

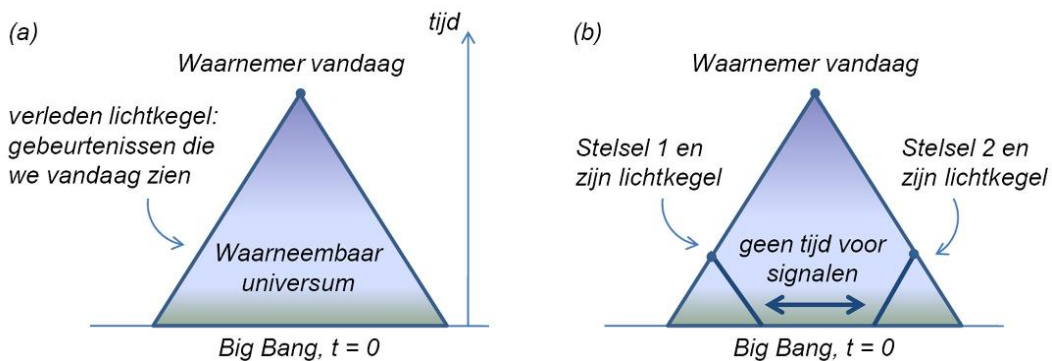
9 Relativistische kosmologie

9.1 Introductie

In de vorige hoofdstukken hebben we de speciale en de algemene relativiteitstheorie behandeld en sferisch symmetrische systemen onderzocht. De concepten van gekromde ruimte en tijd zijn bediscussieerd, we weten welk verband er bestaat tussen de metriek en de aanwezige massa en energie, en zijn in staat een verkregen metriek te gebruiken om fysisch meetbare grootheden (afstanden en tijden) te berekenen. In dit hoofdstuk zullen we een van de meest voorkomende toepassingen van de ART behandelen: de theorie van de oerknal. We zullen dan zien dat een gevolg van de relativiteitstheorie is dat het heelal uitdijt, en dat de snelheid van uitdijing te berekenen is wanneer we massa en energie kennen waarmee het heelal gevuld is. Verder zullen we ontdekken dat het model niet compleet is: waarnemingen laten zien dat er enkele onvolkomenheden in de oerknaltheorie zijn opgesloten. Deze zullen we behandelen, en daarna pogen op te lossen door de theorie uit te breiden met een nieuw idee: de kosmologische inflatie.

9.2 Het kosmologisch principe

We zullen ons nu gaan bezighouden met de toepassing van de relativiteitstheorie op het heelal. Het is belangrijk om in te zien dat het deel van het universum dat we kunnen waarnemen, op zijn minst in principe, is gelimiteerd tot het gebied dat voldoende tijd gehad heeft om ons via lichtsignalen te bereiken vanaf de Big Bang. We geven dit schematisch weer in Fig. 58. Een vraag

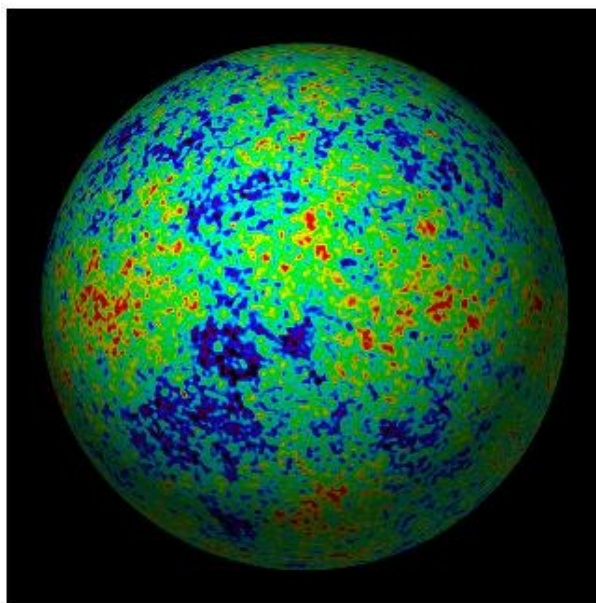


Figuur 58: (a) De verleden lichtkegel van een waarnemer vormt de grens van het waarneembare gebied dat we de deeltjeshorizon noemen. Als deze waarnemer in de toekomst een andere waarneming doet, dan is dit gebied naar boven en naar de zijkanten groter geworden. Het gebied buiten de horizon bevat gebeurtenissen die in de toekomst waarneembaar kunnen worden. Met licht ziet de waarnemer slechts gebeurtenissen die op de lichtkegel liggen, maar de gebeurtenissen binnen deze kegel kunnen informatie met lagere snelheid hebben overgebracht. Het diagram laat zien dat er grenzen zijn aan het waarneembare gebied. (b) Twee sterrenstelsels liggen in tegengestelde richtingen van elkaar en op grote afstand, zodat hun licht het universum toont toen het veel jonger was. Ze liggen zo ver uit elkaar dat ze onvoldoende tijd hebben gehad om te communiceren: hun verleden lichtkegels bereiken de Big Bang voordat ze elkaar snijden. Dit is het gebruikelijke beeld van de Big Bang zonder inflatie en toont waarom de homogeniteit van het universum moeilijk te begrijpen is voor het standaard Big Bang scenario. Het vereist dat de Big Bang op nagenoeg gelijke wijze begonnen is op niet causaal-verbonden lokaties.

dringt zich dan meteen op: op welke grond nemen we aan dat louter relativiteitstheorie genoeg is om de evolutie van het heelal te beschrijven? Er zijn immers nog enkele andere natuurkrachten,

die vele ordes van grootte krachtiger zijn dan de zwaartekracht. Dit is inderdaad het geval, maar we moeten bedenken dat deze krachten op kosmische schaal vrijwel geen invloed uitoefenen: de sterke en zwakke kernkracht werken alleen op schalen van de orde van femtometers, en de elektromagnetische kracht speelt een verwaarloosbare rol aangezien sterren, sterrenstelsels, en alle andere materie elektrisch neutraal zijn op macroscopische schaal. Het gevolg is dan ook dat alleen de zwaartekracht een rol kan spelen in de dynamica van het heelal, en dus dat we relativiteitstheorie kunnen gebruiken om deze dynamica te onderzoeken.

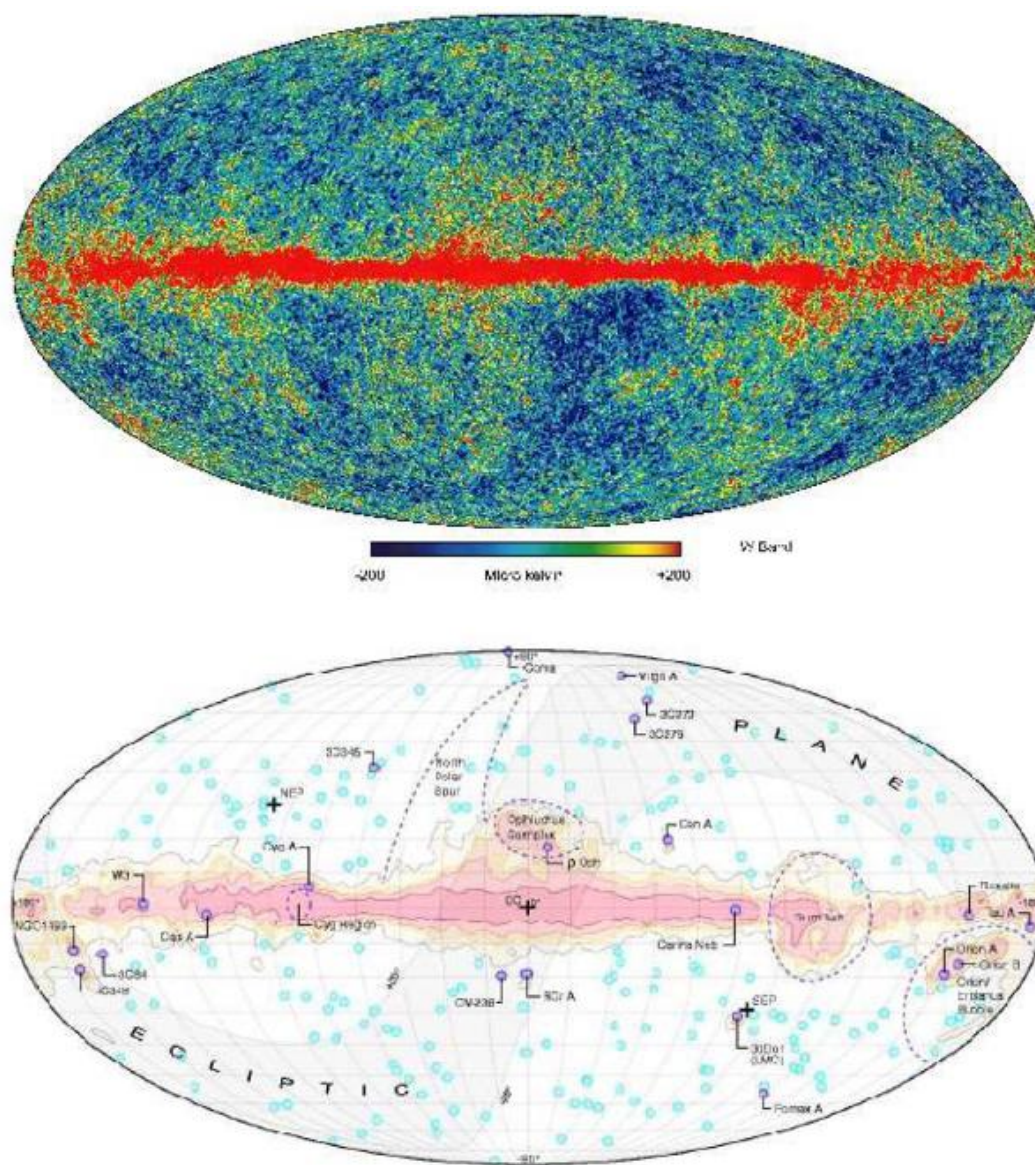
Wat weten we van het heelal? Een van de eerste dingen die opvalt wanneer we naar de nachthemel kijken, is dat het er in elke richting hetzelfde uit lijkt te zien. Wanneer iets beter bekeken, lijkt dit toch niet helemaal zo te zijn: planeten volgen een pad ten opzichte van de vaste sterren, meteorenregens verschijnen op gezette tijden en op verschillende plaatsen aan de hemel, en hier en daar lijkt de sterrendichtheid groter dan op een andere plek. Echter, al deze onregelmatigheden zijn alleen te ontwaren wanneer het heelal bekeken wordt op een schaal zo groot als wij kunnen zien in een enkel beeld van een telescoop of het blote oog; op een schaal gezien van enkele honderden megaparsecs zijn deze onregelmatigheden uitgesmeerd, en lijkt het heelal wel degelijk hetzelfde, gezien in alle richtingen. Deze eigenschap draagt de naam *isotropie*. De isotropie van



Figuur 59: De kosmische microgolf achtergrondstraling (CMBR) is een vorm van elektromagnetische straling die het universum vult. De CMBR wordt verklaard door de oerknaltheorie als het nagloeien van het waterstofplasma ongeveer 380.000 jaar na de oerknal. Dat is de periode van recombinatie van protonen en elektronen tot waterstof. De CMBR heeft het spectrum van de thermische straling van een zwart lichaam met een temperatuur van 2,725 K (tot een precisie van 50 delen op 1 miljoen) en is isotroop tot ongeveer 1 deel in 10^5 .

