

1 Inleiding

Gravitatie is universeel en werkt aantrekkend tussen objecten die massa hebben. Het beïnvloedt alle lichamen op dezelfde wijze (dit werd ontdekt door Galileo Galileï en wordt tot uitdrukking gebracht in het equivalentieprincipe) en kan niet afgeschermd worden, zoals dat wel mogelijk is voor bijvoorbeeld elektrische velden met een kooi van Faraday. Gravitatie beschrijft de banen van projectielen op aarde, en van planeten rond de zon. Gravitatie beheerst de evolutie van het Universum en voorspelt exotische objecten als neutronensterren en zwarte gaten.

De natuurkunde bestudeert materiële systemen zoals planeten, sterren en quasars en de arena waarin het fysisch gebeuren plaatsvindt is de ruimte en tijd. Ruimte en tijd zijn fundamentele begrippen in de fysica. In de geschiedenis van de natuurkunde zijn ruwweg vier concepties met betrekking tot ruimte en tijd te onderscheiden.

Ruimte en tijd volgens Aristoteles

Dit beeld komt overeen met het idee dat de ‘gemiddelde mens’ heeft van ruimte en tijd. De ruimte is drie-dimensionaal en euclidisch ($\mathbb{E}^3$) en de tijd is één-dimensionaal en euclidisch ($\mathbb{E}^1$). De bewering dat een object in rust is heeft in dit beeld van ruimte en tijd objectieve betekenis. Ruimtetijd is het cartesische product $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$. Een punt in ruimtetijd heeft coördinaten (t, x, y, z) en het stelt dus een gebeurtenis op een scherp bepaalde tijd t en met de precies bepaalde plaats (x, y, z) voor. Een dergelijke gebeurtenis noemen we een *puntgebeurtenis*. Ruimtetijd is dus de verzameling van alle mogelijke puntgebeurtenissen. Voor twee puntgebeurtenissen $(t_1, \vec{r}_1)$ en $(t_2, \vec{r}_2)$ kunnen we spreken van de *afstand* $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ en over het *tijdverschil* $t_1 - t_2$ van beide puntgebeurtenissen. Afstand en tijdverschil hebben absolute betekenis.

Ruimtetijd volgens Galileo

Dit is het beeld van ruimte en tijd zoals dit in de klassieke mechanica van Newton voorkomt. Belangrijk hierin is het relativiteitsprincipe van Galileo¹. Dit principe wordt als volgt geformuleerd: er bestaan inertiaalsystemen; inertiaalsystemen bewegen met constante snelheid $\vec{v}$ ten opzichte van elkaar en verschillende inertiaalsystemen zijn equivalent met betrekking tot de wetten van de klassieke mechanica. We herinneren nog even aan de definitie van een inertiaalsysteem. Een inertiaalsysteem is een referentiesysteem waarin ieder vrij deeltje eenparig en rechtlijnig beweegt. Het begrip rust verliest hier zijn absolute betekenis. Immers als een deeltje in rust is in één inertiaalsysteem, is het niet in rust ten opzichte van een inertiaalsysteem dat beweegt ten opzichte van het eerste inertiaalsysteem. De afstand tussen twee puntgebeurtenissen heeft geen absolute betekenis meer. Immers als we twee puntgebeurtenissen p en q beschouwen op dezelfde plaats ten opzichte van de aarde met een tijdverschil van 1 s, dan is de afstand tussen beide 0 m. De afstand van beide puntgebeurtenissen ten opzichte van het inertiaalsysteem dat rust ten opzichte van de zon is 30 km, omdat de aarde met een snelheid van 30 km/s om de zon beweegt. Tijdverschillen hebben nog wel absolute betekenis.

