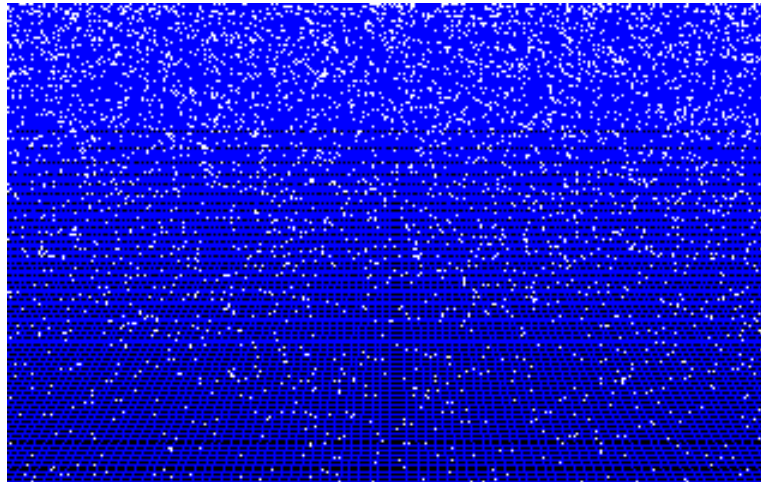


Algemene relativiteitstheorie

HOVO cursus



Jo van den Brand

Les 5: 26 november 2015

Copyright (C) Vrije Universiteit 2015

Inhoud

- **Speciale relativiteitstheorie**

- Inertiaalsystemen
- Bewegende waarnemers
- Relativiteitsprincipe

- **Ruimtetime**

- Minkowski ruimtetime
- Tensoren

- **Gekromde ruimtetime**

- Algemene coördinaten
- Covariante afgeleide

- **Algemene relativiteitstheorie**

- Einsteinvergelijkingen
- Newton als limiet

- **Toepassingen ART**

- Zwarte gaten
- Kosmologie
- Gravitatiestraling

Schwarzschild ruimtetijd

Schwarzschild ontdekte in 1916 de eerste exacte oplossing van de Einstein vergelijkingen. Het is een vacuümoplossing voor de metriek van ruimtetijd buiten een sferisch symmetrische massaverdeling:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

We zien de Schwarzschild coördinaten en metriek $g_{\mu\nu}(x)$

De metriek hangt niet van de tijd t af

De metriek is sferisch symmetrisch en voor constante r en t geldt $d\Sigma^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$

Limiet voor zwakke velden $ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$

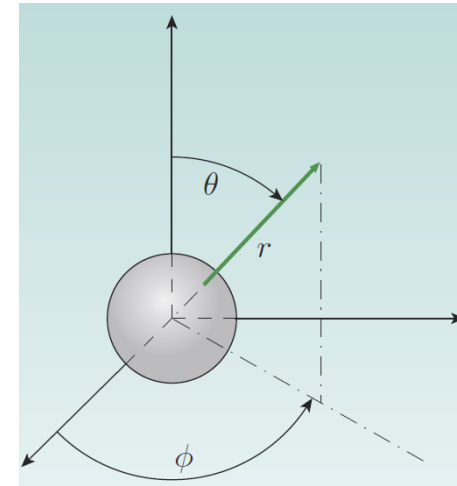
Dit is conform de limiet voor een statisch, zwak veld met een Newtoniaanse gravitatiepotentiaal gegeven door

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

We associeren de constante M in $g_{\mu\nu}(x)$ met de totale massa en de bron van kromming

We gebruiken de baan van een testmassa en de wet van Kepler om de bron van kromming M te bepalen (materie, straling, etc.). Er geldt

$$\frac{v^2}{R} = \left(\frac{2\pi R}{P}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{GM}{R^2} \quad \longrightarrow \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3 \quad \longrightarrow \quad M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{R^3}{P^2}$$



Geometrische eenheden

Schwarzschild metriek in [kg m s] eenheden

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Als we $c = 1$ gebruiken, dan krijgen we [kg m] eenheden en hebben ruimte en tijd dezelfde eenheid: [m]

Er geldt dan de conventie $t \text{ [m]} = ct \text{ [s]} = 3 \times 10^8 t \text{ [s]}$

Deze *natuurlijke eenheid* is gebruikelijk in de SRT

Als we ook $G = 1$ gebruiken, dan kunnen we massa uitdrukken in lengte

Er geldt dan de conventie

$$M \text{ [m]} = \frac{G}{c^2} M \text{ [kg]} = \frac{6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} M \text{ [kg]} = 7.416 \times 10^{-28} M \text{ [kg]}$$

Voorbeeld: de massa van de Zon is $M_{\odot} = 1.47 \text{ km}$ en van de Aarde $M_{\oplus} = 0.44 \text{ cm}$

Dergelijke *geometrische eenheden* zijn gebruikelijk in de ART

Singulariteiten in de Schwarzschild metriek

Schwarzschild metriek in [kg m s] eenheden

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Schwarzschild metriek in geometrische eenheden

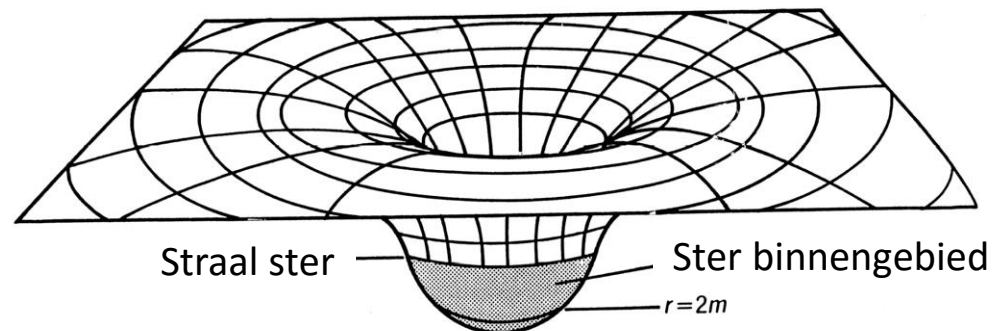
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

De limiet $M = 0$ or $r \rightarrow \infty$ levert de Minkowski metriek in sferische coördinaten

Veel bronnen zijn sferisch symmetrisch: sterren, zwarte gaten, neutronensterren

Metriek singulier op $r = 0$ en $r = 2M$

- $r = 0$: Echte singulariteit met oneindige ruimtetijdkromming
- $r = 2M$: Blijkt singulier vanwege keuze coördinatensysteem



Interpretatie van de coördinaten

De hoeken θ en ϕ

In 2D hypervlakken met $r = \text{constant}$ en $t = \text{constant}$ schrijven we $ds^2 = r^2 d\Omega^2$

Identiek aan beschrijving van een bol met constante straal in SRT

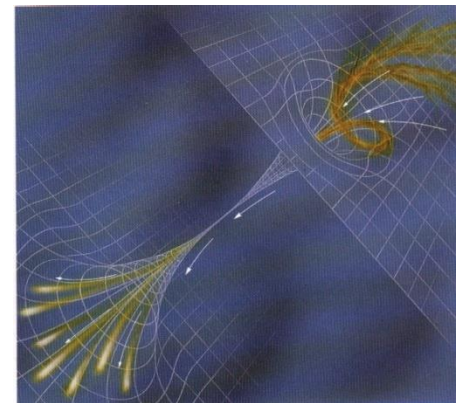
De hoeken θ en ϕ zijn de hoeken op een bol

De straal r

Oppervlak in gekromde ruimte wordt gegeven door ($g^{(2)}$ is gereduceerde metriek)

$$A = \int \sqrt{g^{(2)}} d^2x = \int r^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi r^2$$

Straal r wordt gegeven door oppervlak van een bol $r(\mathcal{P}) = \sqrt{\frac{\tilde{A}}{4\pi}}$



Moeilijk om de tijd te meten

Eigenschappen

1. *Tijdsonafhankelijke afstanden* ($\partial g_{\alpha\beta} / \partial t = 0$) tussen lijnen van constante r, θ, ϕ
2. *Orthogonaliteit* ($g_{tr} = 0, g_{t\theta} = 0, g_{t\phi} = 0$) met $t = \text{constant}$ hypervlakken
3. *Asymptotisch equivalent met Minkowski-tijd*

Interpretatie van de coördinaten

We onderzoeken nu het verband tussen de waarden van coördinaten en de *fysisch relevante* intervallen van tijd en afstand

Als we in een uitdrukking geconfronteerd worden met de variabelen t en r , dan is het verleidelijk om direct te denken aan tijd en afstand tot de oorsprong

In de ART zijn coördinaten slechts markeringen om gebeurtenissen aan te duiden. Ze hebben geen directe metrische significantie

We onderscheiden drie locale referentiesystemen:

1. *Dat van een vrij-vallende waarnemer: hierin is gravitatie “uitgezet” en geldt de SRT met bijbehorende Minkowski metriek*
2. *Een systeem dat in rust is op een bepaalde locatie. Deze waarnemer moet iets doen om te voorkomen dat hij vrij valt. SRT kan lokaal gebruikt worden, maar er moet dan wel een fictieve gravitatiekracht ingevoerd worden*
3. *Het systeem van een waarnemer die zich op grote afstand van M bevindt. Hier is ruimtetijd weer vlak en geldt de SRT*

Gravitationele roodverschuiving

Beschouw twee gebeurtenissen met Schwarzschild coördinaten $(t_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$ en $(t_E + dt_E, r_E, \theta_E, \phi_E)$ waarbij er licht wordt uitgezonden. Gebeurtenissen zijn gescheiden door dt_E terwijl $dr_E = d\theta_E = d\phi_E = 0$

De ruimtetijd afstand is dan $ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}\right) c^2 dt^2$

De *proper time* tussen de events zoals

gemeten door een klok in rust ter plaatse is

$$d\tau_E = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}} dt_E$$

Tijdverschil gemeten met een plaatselijke klok is minder dan het coördinatenverschil dt_E

Een waarnemer in rust op een andere locatie r_O vindt voor het coördinatenverschil dt_O dezelfde waarde $dt_O = dt_E$

De ruimtetijd afstand op die locatie is dan

$$ds_O^2 = -c^2 d\tau_O^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_O}\right) c^2 dt_O^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_O}\right) c^2 dt_E^2$$

De proper time tussen de waarnemingen van beide signalen is $d\tau_O = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_O}} dt_E$

Voor een waarnemer op $r = \infty$ vinden we $dt_E = d\tau_\infty$

We vinden de gravitationele roodverschuiving $d\tau_\infty = \frac{d\tau_E}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}}}$

Geodetische beweging

We vinden de wereldlijn van een testmassa uit de vergelijking voor een geodeet

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \sum_{\nu, \rho} \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

We dienen alle connectiecoëfficiënten te bepalen (huiswerk)

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{A'}{2A}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{A'}{2B}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'}{2B}, & A(r) &= \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right) \\ \Gamma_{22}^1 &= -r/B, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B}, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, & B(r) &= \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{32}^3 &= \cot \theta & A' &\equiv dA/dr \quad B' \equiv dB/dr \end{aligned}$$

Hiermee vinden we de volgende vier differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0,$$

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{GM}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \right] = 0$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0.$$

We kunnen het vinden van oplossingen simplificeren door gebruik te maken van bewegingsconstanten of van een Lagrangiaanse behandeling

Bewegingsconstanten

De norm van de raakvector blijft behouden langs een geodeet. Er geldt

$$n^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \text{constant}$$

Voor een massief deeltje met snelheid U^μ geldt

$$\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -c^2$$

We vinden dan $n^2 = -c^2$

Metriek invullen levert $c^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$

Er zijn diepe relaties tussen symmetrieën en behouden grootheden. Zo hangt bijvoorbeeld de Schwarzschild metriek niet van de tijd af en dit leidt tot behoud van energie

Invariantie onder rotaties geeft sferische symmetrie en leidt tot behoud van impulsmoment

Een behouden grootheid met de rol van totale energie $\frac{E}{mc^2} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau}$

Behoud van impulsmoment (een vector) leidt tot drie behouden scalaire grootheden.

Typisch gebruikt met de grootte per massa eenheid J/m en twee hoeken voor de richting

Wij kiezen de coördinaten zo dat $\theta = \pi/2$ en dus $d\theta/dt = 0$ voor de richting

De derde conditie is dan $\frac{J}{m} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau}$

We vinden
$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]$$

Baanbeweging

We vinden de baan in het $\theta = \pi/2$ vlak door r uit te drukken als functie van ϕ

We hebben een differentiaalvergelijking voor $r(\tau)$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]$$

Gebruik $\frac{dr}{d\tau} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{dr}{d\phi}$ en $J/m = r^2 d\phi/d\tau$  $\frac{dr}{d\tau} = \frac{J}{r^2 m} \frac{dr}{d\phi}$

Invullen $\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - m^2 r^3 \frac{2GM}{J^2} = \left(\frac{r^2 m c}{J}\right)^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]$

Verandering van variabele $u = 1/r$

Baanvergelijking

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{J^2} + \frac{3GMu^2}{c^2}$$

Newtoniaanse analyse levert $\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GMm^2}{J^2}$

De relativistische term kan verwaarloosd worden voor kleine u en we vinden hiermee weer Newtoniaanse banen als de afstand tot de ster groot is

Dicht bij de horizon $2GM/c^2$ spelen relativistische effecten een grote rol

Effectieve potentiaal

We herschrijven $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]$

En benadrukken de rol van energie

$$\underbrace{\frac{c^2}{2} \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right]}_{\text{Bewegingsconstante}} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}_{\text{Kinetische term}} + \underbrace{\frac{J^2}{2m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{GM}{r}}_{\text{Effectieve potentiaal } V_{\text{eff}}}$$

Bewegingsconstante

bepaald door baanenergie

Kinetische
term

Effectieve potentiaal V_{eff}

We vinden $\frac{c^2}{2} \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}$

Newtoniaanse analyse: $\frac{E^{\text{Newton}}}{m} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{\text{eff}}^{\text{Newton}}$ met $V_{\text{eff}}^{\text{Newton}} = \frac{J^2}{2m^2 r^2} - \frac{GM}{r}$

Vergelijken levert $V_{\text{eff}} = \frac{J^2}{2m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{GM}{r}$



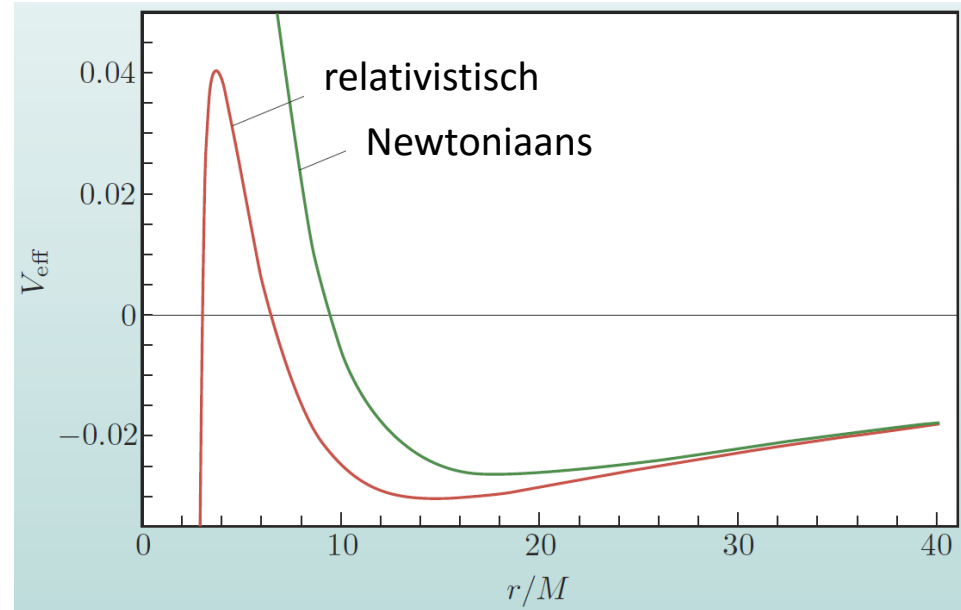
Relativistische term

Effectieve potentiaal

Effectieve potentiaal voor baanbeweging van een deeltje met impulsmoment J

$$V_{\text{eff}} = \frac{J^2}{2m^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) - \frac{GM}{r}$$

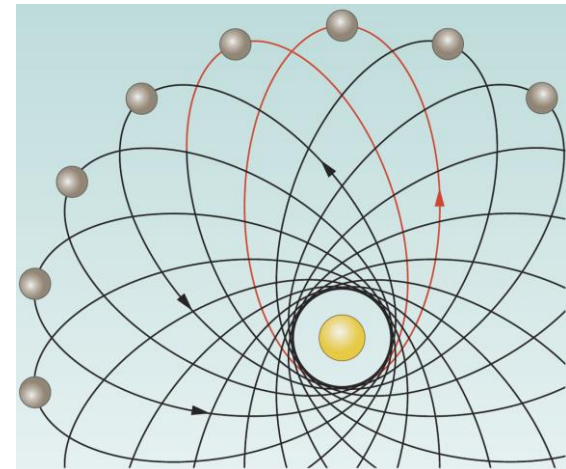
In de klassieke mechanica is impulsmoment J de bron van een oneindig hoge potentiaalbarrière die deeltjes verbiedt $r = 0$ te bereiken



In de Schwarzschild metriek is er ook een ondergrens voor de straal van een stabiele cirkelvormige baan (ISCO – Innermost Stable Circular Orbit), die overeenkomt met

$$J/m = 2\sqrt{3}GM/c$$

Ook vinden we een perihelium verschuiving (de baan is geen ellips). Mercurius: $43''/\text{eeuw}$
Dat zijn 12 miljoen omwentelingen per rozet



Zwarte gaten

Een zwart gat is een gebied in ruimtetijd waar materie en straling in kunnen gaan, maar waaruit ze niet kunnen ontsnappen. Het is een *structuur in ruimtetijd* en verschilt hiermee aanzienlijk van materiele objecten zoals (neutronen)sterren, *etc.*

Een zwart gat is omgeven door een *event horizon*: een gesloten oppervlak waardoor licht naar binnen kan vallen, maar niet meer ontsnappen

Het meest eenvoudige zwarte gat wordt beschreven door de Schwarzschild metriek, waarbij de event horizon zich bevindt op $r = R_S = 2GM/c^2$

Merk op dat dezelfde uitdrukking volgt uit een klassieke berekening, waarbij we de *escape velocity* gelijkstellen aan de lichtsnelheid

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}mv_{\text{es}}^2 = \frac{GMm}{R} \\ v_{\text{escape}} > c \end{array} \right\} R < \frac{2GM}{c^2}$$

Chandrasekhar vond in 1931 dat er een bovenlimiet van ongeveer 1.4 zonnemassa's voor de massa van een witte dwerg vanwege de druk door ontaardheid van elektronen. Boven deze limiet volgt gravitationele ineenstorting

Landau voorspelt (1932) neutronensterren

Oppenheimer voorspelt (1939) dat neutronensterren een maximum massa van ongeveer 3 zonnemassa's hebben: de ontdekking van zwarte gaten

Object	Straal (in m)	Massa (in kg)	Schwarzschild straal
Aarde	$6,3 \cdot 10^6$	$6,6 \cdot 10^{24}$	1 cm
Jupiter	$7,0 \cdot 10^7$	$2,1 \cdot 10^{27}$	3 meter
Zon	$7,0 \cdot 10^8$	$2,0 \cdot 10^{30}$	3 kilometer

Klassificatie van zwarte gaten

Eigenschappen van het zwarte gat

- Enkel massa
- Massa en impulsmoment
- Massa en elektrische lading
- Massa, impulsmoment en elektrische lading

Metriek

- Schwarzschild
- Kerr
- Reissner-Nordstrom
- Kerr-Newman

We verwachten dat fysische zwarte gaten impulsmoment hebben, maar waarschijnlijk geen elektrische lading (vanwege de vorming door neutrale atomen)

