HOVO: Gravitatie en kosmologie

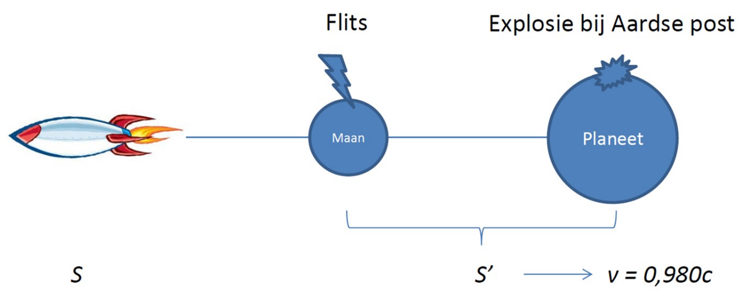
OPGAVEN WEEK 1

Opgave 1: Causaliteit

In het jaar 3001 wordt door de Aardse Federatie een ruimteschip naar een Aardse observatiepost op de planeet P4711 gestuurd. Op de maan van deze planeet is een gevechtsgroep gevestigd van de vaak vijandige Reptilianen. Terwijl het ruimteschip een rechtstreekse koers volgt, eerst voorbij de planeet P4711 en daarna voorbij haar maan, wordt er een hoge-energie microgolf flits gedetecteerd ter plaatse van de Reptiliaanse maan en dan, 1.10 seconde later, een explosie op de Aardse observatiepost (zie ook de figuur). Deze post bevindt zich op 4.00×10^8 m van de Reptiliaanse basis zoals gemeten vanuit het referentiesysteem aan boord van het ruimteschip. Het lijkt duidelijk te zijn dat de Reptilianen de Aardse observatiepost hebben aangevallen; het ruimteschip begint voorbereidingen te treffen om een confrontatie aan te kunnen gaan.

Opgave a): De snelheid van het schip ten opzichte van de planeet en haar maan is $0.980c$. Wat is de afstand en tijdinterval tussen de flits en de explosie zoals gemeten in het planeet-maan inertiaalsysteem (en dus volgens het personeel op de stations)?

Antwoord: De situatie is geschetst in de figuur, waarbij we hebben aangenomen dat het referentiesysteem S, dat verbonden is met het ruimteschip, stationair is, terwijl we ervoor gekozen hebben dat het planeet - maan systeem S' met een positieve snelheid beweegt (naar rechts).



Figuur 1: *Situatieschets van de flits en explosie.*

Dit is een willekeurige keuze: in plaats hiervan hadden we er ook voor kunnen kiezen dat het planeet - maan systeem stationair is. Dan hadden we de vector **v** moeten verbinden aan systeem S en naar links moeten laten wijzen; v zou in dat geval negatief geweest zijn. De resultaten zouden in ieder geval hetzelfde zijn.

De subscripten e en f representeren respectievelijk de explosie en de flits. Met deze afspraken zijn de data, alle gegeven in het systeem S,

$$\Delta x = x_\mathrm{e} - x_\mathrm{f} = +4.00 \times 10^8 \text{ m} \tag{1}$$

en

$$\Delta t = t_\mathrm{e} - t_\mathrm{f} = +1.10 \text{ s}. \tag{2}$$

Hierbij is Δx een positief getal, omdat in de figuur de coördinaat x_e van de explosie groter is dan de coördinaat x_f van de flits; Δt is ook een positief getal, omdat de tijd t_e van de explosie groter (dus later) is dan de tijd t_f van de flits.

We zoeken $\Delta x'$ en $\Delta t'$ en die kunnen we vinden door de data gegeven in systeem S te transformeren naar het planeet - maan systeem S'. De transformatie gaat als volgt:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \tfrac{v\Delta x}{c^2}). \end{aligned} \tag{3}$$

We hebben $v = +0.980c$, en de Lorentzfactor is

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(+0.980c/c)^2}} = 5.0252. \tag{4}$$