het heelal wordt veel meer kracht bijgezet wanneer niet alleen gekeken wordt naar de verdeling van materie in het heelal, maar ook naar de verdeling van licht en straling (zie Fig. 59). Volgens Gamow begon ons universum als een extreem hete en gecomprimeerde neutrale bol in een stralingsbad. Vanwege haar grote interne energie expandeerde deze vuurbal zó snel, dat dit proces gewoonlijk de Big Bang wordt genoemd. Tegenwoordig verschilt het geaccepteerde ‘standaard model’ van het beginnend universum in details van Gamows beeld, maar het concept van een Big Bang wordt ondersteund door de ontdekking in 1965 van de achtergrondstraling door Penzias en Wilson. In 1965 ontdekten Penzias en Wilson dat de aarde gebombardeerd

wordt door enorme aantallen fotonen die, ongeacht uit welke richting zij komen, allemaal⁸² dezelfde energie hebben (deze energie komt overeen met een temperatuur van ongeveer 2,725 Kelvin). Dit betekent dat alle zichtbare delen van het heelal dezelfde temperatuur hebben: blijkbaar is ook de stralingsenergie geheel isotroop verdeeld over het zichtbare heelal. Recente meetgegevens van de Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) worden getoond in figuur 60. De mikrogolf achtergrondstraling wordt geïnterpreteerd als de straling die overgebleven is



Figuur 60: Meetgegevens verzameld met de Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. Boven: de temperatuurverdeling in galactische coördinaten. Beneden: een referentiekaart die emissie van de melkweg, het Cygnus complex en andere bronnen toont.

van het initiële stralingsbad van het beginnend universum. Uit de ruimtelijke verdeling van de straling kunnen we informatie verkrijgen over het universum toen het ongeveer 380.000 jaar oud was. Sinds die tijd hebben de fotonen een roodverschuiving ondergaan door expansie van het

⁸²Ook nu kijken we naar het heelal op zeer grote schaal; dit betekent dat we afwijkingen van de energie van de fotonen door lokale invloeden van sterren, gaswolken, etc, buiten beschouwing laten.

universum. Voor tijden kleiner dan 380.000 jaar na de Big Bang was de temperatuur te hoog voor een ongestoorde voortplanting van de fotonen en was bijvoorbeeld ook waterstofgas niet stabiel. De meetgegevens van WMAP duiden op een temperatuur van 2,725 K met diverse anisotropieën. De grootste anisotropie is afkomstig van de beweging van ons melkwegstelsel ten opzichte van de kosmische achtergrondstraling⁸³. Belangrijk zijn vooral de anisotropieën op het 10^{-5} niveau op een schaal van ongeveer 10 boogminuten tot enkele graden. Deze kleine variaties zijn het gevolg van het zogenaamde Sachs-Wolf effect, waardoor fotonen van de achtergrondstraling een gravitationele roodverschuiving krijgen. Volgens het inflatiemodel ligt de oorsprong van deze variaties in quantumfluctuaties die gedurende de inflatie era expandeerden en resulteerden in primordiale fluctuaties. Uit deze laatste fluctuaties is de huidige structuur van ons universum ontstaan. De belangrijkste conclusies van WMAP kunnen als volgt worden samengevat:

- Het universum is $13,72 \pm 0,12$ miljard jaar oud.
- De diameter van het universum is minstens 78 miljard lichtjaar.
- Het universum bestaat uit $4,6 \pm 0,1$ % gewone baryonische materie, uit $23,3 \pm 1,3$ % van een onbekend soort ‘dark matter’ genaamd, omdat deze niet zichtbaar is, maar wel gravitationele effecten heeft, en uit $72,1 \pm 1,5$ % van iets dat we ‘dark energy’ noemen. Dit laatste is een hypothetische energievorm die het hele universum doordringt en een negatieve druk uitoefent, waardoor er effectief een afstotende gravitatiekracht ontstaat.
- De kosmologische scenario’s voor inflatie zijn consistent met de waarnemingen.
- De Hubble constante is $70,1 \pm 1,3$ km/s/Mpc.
- Als de huidige theorieën worden toegepast op de WMAP meetgegevens, dan is er een indicatie dat het universum eeuwig zal expanderen.

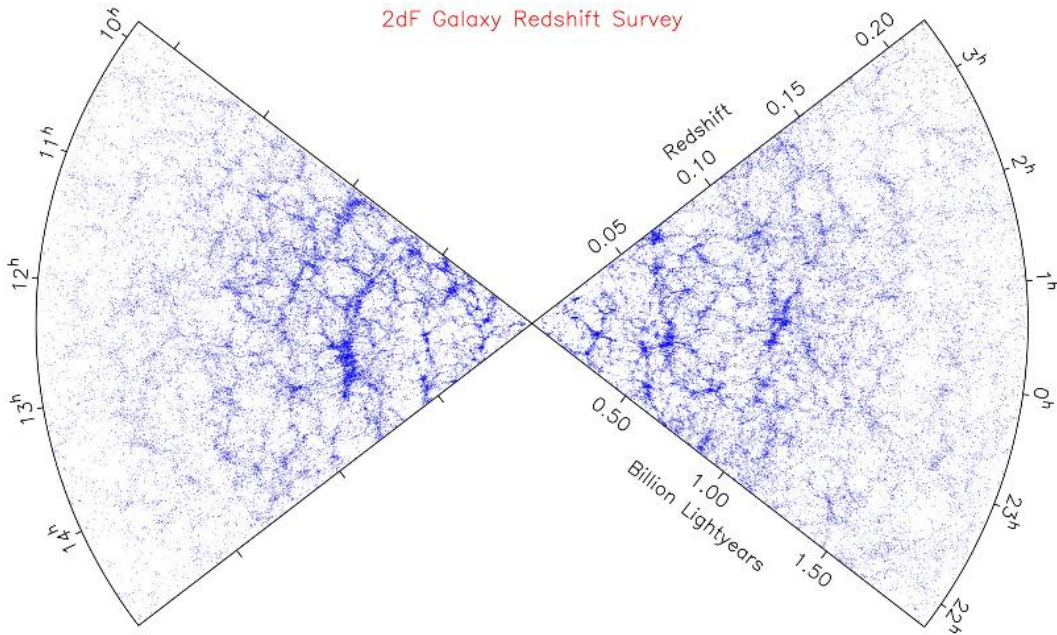
Veel van deze conclusies zullen we in het vervolg van dit hoofdstuk afleiden. Naast het overtuigende bewijs geleverd door COBE en WMAP, zijn er meer aanwijzingen voor de juistheid van de Big Bang theorie, bijvoorbeeld de abundantie van de lichte elementen, de zogenaamde primordiale nucleosynthese.

Dat de materieverdeling op grote schaal in het universum ook isotroop is, wordt getoond in Fig. 61. In het binnengebied, waar het onderzoek vollediger is, worden gaten, knopen en draden zichtbaar, maar op de grootste schalen is de verdeling van sterrenstelsels gelijk voor praktisch elk gebied in het universum. Wanneer deze isotropie wordt samengevoegd met de gedachte dat de aarde geen speciale positie inneemt, dan moeten we aannemen dat het heelal er van *elke* positie gezien er het zelfde uitziet (de zogenaamde aanname van *homogeniteit*) in alle richtingen. Deze combinatie van isotropie en homogeniteit wordt vaak als startpunt genomen van de toepassing van relativiteitstheorie op het heelal, en draagt als naam *het kosmologisch principe*:

vanaf elke positie in het heelal, lijken materie en energie gelijkmatig verdeeld te zijn, wanneer bekeken op een schaal van ongeveer 100 Mpc.

Als wij een model willen bouwen dat de evolutie van het heelal succesvol beschrijft, dan moet dit het kosmologisch principe hebben ingebouwd, danwel een manier bevatten waarop dit principe op een of andere wijze een logisch gevolg is van de details van het model. Wij zullen in het vervolg het kosmologisch principe als uitgangspunt nemen voor onze beschrijving.

⁸³Er is dus een voorkeur voor een referentiesysteem in het universum: een systeem dat in rust is ten opzichte van de kosmische achtergrondstraling. Dit breekt Lorentzinvariantie en heeft gevolgen voor de behoudswetten van energie en impuls.



Figuur 61: De 2dF roodverschuiving survey heeft spectra gemeten van 245.591 objecten, voornamelijk sterrenstelsels. Getoond worden de hoekposities en roodverschuivingen van deze sterrenstelsels. Het lijkt alsof er minder sterrenstelsels op grote afstand worden gemeten, maar dat wordt veroorzaakt door het feit dat dan alleen maar de helderste stelsels zichtbaar zijn.

Willen wij de algemene relativiteitstheorie gebruiken om het heelal te beschrijven, dan ligt het voor de hand een metriek te kiezen die een materie- en energieverdeling oplevert die in overeenstemming is met het kosmologisch principe. Dit blijkt niet een heel moeilijke taak te zijn. In de eerste plaats hadden we al opgemerkt dat zwaartekracht de enige kracht is die op deze schaal een rol speelt in de evolutie van het heelal, en dit betekent dat we geen rekening hoeven te houden met de ingewikkelde quantummechanische details van de andere drie krachten, danwel de wisselwerking van onze metriek met deze krachten opdat de gewenste homogeniteit en isotropie gevonden wordt. In plaats daarvan kunnen we de metriek en de verdeling van massa en energie als direct gecorreleerd zien zonder invloeden van de andere krachten. Zo volgt dan ook dat als de metriek zelf geen voorkeursrichting danwel voorkeurspositie kent, de energieverdeling dit ook niet zal hebben.

