g^{\alpha\beta})_{\text{pool}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^{-2} \end{pmatrix}, \tag{263}$$

waarmee geldt dat $g^{rr} = 1$, $g^{r\theta} = 0$ en $g^{\theta\theta} = 1/r^2$. We kunnen dit gebruiken om een afbeelding te maken tussen vectoren en 1-vormen. Stel bijvoorbeeld dat ϕ een scalairveld is en $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ haar gradiënt, dan heeft de vector $\vec{\mathrm{d}}\phi$ de componenten

$$(\vec{\mathrm{d}}\phi)^\alpha = g^{\alpha\beta}\phi_{,\beta} \quad \text{en dus} \quad \left\{ \begin{array}{lll} (\vec{\mathrm{d}}\phi)^r & = & g^{r\beta}\phi_{,\beta} = g^{rr}\phi_{,r} + g^{r\theta}\phi_{,\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ (\vec{\mathrm{d}}\phi)^\theta & = & g^{\theta\beta}\phi_{,\beta} = g^{\theta r}\phi_{,r} + g^{\theta\theta}\phi_{,\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \end{array} \right. \tag{264}$$

Dus terwijl $(\phi_{,r}, \phi_{,\theta})$ componenten van een 1-vorm zijn, heeft de vector gradiënt componenten $(\phi_{,r}, \phi_{,\theta}/r^2)$. Ondanks dat we in de euclidische ruimte zijn, zien we dat vectoren in het algemeen componenten hebben die verschillen van die van de geassocieerde 1-vormen. Cartesische coördinaten zijn de enige coördinaten waarvoor de componenten hetzelfde zijn (want dan geldt dat $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 1)$).

6.2 Tensorcalculus

Stel we hebben een vector $\vec{V}$ waarvan de componenten V^α gegeven zijn ten opzichte van een willekeurig coördinatenstelsel $\{\vec{e}_\alpha\}$. We willen nu de afgeleide van deze vector bepalen. Er geldt

$$\vec{V} = V^\alpha\vec{e}_\alpha \quad \to \quad \frac{\partial\vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha + V^\alpha\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}, \tag{265}$$

waarbij β gelijk is aan 0 of 1, etc. De laatste term wordt veroorzaakt doordat de basisvectoren niet overal constant hoeven te zijn. Omdat $\partial\vec{e}_\alpha/\partial x^\beta$ zelf een vector is, kunnen we deze schrijven

[64]Verwar $\mathrm{d}r$ en $\mathrm{d}\theta$ *niet* met de basis 1-vormen $\tilde{\mathrm{d}}r$ en $\tilde{\mathrm{d}}\theta$. Het zijn de componenten van $\mathrm{d}\vec{l}$ in poolcoördinaten en de 'd' betekent 'oneindig kleine Δ'.

als een lineaire combinatie van basisvectoren. Hiertoe introduceren we het symbool ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ om de coëfficiënten aan te duiden. Er geldt

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = {\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\vec{e}_\mu. \tag{266}$$

De interpretatie van ${\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}$ is dat het de μ-de component van $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ voorstelt. Dit object heet een *christoffelsymbool* en heeft drie indices: de eerste (α) geeft de basisvector aan die wordt gedifferentieerd, de tweede (β) geeft de coördinaat aan waarnaar wordt gedifferentieerd, en de derde (μ) geeft de component van de resulterende afgeleide vector aan. Alle indices dienen te refereren naar hetzelfde coördinatenstelsel.

Met bovenstaande definitie van de christoffelsymbolen kunnen we vergelijking (265) schrijven als

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha + V^\alpha {\Gamma^\mu}_{\alpha\beta}\vec{e}_\mu. \tag{267}$$

De laatste term bevat twee sommaties (over α en μ) en als we de bijbehorende dummie indices herlabelen, vinden we

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\vec{e}_\alpha + V^\mu {\Gamma^\alpha}_{\mu\beta}\vec{e}_\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu {\Gamma^\alpha}_{\mu\beta}\right)\vec{e}_\alpha. \tag{268}$$

