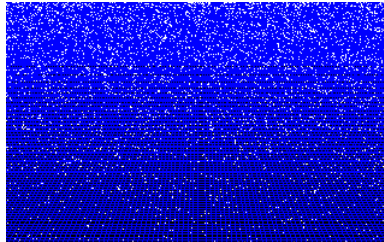


Algemene relativiteitstheorie

HOVO cursus



Jo van den Brand
Les 3: 19 november 2015

Copyright (C) Vrije Universiteit 2015

Inhoud

- **Speciale relativiteitstheorie**
 - Inertiaalsystemen
 - Bewegende waarnemers
 - Relativiteitsprincipe
- **Ruimtetime**
 - Minkowski ruimtetime
 - Tensoren
- **Gekromde ruimtetime**
 - Algemene coördinaten
 - Covariante afgeleide
- **Algemene relativiteitstheorie**
 - Einsteinvergelijkingen
 - Newton als limiet
- **Toepassingen ART**
 - Zwarte gaten
 - Kosmologie
 - Gravitatiestraling

Energie-impuls tensor

De energie-impuls tensor beschrijft de distributie en stroming van energie- en impulsdichtheid (met eenheid J / m³) in een klein gebiedje van ruimtetijd

Definitie $T^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) met $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

Er geldt T^{00} is de lokale energiedichtheid inclusief rustmassa

$T^{0i} = T^{i0}$ is de energiestroom per m² loodrecht op i gedeeld door c

$T^{ij} = T^{ji}$ is de impulsstroom van component i per m² loodrecht op j

Voorbeeld: deeltjes met massa m en snelheid $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ zonder interactie

Impuls $m\gamma(v)\mathbf{v}$

Totale energie $m\gamma(v)c^2$

Deeltjesdichtheid n



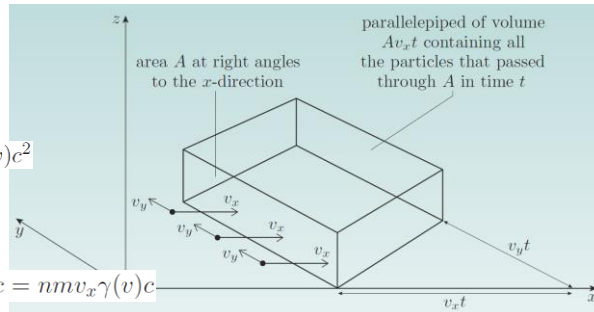
Energiedichtheid $T^{00} = nm\gamma(v)c^2$

Snelheid ($i = 1$) v_x

Stroom door A in tijd t $nv_x At$



$$T^{01} = nv_x At m\gamma(v)c^2 / Atc = nmv_x \gamma(v)c$$



Voorbeeld van energie-impuls tensor

Evenzo $T^{02} = T^{20} = nmv_y \gamma(v)c$

En $T^{03} = T^{30} = 0$

Er geldt T^{00} is de lokale energiedichtheid inclusief rustmassa

$T^{0i} = T^{i0}$ is de energiestroom per m² loodrecht op i gedeeld door c

$T^{ij} = T^{ji}$ is de impulsstroom van component i per m² loodrecht op j

Op tijd t gaan deeltjes met y -component impuls $m\gamma(v)v_y$ door oppervlak A loodrecht op de x richting met een flow van $nv_x At / At = nv_x$

De impulsstroom van component y per oppervlakte-eenheid door een oppervlak loodrecht op de x richting is $T^{21} = nv_x m\gamma(v)v_y = nmv_y v_x \gamma(v)$

Aldus vinden we $[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nm\gamma c^2 & nmv_x \gamma c & nmv_y \gamma c & 0 \\ nmv_x \gamma c & nmv_x^2 \gamma & nmv_x v_y \gamma & 0 \\ nmv_y \gamma c & nmv_y v_x \gamma & nmv_y^2 \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dit soort materie noemen we stof, of ook wel *dust*

In de uitdrukking herken je de dichtheid $\rho = nm$ en het product van snelheden $U^\mu U^\nu$

Energie-impuls tensor: 'stof'

- Beschouw 'stof' (engels: *dust*)