We vinden hiermee

$$\begin{aligned} \Delta x' &= (5.0252) \times [4.00 \times 10^8 \text{ m} - (+0.980)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(1.10 \text{ s})] \\ &= 3.85 \times 10^8 \text{ m}, \end{aligned} \tag{5}$$

en

$$\begin{aligned} \Delta t' &= (5.0252) \times \left[(1.10 \text{ s}) - \tfrac{(+0.980)(3.00\times 10^8 \text{ m/s})(4.00\times 10^8 \text{ m})}{(3.00\times 10^8 \text{ m/s})^2}\right] \\ &= -1.04 \text{ s}. \end{aligned} \tag{6}$$

Wat is de betekenis van het minteken in de berekende waarde van $\Delta t'$? Merk op dat we oorspronkelijk het tijdinterval tussen flits en explosie gedefiniëerd hebben als $\Delta t = t_\text{e} - t_\text{f} = +1.10$ s. Teneinde consistent te zijn met deze notatiekeuze, dient onze definitie van $\Delta t'$ overeen te komen met $t'_\text{e} - t'_\text{f}$, en dus hebben we gevonden dat

$$\Delta t' = t'_\text{e} - t'_\text{f} = -1.04 \text{ s}. \tag{7}$$

Dit leert ons dat $t'_\text{f} > t'_\text{e}$, en dat betekent dat in het planeet - maan systeem de flits 1.04 s gebeurde *na* de explosie, en niet 1.10 s *vóór* de explosie zoals gemeten aan boord van het ruimteschip.

Opgave b): Veroorzaakte de flits de explosie, of was de explosie de oorzaak van de flits? Dient ons ruimteschip de Reptilianen te confronteren?

Antwoord: De volgorde van de gebeurtenissen gemeten in het planeet - maan systeem is precies het omgekeerde van die gemeten aan boord van het ruimteschip. In beide situaties dient, in het geval van een causaal verband tussen de twee gebeurtenissen, informatie te worden overgebracht van de ene gebeurtenis naar de andere. Laten we eens kijken naar de vereiste snelheid waarmee deze informatie dient te zijn uitgewisseld. In het referentiesysteem aan boord van het ruimteschip is deze snelheid

$$v_\text{info} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4.00 \times 10^8 \text{ m}}{1.10 \text{ s}} = 3.64 \times 10^8 \text{ m/s}, \tag{8}$$

maar deze snelheid is onmogelijk omdat ze groter is dan de lichtsnelheid. In het planeet - maan systeem is de vereiste snelheid 3.70×10^8 m/s, en eveneens onmogelijk. Dus geen van beide events kan de andere veroorzaakt hebben. We hebben te maken met ongerelateerde events. Het is dus maar beter dat ons ruimteschip de Reptilianen niet confronteert.

Opgave 2: Verval van pionen

Opgave: Welke afstand legt een bundel geladen en neutrale pionen in vacuüm af met een kinetische energie van (a) 1 MeV, (b) 100 GeV, voordat de intensiteit met een factor twee gereduceerd is?

Om de afstand, die een pion in het laboratorium systeem af legt, uit te kunnen rekenen gebruiken we de speciale relativiteitstheorie: de tijd die in het laboratorium systeem verstrijkt is $\Delta t' = \gamma \Delta t$, met $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$ en $\beta = v/c$. In het rustsysteem vervallen de pionen volgens $I(t) = I(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$.

De intensiteit op tijdstip t is gereduceerd tot de helft als geldt $t - t_0 = \ln(2) * \tau$. De vervaltijd τ is voor de verschillende soorten pionen is gegeven.

Verder hebben we $\gamma = \frac{E}{mc^2}$, met E (m) de energie (massa) van het pion. In het laboratorium systeem verstrijkt een tijd $\Delta t' = \gamma \Delta t$ voordat de helft van de pionen is vervallen. De pionen hebben snelheid $v = \beta c$.

Nu geldt: $m_{\pi^\pm} = 139.6$ MeV/c^2, $\tau_{\pi^\pm} = 2.60 \times 10^{-8}$s; $m_{\pi^0} = 135.0$ MeV/c^2, $\tau_{\pi^0} = 8.4 \times 10^{-17}$s. Dit geeft de volgende resultaten:

$\pi^\pm$: T = 1 MeV impliceert $\gamma = 1.0072$, $\beta = 0.119$, $d = 0.64$ m.