We zien dat het vectorveld $\partial\vec{V}/\partial x^\beta$ de componenten $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu {\Gamma^\alpha}_{\mu\beta}$ heeft. Merk op dat we voor partiële afgeleiden reeds de komma-notatie gebruiken, $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = {V^\alpha}_{,\beta}$. We definiëren een nieuwe notatie

$${V^\alpha}_{;\beta} \equiv {V^\alpha}_{,\beta} + V^\mu {\Gamma^\alpha}_{\mu\beta} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = {V^\alpha}_{;\beta}\vec{e}_\alpha. \tag{269}$$

Nu is $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta}$ een vectorveld als we de index β opvatten als één vast getal. Deze index kan echter meer waarden aannemen en we kunnen $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta}$ dan ook beschouwen als zijnde geassocieerd met een $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensorveld dat de vector $\vec{e}_\beta$ afbeeldt op de vector $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta}$. Dit tensorveld wordt de *covariante afgeleide* van $\vec{V}$ genoemd[65] en aangeduid met $\nabla\vec{V}$. Haar componenten zijn

$$(\nabla\vec{V})^\alpha{}_\beta = (\nabla_\beta\vec{V})^\alpha = {V^\alpha}_{;\beta}. \tag{270}$$

Op een cartesische basis zijn de componenten gelijk aan ${V^\alpha}_{,\beta}$ omdat dan de vectorvelden van de basis constant zijn. Op een gekromde basis moeten we rekening houden met de afgeleiden van de basisvectoren en krijgen we ${V^\alpha}_{;\beta}$ als componenten van $\nabla\vec{V}$ in het coördinatensysteem waaraan de

[65]Ter verheldering bekijken we de covariante afgeleide ∇ weer als een geometrisch object, dit wil zeggen als een apparaat met drie sleuven. Op elk punt $\mathcal{P}$ van ruimtetijd bevindt zich een dergelijk apparaat. De interpretatie is dat $\nabla(\tilde{\sigma}, \vec{V}(\mathcal{P}), \vec{u}) \equiv \langle \tilde{\sigma}, \nabla_{\vec{u}}\vec{V} \rangle$. We stoppen een willekeurige 1-vorm $\tilde{\sigma}$ die in de tangentruimte bestaat op punt $\mathcal{P}$ in de eerste sleuf. In de tweede sleuf stoppen we een vectorveld $\vec{V}(\mathcal{P})$ dat in de omgeving van $\mathcal{P}$ gedefinieerd is. Tenslotte stoppen we in de derde sleuf een vector $\vec{u}$ die zich in de tangentruimte van punt $\mathcal{P}$ bevindt. Uit de machine rolt nu een getal dat het inproduct is van de covariante afgeleide $\nabla_{\vec{u}}\vec{V}$ van het vectorveld $\vec{V}$ in de richting van $\vec{u}$ met de 1-vorm $\tilde{\sigma}$. Je kunt $\nabla_{\vec{u}}\vec{V}$ zien als de mate van verandering van $\vec{V}$ langs de vector $\vec{u}$. Een alternatieve manier om ernaar te kijken is om de eerste sleuf leeg te laten. We krijgen dan een nieuw vectorveld $\nabla(..., \vec{V}(\mathcal{P}), \vec{u}) \equiv \nabla_{\vec{u}}\vec{V}$ uit het oude vectorveld $\vec{V}$. We noemen dat de covariante afgeleide van het vectorveld $\vec{V}$ langs de vector $\vec{u}$. Tenslotte is er een derde manier om de zaak te bekijken: we laten zowel de eerste als de derde sleuf leeg. We krijgen nu een $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensorveld $\nabla(..., \vec{V}(\mathcal{P}), ...) \equiv \nabla\vec{V}$ uit het originele vectorveld $\vec{V}$. Dit noemen we de covariante afgeleide of de gradiënt van het vectorveld $\vec{V}$.

christoffelsymbolen refereren. Er bestaat één enkele $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensor die we $\nabla\vec{V}$ noemen. In cartesische coördinaten zijn de componenten gelijk aan $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}$. In algemene coördinaten $\{x^{\mu'}\}$ worden de componenten $V^{\alpha'}_{;\beta'}$ genoemd. We kunnen deze componenten op de volgende manieren vinden: (i) reken ze direct uit met behulp van vergelijking (269) hetgeen kennis vereist van de christoffelsymbolen voor dit coördinatenstelsel; of (ii) verkrijg ze via de gebruikelijke tensortransformatie vanuit een cartesisch systeem naar $\{x^{\mu'}\}$. We demonstreren de eerste methode aan de hand van een voorbeeld in poolcoördinaten.