- Verzameling deeltjes in rust ten opzichte van elkaar

- Constant viersnelheidsveld $U^\mu(x)$ Flux viervector $N^\mu = nU^\mu$

- Rustsysteem

- n en m zijn 0-componenten van viervectoren

↑
deeltjesdichtheid in rustsysteem
massadichtheid in rustsysteem $\rho = nm$
energiedichtheid in rustsysteem ρc^2

- Bewegend systeem

- N^0 is deeltjesdichtheid

- N^i deeltjesflux in x^i – richting

$$N^\mu = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad p^\mu = mU^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ρc^2 is de $\mu=0, \nu=0$ component van de tensor $p \otimes N$

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = p^\mu N^\nu = mnU^\mu U^\nu = \rho U^\mu U^\nu \quad \text{Er is geen gasdruk!}$$

Energie-impuls tensor: perfecte vloeistof

- Perfekte vloeistof (in rustsysteem)

- Energiedichtheid ρ

- Isotrope druk P

$T^{\mu\nu}$ diagonaal, met $T^{11} = T^{22} = T^{33}$

- In rustsysteem

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

- In tensorvorm (geldig in elke systeem)

We hadden $T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$

Probeer $T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

We vinden

$$T_{\text{stof}}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}$$

Verder geldt

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Meetkunde

Meetkunde is de studie van vormen en ruimtelijke relaties

Euclidische meetkunde

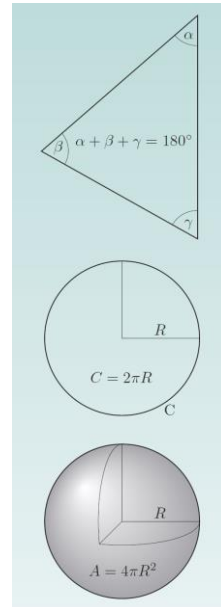
- som van interne hoeken van een driehoek is 180°
- omtrek van een cirkel met straal R heeft lengte $2\pi R$
- een bol met straal R heeft oppervlak $A = 4\pi R^2$

Euclidische meetkunde is niet de enige soort meetkunde

- Bolyai, Lobachevsky, Gauss vonden andere geometrien

Met name Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) en Bernhard Riemann (1826 – 1866) hebben belangrijke bijdragen tot de ontwikkeling van meetkunde geleverd. Ze hebben *differentiaalmeetkunde* gedefinieerd

Het bepalen van de geometrische eigenschappen van de ruimte om eens heen is een experimentele onderneming en geen kwestie van wiskunde



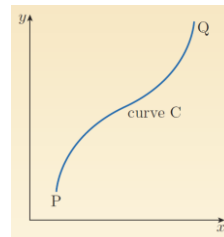
Differentiaalmeetkunde en lijnelement

Lengte van een kromme

Euclidisch vlakke meetkunde in 2D

- Cartesische coördinaten
- deel de kromme op in segmenten Δl_i
- gebruik Pythagoras voor elk segment $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$
- sommeer om de hele lengte van de kromme te vinden

$$L_C(P, Q) \approx \sum_{i=1}^n \Delta l_i$$



Neem de limiet naar infinitesimale elementen

- dat levert het lijnelement

$$L_C(P, Q) = \int_P^Q dl \quad \longrightarrow \quad dl^2 = dx^2 + dy^2 \quad \longrightarrow \quad dl = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$$

We moeten nu enkel nog weten hoe we een dergelijke integraal moeten berekenen. Als we de lijnelementen optellen moeten we rekening houden met de richting van het lijnelement, want dat geeft verschillende bijdragen dx en dy

Differentiaalmeetkunde en lijnelement

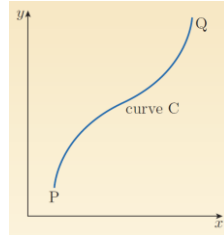
Lengte van een kromme in Euclidisch 2D vlak

De meest eenvoudige oplossing is door gebruik te maken van een geparametriseerde kromme. De coördinaten worden functies van een continu variërende parameter u