Het is niet zo heel moeilijk om een metriek te vinden die aan deze eis voldoet. Alvorens dit te doen, zullen we nu even een paar van de ons al bekende metrieken beschouwen. De Schwarzschild-metriek is isotroop, maar niet homogeen; de metriek die newtoniaanse zwaartekracht opleverde, vergelijking (462), is ook isotroop maar niet homogeen. De minkowskimetriek, daarentegen, is zowel isotroop als homogeen! Maar de minkowskimetriek zou tekort schieten om het heelal te beschrijven, aangezien we al gevonden hadden dat deze metriek strikt genomen alleen een oplossing is van de Einsteinvergelijkingen in de afwezigheid van materie en energie: een leeg heelal dus. Bovendien beperken we ons met deze keuze van de metriek meer dan het kosmologisch principe verlangt: het principe zegt inderdaad dat het heelal er vanaf elke positie gezien, in alle richtingen er hetzelfde uit behoort te zien, maar niet dat dit beeld *op elk tijdstip* hetzelfde hoeft te zijn. Het is dan ook toegestaan om een *tijdsafhankelijkheid* aan de minkowskimetriek toe te kennen, mits deze in alle ruimtelijke richtingen hetzelfde is. Deze tijdsafhankelijkheid voegt men toe door middel van een (op dit moment nog) onbekende functie $a(t)$, genaamd de *schaalfactor*,

en de metriek wordt gegeven door

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (518)$$

Deze metriek draagt de naam *vlakke Robertson-Walker metriek*, en speelt een hoofdrol in de kosmologie⁸⁴. De fysische betekenis van de schaafactor $a(t)$ is snel in te zien door het lijnelement ds^2 uit te schrijven. We vinden

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 + a^2(t) dy^2 + a^2(t) dz^2. \quad (519)$$

Voor een speciale waarnemer die een afstand wil meten, en voor wie daarom geldt $dt = 0$, kunnen we schrijven

$$ds^2 = a^2(t) dx^i dx_i = a^2(t) d\vec{x}^2. \quad (520)$$

Integreren om een eindige afstand S te berekenen levert

$$S = \int a(t) d\vec{x} = a(t) \int d\vec{x}. \quad (521)$$

Blijkbaar is de gemeten afstand S in de vlakke Robertson-Walker ruimte niets anders dan de afstand $\int d\vec{x}$ zoals die gemeten zou zijn in een minkowskimetriek, maal de functie $a(t)$. Dit verklaart de naam *schaalfactor*: $a(t)$ geeft aan hoeveel groter (als $a(t) > 1$) of hoeveel kleiner (als $a(t) < 1$) een gemeten afstand is bij een gegeven coördinaatafstand, vergeleken met de overeenkomstige gemeten afstand in een minkowskimetriek. Bovendien kunnen we nu de tijdsafhankelijkheid van de schaafactor interpreteren: als $a(t)$ een stijgende functie is in de tijd, betekent dit dat gemeten afstanden steeds groter worden. De implicatie hiervan is enorm: het betekent dat twee, zeg, sterren op vaste coördinaatafstand, zich van elkaar zullen verwijderen met een snelheid gelijk aan $\dot{a}(t)$. Vanaf de aarde gezien (of, overeenkomstig het kosmologisch principe, vanaf *elk willekeurig punt* in het heelal) lijken deze sterren zich van elkaar te verwijderen met een snelheid $\dot{a}(t)$. Dit geldt voor elke willekeurige twee sterren of alle andere materie of straling in het heelal: alles verwijdt zich van elkaar met een snelheid gedictieerd door de tijdsafgeleide van de schaafactor: we spreken in dat geval van een *uitdijend heelal*. Op dezelfde manier volgt dat als $a(t)$ een dalende functie in de tijd is, gemeten afstanden afnemen in de tijd, en het heelal krimpt. De tijdsafgeleide $\dot{a}(t)$ van de schaafactor is daarom een maat voor de snelheid waarmee het heelal uitdijt of inkrimpt; de tweede tijdsafgeleide $\ddot{a}(t)$ van de schaafactor is een maat voor de verandering van de uitdijingssnelheid.

9.3 De wet van Hubble

Een uitdijend of inkrimpend heelal heeft als kenmerk dat de golflengte van het licht van de sterren, oprekt of inkrimpt, en daardoor de kleur van dit licht roder danwel blauwer wordt. Dit betekent dat, in een uitdijend heelal, uitgezonden sterrenlicht roder aankomt in onze telescopen dan het uitgezonden wordt door de sterren, en bovendien dat deze roodverschuiving een maat is voor de uitdijingssnelheid $\dot{a}(t)$ van het heelal. Dit verband zullen we nu onderzoeken. We beschouwen

⁸⁴Er zijn nog twee andere metrieken denkbaar die voldoen aan het kosmologisch principe, te weten de sferische en de hyperbolische Robertson-Walker metrieken, en deze leiden tot een ruimte die niet alleen uitdijt, maar ook gekromd is. Deze beschrijven dan ook een heelal waarin aanvankelijk evenwijdig lopende lichtstralen convergeren respectievelijk divergeren. Echter, de theorie van *kosmologische inflatie* leidt ertoe dat de vlakke Robertson-Walker metriek de beste beschrijving geeft van het heelal waarin wij leven. Bovendien wordt deze vorm van de metriek bevestigd door experiment. Wij komen hierop terug in het volgende hoofdstuk.

hiertoe een lichtstraal in dit heelal. Volgens de relativiteitstheorie volgt deze lichtstraal een lichtachtig pad,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) dx^2 \\ &\equiv 0. \end{aligned} \quad (522)$$

We nemen hier aan, zonder verlies van algemeenheid, dat het licht zich langs de x -richting voortbeweegt. Als deze lichtstraal is uitgezonden op tijdstip t_e (emissie) en gemeten is op het huidige tijdstip t_o (ontvangst), dan kunnen we deze relatie integreren om te zien hoeveel coördinaatafstand R het licht aflegt tussen de emissie en ontvangst. Er geldt

$$R = \int_0^R dx = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (523)$$

We beschouwen nu een waarnemer op grote afstand die het licht in pulsjes uitzendt, en een tweede waarnemer die deze pulsjes ontvangt; hun onderlinge coördinaatafstand is R . De zender stuurt twee pulsjes weg, een tijd δt_e van elkaar. De ontvanger zal de pulsjes iets later na elkaar ontvangen, aangezien het heelal ondertussen uitdijt: hij meet dat de pulsjes een tijd δt_o na elkaar aankomen. Aangezien de coördinaatafstand tussen de twee waarnemers niet verandert tijdens uitdijing van het heelal⁸⁵, moet er nu gelden

$$c \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (524)$$

Beide kanten van de vergelijking worden vermenigvuldigd met de factor c ; deze delen we weg. De rechterkant van deze vergelijking kunnen we schrijven als

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e+\delta t_e}^{t_o+\delta t_o} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o+\delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (525)$$

Wil dit gelijk zijn aan de linkerkant van de vergelijking (524), dan moet gelden

$$\int_{t_e}^{t_e+\delta t_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_o+\delta t_o}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = 0. \quad (526)$$

Als we aannemen dat δt_o en δt_e zó klein zijn dat de schaafactor maar weinig verandert in deze integralen (dit wil zeggen: we nemen aan dat het heelal veel minder snel uitdijt dan de pulsen na elkaar uitgezonden worden), dan kunnen we $a(t)$ als constant nemen, en zegt deze laatste eis dat

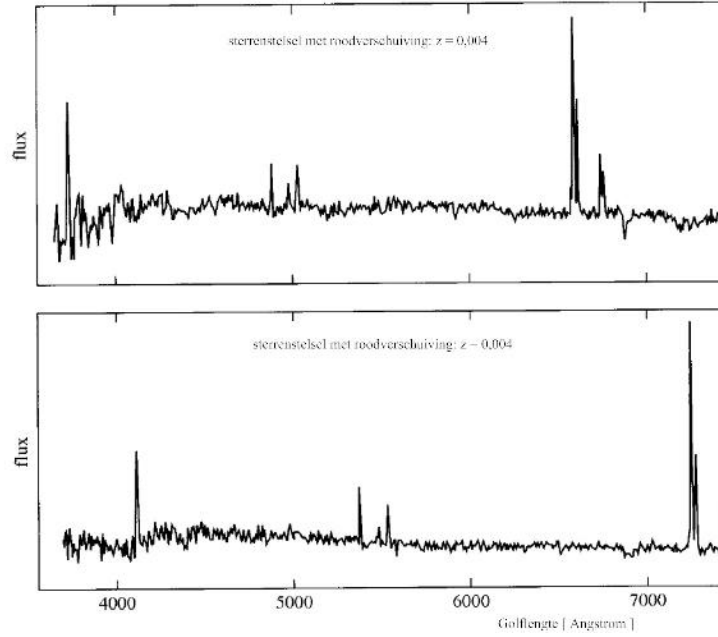
$$\frac{\delta t_o}{\delta t_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (527)$$

Dit is een relatie tussen de tijden tussen pulsjes zoals gemeten en zoals verzonden. Dit verschil wordt direct bepaald door de grootte van het heelal ten tijde van uitzending (t_e) en ontvangst (t_o). Als we de duur tussen de pulsjes nu opvatten als de trillingstijd van een lichtgolf, dan kunnen we een uitspraak doen over de verandering in frequentie $\omega \equiv 2\pi\delta t^{-1}$ (kleur) van het licht tussen emissie en ontvangst. We vinden dan de formule voor de *kosmologische roodverschuiving* z . Er geldt

$$1 + z \equiv \frac{\omega_e}{\omega_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (528)$$

We zien dat de roodverschuiving $z = \Delta\lambda/\lambda$ een maat is voor de verandering van de kleur van het licht, ten gevolge van de uitdijing van het heelal. Experimenteel gezien betekent dit, dat we door

⁸⁵In de kosmologie gebruiken we een coördinatenstelsel dat met de universele expansie mee oprekt. We noemen dergelijke coördinaten, *meebewegende coördinaten*.



Figuur 62: De kosmologische roodverschuiving. De spectra van twee sterrenstelsels worden getoond als de ontvangen intensiteit als functie van de golflengte (1 Angstrom = 10^{-10} m). De heldere lijnen van de twee spectra corresponderen met een verschuiving van $\Delta\lambda/\lambda \equiv z = 0,1$. Dit wordt de kosmologische roodverschuiving genoemd.

meting van de kleurverschuiving van sterrenlicht kunnen bepalen wat de huidige waarde is van de schaalfactor, ten opzichte van die ten tijde dat het licht uitgezonden werd. Dit geeft ons daarmee een maat voor de tijdsevolutie van de schaalfactor, en daarmee voor de uitdijingsnelheid van het heelal.

Voor sterren die niet te ver weg staan van onze telescopen heeft het licht niet veel tijd nodig om de afstand te overbruggen, en kan de schaalfactor nooit heel erg veranderd zijn tussen de momenten van uitzending en ontvangst van het sterrenlicht. Dit betekent dat we de schaalfactor ten tijde van uitzending, $a(t_e)$, goed kunnen benaderen door de Taylor-reeks

$$a(t_e) \approx a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o). \quad (529)$$

Ingevuld in de formule voor de kosmologische roodverschuiving, volgt op deze manier

$$\begin{aligned} 1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} &\approx a(t_o) \left(a(t_o) + \dot{a}(t_o)(t_e - t_o) \right)^{-1} \\ &\approx 1 + \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}(t_o - t_e), \end{aligned} \quad (530)$$

waar in de laatste stap de wiskundige regel is gebruikt dat $(1 + x)^m \approx 1 + mx$, welke geldt als $mx \ll 1$; dit is hier het geval, aangezien $(t_e - t_o)$ een maat is voor de afstand tussen zender en ontvanger, en we hadden aangenomen dat deze klein is. Het tijdsverschil $(t_e - t_o)$ laat zich omzetten in een afstand tussen de zender en ontvanger door een factor c te plaatsen. Op deze manier is nu de roodverschuiving van sterrenlicht gerelateerd geraakt aan de afstand d tot de ster als

$$z \approx \frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)} \frac{d}{c}. \quad (531)$$

De combinatie $\frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)}$ draagt de naam *Hubble constante* en is een maat voor de snelheid waarmee het heelal op dit moment uitdijt. Hij is vernoemd naar Edwin Hubble, die dit lineaire verband tussen roodverschuiving en afstand tot de sterren al in 1929 wist te meten; hiermee werd het eerste experimentele bewijs geleverd voor het uitdijen van het heelal. Sindsdien zijn de metingen steeds nauwkeuriger geworden, en is de waarde van de Hubble constante vastgesteld op, in eenheden die in de waarnemende sterrenkunde gebruikelijk zijn, $H(t_o) = 70,1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$; in standaardeenheden is de waarde ongeveer $H(t_o) = 2,1 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$. Deze experimentele waarde zullen we later nodig hebben om de leeftijd van het heelal te schatten.