<u>Voorbeeld:</u> tensorcalculus in poolcoördinaten.

In poolcoördinaten is het vectorveld $\vec{e}_x$ constant: hetzelfde op elk punt. In poolcoördinaten heeft dit veld de componenten $\vec{e}_x \to (\Lambda^r{}_x, \Lambda^\theta{}_x) = (\cos\theta, -r^{-1}\sin\theta)$. Deze componenten zijn duidelijk niet constant, terwijl $\vec{e}_x$ dat wel is. Dit komt omdat de componenten refereren naar een niet constante basis. Als we deze componenten zouden differentiëren naar, zeg, θ, dan vinden we zeker niet $\partial\vec{e}_x/\partial\theta$, want dat dient gelijk te zijn aan nul. We zien dus dat alleen het nemen van de afgeleide van de componenten van een vector niet de afgeleide van de vector oplevert. We dienen ook de niet-constante basisvectoren te differentiëren, in overeenstemming met vergelijking (265). Omdat de cartesische basisvectoren $\vec{e}_x$ en $\vec{e}_y$ constante velden zijn (en hun afgeleiden dus verdwijnen) vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r &= \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta. \end{aligned} \tag{271}$$

Evenzo vinden we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_\theta &= \frac{\partial}{\partial r}(-r\sin\theta\vec{e}_x + r\cos\theta\vec{e}_y) = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta &= -r\cos\theta\vec{e}_x - r\sin\theta\vec{e}_y = -r\vec{e}_r. \end{aligned} \tag{272}$$

We kunnen nu de afgeleide $\partial\vec{e}_x/\partial\theta$ uitrekenen en vinden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_x &= \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta)\vec{e}_r + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\vec{e}_r) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\sin\theta\right)\vec{e}_\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta \\ &= -\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\left(\frac{1}{r}\vec{e}_\theta\right) - \frac{1}{r}\cos\theta\vec{e}_\theta - \frac{1}{r}\sin\theta(-r\vec{e}_r). \end{aligned} \tag{273}$$

Vereenvoudigen levert $\partial\vec{e}_x/\partial\theta = 0$ zoals we verwachten.

We kunnen ook de christoffelsymbolen berekenen en vinden

$$\begin{array}{lccccl} (1) & \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial r} & = & 0 & \to & \Gamma^\mu{}_{rr} = 0 \quad \text{voor alle } \mu, \\ (2) & \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} & = & \frac{1}{r}\vec{e}_\theta & \to & \Gamma^r{}_{r\theta} = 0, \;\; \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r}, \\ (3) & \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial r} & = & \frac{1}{r}\vec{e}_\theta & \to & \Gamma^r{}_{\theta r} = 0, \;\; \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{1}{r}, \\ (4) & \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} & = & -r\vec{e}_r & \to & \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r, \;\; \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0. \end{array} \tag{274}$$

We zien dat alle indices naar hetzelfde coördinatenstelsel refereren.

De covariante afgeleide verschilt alleen van de partiële afgeleide als de basisvectoren niet constant zijn. Een scalairveld ϕ hangt echter niet van de basisvectoren af en dus is haar covariante afgeleide gelijk aan haar partiële afgeleide en dat is de gradiënt,

$$\nabla_\alpha\phi = \partial\phi/\partial x^\alpha; \qquad \nabla\phi = \tilde{\mathrm{d}}\phi. \tag{275}$$