We hebben dan $x(u)$ en $y(u)$

Voorbeeld: de functie $y = x^2$ geeft $x(u) = u, y(u) = u^2$

Voorbeeld: de functie $x^2 + y^2 = 1$ geeft $x(u) = \cos(u), y(u) = \sin(u)$



Er geldt

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x}{\Delta u} \Delta u \\ \Delta y &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \Delta u \end{aligned} \right\} \longrightarrow dx = \frac{dx}{du} du, \quad dy = \frac{dy}{du} du,$$

$$dl = (dx^2 + dy^2)^{1/2} \longrightarrow dl = \left(\left(\frac{dx}{du} \right)^2 du^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 du^2 \right)^{1/2} = \left(\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 \right)^{1/2} du$$

$$\longrightarrow L_C(P, Q) = \int_P^Q dl = \int_{u_P}^{u_Q} \left(\left(\frac{dx}{du} \right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 \right)^{1/2} du$$

Gekromde oppervlakken

Beschouw 3D Euclidische ruimte

Cartesische coördinaten $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Sferische coördinaten

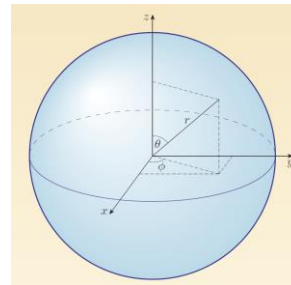
$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr - r \sin \theta \sin \phi d\theta - r \cos \theta \sin \phi d\phi,$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \cos \phi d\phi,$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,$$

$$\longrightarrow dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$



Met dit lijnelement kunnen we weer de lengte van een kromme bepalen in de 3D vlakke ruimte. Hiermee kunnen we de hele 3D Euclidische meetkunde opbouwen. Gauss beseftte dat het lijnelement hierbij de sleutel is

Wat we nu ook kunnen doen is kijken naar de meetkunde van 2D gekromde vlakken in de 3D vlakke ruimte. Hiertoe stellen we $r = R$ en vinden lijnelement

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Gekromde oppervlakken

Beschouw 2D gekromd oppervlak van een bol

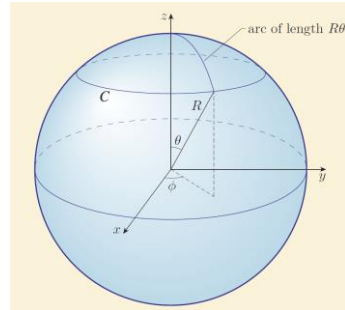
$$\text{Lijnelement} \quad dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Coördinaten zijn θ en ϕ

Voorbeeld: reken de omtrek van cirkel C uit

Antwoord: θ is constant, dus

$$C = \int_0^{2\pi} R \sin \theta d\phi = R \sin \theta [\phi]_0^{2\pi} = 2\pi R \sin \theta$$

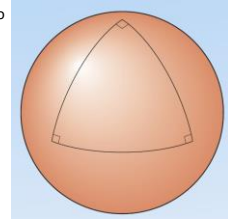


Als we dus de straal en omtrek in hetzelfde gekromde oppervlak meten, dan is de omtrek anders dan het Euclidische resultaat

De som van de interne hoeken van een driehoek zijn groter dan 180°

De kortste weg tussen twee punten is het segment van een cirkel door deze punten, waarvan het middelpunt van de cirkel samenvalt met het middelpunt van de bol. Dat is een *grootcirkel*

Ook zien we dat kromming een *intrinsieke* eigenschap van het oppervlak is



Metriek en Riemannse geometrie

We hebben diverse lijnelementen gezien

We hebben deze lijnelementen afgeleid uit de ons bekende eigenschappen van deze ruimten

Lijnelement wordt uitgedrukt als de som van kwadraten van coördinatenverschillen, in analogie met de Stelling van Pythagoras

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Met het lijnelement kunnen we de lengten van curven en kortste paden bepalen, en daarmee eigenschappen van cirkels en driehoeken, en uiteindelijk de hele meetkunde in een (gekromde) ruimte afleiden

Riemann beseftte dat je het lijnelement ook als startpunt van een geometrie kunt beschouwen (en dus niet enkel als samenvatting)

Een n -dimensionale Riemannse ruimte is een ruimte waarvoor geldt

$$dl^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$$

De functies g_{ij} heten de metrische coëfficiënten en dienen symmetrisch te zijn $g_{ij} = g_{ji}$ en er zijn dus $n(n+1)/2$ onafhankelijke coëfficiënten

De set metrische coëfficiënten wordt de metriek genoemd, ook wel metrische tensor, en bepaalt de volledige geometrie van de ruimte