9.4 De Friedmannvergelijkingen

Een van de grootste opgaven van de kosmologie is het bepalen van de expliciete vorm van de functie $a(t)$: wanneer die bekend is, weten we namelijk hoe de grootte van het heelal (en mogelijk zijn oorsprong en toekomstig gedrag) evolueert in de tijd. De vraag is dan ook: hoe kunnen we de vorm van de schaalfactor bepalen? Het antwoord wordt, zoals altijd, uiteindelijk gedicteerd door de aanwezigheid van materie en energie in het heelal. Immers, de vorm en het gedrag van een metriek is via de Einsteinvergelijkingen gekoppeld aan de energie-impuls tensor $T_{\mu\nu}$, en het ligt dan ook voor de hand om de vraag te stellen welke energie-impuls tensor als gevolg heeft dat de Einsteinvergelijkingen de Robertson-Walker metriek als oplossing kent. Merk op hoe dit afwijkt van de gebruikelijke procedure: meestal bij het doen van relativiteitstheorie, is de energie-impuls tensor het *startpunt* van berekeningen, en is de metriek een *gevolg*; de huidige situatie is een van de weinige keren dat de metriek bekend is, en er een energie-impuls tensor gevonden dient te worden.

Dit is geen triviaal probleem: het vraagstuk wordt bemoeilijkt door het feit dat er een wisselwerking plaatsvindt tussen de tijdsafhankelijkheid van de metriek, en de vorm van de energie-impuls tensor. Denk ter illustratie aan een gas in een ballon: niet alleen wordt de grootte van de ballon bepaald door de druk van het gas in de ballon, maar deze druk is zelf weer een functie van de grootte (grootte van de ballon) van het volume waarin het gas opgesloten is. Op dezelfde manier wordt de metriek (een maat voor de grootte van het heelal) niet alleen *bepaald* door de aanwezige energie en materie, maar oefent deze metriek ook zelf weer een *invloed* uit op de energie-impuls tensor: een ingewikkelde wisselwerking is het gevolg.

Het kosmologisch principe biedt uitkomst. Willen energie en materie homogeen en isotroop verdeeld zijn over het heelal, dan moet de energie-impuls tensor overeenkomstig gekozen worden, wat betekent dat deze tensor geen plaatsafhankelijkheid mag kennen. Verder doet de eis van een uitgesmeerde hoeveelheid materie ons denken aan een *perfecte vloeistof*. Vloeistoffen worden gekenmerkt door een druk P en een energiedichtheid ρ , die, zoals beargumenteerd, nu ten hoogste van de tijd mogen afhangen. Voor vloeistoffen is een energie-impuls tensor bekend, en deze wordt gegeven door (zie ook vergelijking (307), maar merk op dat we ρ nu als *energiedichtheid* definiëren in plaats van een *massadichtheid*)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (532)$$

waarin U^μ de viersnelheid is. Voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van de vloeistof (omdat we meebewegende coördinaten gebruiken) geldt dat $U^\mu = (c, 0, 0, 0)$.

Nu het kosmologisch principe ons tot aannames heeft geleid voor de vorm van de metriek en de vorm van de energie-impuls tensor, kunnen de Einsteinvergelijkingen worden gebruikt om het verband tussen de twee objecten te vinden; het resultaat zal zijn dat er een direct verband bestaat tussen de schaalfactor $a(t)$ en de druk $P(t)$ en energiedichtheid $\rho(t)$ van het heelal.

Hiertoe dienen de Riccitenor en Riemannscalar behorend bij de Robertson-Walker metriek te worden berekend. Dit is een eenvoudige opgave, en leidt tot

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}, \\ R_{ij} &= -\left(2\dot{a}^2(t) + a(t)\ddot{a}(t)\right)\delta_{ij}, \\ R &= -6 \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - 6 \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}. \end{aligned} \quad (533)$$

Wanneer deze worden ingevuld in de linkerkant van de Einsteinvergelijkingen en de energie-impuls tensor ingevuld in de rechterkant, wordt een tensorvergelijking gevonden die in principe 10 verschillende relaties geeft tussen de schaafactor en de druk en dichtheid van de aanwezige energie en materie. Echter, uiteindelijk levert dit ons slechts twee relaties op, aangezien de tensoren alleen niet-nul componenten op de diagonaal kennen, en de drie ruimtelijke componenten hiervan dezelfde informatie bevatten (kosmologisch principe!). Voor $\mu = 0, \nu = 0$ levert dit

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \quad (534)$$

en voor $\mu = i, \nu = i$ levert dit

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}P(t). \quad (535)$$

Het is gebruikelijk deze tweede vergelijking te herschrijven door de eerste vergelijking te substitueren; de twee resulterende vergelijkingen zijn dan

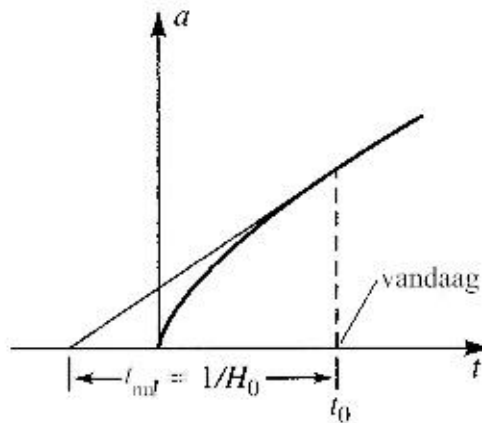
$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 &= +\frac{8\pi G}{3c^2}\rho(t), \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(3P(t) + \rho(t)\right). \end{aligned} \quad (536)$$

Deze twee vergelijkingen geven het verband tussen de energiedichtheid en druk van de vloeistof waarmee we het heelal gevuld hebben, en de schaafactor. Zij heten de *Friedmannvergelijkingen*, en vormen het hart van de kosmologie. Vraagstukken over de evolutie van de grootte van het heelal zijn hiermee tot een simpel stappenplan gereduceerd: beargumenteer wat de druk $P(t)$ en dichtheid $\rho(t)$ zijn van de energie en materie in het heelal, los de Friedmannvergelijkingen op, en vind dan de expliciete vorm van de schaafactor $a(t)$ (en daarmee de mate van uitdijning of inkrimping van het heelal). In sectie 9.5 zullen we deze vergelijkingen expliciet oplossen voor enkele speciale gevallen, en hieruit het model van de oerknal construeren. Alvorens dit te doen zullen we enkele directe, algemene gevolgen (dus geldend voor *alle* oplossingen) van de Friedmannvergelijkingen bekijken.

Ten eerste voorspellen de Friedmannvergelijkingen dat het heelal een begin heeft gehad. Dit kan worden geconcludeerd op basis van het feit dat, voor ons bekende soorten materie en energie, de dichtheid en druk beide positieve grootheden zijn⁸⁶ en de rechterkant van de tweede Friedmannvergelijking daarom negatief is: hieruit volgt dat $\ddot{a}(t)$ negatief is: de uitdijningssnelheid van het heelal neemt af in de tijd. Gecombineerd met Hubbles experimentele feit dat het heelal op dit moment uitdijt, $\dot{a}(t_{\text{nu}}) > 0$, leidt dit direct tot de conclusie dat op een bepaald moment

⁸⁶In de volgende sectie zullen we zien dat er ook een energiesoort bestaat waarvoor dit niet opgaat; echter, zoals we eveneens zullen aantonen, heeft deze energiesoort een verwaarloosbare invloed in de eerste paar miljarden jaren van het heelal, en kan daarom worden genegeerd wanneer we voorspellingen willen doen over het vroege heelal.

in de historie van het heelal, de schaafactor $a(t)$ de waarde nul heeft aangenomen. Dit correspondeert met een heelal waarin alle materie en energie opgeborgen is geweest in een oneindig klein volume. De Friedmannvergelijkingen voorspellen dan ook dat de ruimtetijd begonnen is als een *singulariteit met oneindige energiedichtheid*, en daarna (om onduidelijke redenen) is gaan uitdijen. Dit moment wordt gezien als het begin van het heelal, en draagt de naam *oerknal*. Hierop voortbordurend, kan de tijd verlopen sinds de oerknal opgevat worden als de leeftijd van



Figuur 63: De Hubble constante is gerelateerd aan de schaafactor en levert een bovengrens op de leeftijd van het heelal.

het heelal. Een schatting van de leeftijd kan gemaakt worden door op te merken dat de schaafactor $a(t)$ zijn huidige waarde heeft gekregen terwijl het is gegroeid met een ‘snelheid’ gelijk aan $\dot{a}(t)$. Een eerste schatting van de leeftijd van het heelal kan daarom worden gevonden door de huidige waarde van de schaafactor te delen door zijn huidige expansiesnelheid. Dit levert in het algemeen een overschatting op, aangezien de tweede Friedmannvergelijking ons al leerde dat de snelheid van uitdijing $\dot{a}(t)$ niet altijd dezelfde waarde heeft gehad maar steeds kleiner is geworden. Het volgt daarom dat de leeftijd t_{nu} van het heelal een bovengrens heeft gegeven door

$$t_{\text{nu}} < \frac{a(t_{\text{nu}})}{\dot{a}(t_{\text{nu}})}. \quad (537)$$

Aan de rechterkant van deze ongelijkheid herkennen we de inverse van de *Hubble constante* die we al eerder geïntroduceerd hadden, $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$. Het essentiële verschil met de laatste keer dat wij deze tegenkwamen, is dat H toen nog alleen op het huidige tijdstip werd genomen, waar we vanaf nu $H(t)$ ook op andere tijden zullen beschouwen⁸⁷. Zoals besproken is $H(t)$ een fysisch meetbare grootte, te bepalen door de roodverschuiving van dichtbijgelegen sterren te meten, en is bekend een waarde te hebben van ongeveer 70 (km/s)/Mpc. Als we deze waarde invullen in vergelijking (537), levert dat een bovengrens voor de leeftijd van het heelal van ongeveer 15 miljard jaar.

9.5 Oplossingen van de Friedmannvergelijkingen

Het heelal is, voor zover wij kunnen overzien en hebben kunnen meten, gevuld met energie en materie die we in drie groepen kunnen verdelen. Ten eerste is er de *koude materie*: atomen, molekulen en alles wat daarvan gemaakt is. Denk hierbij aan sterren, sterrenstelsels, gaswolken,

⁸⁷Merk op dat het daarom strikt genomen niet correct is om H aan te duiden als een *constante*: hij is immers tijdsafhankelijk. Het is echter algemeen gebruik om $H(t)$ nog altijd aan te duiden met de naam *Hubble constante*, en dat zullen we in het vervolg dan ook blijven doen.

nevels, de aarde en alles wat erop leeft, en ook de mysterieuze donkere materie. Ten tweede is er *straling*, waarmee we alles bedoelen wat zich met (vrijwel) de lichtsnelheid voortbeweegt: fotonen uitgezonden door sterren, de fotonen van de kosmische achtergrondstraling (deze waren we al tegen gekomen bij de introductie van het kosmologische principe), maar ook zeer snel bewegende massieve deeltjes horen in deze categorie. Ten derde is er de geheimzinnige energie die, zoals we zullen zien, het heelal versneld doet uitdijen, en waarvan de oorsprong nog een groot mysterie is; dit soort energie zullen we aanduiden met de naam *kosmologische constante*⁸⁸.