T = 100 GeV impliceert $\gamma = 717.3$, $\beta = 1.000$, $d = 3878$ m.

π^0 : T = 1 MeV impliceert $\gamma = 1.0074$, $\beta = 0.121$, $d = 2.1 \times 10^{-9}$ m.
T = 100 GeV impliceert $\gamma = 741.7$, $\beta = 1.000$, $d = 1.86\mu$m.

Opgave 3: Collider en Fixed-Target Experimenten

Opgave: Bij DESY in Hamburg wordt een 6 km lange opslagring gebruikt om de substructuur van het proton te onderzoeken in collider experimenten. In deze ring versnelt men protonen tot 820 GeV, die frontaal botsen met elektronen die tot 35 GeV versneld kunnen worden. Stel, dat men in plaats van een collider experiment een experiment met vaste targets zou gebruiken (de zogenaamde fixed-target experimenten).

Opgave a): Welke energie zou de elektronenbundel moeten hebben om dezelfde impulsoverdracht te kunnen maken op een fixed proton target (waarbij de protonen in rust zijn)?

Antwoord: Het antwoord verkrijgt men het snelst, door een Lorentztransformatie uit te oefenen naar het systeem waarin het proton in rust is. Definieer $\vec{\beta}$ als de snelheid, uitgedrukt in eenheden c ($c = 1$), $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ de Lorentzfactor, en E_p, $\vec{p}_p$ en M_p respectievelijk de energie, impuls, en massa van het proton in het laboratorium (LAB) systeem. Definieer E_e, $\vec{p}_e$, en m_e als respectievelijk de energie, impuls, en massa van het elektron in het LAB-systeem. Er geldt

$$\begin{aligned} |\vec{p}_e| &= \sqrt{E_e^2 - m_e^2} &&= 35 \text{ GeV}, \\ |\vec{p}_p| &= \sqrt{E_p^2 - M_p^2} &&= 820 \text{ GeV}, \\ \gamma &= E_p/M_p &&= 874, \\ \beta &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} &&= 1.000. \end{aligned} \tag{9}$$

Voor de Lorentztransformatie naar het systeem waarin het proton in rust is, geldt $\gamma = 874$ en $\beta = 1.000$. Voor de Lorentztransformatie van het elektron naar dit systeem krijgen we:

$$E'_e = \gamma(E_e - \vec{\beta} \cdot \vec{p}_e). \tag{10}$$

De richting van $\vec{\beta}$ en $\vec{p}_e$ zijn 180° tegengesteld, dus volgt $\vec{\beta} \cdot \vec{p}_e = -1.000|\vec{p}_e|$ en $E'_e = 61.2$ TeV, waarbij 1 TeV = 10^{12} eV.

Opgave b): Welke energie zou de protonenbundel moeten hebben om dezelfde impulsoverdracht te kunnen maken op een target met elektronen dat in rust is?

Antwoord: Nu moeten we een Lorentztransformatie maken naar het systeem, waarin het elektron in rust is. Er geldt $\gamma = E_e/m_e = 68493$ en $\beta = 1.000$. De richting van $\vec{\beta}$ gelijk aan die van het elektron, dus $\vec{p}_p \cdot \vec{\beta} = -1.000|\vec{p}_p|$. De Lorentztransformatie voor het proton om in het systeem te komen waarin het elektron in rust is geeft dus

$$E'_p = \gamma(E_p - \vec{\beta} \cdot \vec{p}_p) = 1.12 \times 10^8 \text{ GeV}. \tag{11}$$

Opgave c): Reken uit wat de relatieve impulsen van de protonen en elektronen zijn in het zwaartepuntssysteem (in dit systeem is de totale drie-impuls gelijk is aan 0).

Antwoord: De invariante massa W van het elektron-proton systeem bedraagt

$$W = \sqrt{(E_e + E_p)^2 - (\vec{p}_e + \vec{p}_p)^2} = \sqrt{855^2 - 785^2} = 338.8 \text{ GeV}. \tag{12}$$

In het zwaartepuntssysteem geldt $\vec{p}'_e = -\vec{p}'_p$. Verder geldt $W = E'_e + E'_p$. De rustmassas van het elektron en het proton kunnen verwaarloosd worden ten opzichte van 338.8 GeV, dus volgt in het zwaartepuntssysteem $E'_e = |p'_e| = E'_p = |p'_p| = 169.4$ GeV (de aanname $M_p = 0$ is correct binnen de precisie waarmee het antwoord gegeven is).