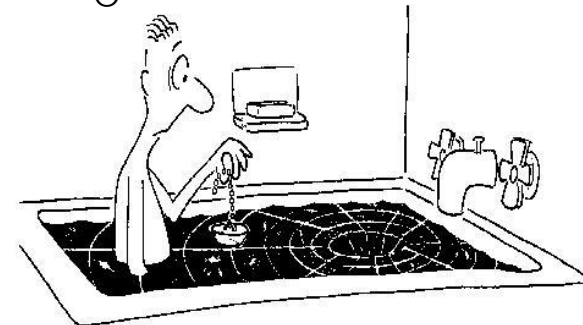
We kunnen zwarte gaten ook klassificeren op basis van astrofysische eigenschappen

Klasse

- Micro zwarte gaten
- Sterrenmassa zwarte gaten
- Intermediaire zwarte gaten
- Supermassieve zwarte gaten

Massagebied

- 0 tot $0.1 M_{\odot}$
- 0.1 tot $300 M_{\odot}$
- 300 tot $10^5 M_{\odot}$
- $10^5 M_{\odot}$ tot $10^{10} M_{\odot}$



Soorten zwarte gaten

Supermassieve ZG

$10^5 M_{\odot}$ tot $10^{10} M_{\odot}$

- Gevonden in centrum meeste sterrenstelsels
- Verantwoordelijk voor Active Galactic Nuclei
- Kunnen direct en indirect gevormd worden

Intermediaire-massa ZG

300 tot $10^5 M_{\odot}$

- Mogelijk gevonden in dichte sterrenclusters
- Mogelijke verklaring voor Ultra-luminous X-Rays
- Moeten indirect gevormd worden

Sterrenmassa ZG

0.1 tot $300 M_{\odot}$

- Resten van zeer zware sterren
- Verantwoordelijk voor Gamma Ray Bursts
- Direct gevormd

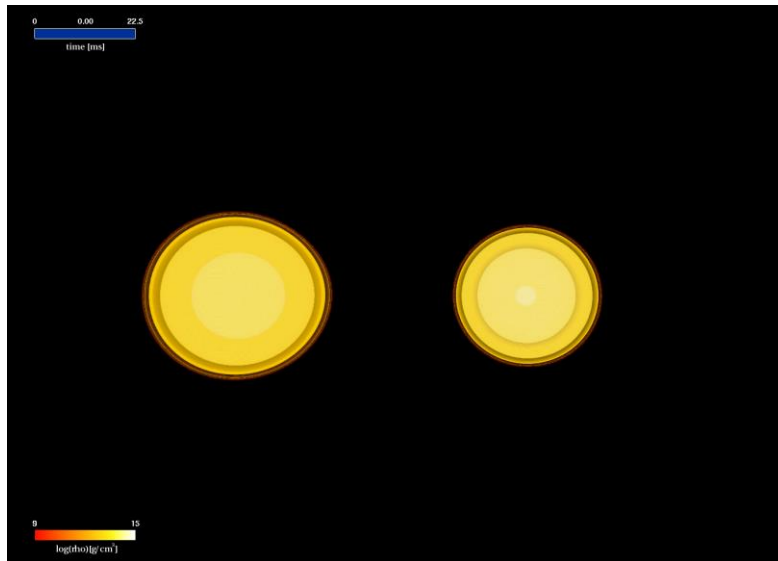
Micro ZG

0 tot $0.1 M_{\odot}$

- Quantumeffecten worden relevant
- Voorspeld door enkele inflatiemodellen
- Misschien geproduceerd in kosmische straling
- De reden dat LHC de aarde zal vernietigen ...

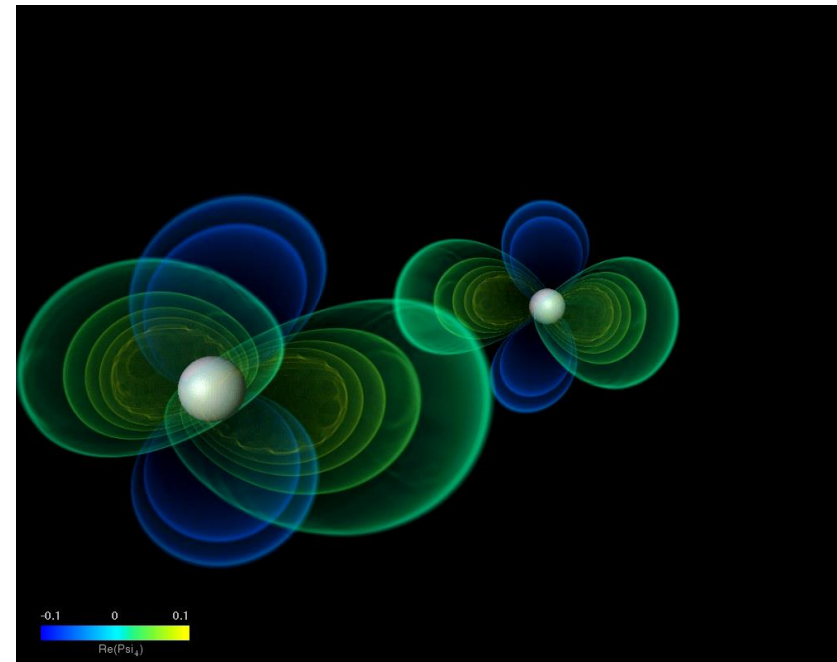
Numerieke relativiteitstheorie

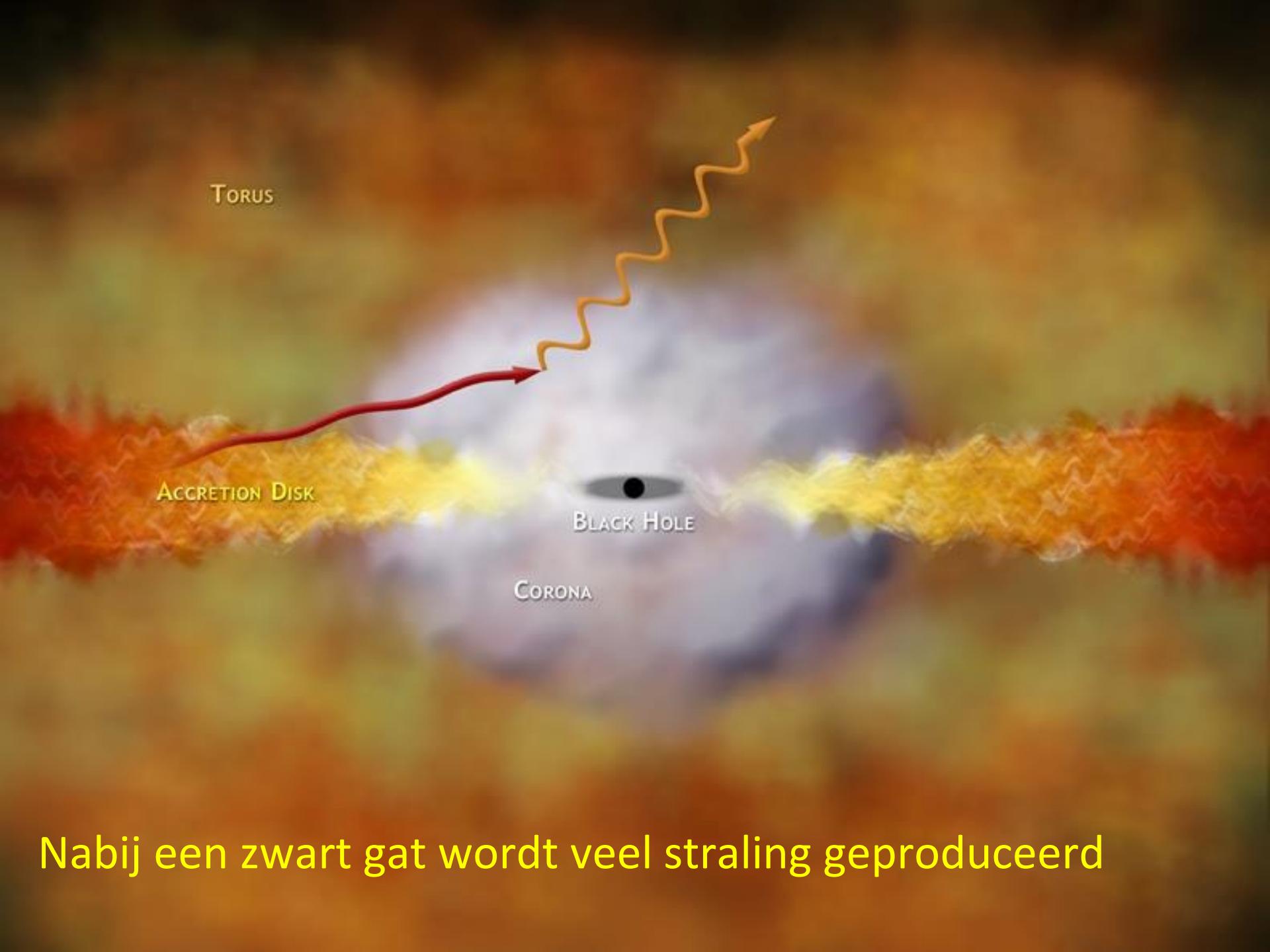
Vorming van een zwart gat uit
samensmelting van neutronensterren.
Merk op dat er een accretieschijf ontstaat



Credit: Luciano Rezzolla

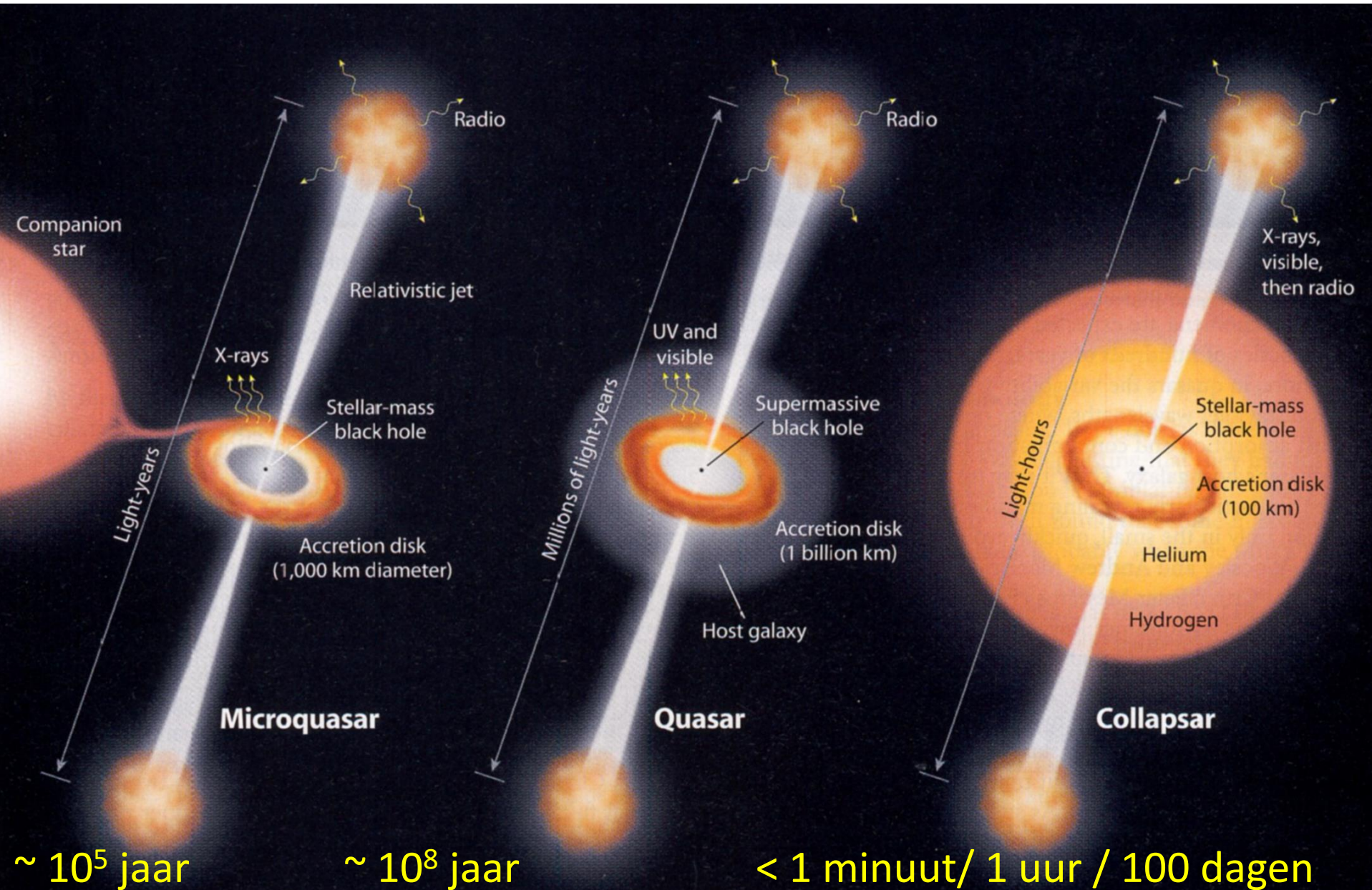
Coalescence van twee zwarte gaten:
een zuiver ruimtetijd proces





Nabij een zwart gat wordt veel straling geproduceerd

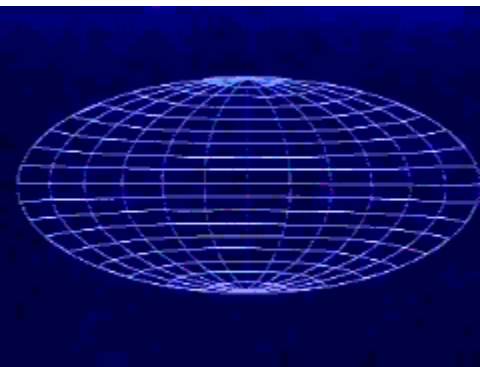
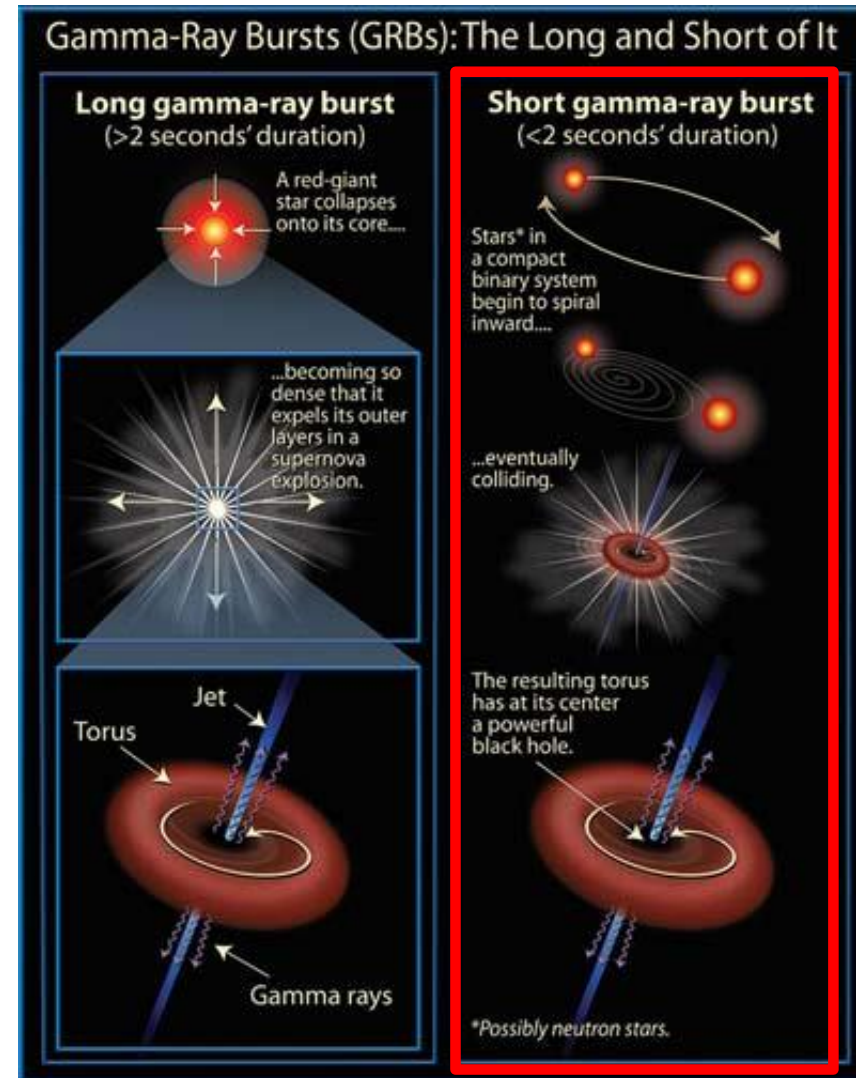
Microquasar, quasar, en gamma-flits



Burst bronnen: gamma-ray bursts

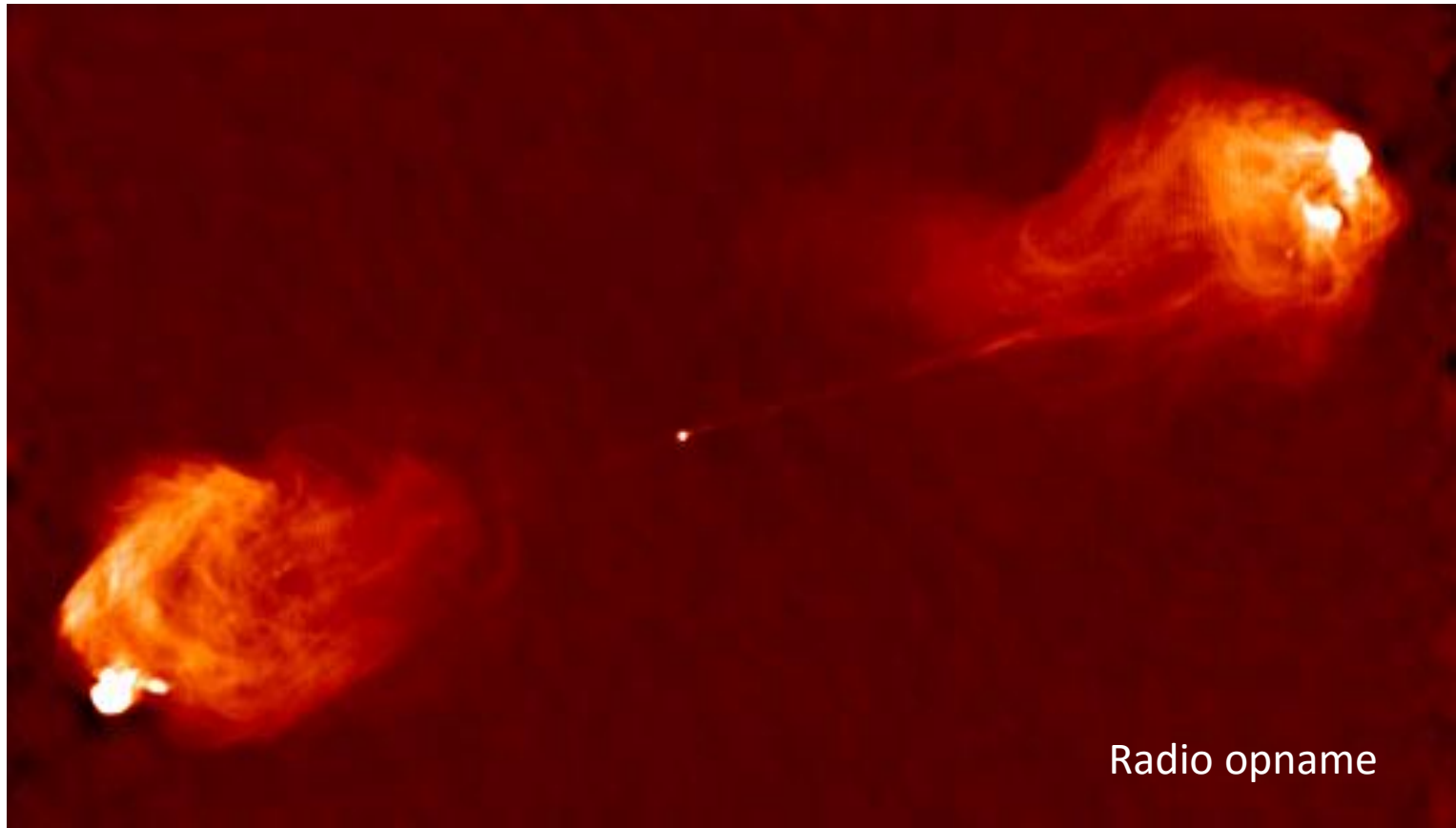
- Recente satelliet missies tonen reeks explosieve gebeurtenissen in Universum die enorme hoeveelheden energie genereren