Elk van deze soorten materie en of energie zal een specifieke evolutie van het heelal voorspellen, en doel van deze sectie is het oplossen van de Friedmannvergelijkingen voor deze gevallen. Hiertoe zullen we uitdrukkingen moeten opschrijven voor de energiedichtheid en druk ten gevolge van elk van deze drie soorten energie en materie. We zullen daarbij aannemen dat de dichtheid en druk evenredig zijn aan elkaar

$$P(t) = n\rho(t). \quad (538)$$

Deze vergelijking wordt de *toestandsvergelijking* genoemd van de energie of materie. De waarde van de evenredigheidsconstante n is afhankelijk van meerdere factoren (waaronder de temperatuur, het type materie of energie, mate van interactie met andere soorten energie, en quantummechanische eigenschappen), maar kan in de huidige context als constant worden beschouwd.

Om de waarde van n te vinden, kan men kennis uit de thermodynamica gebruiken (dit is immers de studie van macroscopische grootheden als druk en interne energie van materie) en met name de eerste hoofdwet, de wet van behoud van totale energie. In andere takken van fysica is dit inderdaad de manier waarop n bepaald wordt. Echter, in het geval van de kosmologie is dit niet nodig: zoals dadelijk zal blijken, *dicteren* de Friedmannvergelijkingen wat de waarde is van n . Voor elke gegeven vorm van de energiedichtheid $\rho(t)$, volgt dan ook direct de druk $P(t)$. Dit is niet verbazingwekkend: de Friedmannvergelijkingen volgen uit de Einsteinvergelijkingen, en deze hebben, zoals we gezien hebben in hoofdstuk 7, het behoud van energie ingebouwd.

9.5.1 Heelal gedomineerd door koude materie

In het geval van de koude materie kunnen we een goede aanname doen voor de vorm van de energiedichtheid $\rho(t)$. Een energiedichtheid is altijd gedefinieerd als een hoeveelheid energie of materie gedeeld door een volume. Nu wordt met volume uiteraard het *fysische* volume bedoeld, een produkt van fysisch gemeten lengte, breedte, en hoogte. Elk van deze drie grootheden zijn afstanden, en fysische afstanden worden (zoals we al gezien hadden) direct bepaald door de schaafactor $a(t)$. Het ligt dan ook voor de hand om de dichtheid van de koude materie te schrijven als

$$\rho(t) = \frac{A}{a^3(t)}, \quad (539)$$

waarin A een constante is; het is een maat voor de hoeveelheid energie en materie ten tijde dat de schaafactor precies de waarde $a(t) = 1$ had; de waarde ervan is niet zo relevant in de volgende discussie. We zullen aannemen dat A niet van waarde verandert; fysisch betekent dit dat de koude materie niet omgezet wordt in een van de andere soorten energie. De Friedmannvergelijkingen nemen dan de volgende vorm aan,

$$\begin{aligned} \dot{a}^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{A}{a(t)}, \\ \ddot{a}(t) &= -\frac{4\pi G}{3c^2} (1 + 3n) \frac{A}{a^2(t)}. \end{aligned} \quad (540)$$

⁸⁸In de literatuur duiken ook andere namen op, veelal afhankelijk van de context waarin deze energie beschreven wordt, en zonder dat er een duidelijk onderscheid gehanteerd wordt tussen de eventuele subtiele verschillen tussen al deze concepten: *vacuum energie*, *donkere energie*, *quintessence veld*, etc.

Bovenstaande differentiaalvergelijkingen zullen wij dadelijk expliciet oplossen om de schaafactor als functie van de tijd te vinden; eerst zullen we laten zien dat deze vergelijkingen, zoals beloofd, ook de waarde van de constante n bepalen. Differentieer hiertoe de eerste van deze vergelijkingen naar de tijd

$$2\ddot{a}(t) = -\frac{8\pi G}{3c^2} \frac{A}{a^2(t)}, \quad (541)$$

en substitueer deze in de tweede van de vergelijkingen. We vinden dan

$$-\frac{4\pi G}{3c^2} A = -\frac{4\pi G}{3c^2} (1 + 3n)A, \quad (542)$$

wat alleen waar kan zijn wanneer de evenredigheidparameter n gelijk is aan 0. Hiermee is gevonden dat de druk $P(t) = n\rho(t)$ ten gevolge van koude materie gelijk is aan nul. Fysisch betekent dit dat deze materie te weinig energetisch is om de deeltjes van deze materie genoeg snelheid te geven om een significante druk uit te oefenen. Het is precies om deze reden dat we deze materie het predikaat ‘koud’ hebben gegeven.

Nu er uitdrukkingen gevonden zijn voor de energiedichtheid en druk voor het geval van koude materie, kunnen we deze uitdrukkingen substitueren in de Friedmannvergelijkingen, en deze pogen op te lossen om zo de schaafactor $a(t)$ te vinden. De volgende differentiaalvergelijkingen worden dan gevonden,

$$\begin{aligned} a(t)\dot{a}^2(t) &= \frac{8\pi G}{3c^2} A, \\ a^2(t)\ddot{a}(t) &= -\frac{4\pi G}{3c^2} A. \end{aligned} \quad (543)$$

Het is niet moeilijk in te zien dat de oplossing van deze vergelijkingen gegeven wordt door de functie

$$a(t) = Bt^{2/3}, \quad (544)$$

waarin B een integratieconstante is⁸⁹. Een oplossing is gevonden! Louter op basis van het kosmologisch principe en een voor de hand liggende aanname voor de energiedichtheid van de aanwezige materie, is nu gevonden hoe het heelal evolueert in de tijd. Interessant om te zien is het volgende: de gevonden oplossing voorspelt dat het heelal uitdijt: $\dot{a}(t) > 0$, maar dat deze uitdijing steeds minder snel gaat: $\ddot{a} < 0$; dit is precies wat we verwachten op basis van het feit dat zwaartekracht een aantrekkende werking heeft.

9.5.2 Heelal gedomineerd door straling

Ook voor het geval van straling kunnen we een goede aanname doen voor de vorm van de energiedichtheid. Wederom geldt dat de dichtheid van straling (fotonen) afneemt naarmate het heelal uitdijt en dus dat $\rho(t) \propto a^{-3}(t)$. Bovendien geldt dat er een *extra* afname van de energiedichtheid optreedt ten gevolge van de kosmologische roodverschuiving. Voor fotonen geldt dat de energie wordt gegeven voor $E = h\nu = \hbar\omega$, waar ν de frequentie (ω de hoekfrequentie $2\pi\nu$) is van de fotonen. Uitgedrukt in de golflengte λ is deze relatie gegeven door $E = (2\pi\hbar c)/\lambda$, waar de golflengte λ een fysische afstand is, en daardoor schaalt met $a(t)$. Het gevolg is dan ook dat de stralingsenergiedichtheid afneemt met een extra factor $a(t)$ ten gevolge van deze roodverschuiving, en we dus verwachten dat de stralingsenergiedichtheid gegeven wordt door

$$\rho(t) = \frac{A}{a^4(t)}. \quad (545)$$

⁸⁹De constante factoren in de uitdrukking voor de schaafactor zijn fysisch weinig interessant: ze herdefiniëren alleen de eenheid waarin afstanden gemeten worden. Om uitspraken te doen over de uitdijing van het heelal is alleen de *verhouding* tussen de schaafactoren van twee tijdstippen van belang. De constanten B vallen er dan altijd uit.

(waarin A een constante is). Op dezelfde manier als eerder, kunnen we de Friedmannvergelijkingen gebruiken om de waarde van de constante n te bepalen, en daarmee een functie voor de druk $P(t)$. Er wordt dan gevonden dat $n = 1/3$, en straling daarom de volgende druk kent,

$$P(t) = \frac{1}{3}\rho(t) = \frac{A}{3} \frac{1}{a^4(t)}. \quad (546)$$

Met behulp van de gevonden uitdrukkingen voor energiedichtheid en druk, kunnen we ze vervolgens in de Friedmannvergelijkingen substitueren en vinden we voor het stralingsgedomineerde heelal

$$\begin{aligned} a^2(t)\dot{a}(t) &= +\frac{8\pi G}{3c^2}A, \\ a^3(t)\ddot{a}(t) &= -\frac{8\pi G}{3c^2}A. \end{aligned} \quad (547)$$

De oplossing voor deze vergelijkingen is snel gevonden. Er geldt

$$a(t) = B\sqrt{t}, \quad (548)$$

waarin B een integratieconstante is. Deze oplossing vertelt ons dat een heelal gevuld met straling, uitdijt, $\dot{a}(t) > 0$, en dat de uitdijingssnelheid afneemt, $\ddot{a}(t) < 0$, wederom precies zoals we zouden verwachten op basis van het gegeven dat zwaartekracht een aantrekkende invloed uitoefent. Ook is te zien dat de uitdijing van een stralingsgedomineerd heelal sneller gaat dan de uitdijing van een heelal gedomineerd door koude materie. Dit heeft een belangrijke consequentie, waar we dadelijk op zullen terugkomen.

9.5.3 Heelal gedomineerd door een kosmologische constante

Tenslotte zullen we een heelal beschouwen dat gevuld is met een energievorm die wij hebben aangeduid met de naam ‘kosmologische constante’. We hebben de implicaties voor een deel al in sectie 7.9 besproken. Per definitie wordt hiermee een energievorm bedoeld, waarvan de energiedichtheid niet afneemt tijdens het uitdijen of inkrimpen van het heelal: $\rho(t)$ zal als een constante ρ_c worden gekozen,

$$\rho(t) = \rho_c = \text{const.} \quad (549)$$

Fysisch betekent dit dat deze energievorm niet een gevolg kan zijn van ‘normale’ materie of straling: voor alle soorten straling en materie geldt immers dat de dichtheid afneemt wanneer het uitgesmeerd wordt over een steeds groter wordend volume. De kosmologische constante kan daarom misschien het best⁹⁰ worden gezien als een eigenschap van de ruimtetijd *zelf* (en niet van iets *op* de ruimtetijd): een energie die gedragen wordt door de ruimtetijd en daarom niet afhangt van de grootte van de ruimtetijd. Het is een experimenteel feit dat er wel degelijk een energievorm in het heelal aanwezig is die aan deze eigenschap voldoet: ongeveer driekwart van *alle* energie, lijkt van deze bijzondere vorm te zijn. We zullen hier later op terugkomen; op dit moment zullen we wederom de Friedmannvergelijkingen gebruiken om uit te rekenen hoe de druk van deze materie eruit ziet. Op dezelfde manier als eerder, kan uit de Friedmannvergelijkingen worden gevonden dat $n = -1$, en dus dat de druk ten gevolge van de kosmologische constante eveneens constant is, en gegeven wordt door

$$P(t) = -\rho(t) = -\rho_c = \text{const.} \quad (550)$$

⁹⁰Een andere mogelijkheid die is bestudeerd, is dat energie niet behouden is op kosmische schaal: er wordt spontaan materie en/of energie gecreëerd uit het niets, en dit in precies de juiste hoeveelheden om de afname van de dichtheid ten gevolge van het groeien van het volume te compenseren. Deze aanpak is echter niet erg succesvol gebleken, en wordt door weinig kosmologen aangehangen.