Vervolgens beschouwen we de *divergentie* en *Laplace* operatoren. In cartesische coördinaten is de divergentie van een vector V^α gelijk aan $V^\alpha_{,\alpha}$. Dit is een getal (scalairveld) dat we krijgen door contractie van de indices van V^α_β. Deze contractie (dit getal dus) hangt niet van het coördinatenstelsel af en we kunnen de divergentie van $\vec{V}$ dan ook uitrekenen in andere coördinaten $\{x^{\mu'}\}$ door weer de componenten van $\nabla\vec{V}$ te contraheren over haar twee indices. Het resultaat is een getal met de waarde $V^{\alpha'}_{;\alpha'}$. Het is belangrijk om in te zien dat dit hetzelfde getal is als $V^\alpha_{,\alpha}$ in cartesische coördinaten. Dus

$$V^\alpha_{,\alpha} = V^{\alpha'}_{;\alpha'}, \tag{276}$$

waarbij de indices zonder accenten refereren naar cartesische coördinaten, terwijl die met accenten refereren naar een willekeurig systeem.

Wellicht is de lezer vertrouwder met de Laplace operator en dat is de divergentie van de gradiënt. Vergelijking (276) geeft de divergentie van een vector, terwijl de gradiënt een 1-vorm is. We dienen deze 1-vorm dus eerst om te schrijven in een vector. We zullen dit weer uitwerken aan de hand van een voorbeeld in poolcoördinaten.

Voorbeeld: divergentie en Laplace operator in poolcoördinaten.

In poolcoördinaten hebben we voor de divergentie

$$V^{\alpha}_{;\alpha} = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{\partial V^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}V^r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV^r) + \frac{\partial}{\partial \theta}V^{\theta}, \tag{277}$$

waarbij we vergelijking (269) en de verschillende christoffelsymbolen in poolcoördinaten (vergelijking (274) gebruikt hebben. Teneinde de Laplace operator te vinden, starten we met een scalairveld ϕ en bepalen we de vector gradiënt. Dat is reeds gebeurd in vergelijking (264). We vullen deze vector in in vergelijking (277) en vinden

$$\nabla \cdot \nabla \phi \equiv \nabla^2 \phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}. \tag{278}$$

Dit is de Laplace operator in euclidische poolcoördinaten en deze is identiek aan

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}. \tag{279}$$

Ter afronding bekijken we de afgeleiden van 1-vormen en hogere-orde tensorvelden. Om de afgeleide van een 1-vorm te vinden, gebruiken we de eigenschap dat een 1-vorm en vector samen een scalair geven. Dus als $\tilde{p}$ een 1-vorm is en $\vec{V}$ een vector, dan is voor gegeven β, $\nabla_\beta \tilde{p}$ ook een 1-vorm, $\nabla_\beta \vec{V}$ een vector, en $< \tilde{p}, \vec{V} > \equiv \phi$ een scalar. In een willekeurig coördinatenstelsel wordt deze scalar geschreven als $\phi = p_\alpha V^\alpha$. Daarom geldt voor $\nabla_\beta \phi$ volgens de productregel voor afgeleiden

$$\nabla_\beta \phi = \phi_{,\beta} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} V^\alpha + p_\alpha \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}. \tag{280}$$

We kunnen vergelijking (269) gebruiken om $\partial V^\alpha / \partial x^\beta$ te vervangen door $V^\alpha_{;\beta}$ hetgeen de componenten zijn van $\nabla_\beta \vec{V}$ en vinden

$$\nabla_\beta \phi = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} V^\alpha + p_\alpha V^\alpha_{;\beta} - p_\alpha V^\mu \Gamma^\alpha_{\ \mu\beta} = \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} - p_\mu \Gamma^\mu_{\ \alpha\beta}\right) V^\alpha + p_\alpha V^\alpha_{;\beta}, \tag{281}$$

waarbij we in de laatste stap termen verwisseld hebben en dummie indices andere namen gegeven. Van iedere term in bovenstaande vergelijking weten we dat het een tensorcomponent is voor willekeurige $\vec{V}$, behalve van die tussen haakjes. Omdat vermenigvuldigen en optellen van tensorcomponenten altijd nieuwe tensoren oplevert, moet het zo zijn dat de term tussen haakjes ook een tensor is. Dit is de covariante afgeleide van $\tilde{p}$. Er geldt dus

$$(\nabla_\beta \tilde{p})_\alpha \equiv (\nabla \tilde{p})_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - p_\mu \Gamma^\mu_{\ \alpha\beta}. \tag{282}$$

Verder geldt

$$\nabla_\beta (p_\alpha V^\alpha) = p_{\alpha;\beta} V^\alpha + p_\alpha V^\alpha_{;\beta}. \tag{283}$$

We zien dat covariant differentiëren aan dezelfde soort productregel voldoet als vergelijking (280). Dit kan ook niet anders, want in cartesische coördinaten staat ∇ voor partiëel differentiëren van componenten.