De oorsprong van GRB is nog steeds onbekend. Er zijn diverse modellen



Radiostelsel Cygnus A

De jets hebben een totale lengte van ongeveer 500.000 lichtjaar, waarbij de orientatie van het zwarte gat gefixeerd is door haar spin

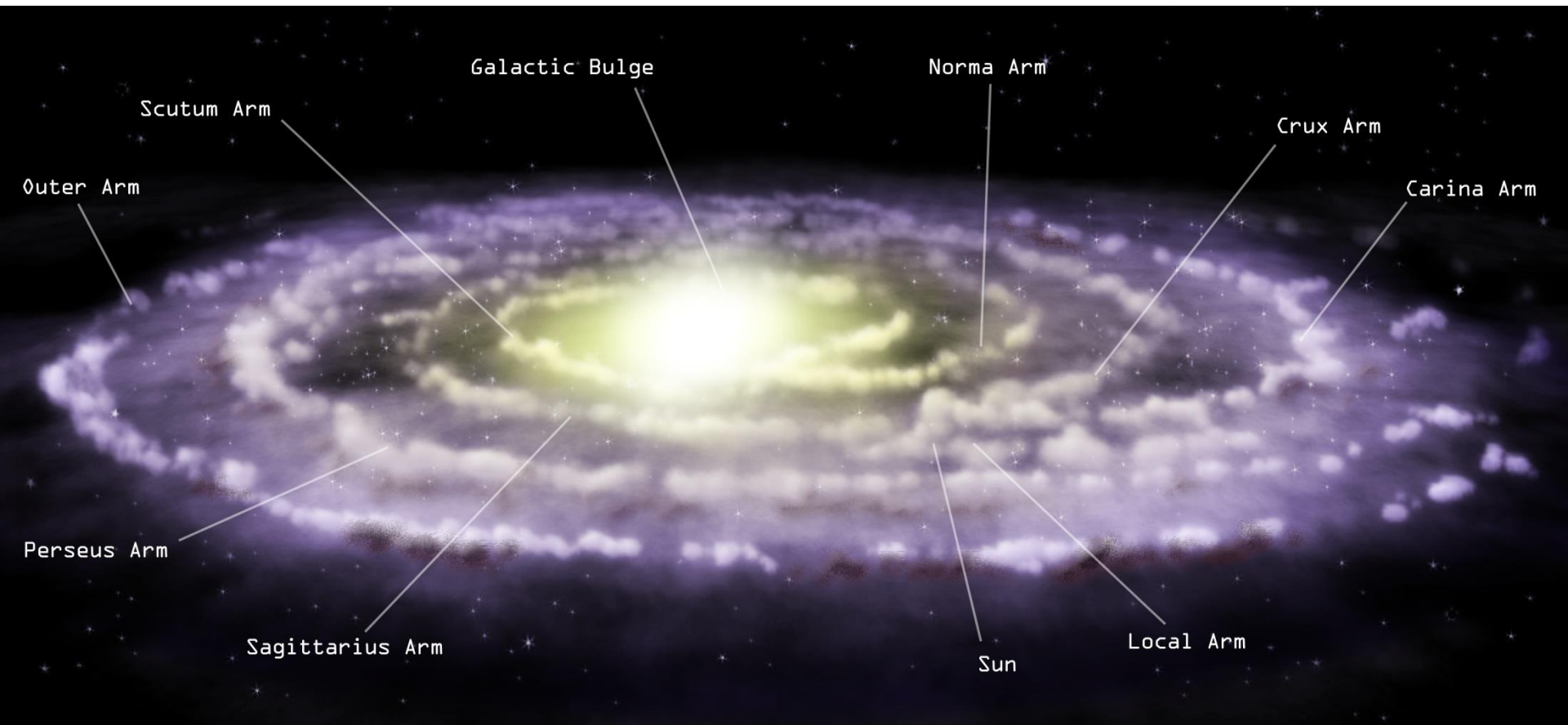


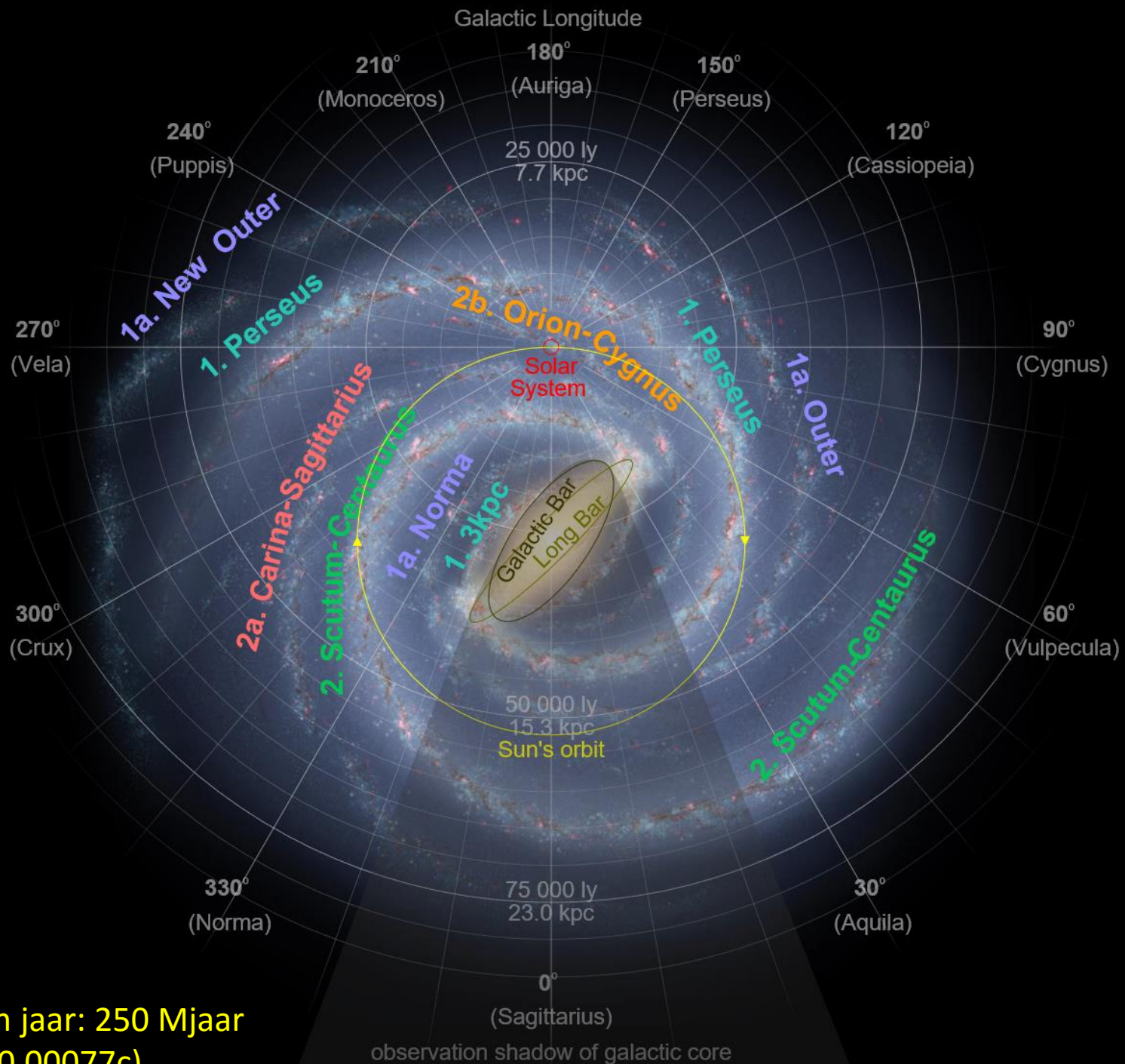
Radio opname

Supermassieve zwarte gaten

In vele sterrenstelsels schuilt een zwart gat

- Ons eigen melkwegstelsel: $M \sim 10^6 M_{\odot}$
- Actieve Sterrenstelsels: $M \sim 10^8 M_{\odot}$





1 galactisch jaar: 250 Mjaar
230 km/s (0.00077c)



Kern van ons melkwegstelsel
wordt verduisterd door stof

Combined 2MASS-MSX View of the Galactic Center



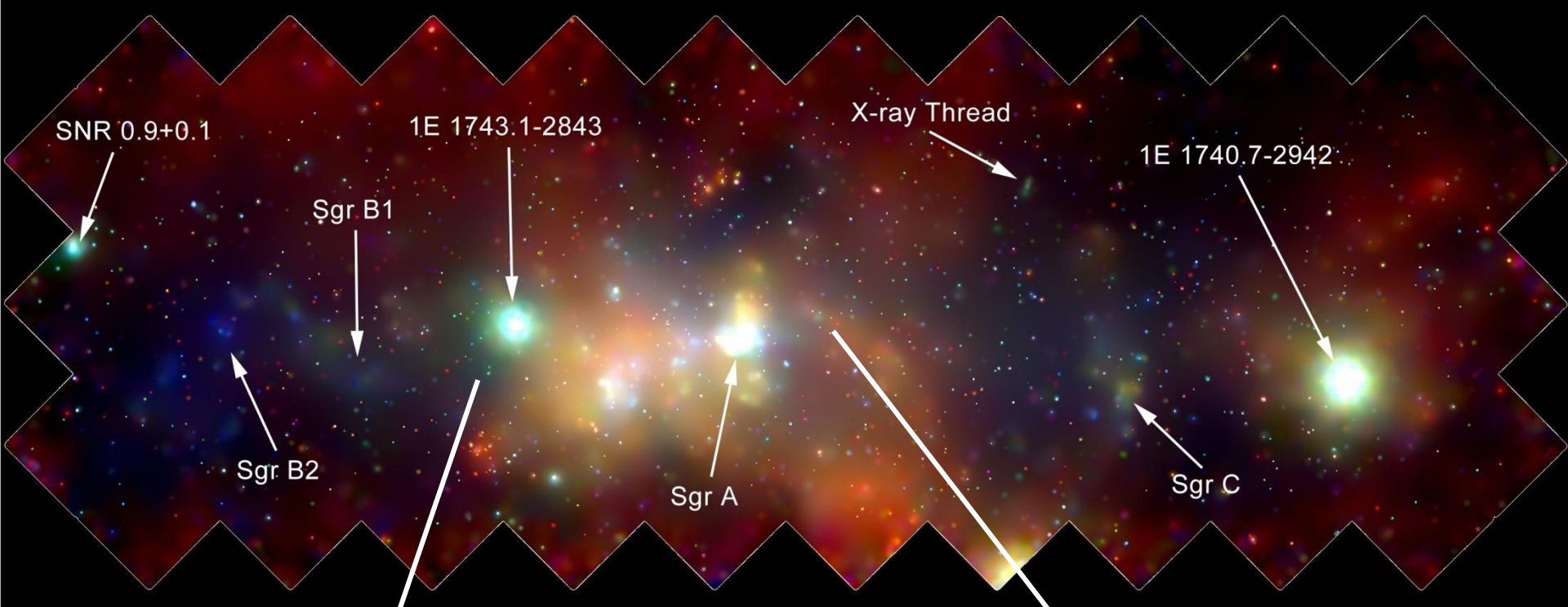
Two Micron All Sky Survey
– Southern Facility –
2MASS Atlas Image Mosaic

Infrared Processing and Analysis Center & University of Massachusetts

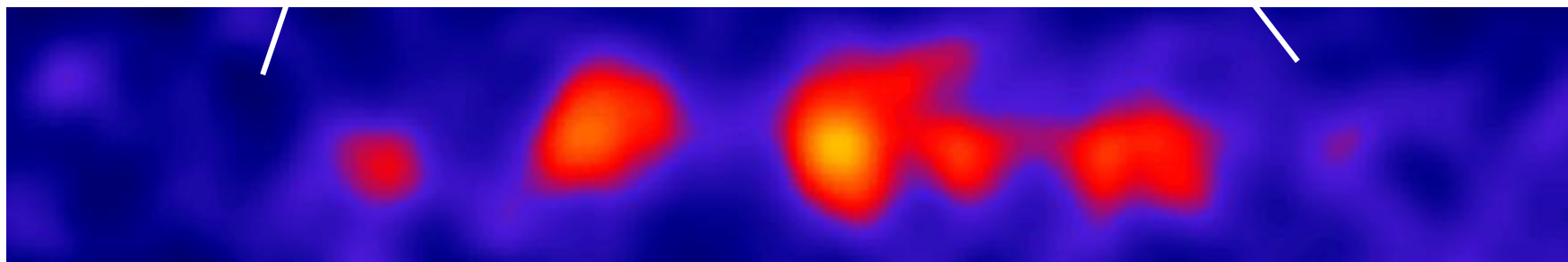


Midcourse Space Experiment
SPIRIT III

Infrarood telescopen kijken door het stof heen



Röntgenstrahlung



Gammastrahlung

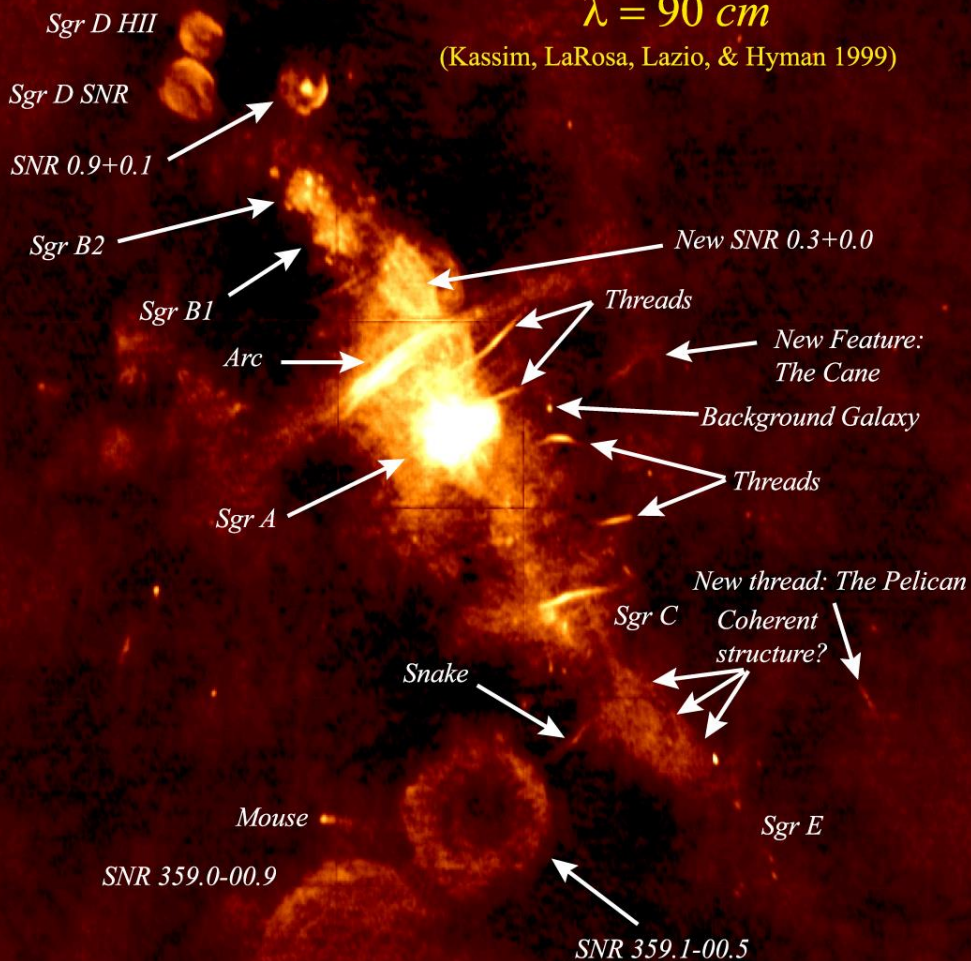


Naval Research Laboratory

Wide-Field Radio Image of the Galactic Center

$\lambda = 90 \text{ cm}$

(Kassim, LaRosa, Lazio, & Hyman 1999)