Merk op dat deze druk *negatief* is! Nu druk en dichtheid zijn gevonden, kunnen de Friedmann-vergelijkingen gebruikt worden om de schaafactor uit te rekenen. Zij worden gegeven door

$$\begin{aligned}\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c, \\ \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} &= \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c.\end{aligned}\tag{551}$$

De oplossing is wederom eenvoudig te vinden, en is

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_c}t},\tag{552}$$

waarin a_0 een integratieconstante is. De uitdijing van dit heelal is exponentieel, en gaat dientengevolge *steeds sneller*. Merk op hoe dit indruist tegen ons begrip van zwaartekracht: we zouden verwachten dat een aantrekkende kracht de uitdijingssnelheid van het heelal zou afremmen (zoals ook het geval was voor een heelal gevuld met koude materie of straling). Wederom blijkt hier dat de kosmologische constante een bijzonder vreemde soort energie is!

9.6 Het Standaard Model van de kosmologie

Het heelal dijt uit. Dit was een direct gevolg van de Friedmannvergelijkingen, en was bovendien experimenteel geverifieerd. Dit betekent dat de energiedichtheid van de verschillende energievormen vroeger vele malen groter was dan tegenwoordig. Dit uit zich in een afnemende hoeveelheid energie die deeltjes kunnen uitwisselen. De uitwisselingsenergie van de deeltjes bepaalt in welke mate zij interactie aangaan met andere deeltjes, en zo volgt dat er verschillende maten van interactie hebben plaatsgevonden naarmate het heelal ouder werd en groeide.

Nu we de schaafactoren ten gevolge van verschillende soorten energie en materie hebben berekend, kunnen wij ze gebruiken om een model te maken van de geschiedenis van het heelal: wanneer hebben welke fysische processen plaatsgevonden? We zullen hierbij gebruik moeten maken van een aantal verschillende takken van de fysica, zoals de atoomfysica en de subatomaire fysica. Het resultaat staat bekend als het *Standaard Model van de kosmologie*. De berekeningen die we nu zullen doen, nemen niet alle subtiele (en belangrijke!) aspecten van het verhaal in beschouwing, maar zullen desondanks tot goede schattingen leiden van de ordes van grootte van de tijden waarop belangrijke gebeurtenissen hebben plaatsgevonden.

We zullen aannemen dat de interactie tussen verschillende soorten materie altijd heeft plaatsgevonden door uitzending van fotonen of gluonen. Dit is in overeenstemming met onze kennis van de atoom- en subatomaire fysica, die zegt dat, inderdaad, de interactie tussen quarks (voornamelijk) wordt bewerkstelligd door uitzending van gluonen, en de interactie tussen elektronen en protonen door uitzending van fotonen. Beide typen deeltjes zijn massaloos, en kunnen we daarom opvatten als straling. De energiedichtheid voor straling in een uitdijend heelal zijn we al tegengekomen: we hadden toen gezien dat de energiedichtheid van straling schaaft met $a^{-4}(t)$. De energie per foton⁹¹ is niets anders dan de energiedichtheid maal het volume; de laatste schaaft met $a^3(t)$, en zo volgt dat de energie E_{foton} van een enkel foton het volgende verband kent met de schaafactor,

$$E_{\text{foton}} \propto \frac{1}{a(t)}.\tag{553}$$

Deze relatie geldt zowel in een stralingsgedomineerd- als in een door koude materie gedomineerd heelal. Het is pas wanneer de specifieke functie voor de schaafactor wordt ingevuld, dat het

⁹¹Net als eerder zullen we, voor het gemak, alleen fotonen bij naam noemen, en in het achterhoofd houden dat de volgende resultaten ook gelden voor gluonen.

verschil tussen beide situaties zichtbaar wordt. Dit leidt tot functies voor de energieën van een foton in een stralingsgedomineerd heelal ($E_{\text{foton, straling}}$) en in een materie gedomineerd heelal ($E_{\text{foton, materie}}$), gegeven door

$$E_{\text{foton, straling}} = A_{\text{straling}} t^{-1/2}, \quad E_{\text{foton, materie}} = A_{\text{materie}} t^{-2/3}. \quad (554)$$

Hierin zijn de A 's constanten, die nog nader bepaald zullen worden.

Deze twee vergelijkingen zijn de sleutel tot het berekenen van de leeftijd van het heelal op het moment dat belangrijke fysische gebeurtenissen plaatsvonden. Het enige dat gedaan moet worden, is invullen welke energie de fotonen op dat moment gehad hebben, en dan de bijbehorende tijdstippen uitrekenen. Hiertoe is wel nog wat extra informatie nodig: de constanten A_{straling} en A_{materie} zullen een waarde toegekend moeten worden, en verder moet er een idee zijn van wanneer welk van de twee vergelijkingen gebruikt mag worden. Dit wil zeggen: kunnen we een schatting maken van de leeftijd van het heelal waarop de invloed ten gevolge van koude materie dominanter werd dan die ten gevolge van straling?

De laatste vraag kunnen we beantwoorden met behulp van een experimenteel gegeven: als er gemeten wordt hoeveel energie er ongeveer per volume-eenheid aan fotonen en aan atomen is in het heelal, dan wordt er gevonden dat er op dit tijdstip ongeveer 1000 keer meer energiedichtheid ten gevolge van materie is, dan ten gevolge van fotonen. Er geldt

$$\left(\frac{\rho_{\text{materie}}}{\rho_{\text{fotonen}}} \right)_{\text{nu}} \approx 1000. \quad (555)$$

De linkerkant van deze vergelijking schaalt, volgens vergelijkingen (539) en (545), met de schaal-factor

$$a(t_{\text{nu}}) \propto 1000. \quad (556)$$

Er staat hier nu het evenredigheids-teken ($\propto$), omdat we alleen weten dat de dichtheden evenredig zijn met schaalfactoren. We kennen de waarden van de evenredigheidsconstanten niet. Het zal blijken dat we die ook niet nodig hebben.

Vergelijking (556) geldt in het huidige heelal, $t = t_{\text{nu}}$. We kennen echter ook een dergelijke vergelijking ten tijde van het moment waarop de energiedichtheid ten gevolge van straling even groot was als die ten gevolge van materie: per definitie zijn deze dichtheden dan gelijk. Er geldt

$$\left(\frac{\rho_{\text{materie}}}{\rho_{\text{fotonen}}} \right)_{\text{omslag}} \equiv 1. \quad (557)$$

We bedoelen met het label *omslag*, ten tijde van het omslagpunt van een stralingsgedomineerd heelal naar een materiegedomineerd heelal. Er geldt vervolgens weer

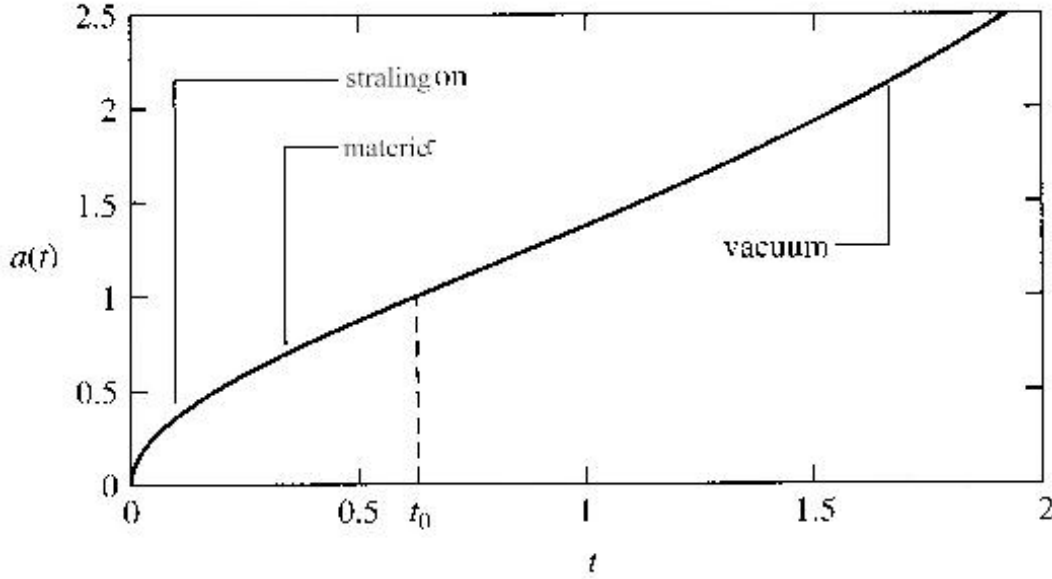
$$a(t_{\text{omslag}}) \propto 1. \quad (558)$$

Ook hier geldt dat we alleen weten dat er een evenredigheid is. Echter, en dit is van cruciaal belang, de onbekende evenredigheidsconstante is *dezelfde* als in vergelijking (554). Dit betekent dat we de twee vergelijkingen (555) en (557) op elkaar kunnen delen en dan vinden

$$(a)_{\text{nu}} = 1000 \cdot (a)_{\text{omslag}}, \quad (559)$$

nu *zonder* evenredigheidsteken.

Vergelijking (559) stelt dat het heelal ten tijde van het omslagpunt, ongeveer 1000 keer kleiner was dan dat het nu is. Dit is genoeg informatie om het moment van omslagpunt te berekenen: we hoeven alleen maar deze verhouding van schaalfactoren om te zetten in een verhouding tussen de



Figuur 64: Evolutie van het universum binnen het vlakke Friedmann-Robertson-Walker model. Hierbij is de willekeurige aanname gedaan dat de energiedichtheid gelijk verdeeld is over straling, materie en vacuüm. Vlak na de Big Bang is de expansie gedomineerd door straling ($a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$), daarna door materie ($a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$) en uiteindelijk door het vacuum ($a(t) \propto e^{Ht}$). De huidige leeftijd van het heelal wordt gegeven door t_0 .

leeftijd van het heelal nu en tijdens het omslagpunt, en dan de huidige leeftijd van het heelal in te vullen. De eerste stap kunnen we doen door te bedenken dat in het huidige heelal de schaalfactor gaat als $\propto t^{2/3}$, en ten tijde van het omslagpunt, bij benadering, eveneens (immers, net na het omslagpunt was het heelal materiegedomineerd geworden). We vinden dan ook voor de relatie tussen de leeftijd van het heelal nu, en de leeftijd van het heelal ten tijde van het omslagpunt

$$t_{\text{nu}}^{2/3} = 1000 t_{\text{omslag}}^{2/3} \quad \rightarrow \quad t_{\text{omslag}} \approx \frac{t_{\text{nu}}}{10^5}. \quad (560)$$

Een schatting van de leeftijd van het heelal hadden we al gevonden in de bespreking van de wet van Hubble, en er geldt $t_{\text{nu}} \approx 10^{10}$ jaar. Ingevuld geeft dit dat het heelal op het moment dat het van stralingsgedomineerd overging naar materiegedomineerd, een leeftijd had van ongeveer 10^5 jaar.