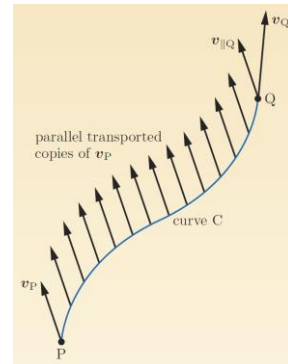
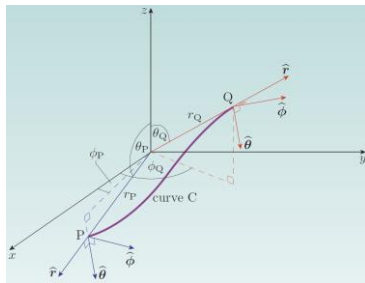
Connecties en parallel transport

Stel: je wilt vectoren op posities P en Q vergelijken

Transporteer v_P naar Q langs een gekozen pad C zodanig dat je de richting van deze vector behoudt

Als de ruimte Euclidisch is en de coördinaten Cartesisch, dan is parallel transporteren eenvoudig, omdat de coördinaten basisvectoren i, j en k globaal zijn

Met sferische coördinaten wordt het al lastig, omdat hun basisvectoren van punt tot punt van richting veranderen



Connecties en parallel transport

We parametriseren het pad met parameter u en beschouwen een 3D Riemannse ruimte

Voor de vector $v(u)$ geldt
$$v(u) = \sum_j v^j(u) e_j(u)$$

De afgeleide naar u is
$$\frac{dv}{du} = \sum_j \left(\frac{dv^j}{du} e_j + v^j \frac{de_j}{du} \right)$$

Kettingregel
$$\frac{dv}{du} = \sum_j \left(\frac{dv^j}{du} e_j + \sum_k v^j \frac{\partial e_j}{\partial x^k} \frac{dx^k}{du} \right)$$

De term $\partial e_j / \partial x^k$ is een vector (voor gekozen j en k) en geeft de verandering van e_j naar x^k en heeft componenten in de richting van elke basisvector

We schrijven deze term als
$$\frac{\partial e_j}{\partial x^k} = \sum_i \Gamma_{jk}^i e_i$$

De grootte Γ_{jk}^i is de component in de richting van basisvector e_i van de afgeleide van e_j naar x^k . Er zijn n^3 van dergelijke connectiecoëfficiënten

We vinden

$$\frac{dv}{du} = \sum_j \left(\frac{dv^j}{du} e_j + \sum_{i,k} \Gamma_{jk}^i e_i v^j \frac{dx^k}{du} \right) \rightarrow \frac{dv}{du} = \sum_i \left(\frac{dv^i}{du} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i v^j \frac{dx^k}{du} \right) e_i$$

Connecties en parallel transport

Voor parallel transporteren eisen we $\frac{dv}{du} = \sum_i \left(\frac{dv^i}{du} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{du} \right) e_i = 0$

Voor elke component dient te gelden $\frac{dv^i}{du} = - \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{du}$

Als we de componenten $v^i(u)$ van een vector op een bepaald punt op de kromme kennen, dan kunnen deze componenten parallel transporteren naar een naburig punt

$$v^i(u + du) = v^i(u) + \frac{dv^i}{du} du = v^i(u) - \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{du} du$$

Het enige dat we nog nodig hebben is een uitdrukking van de connectiecoëfficiënten in termen van de metriek

Voor twee nabij gelegen punten geldt $dl = \sum_i e_i dx^i$

$$\longrightarrow dl^2 = dl \cdot dl = \sum_i e_i dx^i \cdot \sum_j e_j dx^j = \sum_{i,j} (e_i \cdot e_j) dx^i dx^j$$

Vergelijk met $dl^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \longrightarrow e_i \cdot e_j = g_{ij}$

Connecties en parallel transport

Differentieer $e_i \cdot e_j = g_{ij} \longrightarrow \frac{\partial e_i}{\partial x^k} \cdot e_j + e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$

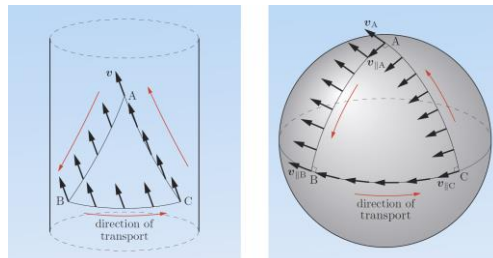
Vergelijk met $\frac{\partial e_j}{\partial x^k} = \sum_i \Gamma^i_{jk} e_i$