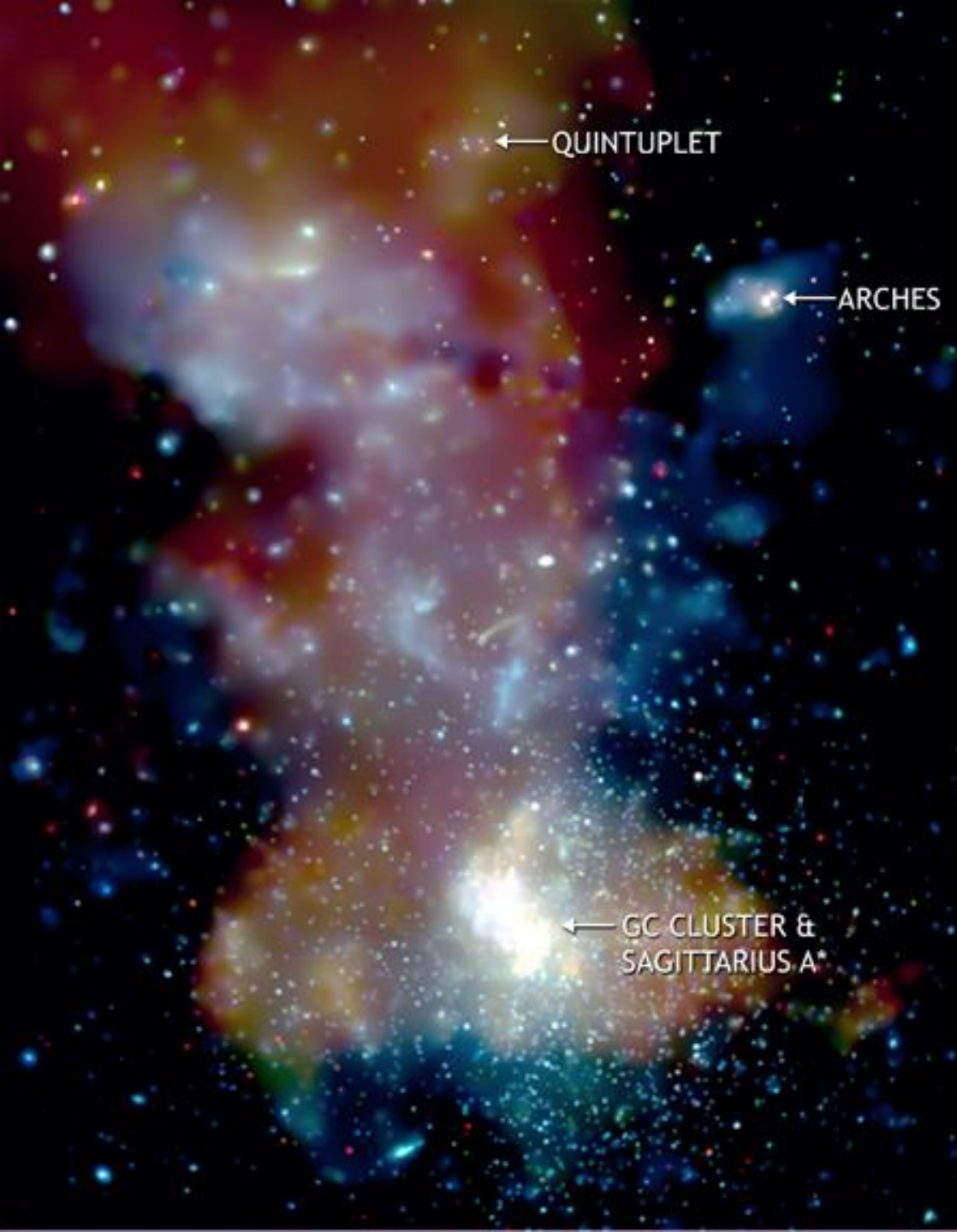


$\sim 0.5^\circ$

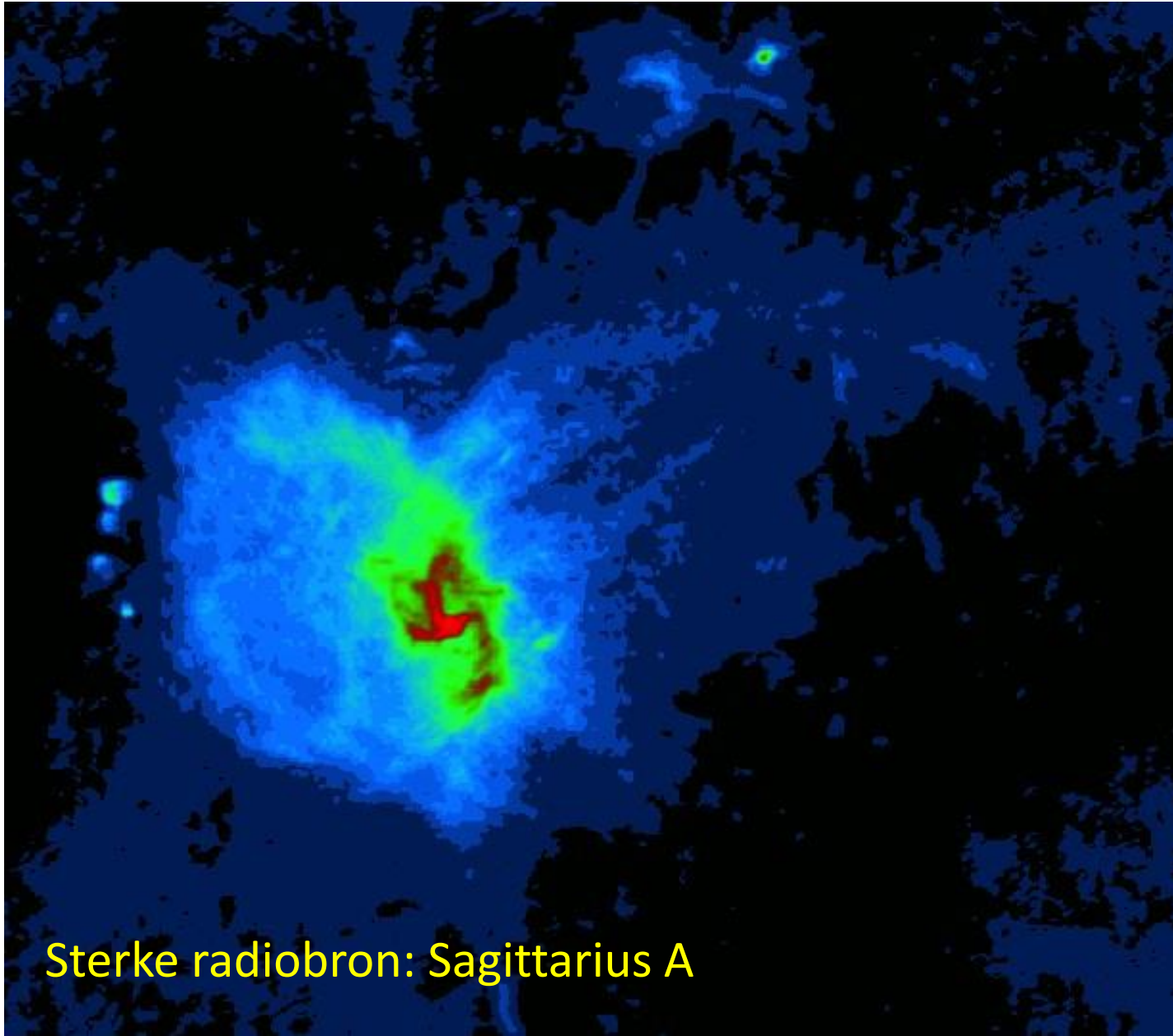
$\sim 75 \text{ pc}$

$\sim 240 \text{ light years}$

Tornado (SNR?)



Kern van melkwegstelsel (radio)



Sterke radiobron: Sagittarius A

1'

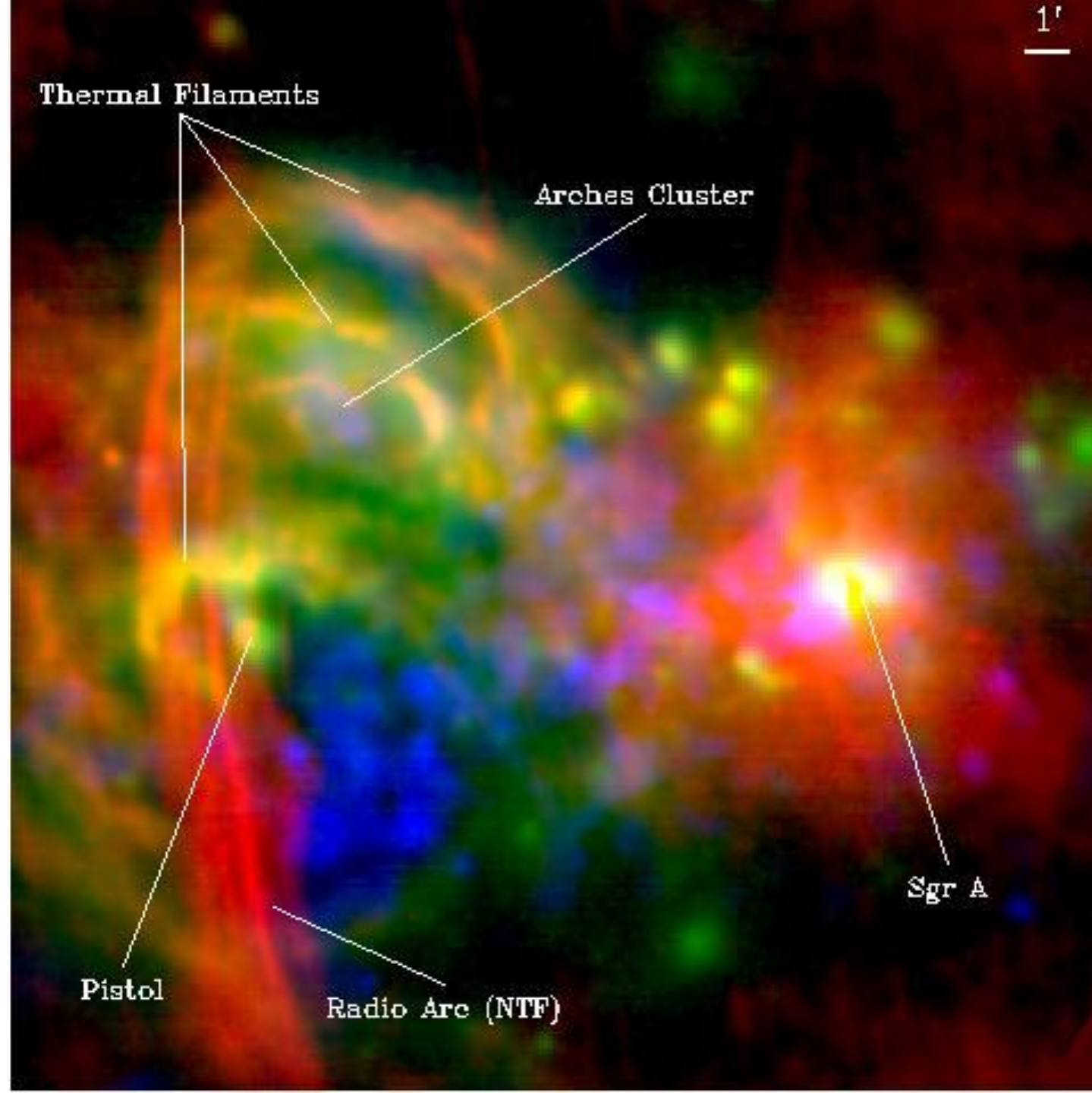
Thermal Filaments

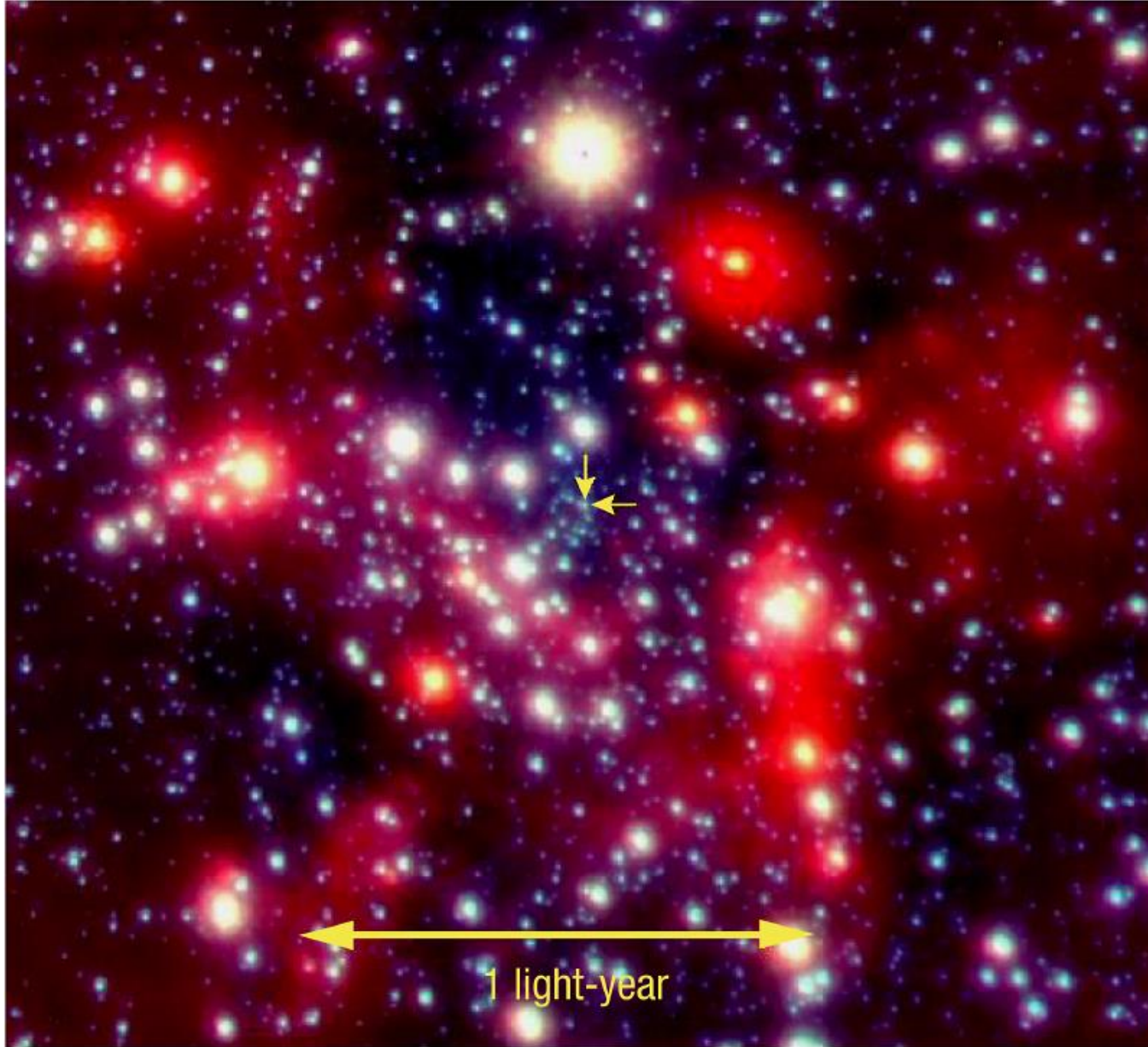
Arches Cluster

Sgr A

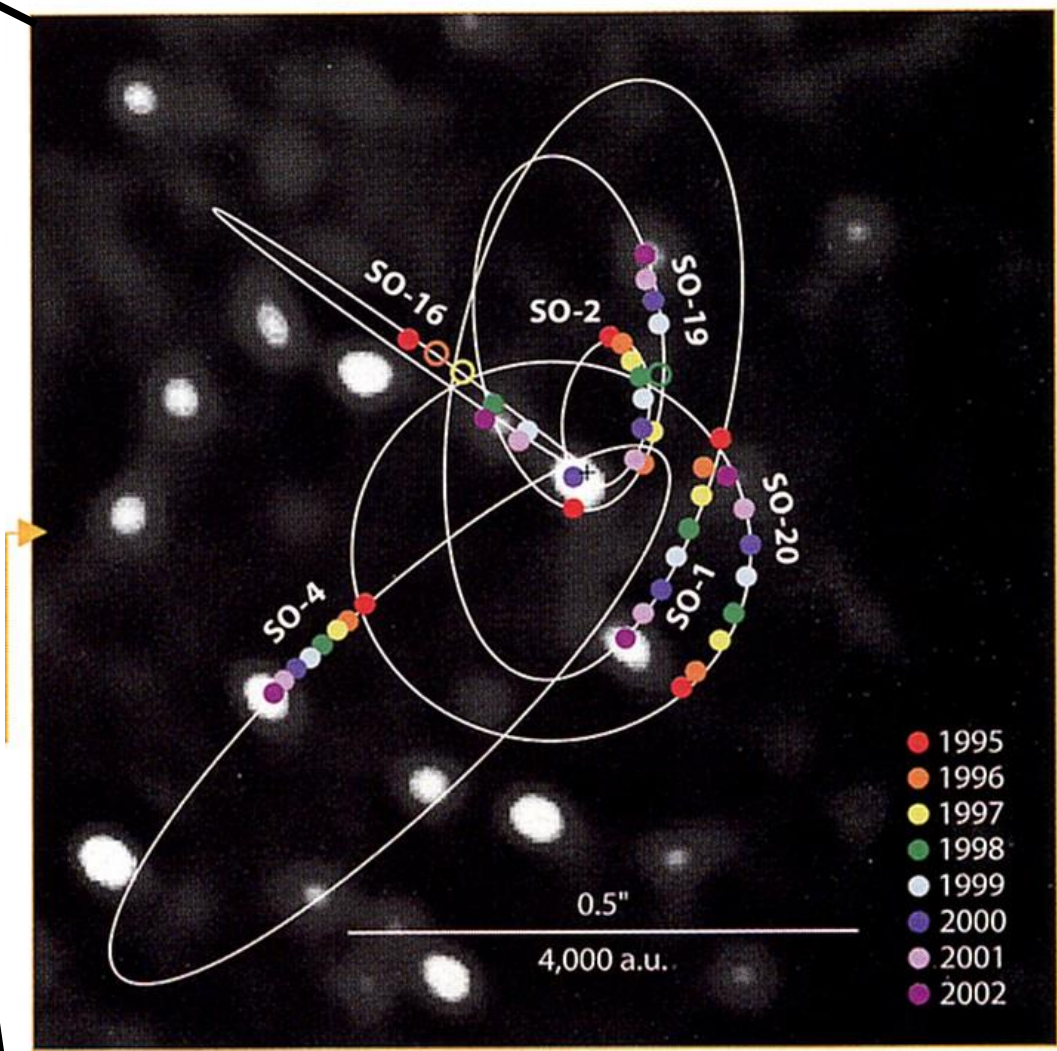
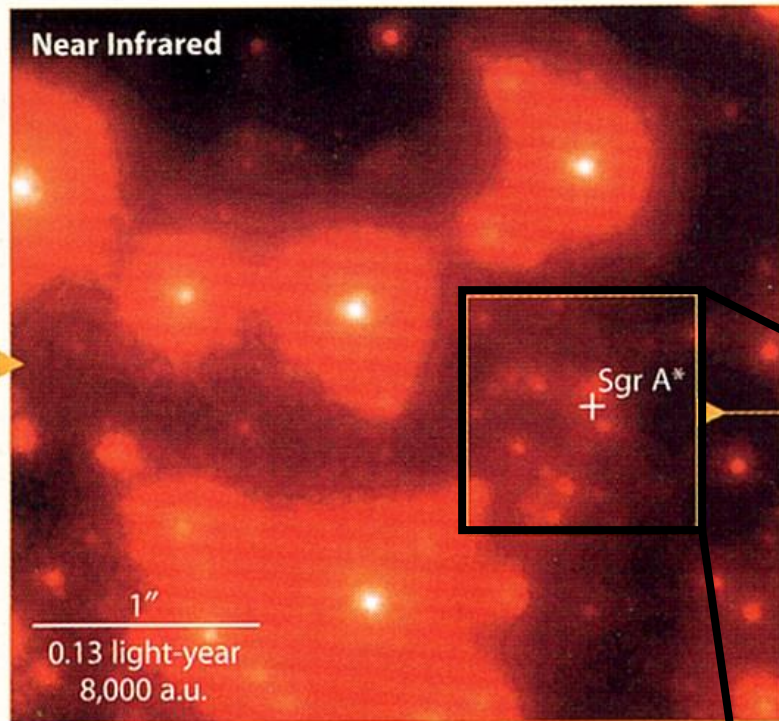
Pistol

Radio Arc (NTF)