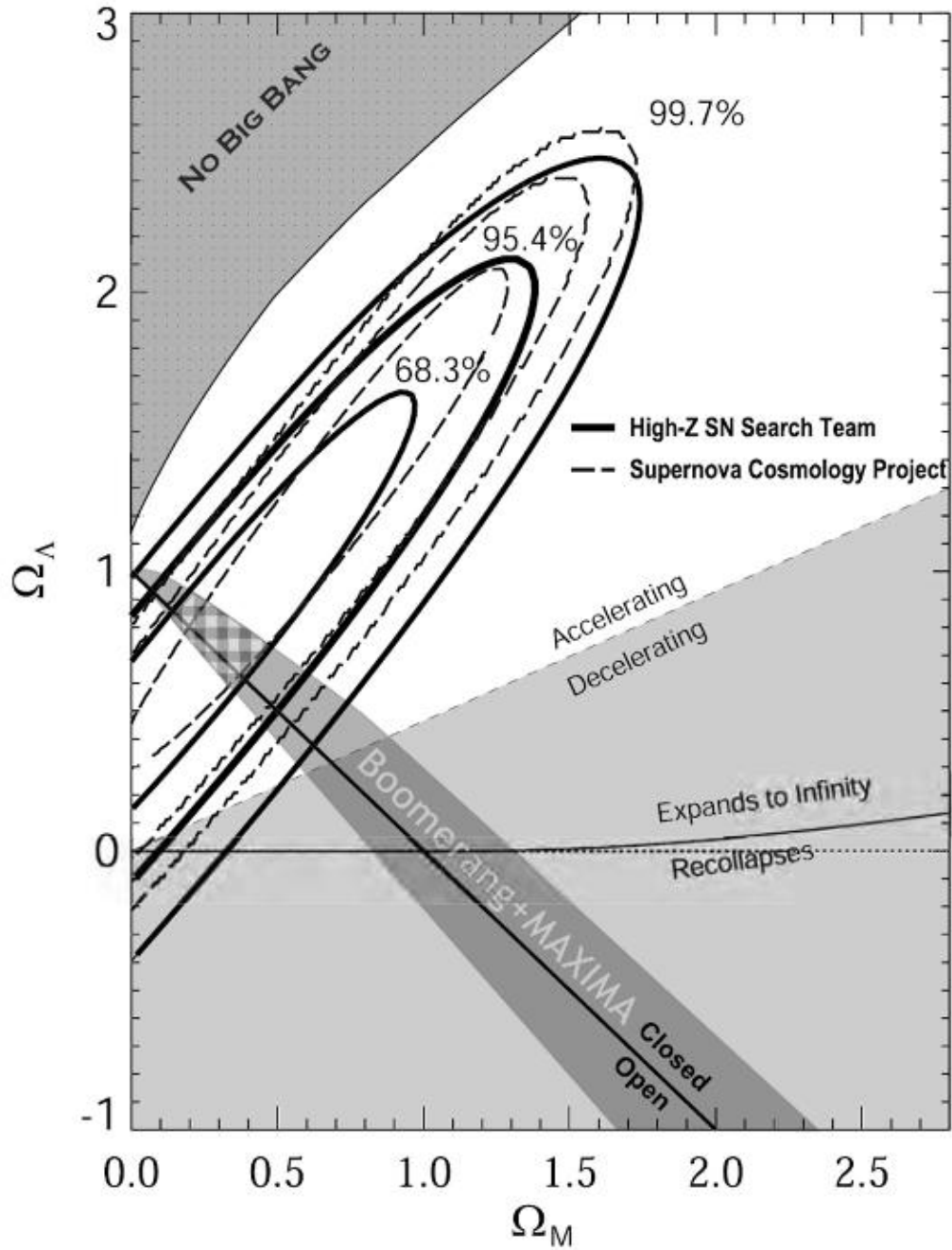
De leeftijd van het heelal kunnen we ook gebruiken om de constanten A_{straling} en A_{materie} te bepalen. We zullen met de laatste beginnen. Hiertoe gebruiken we weer een experimenteel gegeven: de fotonen die ons vanuit het heelal bereiken, hebben nagenoeg allemaal⁹² een temperatuur van 2,7 Kelvin. Dit komt overeen⁹³ met een energie van de orde van 10^{-23} Joule. Ingevuld in de tweede vergelijking (554) (het heelal is immers tegenwoordig materiegedomineerd), tezamen met het feit dat het heelal nu ongeveer 10^{10} jaar oud is, wordt de constante A_{materie} vastgelegd. We vinden

$$A_{\text{materie}} \approx 10^{-12} \text{ J s}^{2/3} \approx 10^{-2} \text{ GeV s}^{2/3}. \quad (561)$$

We hebben hier de constante geschreven in de eenheid GeV maal seconde^{2/3}.

⁹²Zie ook de discussie in het begin van dit hoofdstuk. Daar werd dit experimentele feit al genoemd, en gebruikt om het kosmologisch principe te motiveren.

⁹³Het verband tussen energie en temperatuur wordt bepaald door de zogenaamde Boltzmannconstante $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.



Figuur 65: Structuur van het universum volgens type Ia supernovae metingen en CMBR metingen. De horizontale as toont de fractie van de kritische dichtheid ρ_0 (dat is de dichtheid die nodig is om een vlak heelal te krijgen) voor materie, $\Omega_M = \rho/\rho_0$. De verticale as is de fractie donkere energie Ω_Λ , die wordt bijgedragen door de kosmologische constante Λ . Als deze optellen tot 1, dan is het heelal vlak, want dan is de totale energiedichtheid gelijk aan de kritische dichtheid. Vlakke heelallen liggen op de schuine neerwaartse lijn. De gebieden boven deze lijn hebben meer massa en corresponderen met een gekromd en gesloten heelal; de gebieden eronder met een open heelal. De verschillende ovale gebieden tonen de delen van het diagram die consistent zijn met de meetgegevens. Er is maar een klein deel van het diagram waar de meetgegevens overlappen. Het centrum van dit gebied correspondeert met een model waarbij de massadichtheid van het universum 30% is en de energiedichtheid van de kosmologische constante 70% van de kritische dichtheid. We vinden een vlak expanderend heelal.

Tenslotte zullen we ook de waarde van de constante A_{straling} bepalen. Hiertoe hoeven we ons alleen te realiseren dat op het omslagpunt van het stralingsgedomineerde heelal naar een materiegedomineerd heelal, per definitie

$$(E_{\text{foton, straling}})_{\text{omslag}} \equiv (E_{\text{foton, materie}})_{\text{omslag}}. \quad (562)$$

Vergelijking (554) ingevuld, tezamen met de al gevonden waarde voor A_{materie} en het feit dat ten tijde van het omslagpunt het heelal ongeveer 10^5 jaar oud was, geeft dan direct een orde van grootte voor de waarde van de constante A_{straling} . We vinden

$$A_{\text{straling}} \approx 10^{-13} \text{ J s}^{1/2} \approx 10^{-3} \text{ GeV s}^{1/2}. \quad (563)$$

Hiermee liggen de twee relaties (554) tussen de energie van een foton en de leeftijd van het heelal geheel vast. We zullen deze nu gebruiken om een idee te krijgen van de geschiedenis van het heelal, door uit te rekenen wanneer enkele belangrijke fysische gebeurtenissen hebben plaatsgevonden.

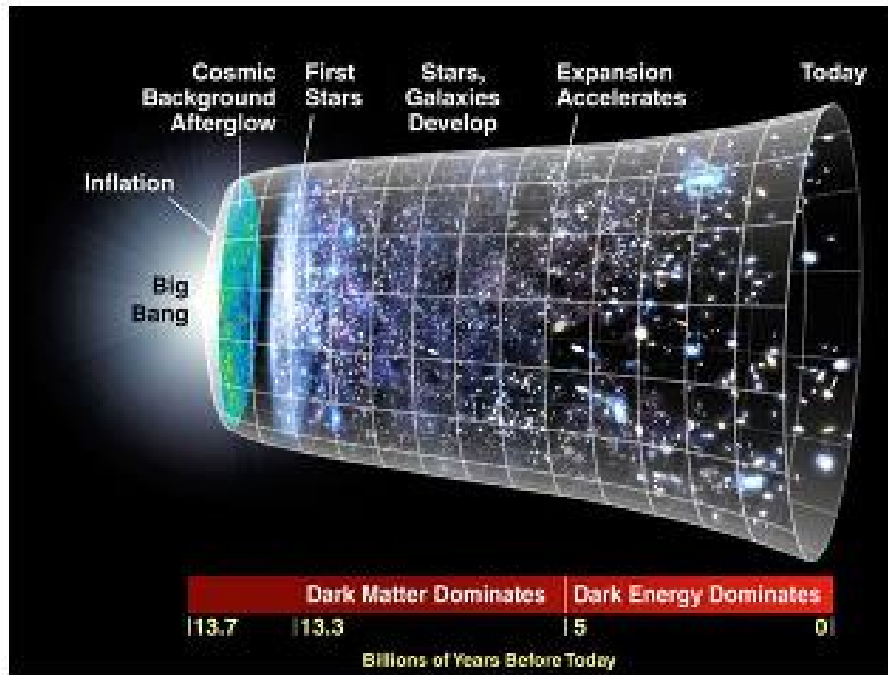
Als voorbeeld beschouwen we het moment waarop quarks samensmolten tot baryonen, en dit moment draagt de naam *baryogenese*. De subatomaire fysica leert ons dat dit plaatsvond op het moment dat de energie van de gluonen te veel was afgenomen door de uitdijning van het heelal om de quarks nog de energie te leveren de onderlinge aantrekkingskracht het hoofd te kunnen bieden: dit vond plaats bij een energie van ongeveer 1 GeV. In welk van de twee vergelijkingen (554) moeten we deze waarde stoppen? Vond baryogenese plaats in een stralingsgedomineerd heelal, of een materie-gedomineerd heelal? Het antwoord is dat het plaatsvond in het stralingsgedomineerde heelal. Dit kunnen we zien doordat we al gevonden hadden dat het omslagpunt plaatsvond toen de leeftijd van het heelal ongeveer 10^5 jaar was, en dit via vergelijking (554) overeenkomt met een deeltjesenergie van ongeveer 10^{-5} GeV. Dit is veel minder dan de energie tijdens baryogenese, en dus volgt dat dit proces plaats heeft gevonden in het stralingsgedomineerde heelal. We moeten daarom nu de eerste vergelijking (554) gebruiken om uit te rekenen op welk tijdstip baryogenese heeft plaatsgevonden. Hiertoe vullen we de energie van 1 GeV in, en vinden dan een leeftijd van ongeveer 10^{-4} seconde. Blijkbaar zijn de quarks samengesmolten tot de eerste protonen en neutronen toen het heelal nog maar een tienduizendste seconde oud was!

Op dezelfde manier zijn de tijdstippen van andere belangrijke fysische processen uit te rekenen. Zo leert de quantumveldentheorie ons dat de electromagnetische kracht en de zwakke kernkracht vroeger een aspect waren van een enkele kracht (*elektrozwakke kracht*), en dat zij van elkaar zijn ontkoppeld toen de fotonen een energie hadden van ongeveer 10^3 GeV, en op dezelfde manier als zojuist voorgerekend volgt dat het heelal op dat moment ongeveer 10^{-10} seconde oud was.

Een tabel met enkele interessante fysische processen, de bijbehorende energieën, en de daaruit volgende leeftijden van het heelal volgt. Zie ook figuren 65 - 66.