Dat levert $\sum_l \Gamma^l_{ik} e_l \cdot e_j + e_i \cdot \sum_l \Gamma^l_{jk} e_l = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$

Hieruit volgt na enige algebra $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right)$

We gebruiken hierbij de contravariante vorm van de metriek. Er geldt $\sum_k g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$

Parallel transport van een vector langs een gesloten kromme geeft ons een mogelijkheid om te testen of een geometrie intrinsiek vlak of gekromd is



Covariante afgeleide

Afgeleide van een vector

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$$

α is 0 - 3

$$\rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \quad \text{stel } \beta \text{ is } 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu \quad \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \vec{e}_\alpha \quad \Rightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \right) \vec{e}_\alpha$$

Notatie

$$V^\alpha_{;\beta} \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \quad \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = V^\alpha_{,\beta}$$

Covariante afgeleide

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = V^\alpha_{;\beta} \vec{e}_\alpha$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensorveld $\nabla \vec{V}$

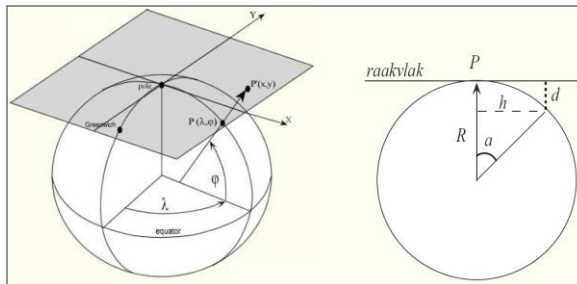
met componenten $(\nabla \vec{V})^\alpha_\beta = (\nabla_\beta \vec{V})^\alpha = V^\alpha_{;\beta}$

Lokaal lorentzframe – LLF

We bespreken in het volgende de gekromde ruimtetijd

Op elke gebeurtenis P in ruimtetijd kunnen we een LLF kiezen:

- we zijn vrij-vallend (geen effecten van gravitatie volgens *equivalentieprincipe*)
- in LLF geldt de minkowskimetrik



$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$g_{jk} = \delta_{jk} + \mathcal{O}\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right)$$

Lokaal euclidisch

LLF in gekromde ruimtetijd

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta} \quad \text{voor alle } \alpha, \beta;$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = 0 \quad \text{voor alle } \alpha, \beta, \gamma;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) \neq 0.$$

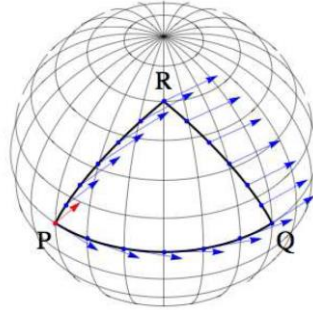
Op elk punt $\mathcal{P}$ is raakruimte vlak

Kromming en parallel transport

Parallele lijnen snijden in een gekromde ruimte
(Euclides vijfde postulaat geldt niet)

Parallel transporteren van een vector $\vec{V}$

- projecteer raakvector na elke stap op het lokale raakvlak
- rotatie hangt af van kromming en grootte van de lus



Wiskundige beschrijving

- interval PQ is curve met parameter λ
- vectorveld $\vec{V}$ bestaat op deze curve
- raakvector aan de curve is $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$
- we eisen dat in een LLF de componenten van $\vec{V}$ constant moeten zijn

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \quad \text{op punt } \mathcal{P}$$

Parallel transporteren $U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0$

Geodeten

Parallel transporteren $U^\beta V^\alpha_{;\beta} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0$

Geodeet: lijn, die zo recht als mogelijk is $\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0$

Componenten van de viersnelheid $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$