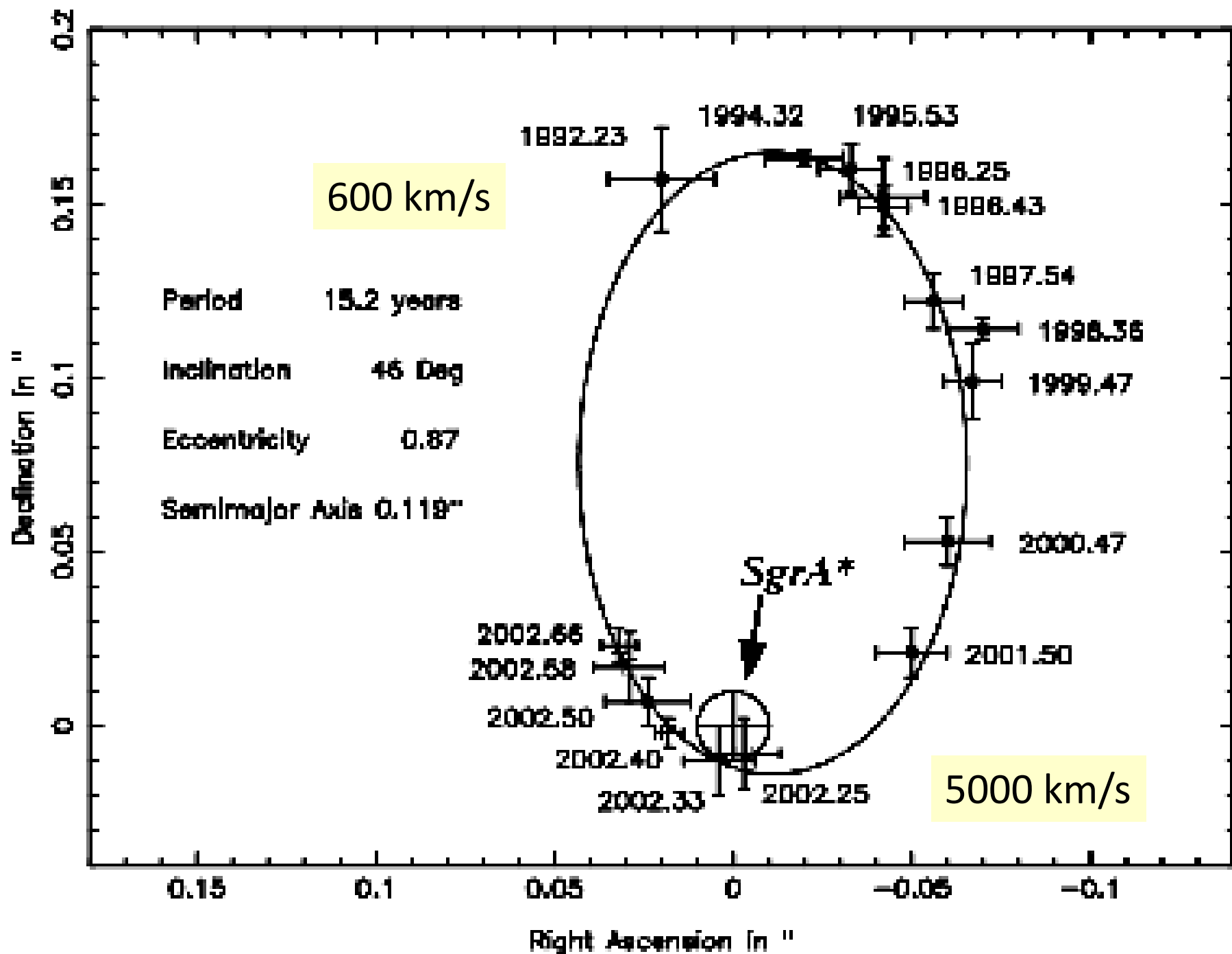




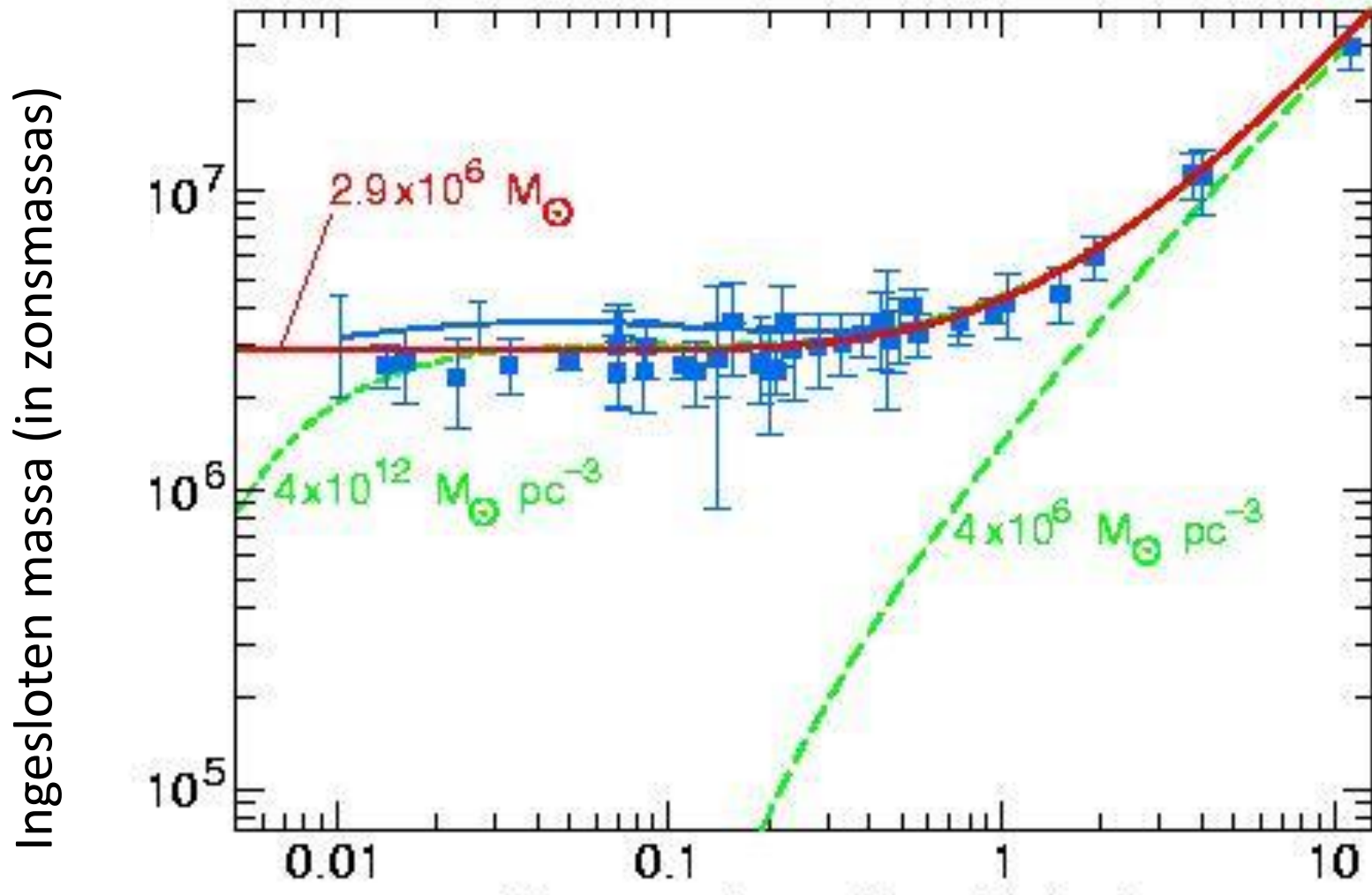
The Centre of the Milky Way
(VLT YEPUN + NACO)



Sterbanen in de
directe omgeving
van Sagittarius A*

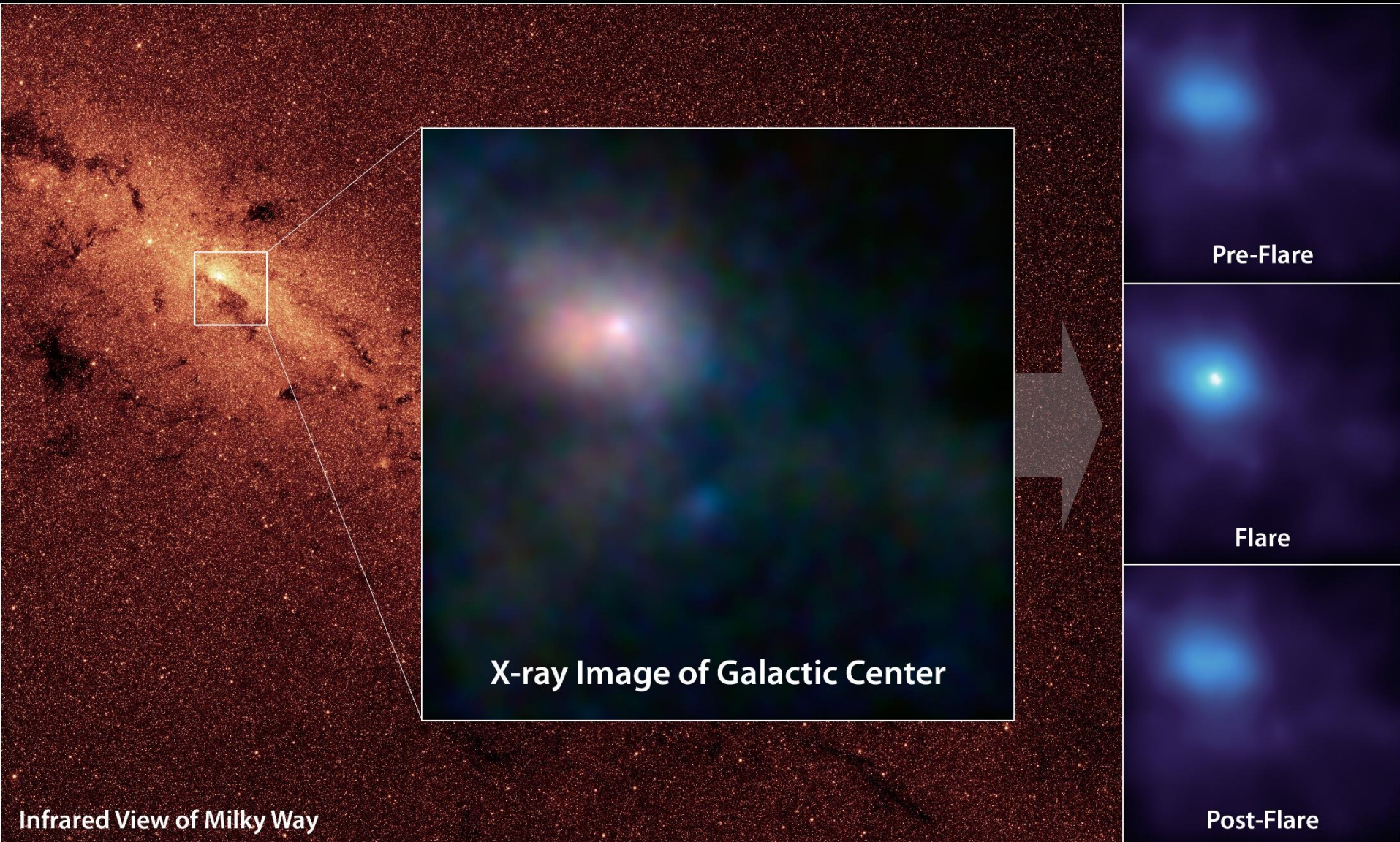


Massaverdeling in melkwegkern

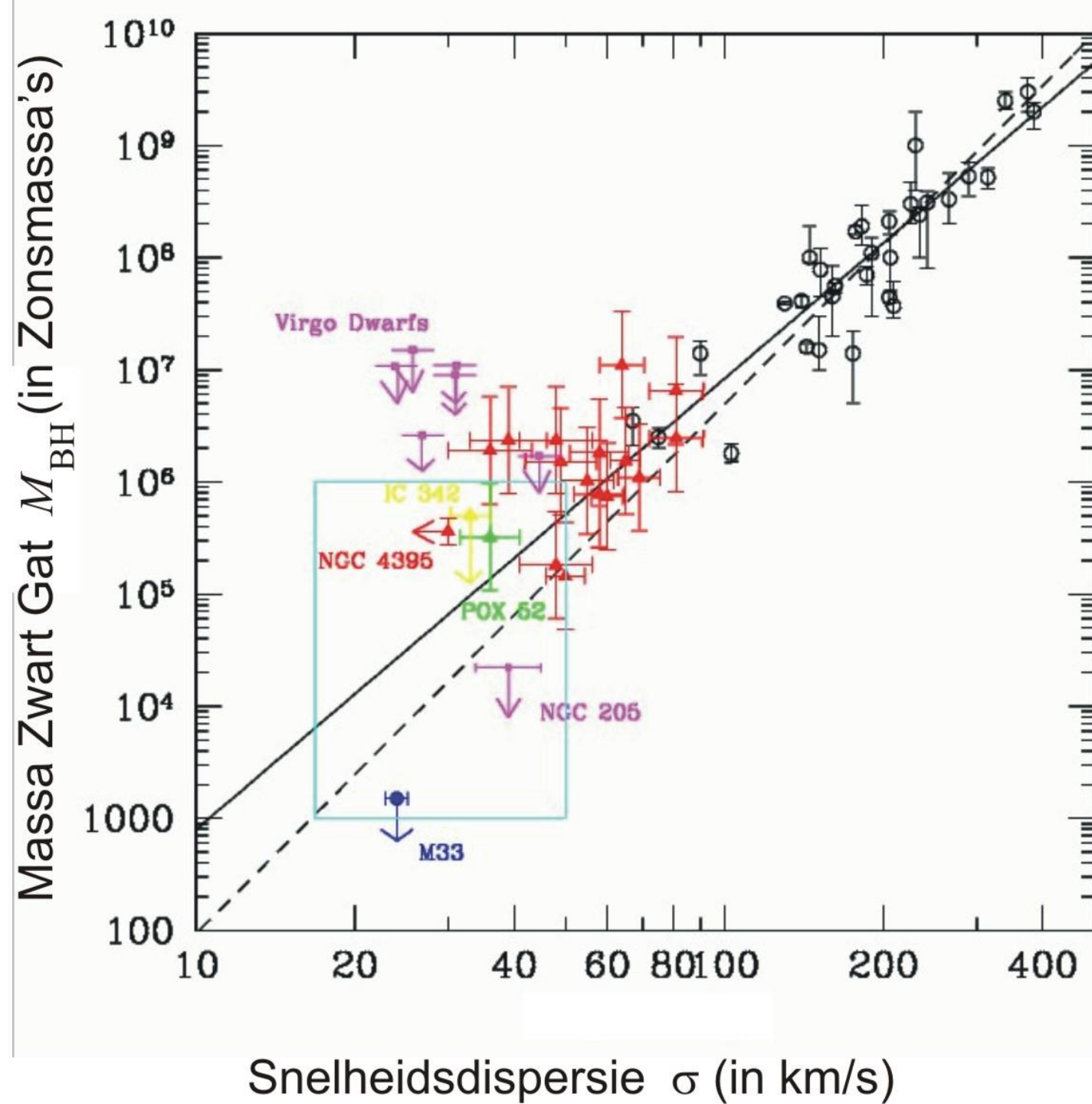


Afstand tot Sagittarius A* (in parsec)

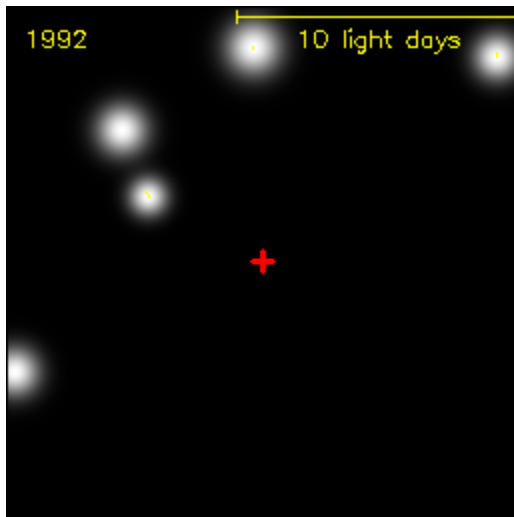
Massaverdeling in melkwegkern



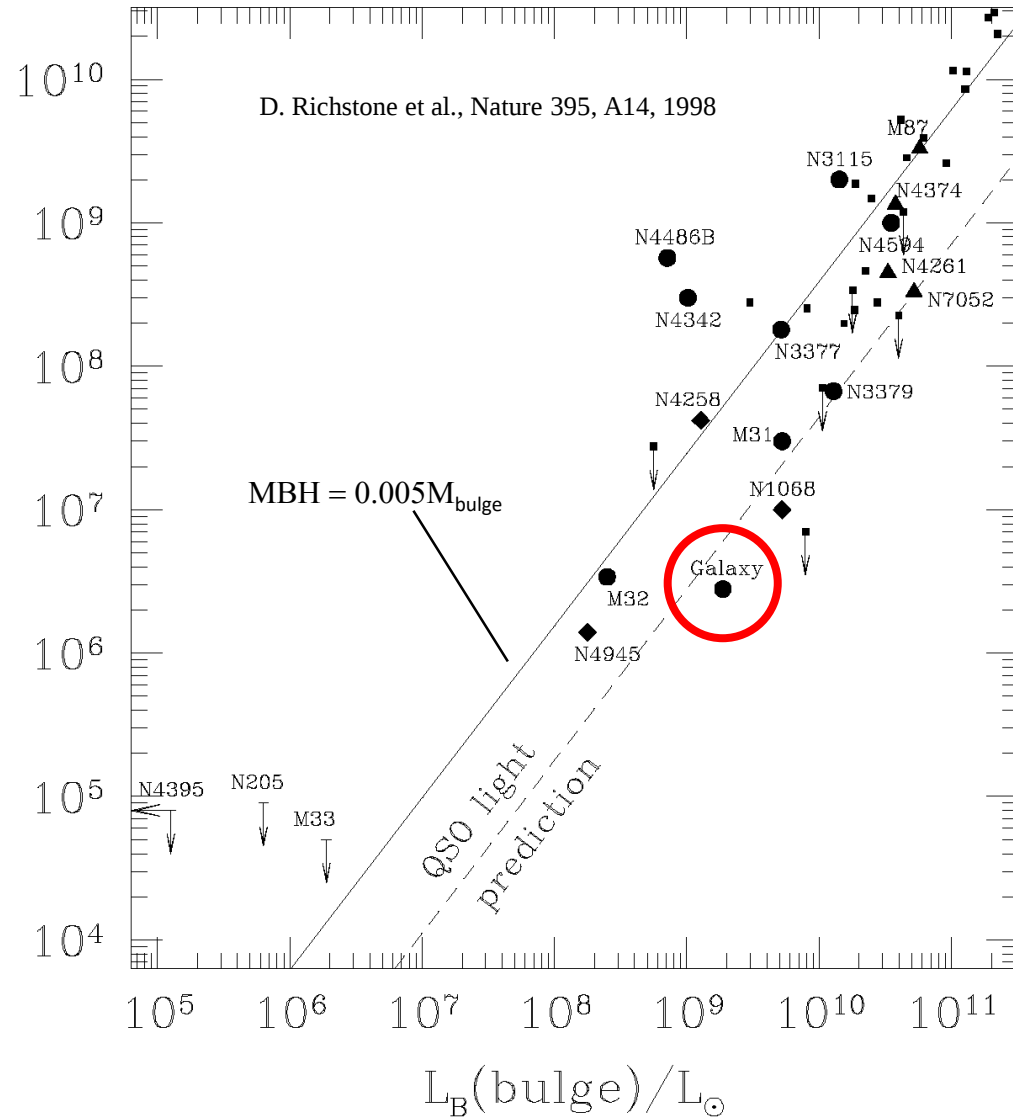
X-ray beeld van Sagittarius A* (Oktober 2012)