Gebeurtenis	Fysische gebeurtenis	Energie per foton	Leeftijd
oerknal	begin van het heelal	∞ (?)	0 s
inflatie	heelal dijt versneld uit	?	?
ontkoppeling	elektrozwakke kracht ontkoppelt	10^3 GeV	10^{-10} s
baryogenese	quarks vormen baryonen	1 GeV	10^{-4} s
nucleosynthese	baryonen vormen atoomkernen	10^{-3} GeV	100 s
recombinatie	elektronen binden aan atoomkernen	10^{-9} GeV	10^5 jaar
omslag	heelal wordt materiegedomineerd	10^{-9} GeV	10^5 jaar
het heden	fotonen hebben energie van 2,7 Kelvin	10^{-12} GeV	10^{10} jaar

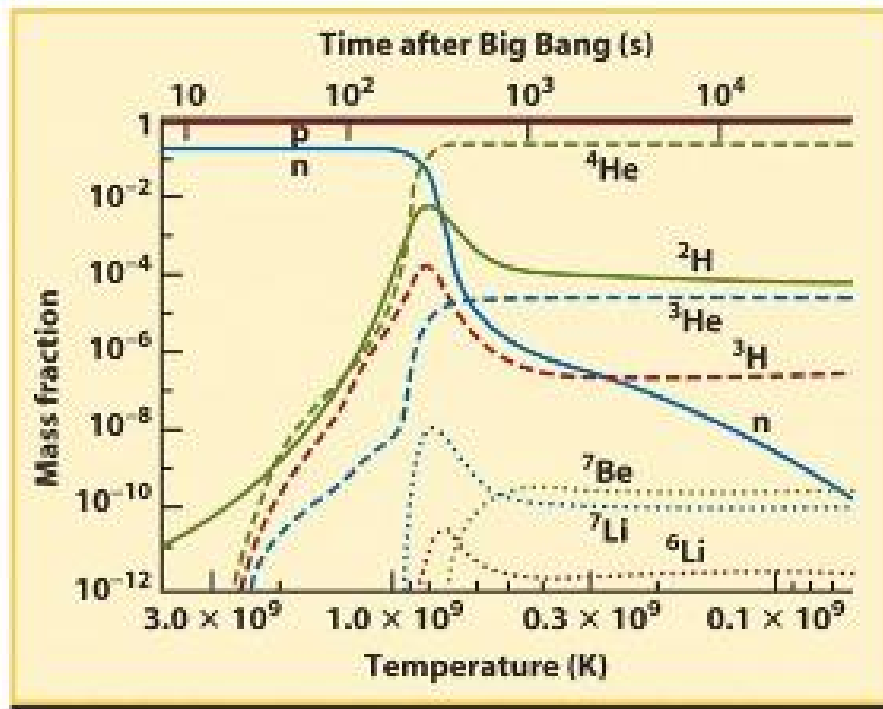
Hiermee hebben we een globaal beeld gevormd van de geschiedenis van het heelal: het Standaard Model van de kosmologie. We zullen dit nu in woorden samenvatten. Het heelal is ongeveer 10^{10}



Figuur 66: Schematische weergave van enkele interessante fysische processen en de bijbehorende leeftijden van het heelal.

jaar oud, en is vanaf zijn ontstaan aan het uitdijen geweest, waardoor de energie per foton en gluon altijd is blijven afnemen. Het is stralingsgedomineerd ($a(t) \propto \sqrt{t}$) begonnen. Quarks smolten samen tot baryonen na ongeveer 10^{-4} seconden, baryonen smolten samen tot atoomkernen na ongeveer 100 seconden, en elektronen bonden zich aan deze atoomkernen na ongeveer 10^5 jaar. Op ongeveer hetzelfde moment ging het heelal over van stralingsgedomineerd naar materiegedomineerd ($a(t) \propto t^{3/2}$). In de resterende tijd tot tegenwoordig, zijn de sterren gevormd, nevels en planeten.

Primordiale nucleosynthese begon pas toen het universum meer dan 10 seconden oud was en door haar expansie was afgekoeld tot een temperatuur van ongeveer 3×10^9 K. Voor deze tijd was de temperatuur zo hoog, dat de lichte kernen, gevormd door nucleon en nucleaire botsingen, na hun vorming ook weer direct uiteen vielen. Voor temperaturen lager dan 3×10^9 K en dus voor tijden groter dan 10 s na de Big Bang bleef ^4He gebonden, terwijl de lichtere kernen nog steeds uiteen vielen. Hierdoor kon nucleosynthese nog steeds geen aanvang nemen. Echter, ongeveer 3 minuten later, waarbij de temperatuur door verdere expansie afgekoeld was tot minder dan 10^9 K, waren deuteronen gevormd door de reactie $n + p \rightarrow d + \gamma$ stabiel. Vervolgens leidde neutron- en protonvangst door deuteronen tot ^3H en ^3He . Het ^3H gaat via beta-verval over in ^3He en dat kan op haar beurt door neutronvangst weer overgaan in ^4He . De bijdrage van dit laatste proces is echter klein ten opzichte van de vorming van ^4He door directe neutronvangst van ^3He of door de reactie $d + ^3\text{He} \rightarrow p + ^4\text{He}$. Botsingen tussen ^3H en ^3He met ^4He creëerde kleine hoeveelheden ^7Li en ^7Be . Dit laatste kan via beta-verval overgaan in het stabiele ^7Li , hetgeen weer de reactie $p + ^7\text{Li} \rightarrow ^4\text{He} + ^4\text{He}$ kan aangaan. Ook andere lichte kernen kunnen op deze wijze vernietigd worden, bijvoorbeeld $n + ^3\text{He} \rightarrow p + ^3\text{H}$. De hoeveelheden ^2H , ^3H , ^3He , ^4He en ^7Li geproduceerd in de Big Bang zijn derhalve gevoelig voor de baryondichtheid, of wel de verhouding van baryonen tot fotonen (ongeveer 3×10^{-10}), maar ook voor de expansiesnelheid (snelheid van afkoeling) van het beginnend universum. De relatieve abundantie van een gegeven kern is gevoelig voor de reactiesnelheid van diverse kernreacties. Figuur 67 toont de abundanties van de lichte kernen



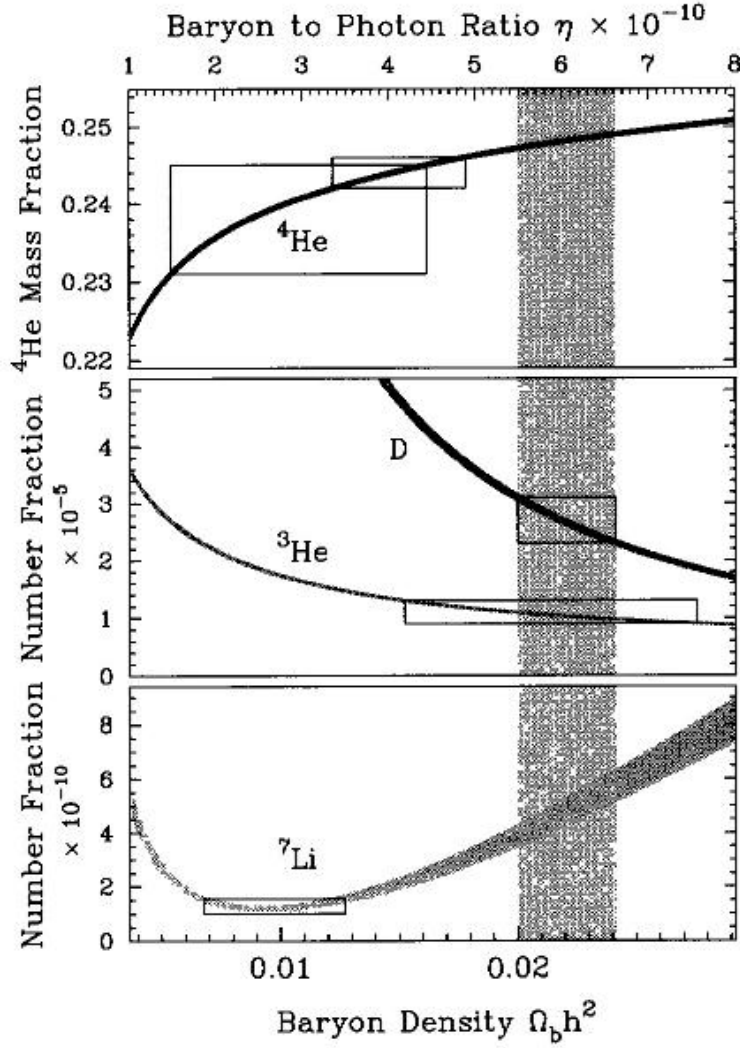
Figuur 67: Voorspellingen voor de primordiale abundanties van de lichtste elementen, getoond als functie van tijd en temperatuur na de Big Bang.

gevormd in de Big Bang ten opzichte van de abundantie van waterstof. Hoe groter de baryonendichtheid, ofwel de massafractie in figuur 68, des te groter is de vernietigingssnelheid van d , ^3H en ^3He . De gemeten abundanties van d , ^3He en ^7Li komen overeen met een η dicht bij het minimum in de ^7Li curve. De ^4He -kern heeft de grootste abundantie vanwege haar grote bindingsenergie. De expansiesnelheid van het universum neemt toe met het aantal neutrino families en berekeningen bevestigen dat er drie neutrino families bestaan. Dit komt overeen met waarnemingen van Z^0 verval. De resultaten van Big Bang nucleosynthese zijn in overeenstemming met het WMAP resultaat dat het universum bestaat uit $4,6 \pm 0,1$ % gewone baryonische materie, uit $23,3 \pm 1,3$ % van een onbekend soort 'dark matter' genaamd, omdat deze niet zichtbaar is, maar wel gravitationele effecten heeft, en uit $72,1 \pm 1,5$ % van iets dat we 'dark energy' noemen.

Dit model is niet compleet. Zo weten we niet wat er gebeurd is op tijdschalen van de orde van $< 10^{-44}$ seconde. De reden is, dat op dat moment de afstandsschalen zo klein geweest zijn dat quantumeffecten een rol hebben moeten spelen in de interactie tussen deeltjes, en wij op dit moment (nog) niet beschikken over een theorie die zulke effecten weet te beschrijven in combinatie met zwaartekracht. Vermoedelijk zal een soortgelijke theorie (*quantumzwaartekracht*) verklaren waar de quarks en elektronen vandaan gekomen zijn, en waarom er meer deeltjes zijn dan antideeltjes: in het Standaard Model van de kosmologie hebben we de aanwezigheid en hoeveelheid van zulke deeltjes als *gegeven* beschouwd.

Verder zijn er redenen om aan te nemen dat het heelal in zijn allereerste fractie van een seconde een periode heeft gekend van extreme snelle expansie: *inflatie*. Het is om deze reden dat we dit alvast in de tabel hebben ingevuld. Dit is het onderwerp van het volgende hoofdstuk, en zal daar worden besproken.

Merk op, tenslotte, dat het experimenteel moeilijk is om uitspraken te doen over de geschiedenis van het heelal van voor recombinitie (10^5 jaar). Immers, het is vanaf dat moment geweest dat



Figuur 68: Voorspellingen en metingen voor de primordiale abundanties van de lichtste elementen, getoond als functie van de baryon-foton verhouding η .

fotonen, per definitie van recombinitie, te weinig energie hadden om nog interactie te hebben met atomen (materie), en daarom pas vanaf dat moment vrij konden rondbewegen. Dit betekent dat het meten aan fotonen ons niet verder terug kan doen kijken dan het tijdstip van recombinitie. Het is om deze reden dat nieuwe typen telescopen gebruikt worden om het vroege heelal te bestuderen: telescopen gebaseerd op neutrino's (Antares en KM3NeT, Amanda en IceCube), zwaartekrachtsgolven (Virgo, LIGO, GEO600, Einstein Telescope en wellicht LISA).