Geodetenvergelijking

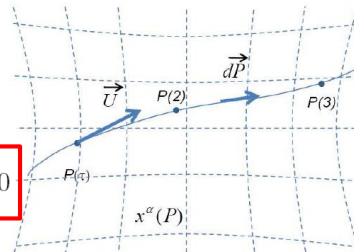
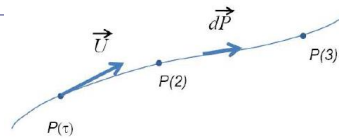
$$U^\alpha_{;\mu} U^\mu = 0 \rightarrow (U^\alpha_{;\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu) U^\mu = 0$$

$$\underbrace{U^\alpha_{;\mu}}_{\frac{\partial U^\alpha}{\partial x^\mu}} \underbrace{U^\mu}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \underbrace{U^\nu}_{\frac{dx^\nu}{d\tau}} \underbrace{U^\mu}_{\frac{dx^\mu}{d\tau}} = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

Vier gewone tweede-orde differentiaalvergelijkingen voor de coördinaten $x^0(\tau)$, $x^1(\tau)$, $x^2(\tau)$ en $x^3(\tau)$
Gekoppeld via de connectiecoëfficiënten

Twee randvoorwaarden $x^\alpha(\tau = 0)$

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau}(\tau = 0) = U^\alpha(0)$$



Ruimtetijd bepaalt de beweging van materie

Riemanntensor

Beschouw vectorvelden $\vec{A}$ en $\vec{B}$

Transporteer $\vec{B}$ langs $\vec{A}$

Vector $\vec{B}$ verandert met $A^\alpha \partial B^\beta / \partial x^\alpha$

Transporteer $\vec{A}$ langs $\vec{B} \Rightarrow B^\alpha \partial A^\beta / \partial x^\alpha$

Beschouw de commutator

$$[\vec{A}, \vec{B}] = \left[\underbrace{A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}}_{\vec{A}}, \underbrace{B^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}}_{\vec{B}} \right] = \left(\underbrace{A^\alpha \frac{\partial B^\beta}{\partial x^\alpha} - B^\alpha \frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}}_{[\vec{A}, \vec{B}]^\beta} \right) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\beta}}_{\vec{e}_\beta}$$

Commutator is een maat voor het niet sluiten

Krommingstensor van Riemann meet het niet sluiten van dubbele gradiënten

Beschouw vectorveld $\vec{A}$

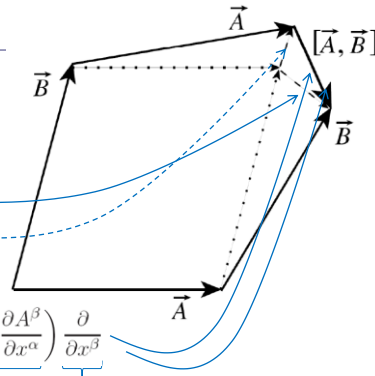
$$A_{\alpha;\mu\nu} - A_{\alpha;\nu\mu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\alpha \equiv R^\beta_{\alpha\mu\nu} A_\beta$$

$$A_{\alpha;\mu} = A_{\alpha,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta A_\beta$$

$$A_{\alpha;\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (A_{\alpha;\mu}) - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta (A_{\beta;\mu}) - \Gamma_{\mu\nu}^\beta (A_{\alpha;\beta})$$

$$\Gamma_{\beta\mu}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha})$$

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu})$$



Riemanntensor: eigenschappen

Metrische tensor bevat de informatie over intrinsieke kromming

Eigenschappen Riemannntensor

Antisymmetrie $\mathbf{R}(_, _, \vec{A}, \vec{B}) = -\mathbf{R}(_, _, \vec{B}, \vec{A})$ of $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}$

$\mathbf{R}(\vec{A}, \vec{B}, _, _) = -\mathbf{R}(\vec{B}, \vec{A}, _, _)$ of $R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$

Symmetrie $\mathbf{R}(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}) = \mathbf{R}(\vec{C}, \vec{D}, \vec{A}, \vec{B})$ of $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\nu\mu}$

Bianchi identiteiten $R_{\alpha\beta\gamma\delta;\epsilon} + R_{\alpha\beta\delta\epsilon;\gamma} + R_{\alpha\beta\epsilon\gamma;\delta} = 0$

Onafhankelijke componenten: 20

Krommingstensor van Ricci $R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu_{\alpha\mu\beta}$

Riccikromming (scalar) $R = R^\alpha_{\alpha}$

Huiswerkgave om dit alles te demonstreren
Beschrijving van het oppervlak van een bol

Getijdenkrachten

Laat een testdeeltje vallen. Waarnemer in LLF: geen teken van gravitatie

Laat twee testdeeltjes vallen. Waarnemer in LLF: differentiële gravitatieversnelling: getijdenkracht