Supermassieve zwarte gaten

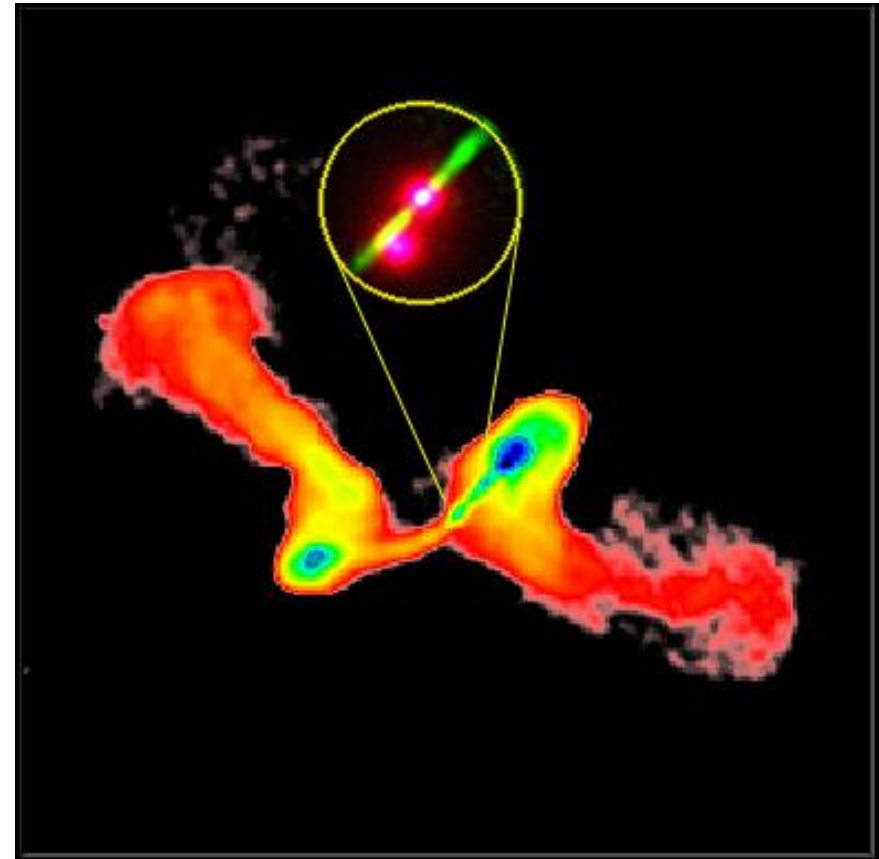


$M_{\bullet}/M_{\odot}$

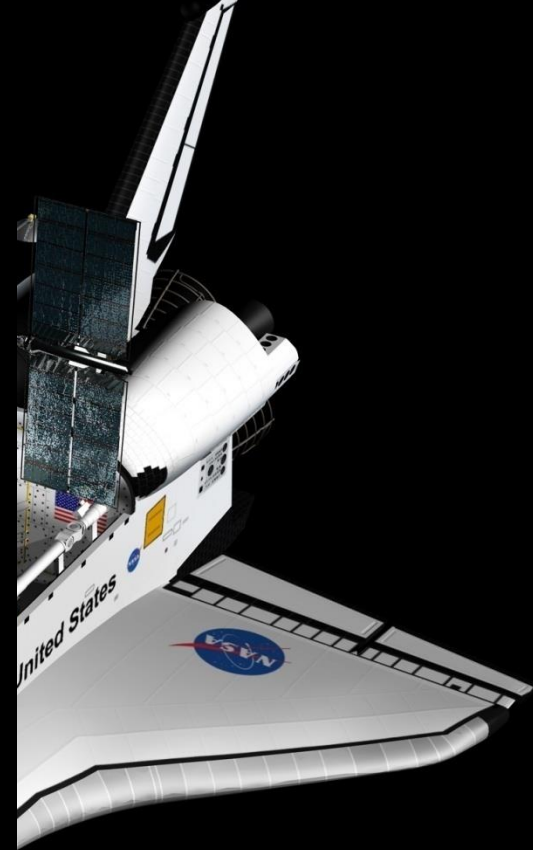
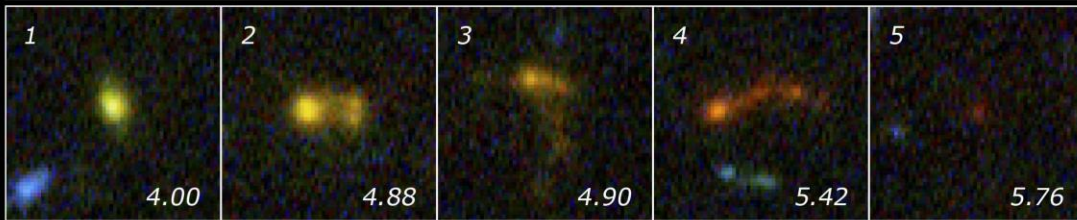
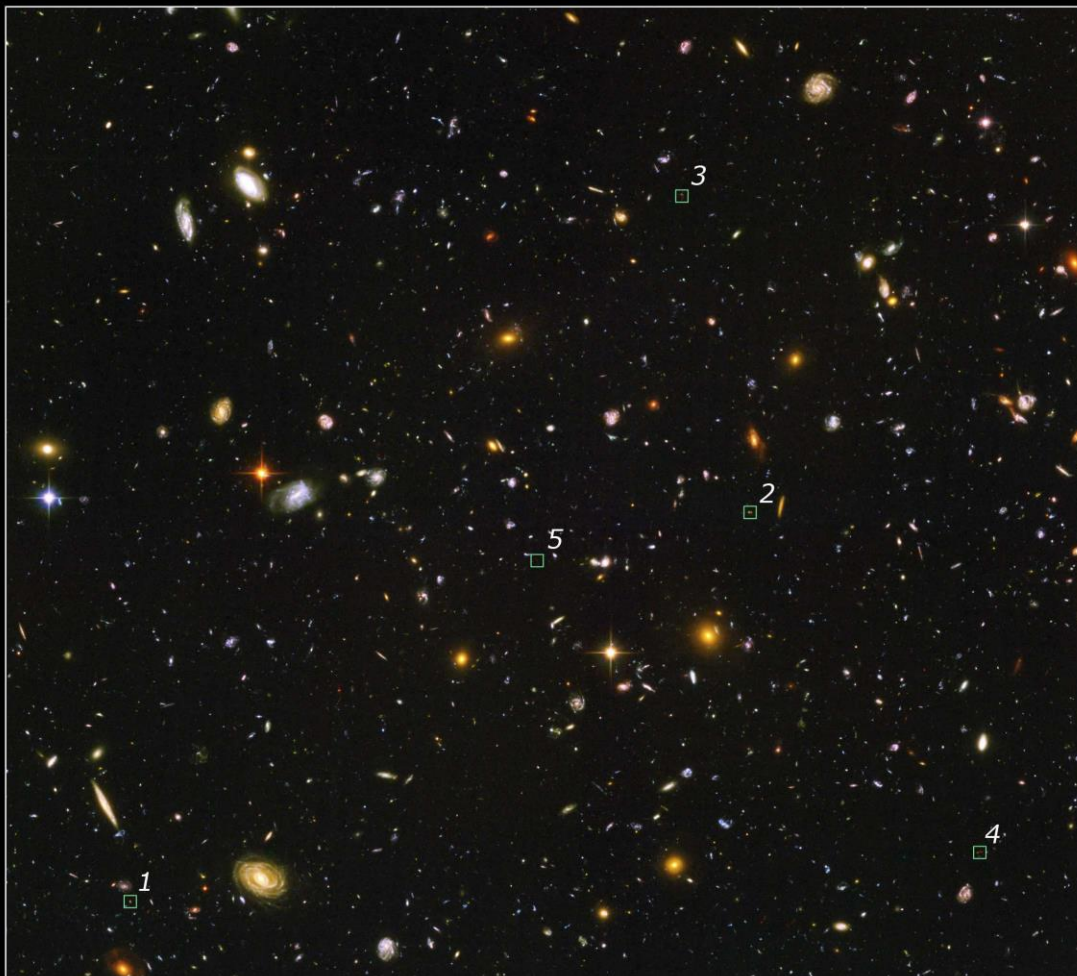


Massive black hole mergers

- Several observed phenomena may be attributed to MBH binaries or mergers
 - X-shaped radio galaxies (see figure)
 - Periodicities in blazar light curves (e.g. OJ 287)
 - X-ray binary MBH: NGC 6240
- See review by Komossa [[astro-ph/0306439](#)]



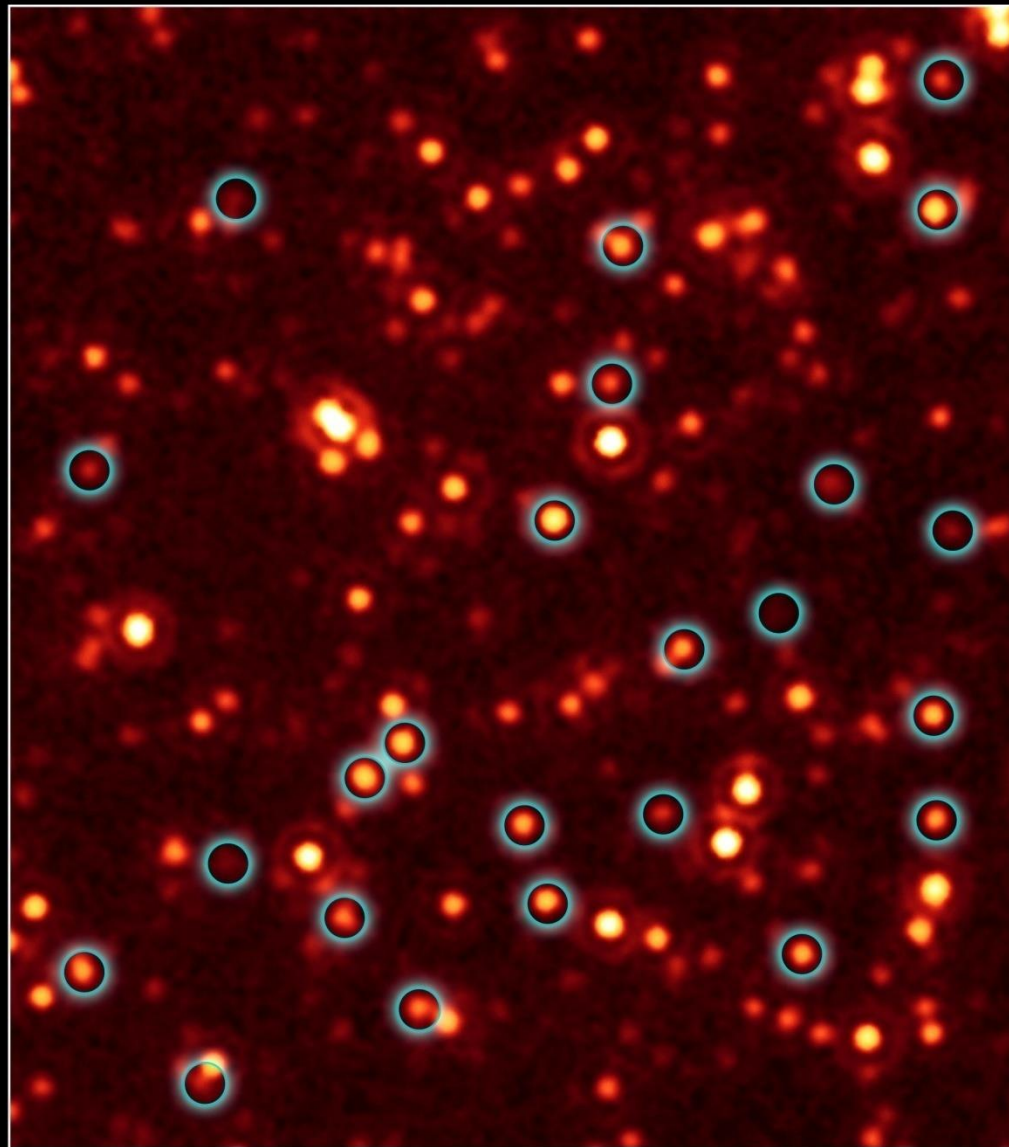
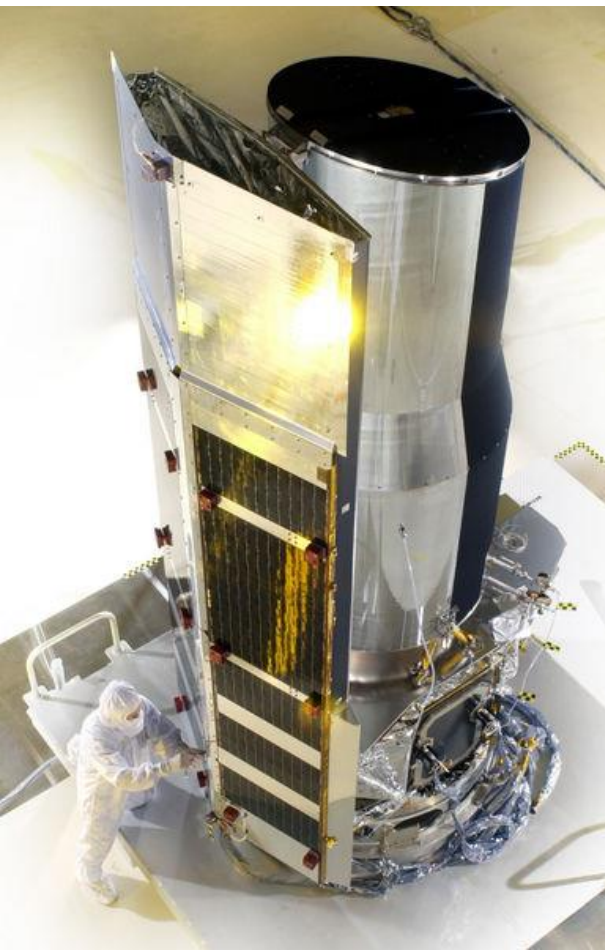
[Merritt and Ekers, 2002]



Hubble space
telescope

Galaxy Building Blocks in the Hubble Ultra Deep Field
Hubble Space Telescope • ACS/WFC

Spitzer space telescope



**Locating Black Holes in
Distant Galaxies**

NASA / JPL-Caltech / E. Daddi (CEA, France)

**Spitzer Space Telescope •
MIPS**

ssc2007-17a

GPS (Global Positioning System)

Friedwardt Winterberg (1955): gebruik atoomklokken in orbit om ART te testen

Sputnik (1957): Doppler effect geeft lokatie (20 en 40 MHz radiosignalen)

GPS (1973 bedacht, 1978 eerste satelliet, 1993 operationeel)

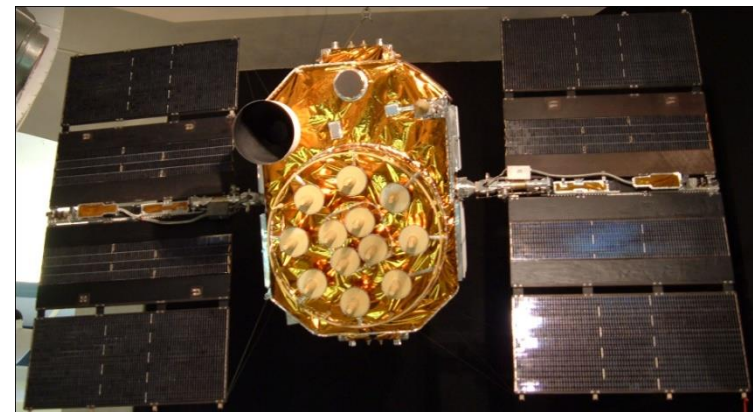
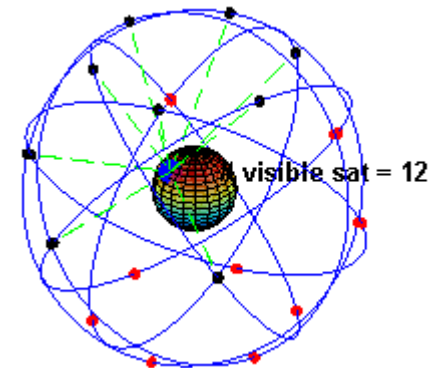
Precisie:

- atoomklokken 1 ns/dag)

- (licht legt 30 cm per ns af)

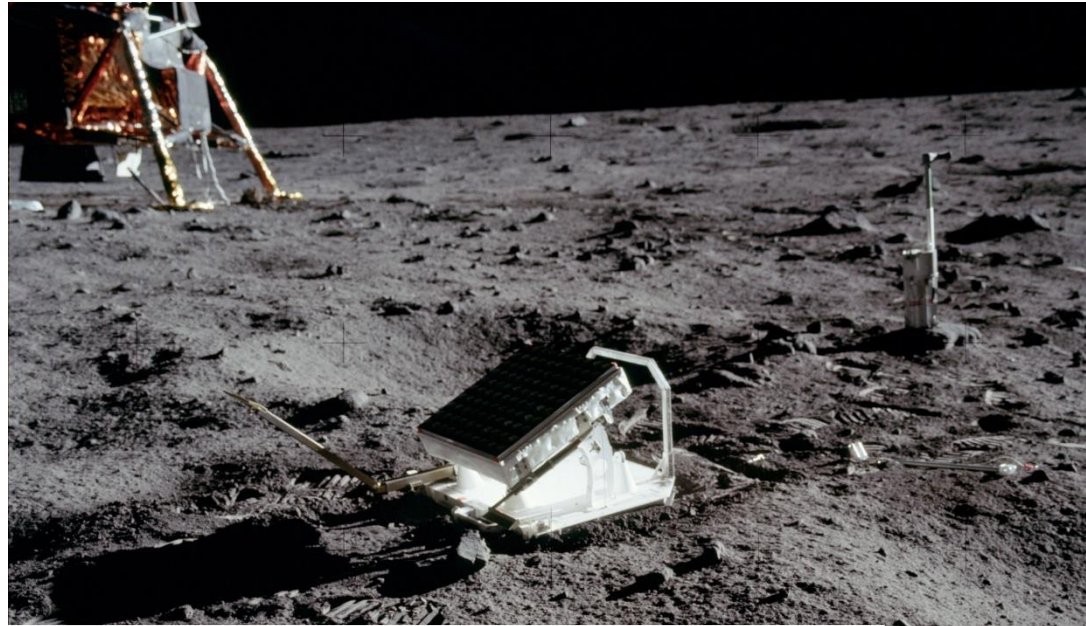
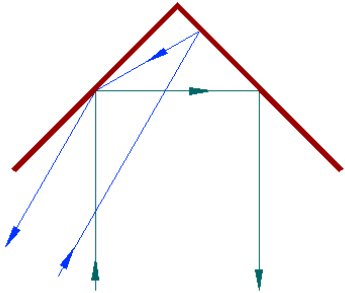
- ART 45.900 ns/dag sneller dan op Aarde

- SRT 7,200 ns/dag langzamer



Een test van ART voor statische effecten in zwakke graviteelvelden

Apollo – Lunar laser ranging



Test van EP tot $1,5 \times 10^{-13}$

Rotaties van maan: 20% vloeibare kern

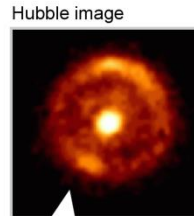
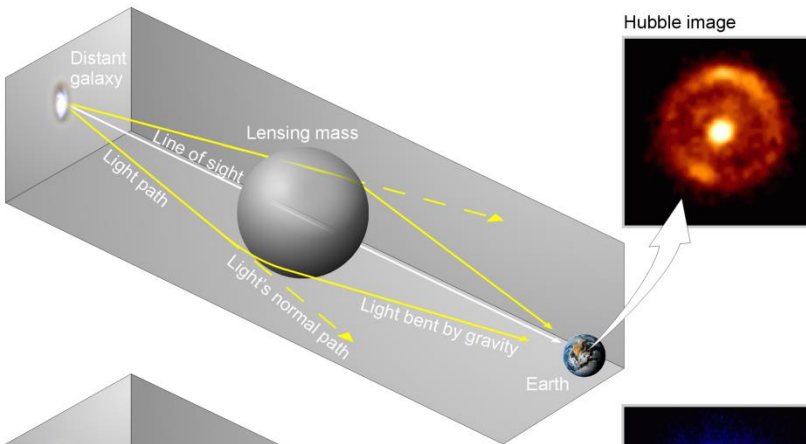
G niet tijdafhankelijk tot $1:10^{11}$ sinds 1969

Maan verwijderd zich met 3,8 cm/jaar

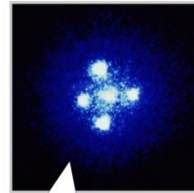
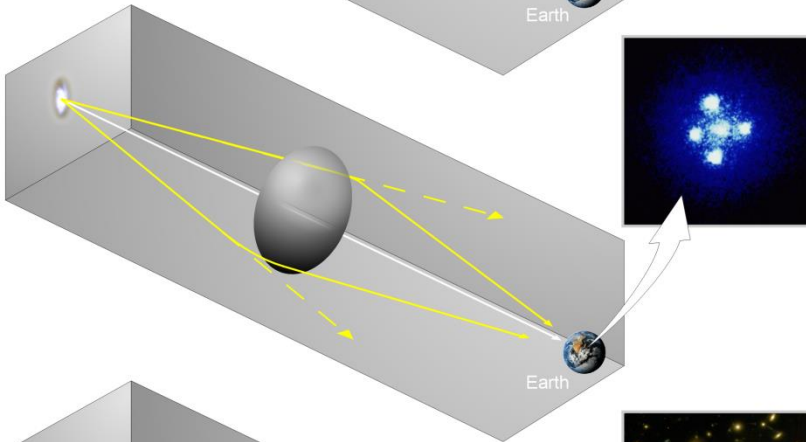
Aardprecessie volgens ART

Wie twijfelt eraan of we op de maan zijn geweest?