We kunnen nu de volgende uitdrukkingen vergelijken,

$$\begin{aligned} V^\alpha_{;\beta} &= V^\alpha_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha_{\ \mu\beta}, \\ p_{\alpha;\beta} &= p_{\alpha,\beta} - p_\mu \Gamma^\mu_{\ \alpha\beta}, \end{aligned} \tag{284}$$

en zien enkele overeenkomsten en enkele verschillen. We herinneren ons dat de laatste index van het christoffelsymbool de differentiatie index is. Dit betekent dat alleen de andere indices met de metriek naar boven of beneden kunnen worden gehaald. Wat er dan nog overblijft is het tekenverschil. Hierbij helpt het om zich te herinneren dat $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}$ te maken had met afgeleiden van basisvectoren. Het lijkt daarom redelijk te veronderstellen dat $-\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ te maken heeft met afgeleiden van basis 1-vormen. De tekenverandering duidt erop dat de basis 1-vormen tegengesteld veranderen aan de basisvectoren, hetgeen redelijk is als we beseffen dat de contractie $<\tilde{\omega}^{\alpha}, \vec{e}_{\beta}>= \delta^{\alpha}{}_{\beta}$ een constante is met afgeleide nul.

Dezelfde procedure leidt ook tot

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}; \\ \nabla_{\beta} A^{\mu\nu} &= A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}; \\ \nabla_{\beta} B^{\mu}{}_{\nu} &= B^{\mu}{}_{\nu,\beta} + B^{\alpha}{}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - B^{\mu}{}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}. \end{aligned} \tag{285}$$

We zien dat deze uitdrukkingen een bepaalde systematiek hebben. Zo is er een Γ term voor elke index; een boven index wordt als een vector behandeld en een beneden index als een 1-vorm.

6.3 Christoffelsymbolen en de metriek

Het formalisme dat we in de vorige sectie besproken hebben, heeft geen eigenschappen van de metrische tensor gebruikt in het opstellen van de covariante afgeleiden. De metriek kan vectoren veranderen in 1-vormen en omgekeerd, en we verwachten daarom dat deze een rol speelt in het verband tussen hun afgeleiden. In het geval van cartesische coördinaten zijn de componenten van de 1-vorm en de eraan gerelateerde vector gelijk, en omdat ∇ dan alleen het nemen van afgeleiden van componenten is, moeten de componenten van de covariante afgeleide van de 1-vorm en vector gelijk zijn aan elkaar. Dit betekent dat als $\vec{V}$ een willekeurige vector is en $\tilde{V} = g(\vec{V},\ )$ de eraan gerelateerde 1-vorm, dan geldt in cartesische coördinaten

$$\nabla_{\beta}\tilde{V} = g(\nabla_{\beta}\vec{V}, ...). \tag{286}$$

Bovenstaande relatie is een tensorvergelijking en moet dus gelden in *alle* coördinaten. We concluderen dat

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu}V^{\mu}{}_{;\beta}, \tag{287}$$

hetgeen de componenten representatie is van vergelijking (286).