Ruimtetijd volgens Einstein - Minkowski

Dit is het ruimtetijd beeld van de speciale relativiteitstheorie (Einstein 1905). Het is ontstaan uit de confrontatie van de klassieke mechanica van Newton en de elektrodynamica van Maxwell. Speciale relativiteitstheorie steunt op het volgende tweetal postulaten:

- Relativiteitsprincipe van Einstein: er bestaan inertiaalsystemen en deze zijn equivalent met betrekking tot *alle* fysische verschijnselen.

¹Galileo Galileï heeft een belangrijke invloed op de ontwikkeling van wetenschap gehad: hij was van mening dat wetenschap gebaseerd diende te zijn op zorgvuldig experimenteel onderzoek. Ook beschreef hij waarnemingen wiskundig. Hij formuleerde het equivalentieprincipe, liet zien dat de versnelling van de zwaartekracht uniform is ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$), toonde dat horizontale en verticale bewegingen afzonderlijk beschreven kunnen worden, en gaf ons het principe van relativiteit. Galileo was hiermee de eerste relativist (ik heb geen idee of we hem daarom met zijn voornaam aanspreken?)

- Er bestaat een eindige maximale signaalsnelheid en deze is gelijk aan de voortplantingsnelheid van licht in vacuüm.

In het bijzonder kan licht licht niet inhalen. In de speciale relativiteitstheorie is het geboden om ruimte en tijd niet meer apart te beschouwen. In de woorden van H. Minkowski: "M.H.! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischen Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stunde an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beide soll Selbständigkeit bewahren".

We zullen zien dat in de speciale relativiteitstheorie naast afstanden ook tijdverschillen hun absolute betekenis verliezen. In plaats van beide komt de minkowskimetrick, die wél een invariante betekenis heeft. Het mathematische model voor ruimtetijd is de *minkowskiruimte*, dit is een vier-dimensionale vlakke ruimte met een indefiniëte metrick met signatuur -2 .

Ruimtetijd volgens Einstein

Dit is het ruimtetijd beeld van de algemene relativiteitstheorie. Einstein formuleerde haar in 1915. Deze theorie is ontstaan uit de confrontatie van de speciale relativiteitstheorie en de theorie van de gravitationele wisselwerking. Ruimtetijd is in de algemene relativiteitstheorie een *riemannse ruimte* met signatuur -2 . In het speciale geval dat gravitatie te verwaarlozen is, krijgt men de minkowskiruimte terug. Een drastisch verschil tussen de ruimtetijd in de speciale en de algemene relativiteitstheorie is dat in de laatste de structuur van ruimtetijd (in het bijzonder de metrick) wordt bepaald door de materie. Het begrip materie wordt hier gebruikt in een zeer ruime betekenis en het omvat naast deeltjes ook het elektromagnetische veld, etc.

In het volgende zullen we aspecten van de algemene relativiteitstheorie bespreken. Hierbij spelen drie essentiële ideeën een rol. Het eerste is dat, zoals gezegd, ruimtetijd beschreven kan worden als een gekromde, vier-dimensionale wiskundige structuur die we een pseudo-riemannse variëteit noemen, dat is een differentieerbare variëteit met een metrick met signatuur -2 . Het komt erop neer dat tijd en ruimte samen een gekromde vier-dimensionale niet-euclidische geometrie vormen. Het tweede idee is dat er op elk ruimtetijd punt, dus op elke puntgebeurtenis, een lokaal inertiaal referentiesysteem bestaat dat correspondeert met lokaal vlakke coördinaten die gedragen worden door waarnemers die in vrije val zijn. Voor deze waarnemers is de natuurkunde beschreven door de algemene relativiteitstheorie niet te onderscheiden van die beschreven door de speciale relativiteitstheorie. Dit is het beroemde sterke equivalentieprincipe van Einstein en dit maakt de algemene relativiteitstheorie tot een extensie van de speciale relativiteitstheorie voor gekromde ruimtetijd. Het derde idee is dat massa (en ook energie en impulsflux) kromming van ruimtetijd veroorzaakt op een wijze die beschreven wordt door de tensorveld vergelijkingen van Einstein.