Opgave d): De maximale overdraagbare vierimpuls is gelijk aan 2 maal de proton (of elektron) impuls in dit systeem. Geef de corresponderende golflengte in meters. Dit is een goede maat voor het oplossend vermogen waarmee de structuur van protonen of elektronen gemeten kan worden.

Antwoord: De golflengte van een foton van 338.8 GeV bedraagt

$$\lambda = \frac{h}{p} = 2\pi\frac{\hbar c}{E} = 2\pi\frac{0.197 \text{ GeV} \cdot \text{fm}}{338.8 \text{ GeV}} = 3.66 \times 10^{-18} \text{ m}. \tag{13}$$

Dit is meer dan tweehonderd keer kleiner dan de straal van het proton.

Opgave 4: Kosmische Straling

Het meest energetische proton dat ooit gedetecteerd is in de kosmische straling had de opzienbarende energie van 3.0×10^{20} eV (dat is voldoende energie om een theelepel water een aantal graden op te warmen).

Opgave a): Bereken de Lorentzfactor γ en de snelheid β van het proton.

Antwoord: We gebruiken de speciale relativiteitstheorie en vinden

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{T + mc^2}{mc^2} = \frac{T}{mc^2} + 1 = \frac{3.0 \times 10^{20} \text{ eV}}{938 \times 10^6 \text{ eV}} + 1 = 3.198 \times 10^{11} \approx 3.2 \times 10^{11}. \tag{14}$$

De berekende waarde voor γ is zó groot dat we niet de definitie van γ kunnen gebruiken. Probeer het maar: je rekenmachine zal je vertellen dat β gelijk is aan 1 en dat v dus gelijk is aan c. In feite is v bijna gelijk aan c, maar we zoeken hier een nauwkeurig antwoord. We vinden dit als volgt.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}}, \tag{15}$$

waarbij we gebruik maken van het feit dat β zo dicht bij 1 is dat $1 + \beta$ praktisch gelijk is aan 2. Oplossen naar $1 - \beta$ geeft dan

$$1 - \beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{(2)(3.198 \times 10^{11})^2} = 4.9 \times 10^{-24} \approx 5 \times 10^{-24}. \tag{16}$$

Dus hebben we dat $\beta = 1 - 5 \times 10^{-24}$ en omdat $v = \beta c$,

$$v \approx 0.999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c. \tag{17}$$

Opgave b): Stel dat het proton langs de diameter (9.8×10^4 lichtjaar) van ons Melkwegstelsel vliegt. Hoe lang duurt de reis van het proton zoals gemeten in ons Aarde-Melkweg referentiesysteem?

Antwoord: We hebben net gezien dat dit *ultrarelativistisch* proton reist met een snelheid die nauwelijks kleiner is dan c. Per definitie doet licht er 9.8×10^4 jaar over om 9.8×10^4 lichtjaar af te leggen, en dit proton dient hier ongeveer even lang over te doen. Dus gezien vanuit ons Aarde - Melkweg referentiesysteem duurt de reis

$$\Delta t = 9.8 \times 10^4 \text{ jaar}. \tag{18}$$

Opgave c): Hoelang duurt de reis van het proton zoals gemeten in het rustsysteem van het proton?

Antwoord: Omdat zowel het begin als het einde van de reis plaatsvinden op dezelfde plaats in het rustsysteem van het proton (en het tijdverschil dus met één enkele klok gemeten kan worden), zoeken we nu de eigentijd van de reis. We gebruiken de tijddilatatie vergelijking en transformeren Δt van het Aarde - Melkweg systeem naar het rustsysteem van het proton,

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9.8 \times 10^4 \text{ jaar}}{3.198 \times 10^{11}} = 3.06 \times 10^{-7} \text{ jaar} = 9.7 \text{ s}. \tag{19}$$

In ons referentiesysteem duurt de reis 98,000 jaar, terwijl in het rustsysteem van het proton slechts 9.7 s verstrijken!