Als de hierboven gevolgde argumentatie niet bevredigend is, dan kunnen we er met vergelijkingen nog eens door heen lopen. De indices α, β, γ, ... geven cartesische coördinaten aan, terwijl de indices met accenten α', β', γ', ... willekeurige coördinaten aangeven. We beginnen met het statement $V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'}V^{\mu'}$, dat geldig is in elk coördinatenstelsel. Echter in cartesische coördinaten geldt $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ en $V_{\alpha} = V^{\alpha}$. Nu is het ook zo dat in cartesische coördinaten de christoffelsymbolen allemaal gelijk zijn aan nul. Dus hebben we $V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta}$ en $V^{\alpha}{}_{;\beta} = V^{\alpha}{}_{,\beta}$. We kunnen daarom concluderen dat $V_{\alpha;\beta} = V^{\alpha}{}_{;\beta}$, alleen in cartesische coördinaten. Om dit om te zetten in een vergelijking die geldig is in alle coördinatenstelsels, merken we op dat in cartesische coördinaten geldt dat $V^{\alpha}{}_{;\beta} = g_{\alpha\mu}V^{\mu}{}_{;\beta}$, zodat, ook weer in cartesische coördinaten, geldt dat $V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu}V^{\mu}{}_{;\beta}$. Deze vergelijking is een tensorvergelijking, zodat geldigheid ervan in één coördinatenstelsel de geldigheid in alle stelsels impliceert. We vinden dan weer vergelijking (287),

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu'}V^{\mu'}{}_{;\beta'}. \tag{288}$$

Bovenstaand resultaat heeft verreikende consequenties. Als we de β' covariante afgeleide nemen van $V_{\alpha'} = g_{\alpha'\mu'}V^{\mu'}$, vinden we

$$V_{\alpha';\beta'} = g_{\alpha'\mu';\beta'}V^{\mu'} + g_{\alpha'\mu'}V^{\mu'}{}_{;\beta'}. \tag{289}$$

Als we uitdrukking (289) vergelijken met uitdrukking (288) dan vinden we dat moet gelden

$$g_{\alpha'\mu';\beta'} = 0 \tag{290}$$

in alle coördinatenstelsels. Dat is een directe consequentie van vergelijking (286). In cartesische coördinaten is $g_{\alpha\mu;\beta} \equiv g_{\alpha\mu,\beta} = \delta_{\alpha\mu,\beta} = 0$ een triviale identiteit. Echter in andere coördinaten is dat niet zo voor de hand liggend. Dit laten we zien aan de hand van poolcoördinaten.

Voorbeeld: afgeleiden van de metrische tensor.

We starten met de procedure analoog aan vergelijking (285), en schrijven

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}, \tag{291}$$

waarbij de indices algemene coördinaten voorstellen. We werken nu een aantal termen uit in poolcoördinaten. Bijvoorbeeld stel dat $\alpha = r$, $\beta = r$ en $\mu = r$, dan vinden we

$$g_{rr;r} = g_{rr,r} - \Gamma^{\nu}{}_{rr}g_{\nu r} - \Gamma^{\nu}{}_{rr}g_{r\nu}. \tag{292}$$

Omdat $g_{rr,r} = 0$ en $\Gamma^{\nu}{}_{rr} = 0$ voor alle ν, is dit triviaal gelijk aan nul. Niet zo triviaal is $\alpha = \theta$, $\beta = \theta$ en $\mu = r$. Dan vinden we

$$g_{\theta\theta;r} = g_{\theta\theta,r} - \Gamma^{\nu}{}_{\theta r}g_{\nu\theta} - \Gamma^{\nu}{}_{\theta r}g_{\theta\nu}. \tag{293}$$

Met $g_{\theta\theta} = r^2$, $\Gamma^{\theta}{}_{\theta r} = \frac{1}{r}$ en $\Gamma^{r}{}_{\theta r} = 0$ wordt dit

$$g_{\theta\theta;r} = (r^2)_{,r} - \frac{1}{r}(r^2) - \frac{1}{r}(r^2) = 0, \tag{294}$$

en we zien dat het werkt. Het is belangrijk in te zien dat dit direct volgt uit het feit dat $g_{\alpha\beta,\mu} = 0$ in cartesische coördinaten en dat $g_{\alpha\beta;\mu}$ de componenten zijn van *dezelfde* tensor ∇g in willekeurige coördinaten.

Wat we hierboven gedaan hebben is het introduceren van covariante differentiatie in willekeurige coördinaten door onze kennis van de euclidische ruimte te gebruiken. We hebben laten zien dat de metriek van de euclidische ruimte covariant constant is, vergelijking (290). Als we gekromde ruimten gaan behandelen, zal blijken dat vergelijking (290) nog steeds geldig is, en dus ook alle consequenties ervan die we nu gaan bespreken.