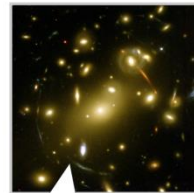
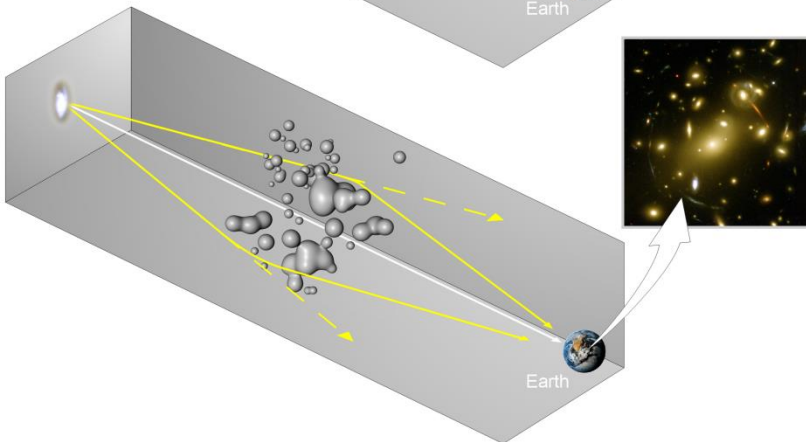
Gravitatielensen



Sferische lens geeft Einstein ring



Platte lens geeft Einstein kruis



Banaanachtige vervorming



LRG 3-757 Hubble Space Telescope's Wide Field Camera 3



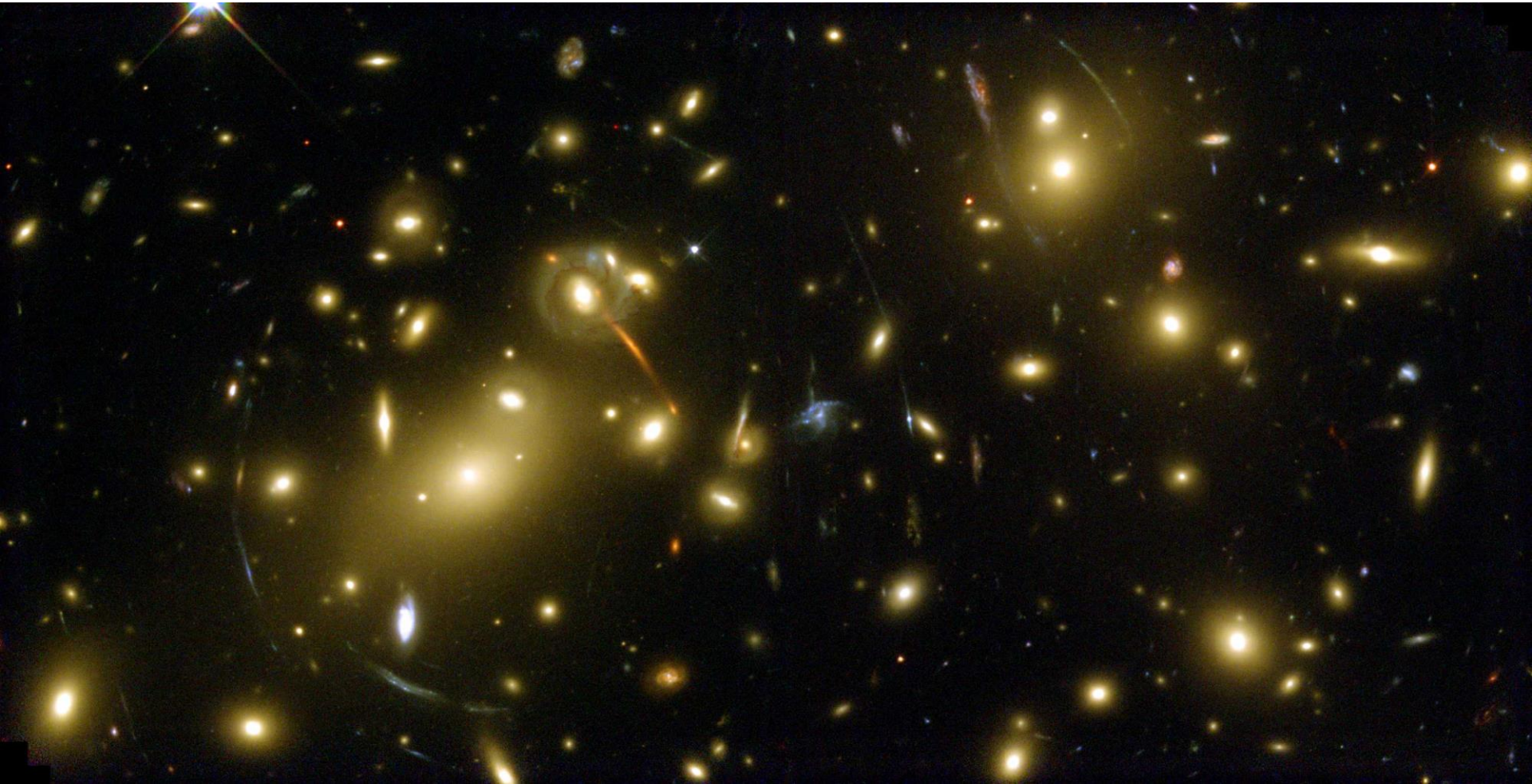
Cluster of galaxies C10024+1654, Hubble Space Telescope

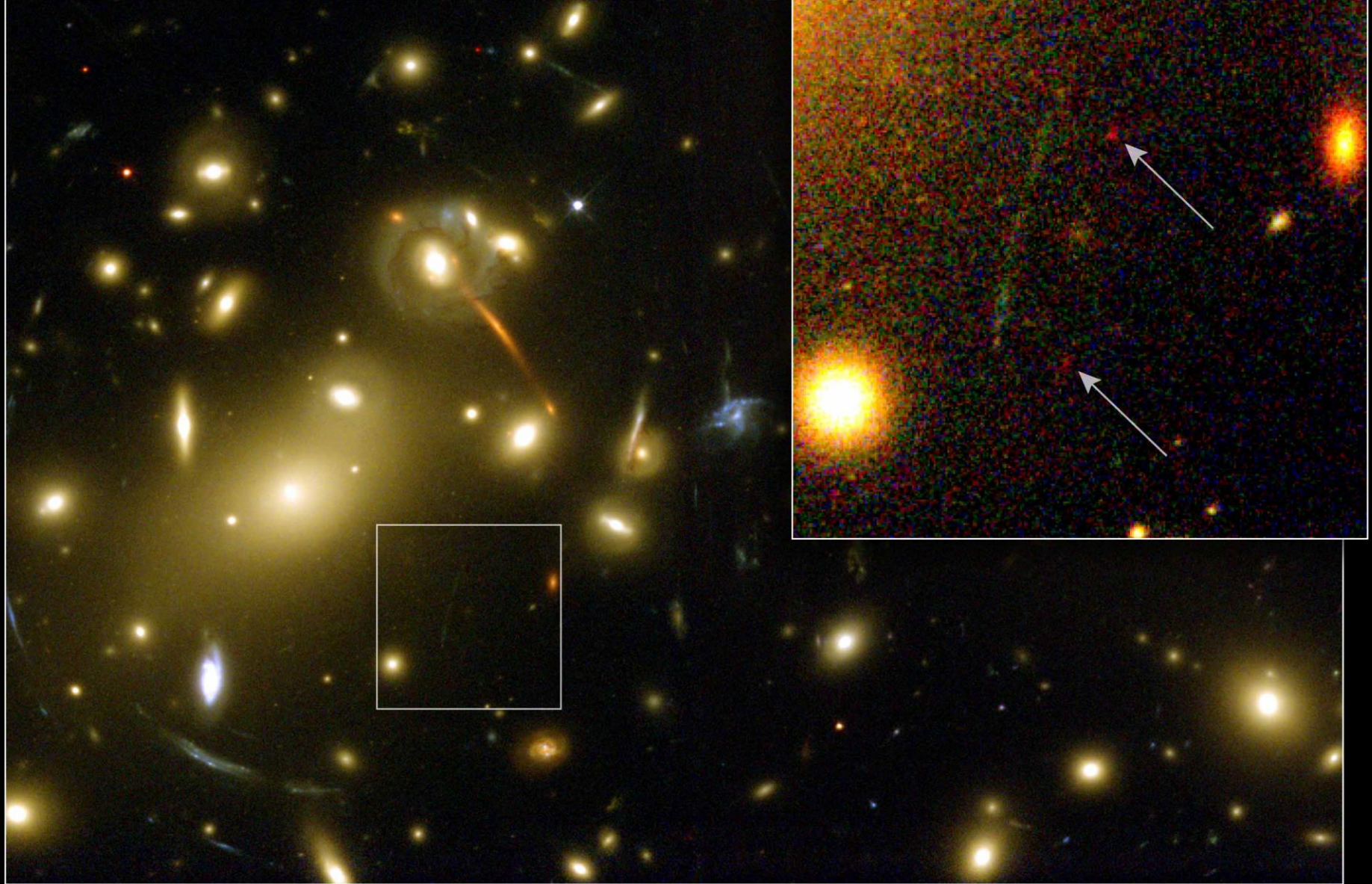
Abell 2218

Cluster van sterrenstelsels op 2 Glichtjaar afstand

- werkt als een sterke Einstein lens
- oranje: elliptisch stelsel ($z = 0.7$), blauw: stervorming ($z = 1.5$) en rood ($z = 7$)

13 Gjaar oud





Distant Object Gravitationally Lensed by Galaxy Cluster Abell 2218
Hubble Space Telescope • WFPC2

In een zwart gat vallen

We gaan nu door de horizon en reizen naar $r = 0$

De radiële bewegingsvergelijking is $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left[\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{R_S}{r} \right]$

We starten vanuit rust op grote afstand r_0 waar geldt $dr/d\tau = 0$

Omdat energie E constant is, vinden we hiermee $\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 = 1 - \frac{R_S}{r_0}$

Dus $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 R_S \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right]$

We gebruiken de negatieve wortel om de invallende beweging te beschrijven (waarom?)

$$\frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{R_S} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} = -c\sqrt{R_S} \sqrt{\frac{r_0 - r}{rr_0}} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}$$

We integreren over r van r_0 tot een punt r' $\tau(r') - \tau(r_0) = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \int_{r_0}^{r'} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} dr$

$$\begin{aligned} \text{Dit levert} \quad \tau(r') - \tau(r_0) &= \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[\sqrt{\frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} + \arctan \left(-\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}} \right) \right]_{r_0}^{r'} \\ &= \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{r'}{r_0} \left(1 - \frac{r'}{r_0}\right)} + \arctan \left(-\sqrt{\frac{r'}{r_0 - r'}} \right) \right] \end{aligned}$$

In een zwart gat vallen

De tijd die verstrijkt op de klok van de vrij vallende waarnemer bedraagt

$$\tau(r') - \tau(r_0) = \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{r'}{r_0} \left(1 - \frac{r'}{r_0} \right)} + \arctan \left(-\sqrt{\frac{r'}{r_0 - r'}} \right) \right]$$

Als we onze val op grote afstand van het zwarte gat beginnen, geldt $r_0 \gg r'$

We kunnen de rechterkant van de vergelijking dan in Taylor expansie schrijven

$$\text{Dus } \tau(r') - \tau(r_0) \approx \frac{r_0}{c} \left(\frac{r_0}{R_S} \right)^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{r'}{r_0} \right)^{3/2} \right]$$

Als we geïnteresseerd zijn in de tijd tot we in de centrale singulariteit aankomen, kunnen

we de limiet $r' \rightarrow 0$ beschouwen. Dat levert $\tau_{\text{sing}} = \frac{\pi r_0^{3/2}}{2cR_S^{1/2}}$

Eveneens kunnen we uitrekenen

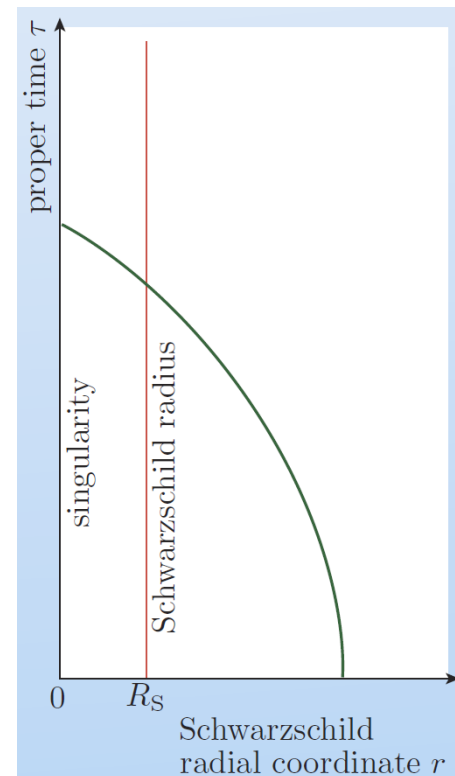
hoelang het duurt voordat we de

event horizon bereiken. We vinden $\tau_{\text{horiz}} = \frac{r_0^{3/2}}{cR_S^{1/2}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{R_S}{r_0} \right)^{3/2} \right]$

Het verschil in beide uitdrukkingen geeft de tijd die verstrijkt om van de horizon de singulariteit te bereiken

$$\tau_{\text{sing}} - \tau_{\text{horiz}} = \frac{2}{3} \frac{R_S}{c}$$

De figuur toont dat er niets bijzonders bij de horizon gebeurt



Vallen gezien vanuit grote afstand

Voor een waarnemer op grote afstand is er geen verschil tussen de proper tijd gemeten met zijn locale klok en zijn coördinaten tijd. We gebruiken t om zijn tijd aan te geven

We willen weten hoelang het duurt voordat licht deze waarnemer bereikt

Voor twee events op de wereldlijn van een naar buiten reizend foton met $d\theta = d\phi = 0$

$$0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 (dt)^2 - \frac{(dr)^2}{1 - R_S/r} \quad \longrightarrow \quad \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{c} \frac{1}{1 - R_S/r}$$

Voor een radieel naar buiten reizend foton kiezen we het + teken (waarom?_

Voor een radieel foton uitgezonden door een vallend

lichaam op t_1 en r_1 en dat wordt geobserveerd door een

verre waarnemer op t_2 en r_2 bedraagt de vluchttijd $t_2 - t_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{1}{c} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{1 - R_S/r}$

We vinden $t_2 - t_1 = \frac{r_2 - r_1}{c} + \frac{R_S}{c} \ln \left(\frac{r_2 - R_S}{r_1 - R_S} \right)$

We vinden niet $(r_2 - r_1)/c$ omdat coördinaten geen metrische betekenis hebben

De “vluchttijd” is groter dan $(r_2 - r_1)/c$ en nadert oneindig als r_1 het punt met R_S nadert

Het verschil in coördinaten tijd hangt enkel af van de posities van emissie en observatie

Vallen gezien vanuit grote afstand

We kunnen meer inzicht krijgen in wat de verre waarnemer ziet door de positie r van het vrij vallende object als functie van de tijd t te bepalen

We hebben reeds afgeleid dat $\frac{E}{mc^2} = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$ 

We hadden ook $E/mc^2 = (1 - R_S/r_0)^{1/2}$ $\frac{dt}{d\tau} = \frac{(1 - R_S/r_0)^{1/2}}{1 - R_S/r}$

Verder hadden we reeds $\frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}$

Vermenigvuldigen levert $\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{cR_S^{1/2}} \frac{(1 - R_S/r_0)^{1/2}}{1 - R_S/r} \sqrt{\frac{rr_0}{r_0 - r}}$

We zijn enkel geïnteresseerd in effecten nabij de horizon, waar $r \ll r_0$

Dat levert $\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{cR_S^{1/2}} \frac{r^{1/2}}{1 - R_S/r}$

We integreren over r vanaf r_* op grote afstand van de horizon tot een punt r'

$$t(r') - t(r_*) = -\frac{1}{cR_S^{1/2}} \int_{r_*}^{r'} \frac{r^{1/2}}{1 - R_S/r} dr$$

Er geldt $t(r') - t(r_*) = -\frac{R_S}{c} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{r}{R_S}\right)^{3/2} + 2 \left(\frac{r}{R_S}\right)^{1/2} - \ln \left| \frac{(r/R_S)^{1/2} + 1}{(r/R_S)^{1/2} - 1} \right| \right]_{r_*}^{r'}$

Vallen gezien vanuit grote afstand

Als we de grenzen invullen, vinden we

$$t(r') - t(r_*) = \frac{R_S}{c} \left(\text{constant} - \frac{2}{3} \left(\frac{r'}{R_S} \right)^{3/2} - 2 \left(\frac{r'}{R_S} \right)^{1/2} + \ln \left| \frac{(r'/R_S)^{1/2} + 1}{(r'/R_S)^{1/2} - 1} \right| \right)$$

De groene lijn in de figuur toont het resultaat

De blauwe lijn geeft de tijd die verstrijkt op de vallende klok

Volgens de verre waarnemer duurt het oneindig lang voordat het vallende lichaam de horizon bereikt

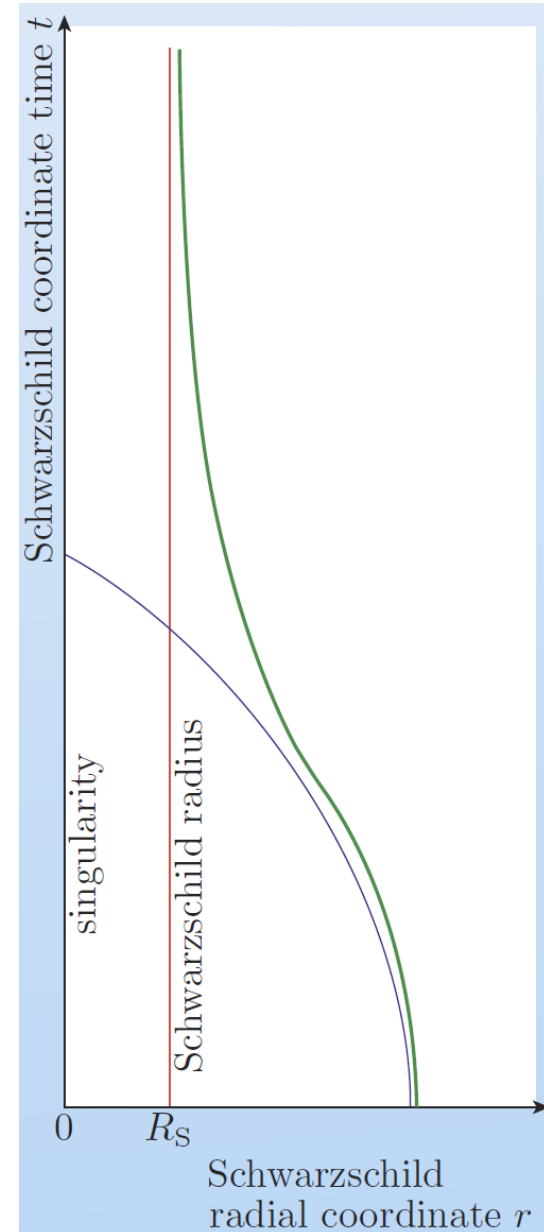
Merk op dat ook het lichtsignaal van een *vallend* object er een oneindige tijd over deed, maar dat was toch een andere relatie

Voor licht van een stationair object: $f_\infty = f_{\text{em}} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}} \right)^{1/2}$

En dus $\lambda_\infty = \frac{\lambda_{\text{em}}}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}} \right)^{1/2}}$

De horizon is het *oppervlak van oneindige roodverschuiving*

Voor de luminositeit geldt $L \rightarrow L_0 e^{ct/aR_S}$ als $r \rightarrow R_S$