Volgens Newton

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -m\nabla\Phi(\vec{x}) \quad \text{en ook} \quad \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi(\vec{x})$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

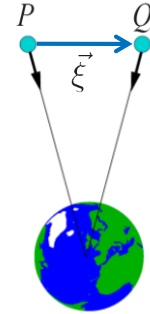
$$\left(\frac{d^2x_j}{dt^2}\right)_{(P)} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)_{(P)} \quad \text{en} \quad \left(\frac{d^2x_j}{dt^2}\right)_{(Q)} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\right)_{(Q)}$$

Definieer $\vec{\xi} = (x_j)_{(P)} - (x_j)_{(Q)}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\xi_j}{dt^2} = -\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}\right)\xi_k = -\mathcal{E}_{jk}\xi_k \rightarrow \mathcal{E}_{jk} = \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{\xi}}{dt^2} = -\mathbf{E}(_, \vec{\xi}) \quad \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

Gravitatiele getijdentensor



Einsteinvergelijkingen

Twee testdeeltjes zijn initieel parallel

Door kromming van ruimtetijd bewegen ze naar elkaar toe

Op $\tau = 0$ geldt

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} &= 0 \\ \vec{U} \cdot \vec{\xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{Initieel in rust op punt } P \text{ voor } \tau = 0$$

Tweede-orde afgeleide $\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi}$ ongelijk aan nul vanwege kromming

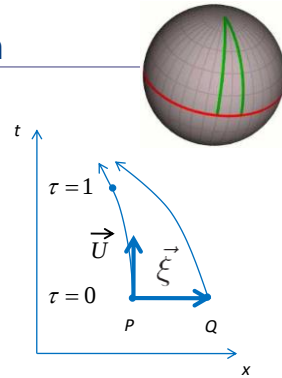
Er geldt $\nabla_{\vec{U}}\nabla_{\vec{U}}\vec{\xi} = -\mathbf{R}(_, \vec{U}, \vec{\xi}, \vec{U})$ Volgt uit $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]A_\alpha \equiv R^\beta_{\alpha\mu\nu}A_\beta$

Beschrijft relatieve versnelling

In het LLF van deeltje P op tijdstip $\tau = 0$ geldt $U^0 = 1$ en $U^i = 0$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2\xi^j}{\partial t^2} &= -R^j_{0k0}\xi^k \\ \text{Newton} \quad \frac{\partial^2\xi^j}{\partial t^2} &= -\mathcal{E}_{jk}\xi^k \end{aligned} \right\} R_{j0k0} = \mathcal{E}_{jk} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^j\partial x^k}$$

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \rightarrow \Phi_{,jk}\delta^{jk} = \mathcal{E}_{jk}\delta^{jk} = \mathcal{E}^j_j \Rightarrow R^j_{0j0} = 4\pi G\rho \quad ?$$



Einsteinvergelijkingen

Wellicht verwachten we dat geldt
Echter geen tensorvergelijking (geldig in LLF)

$$\cancel{R^j_{0j0}} = 4\pi G \rho \quad ?$$

$$R_{0000} = 0 \quad R^0_{000} = 0$$

Wellicht dient te gelden $R_{\alpha\beta} = \cancel{4\pi G T_{\alpha\beta}}$?
Einstein 1912 – fout

$$\rightarrow R^\mu_{0\mu 0} = 4\pi G \rho$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 tensor scalar

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} \approx g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + \text{niet lineaire termen}$$

$$\Rightarrow R_{\alpha\beta} \approx g_{\gamma\alpha,\gamma\beta} + \text{niet lineaire termen}$$

Stelsel van 10 p.d.v. voor 10 componenten van $g_{\alpha\beta}$

Probleem: We hebben de vrijheid om $x^0(\mathcal{P})$, $x^1(\mathcal{P})$, $x^2(\mathcal{P})$ en $x^3(\mathcal{P})$ te kiezen

$\Rightarrow$ Vrije keuze: 4 van de 10 componenten van $g_{\alpha\beta}$

Einstein tensor $G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$ Bianchi identiteiten $G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$

Energie – impuls tensor

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}}$$

Einsteinvergelijkingen

Materie vertelt ruimtetijd hoe te krommen