6.3.1 Berekenen van de christoffelsymbolen uit de metriek

Vergelijking (776) leidt tot een uiterst belangrijk resultaat: we kunnen deze vergelijking gebruiken om $g_{\alpha\beta,\mu}$ te bepalen in termen van $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. Het omgekeerde blijkt ook waar te zijn: $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ uitdrukken in termen van $g_{\alpha\beta,\mu}$. Dat geeft een eenvoudige manier om de christoffelsymbolen uit te rekenen. We moeten eerst echter de relatie $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$ bewijzen, die geldt in elk coördinatenstelsel. Om deze symmetrie te bewijzen beschouwen we een willekeurig scalairveld ϕ. De eerste afgeleide $\nabla\phi$ is een 1-vorm met componenten $\phi_{,\beta}$. De tweede covariante afgeleide $\nabla\nabla\phi$ heeft componenten $\phi_{,\beta;\alpha}$ en is een $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor. In cartesische coördinaten zijn de componenten

$$\phi_{,\beta,\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\phi \tag{295}$$

en we zien dat deze symmetrisch zijn in α en β, omdat partiële afgeleiden commuteren. Echter als een tensor symmetrisch is in één basis, dan is hij symmetrisch in alle bases. Dus geldt

$$\phi_{,\beta;\alpha} = \phi_{,\alpha;\beta} \tag{296}$$

in elke basis. Gebruikmaken van de definitie gegeven in vergelijking (282) levert

$$\phi_{,\beta,\alpha} - \phi_{,\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} = \phi_{,\alpha,\beta} - \phi_{,\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \tag{297}$$

in elk coördinatensysteem. Maar er geldt $\phi_{,\alpha,\beta} = \phi_{,\beta,\alpha}$ en dit levert

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\phi_{,\mu} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}\phi_{,\mu} \tag{298}$$

voor willekeurige ϕ. Hiermee is bewezen dat in elk coördinatenstelsel

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}. \tag{299}$$

We gebruiken bovenstaande symmetrie om vergelijking (776) te inverteren. Dat is tevens een mooi voorbeeld van geavanceerde index-manipulatie. Hiertoe schrijven we vergelijking (776) in drie permutaties van de indices,

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu}g_{\nu\beta} + \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}, \\ g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}g_{\nu\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}, \\ -g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha}g_{\nu\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha}g_{\beta\nu}. \end{aligned} \tag{300}$$

We tellen deze op, groeperen termen, gebruiken de symmetrie van g, $g_{\beta\nu} = g_{\nu\beta}$ en vinden

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = (\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\alpha})g_{\nu\beta} + (\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\alpha})g_{\nu\mu} + (\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\beta})g_{\alpha\nu}. \tag{301}$$

In deze vergelijking vallen de eerste twee termen rechts weg vanwege de symmetrie van Γ en vinden we

$$g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha} = 2g_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu}. \tag{302}$$

Delen door 2, vermenigvuldigen met $g^{\alpha\gamma}$ (en sommeren over α), en gebruik maken van $g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\nu} \equiv \delta^{\gamma}{}_{\nu}$ levert

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}). \tag{303}$$

Dit is de uitdrukking voor de christoffelsymbolen in termen van de partiële afgeleiden van de componenten van g. We geven weer een korte demonstratie voor poolcoördinaten.

Voorbeeld: christoffelsymbolen en metriek

In poolcoördinaten geldt bijvoorbeeld

$$\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\theta}(g_{\alpha r,\theta} + g_{\alpha\theta,r} - g_{r\theta,\alpha}). \tag{304}$$

Omdat $g^{r\theta} = 0$ en $g^{\theta\theta} = r^{-2}$ vinden we

$$\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \frac{1}{2r^2}(g_{\theta r,\theta} + g_{\theta\theta,r} - g_{r\theta,\theta}) = \frac{1}{2r^2}g_{\theta\theta,r} = \frac{1}{2r^2}(r^2)_{,r} = \frac{1}{r}. \tag{305}$$

Dit is hetzelfde resultaat voor $\Gamma^{\theta}{}_{r\theta}$ dat we al eerder hebben afgeleid. Deze rekenmethode is ook geldig in gekromde ruimten.