We zullen de onderliggende ideeën in de volgende hoofdstukken bespreken. Klassieke mechanica wordt besproken in hoofdstuk 2, waar we zullen zien dat zowel de afbuiging van licht rond de zon alsook het bestaan van zwarte gaten mogelijk zijn binnen de klassieke natuurkunde. Ook wordt hier het formalisme van Lagrange besproken met het bijbehorende principe van extreme actie. We besluiten met een discussie van het principe van Mach. Vervolgens geven we in hoofdstuk 3 een overzicht van astrofysische objecten en fenomenen die een quantummechanische beschrijving behoeven. In hoofdstuk 4 definiëren we ruimtetijd op een mathematische wijze. Als belangrijkste object van ruimtetijd vinden we de metrick. Als we de metrick kennen, dan kunnen we een goede beschrijving geven van ruimtetijd. Als voorbeeld behandelen we de metrick van de lege ruimtetijd, de minkowskimetrick, en leiden hieruit de postulaten van de speciale relativiteitstheorie (SRT) af in hoofdstuk ???. Conventioneel wordt de SRT gemotiveerd door uit te gaan van Einsteins twee postulaten, en wordt op basis daarvan de wiskunde ontwikkeld, en dan met name de vorm van de metrick. Wij bewandelen hier een omgekeerde route: hier zal eerst de metrick worden gepostuleerd, en wordt op basis daarvan getoond dat Einsteins postulaten volgen. De reden van

deze ‘omgekeerde’ aanpak is de volgende: in de algemene relativiteitstheorie (ART) (de latere hoofdstukken) is het vrijwel altijd zo dat eerst de metriek bekend is, voordat de rest volgt. SRT is ook om deze reden speciaal te noemen: het is een van de weinige voorbeelden in de relativiteit dat de metriek *af te leiden* is uit gedachtenexperimenten; vrijwel in alle andere gevallen zijn zulke gedachtenexperimenten niet uit te voeren, en is de metriek niet een gevolg, maar een startpunt. Het is om deze reden dat in dit hoofdstuk ook deze route bewandeld zal worden. Als de manier van redeneren dan begrepen is, is de overstap naar de ART in aansluitende hoofdstukken, snel gemaakt.

De wiskundige beschrijving van systemen in gekromde coördinaten, maar voor vlakke euclidische ruimten, wordt gegeven in hoofdstuk ???. In hoofdstuk ??? beginnen we met de behandeling van de ART. We behandelen de beweging van objecten in de ART, terwijl ook de einsteinvergelijkingen worden besproken in dit hoofdstuk. Vervolgens geven we enkele voorbeelden van metrieken die van belang zijn voor sferische systemen (zoals sterren en zwarte gaten) in de algemene relativiteitstheorie: Schwarzschild en Kerr metrieken. In hoofdstuk ??? starten we met de Friedmann metriek en geven we een uiteenzetting van de huidige inzichten met betrekking tot kosmologie. De oerknal en dan met name inflatie wordt behandeld in hoofdstuk ???. We beschrijven de voorspelling van gravitatiestraling in hoofdstuk ??? en besluiten met een schets van de belangrijkste experimenten die het bestaan van gravitatiestraling proberen aan te tonen in hoofdstuk ???.

In appendix ??? zullen we de differentiaalmeetkunde in historisch perspectief plaatsen. Diverse eigenschappen van gekromde ruimten waren reeds ontdekt door wiskundigen als C.F. Gauss, J. Bolyai, N.I. Lobachevski en B. Riemann. We bespreken aspecten van meetkunde in euclidische en niet-euclidische ruimten. Lineaire algebra en eigenschappen van vectorruimten worden besproken in appendix ???. Fundamentele natuurconstanten zijn gegeven in appendix ???. Oefenopgaven met uitwerkingen zijn het onderwerp van appendix ??, terwijl een beknopt overzicht van tensoren gegeven wordt in appendix ???.