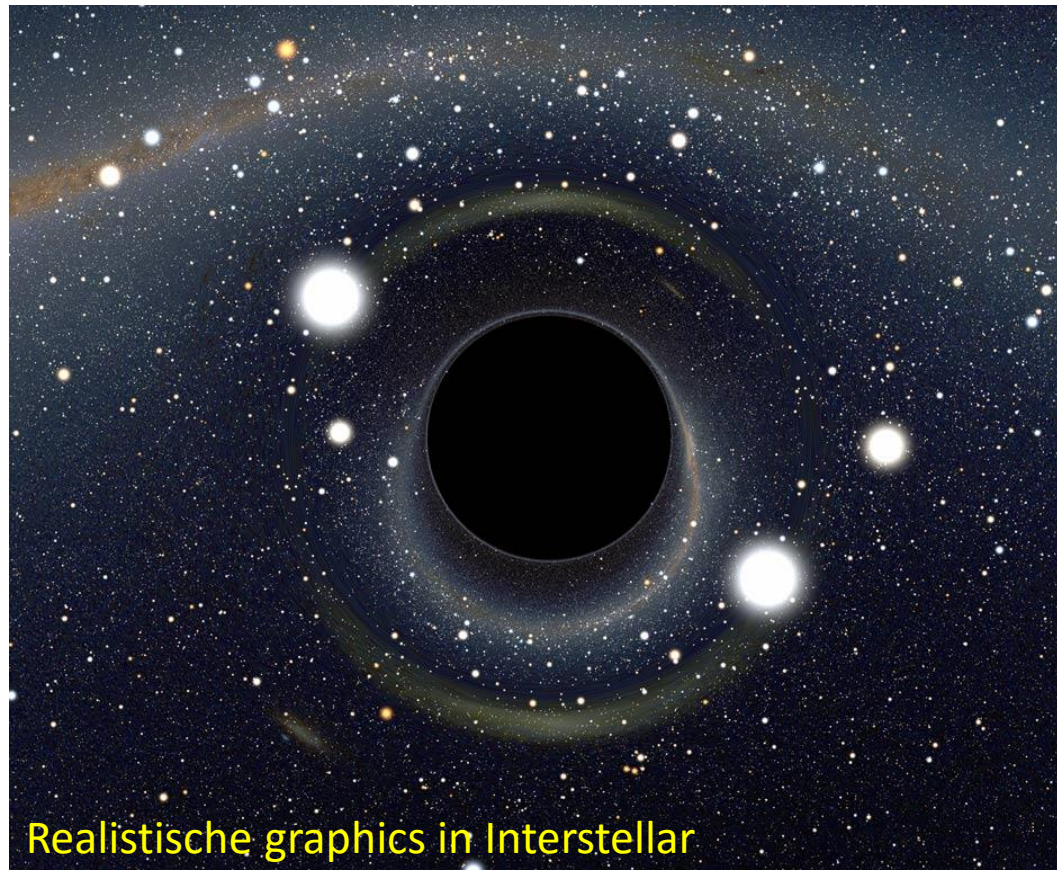
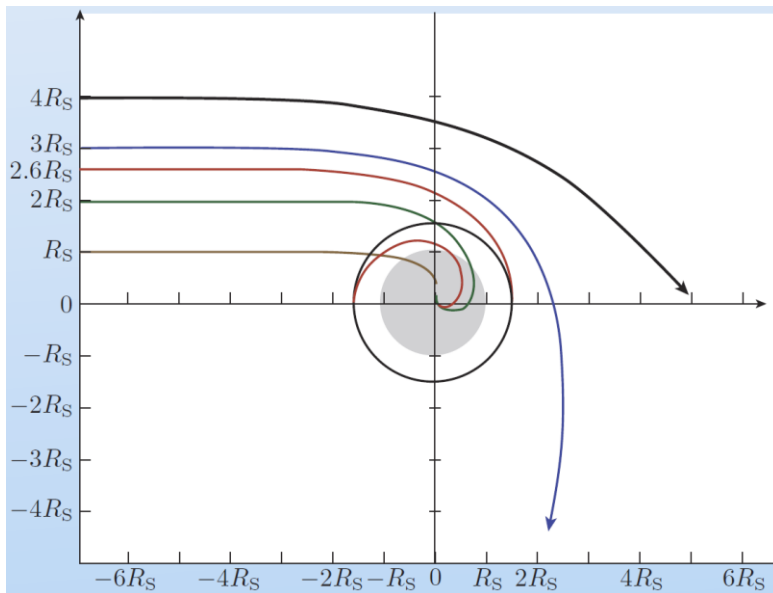
Afbuigen van licht door zwart gat

Banen van licht voor verschillende botsingsparameters b (*impact parameter*)

Licht met $b = 2.6R_S$ wordt gevangen in een cirkelvormige baan met straal $r = 1.5R_S$

Deze baan is instabiel en dit gebied rond een zwart gat noemt men de *photon sphere*

Elk vrij vallend foton dat door de photon sphere gaat wordt gevangen door het zwarte gat



Realistische graphics in Interstellar

Voorbij de event horizon

Er bestaan Schwarzschild coördinaten voor de hele vrije val

We zien een coördinaten singulariteit bij de horizon

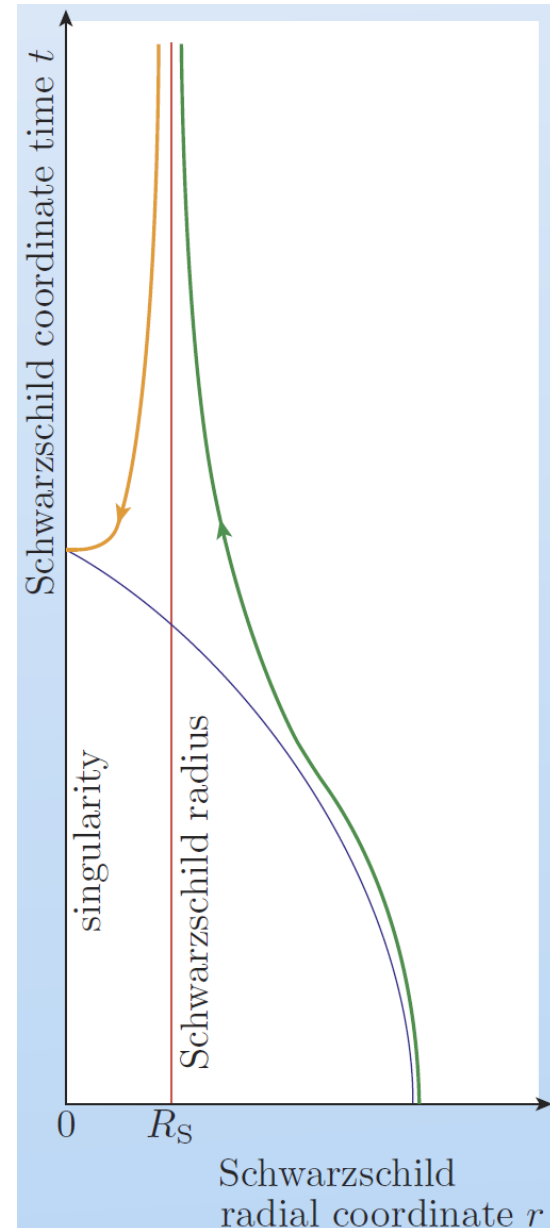
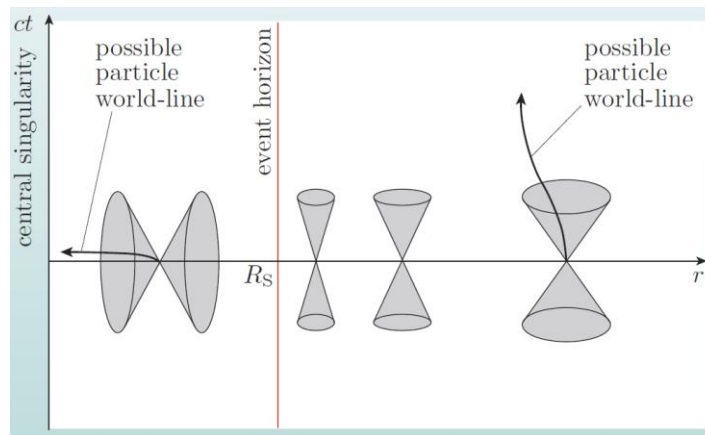
Het lijkt alsof de tijd afneemt als we de horizon passeren (de oranje curve), maar coördinaten hebben geen metrische betekenis

We krijgen meer inzicht door lichtkegels te construeren langs het pad van een invallende waarnemer

In de ART is ruimtetijd gekromd en dienen we kleine locale kegeltjes te tekenen

De kegels volgen uit de inkomende en uitgaande nul-geodeten die horen bij de banen van lichtstralen

De kegels vertonen opmerkelijk gedrag voorbij de horizon. We zullen dat nader bekijken



Voorbij de event horizon

De curven voor in- en uitgaand licht volgen uit vergelijking $\frac{d(ct)}{dr} = \pm \frac{1}{1 - R_S/r}$

Merk op dat de richtingscoëfficiënt gegeven wordt door $d(ct)/dr$

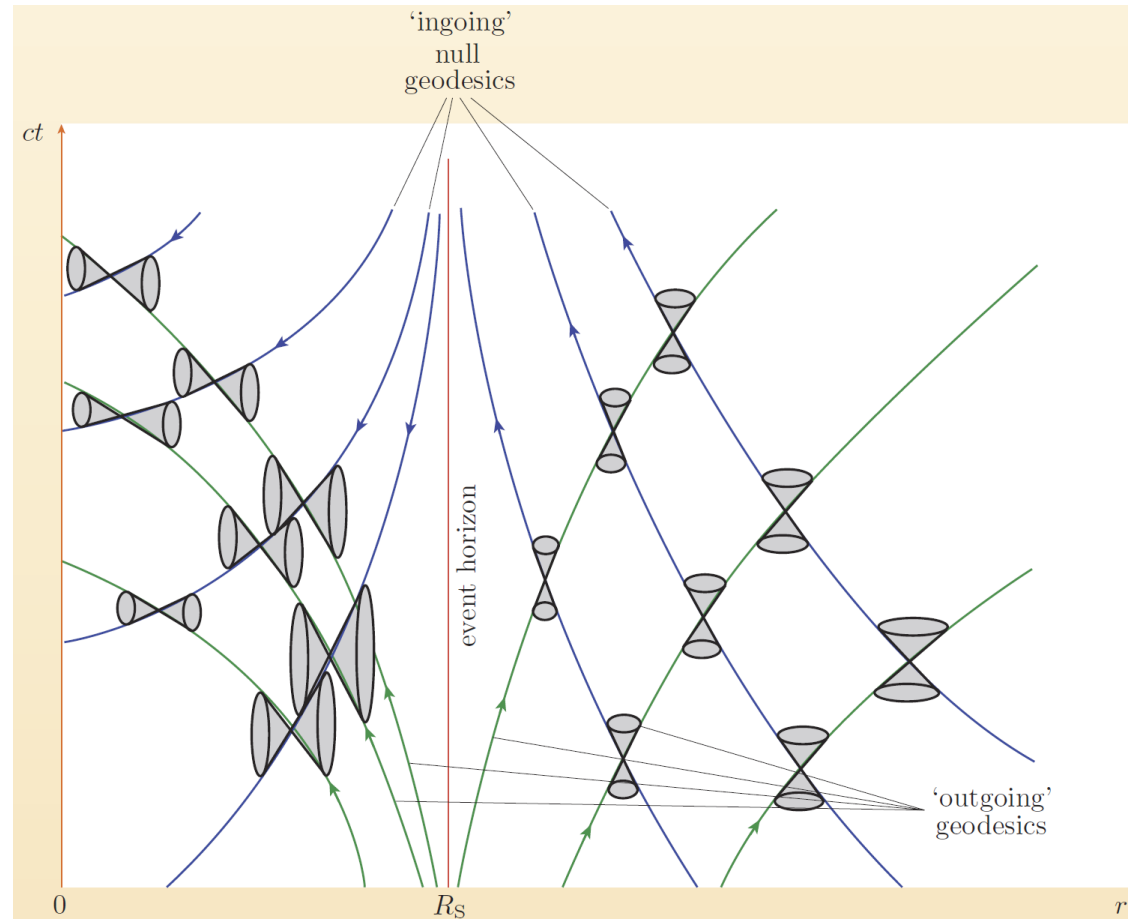
Op grote afstand van de horizon vinden we $d(ct)/dr = \pm 1$ consistent met SRT

Verleden kegeldeel omsloten door ingaande nul-geodeten, toekomst kegeldeel omsloten door uitgaande lichtbanen

Als we de horizon van buiten benaderen $d(ct)/dr \rightarrow \pm\infty$

Net binnen de horizon worden de lichtkegels heel breed en wordt hun tijd-achtig deel horizontaal: deeltjes kunnen nu enkel richting de singulariteit bewegen

Het “omklappen” van de lichtkegels is het gevolg van de keuze van coördinaten



Eddington-Finkelstein coördinaten

We introduren een nieuwe tijd-coördinaat

$$ct' = ct + R_S \ln \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right)$$

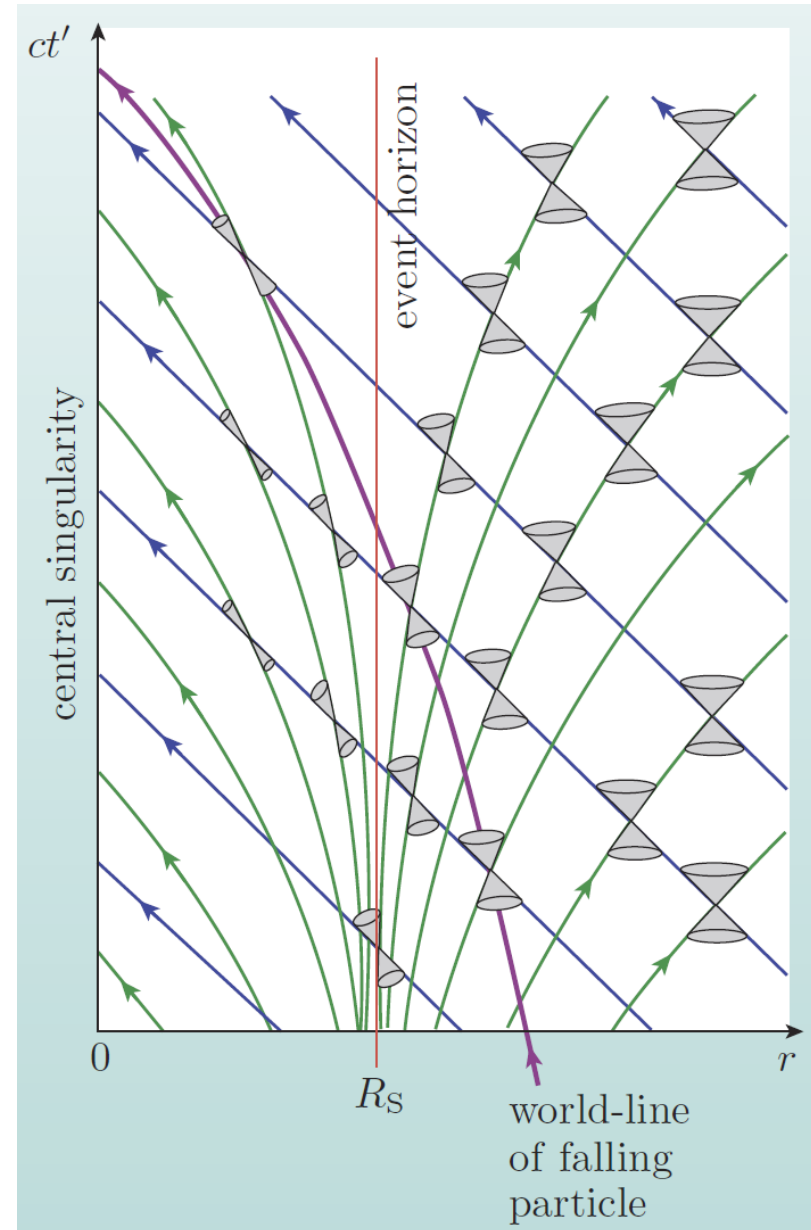
Het lijn-element wordt nu

$$\begin{aligned} (ds)^2 = & c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) (dt')^2 - 2 \frac{R_S}{r} c dt' dr \\ & - r^2 \left(1 + \frac{R_S}{r} \right) (dr)^2 \\ & - r^2 ((d\theta)^2 + \sin^2 \theta (d\phi)^2) \end{aligned}$$

Er geen singulariteit bij $r = R_S$ en voor deze coördinaten worden ingaande nul-geodeten gegeven door rechte lijnen

Dat volgt eenvoudig uit het lijn-element voor het geval van radieel invallend licht: de oplossing met $dt' = 0$ en dus $t' = \text{constant}$

De gekromde “uitgaande” geodeten volgen hier ook uit. Ze eindigen iets later in de singulariteit



Relativistische sterren

Algemene metriek $ds^2 = -e^{-2\Lambda(r)}dt^2 + e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

Beschouw statische sterren; enkel $U^0 = e^{-\Phi}, U_0 = -e^{-\Phi}$

Energie-impuls tensor (perfecte vloeistof) $T_{00} = T_{tt} = (P + \rho)U^0U_0 = \rho e^{-2\Lambda},$

Introduceer $g_{rr} = e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$

$$\begin{aligned} T_{rr} &= P e^{2\Lambda}, \\ T_{\theta\theta} &= P r^2, \\ T_{\phi\phi} &= \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Einsteinvergelijkingen

$$G_{tt} = 8\pi T_{tt} \rightarrow \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad \text{Er geldt } M_p = \int \rho(r) \sqrt{-g^{(3)}} d^3x$$

$$G_{rr} = 8\pi T_{rr} \rightarrow \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m(r))}$$

Energie en impulsbehoud $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \rightarrow (\rho + P) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dP}{dr}$

Druk-dichtheidsrelatie $P = P(\rho, S)$

Tolman-Oppenheimer-Volkof vergelijking

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}$$

Dit geeft $P_c = \rho \frac{1 - \sqrt{1 - 2M/R}}{3\sqrt{1 - 2M/R} - 1}$

Hawking straling

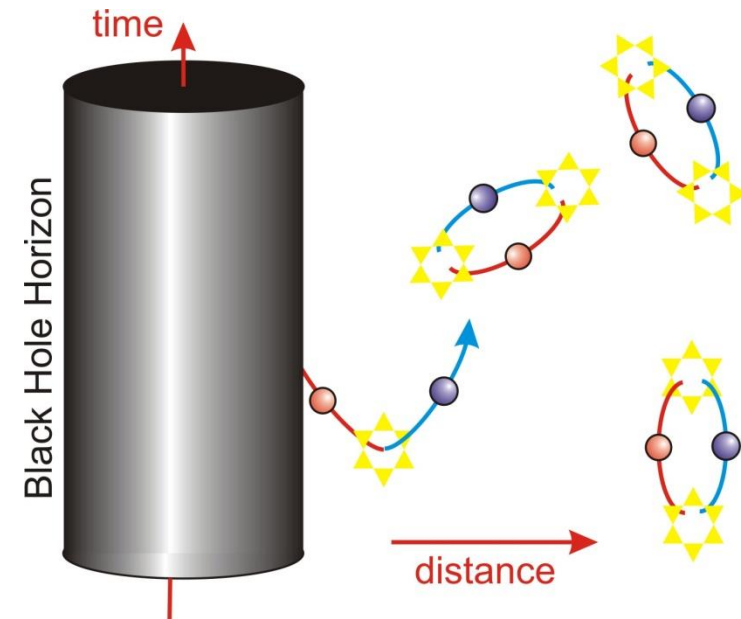
Hawking publiceerde in 1975 dat zwarte gaten een bron van straling zijn ten gevolge van quantumeffecten

Een zwart gat straalt als een lichaam met temperatuur T die omgekeerd evenredig is met de massa M van het zwarte gat

Er geldt
$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k M} = 6.18 \times 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \text{ K}$$

Voor een Schwarzschild zwart gat is het uitgestraalde vermogen

$$\frac{dE}{dt} \propto AT^4 \propto M^2 \times \left(\frac{1}{M} \right)^4 = \frac{1}{M^2}$$



Massa ZG	Temperatuur	Vermogen	Verdampingstijd
1 M_{zon} (2×10^{30} kg)	6×10^{-8} K	10^{-28} W	6×10^{68} yr
1 M_{aarde} (6×10^{24} kg)	0.02 K	10^{-17} W	2×10^{52} yr
1 kg	1.2×10^{23} K	4×10^{32} W	2×10^{-16} s