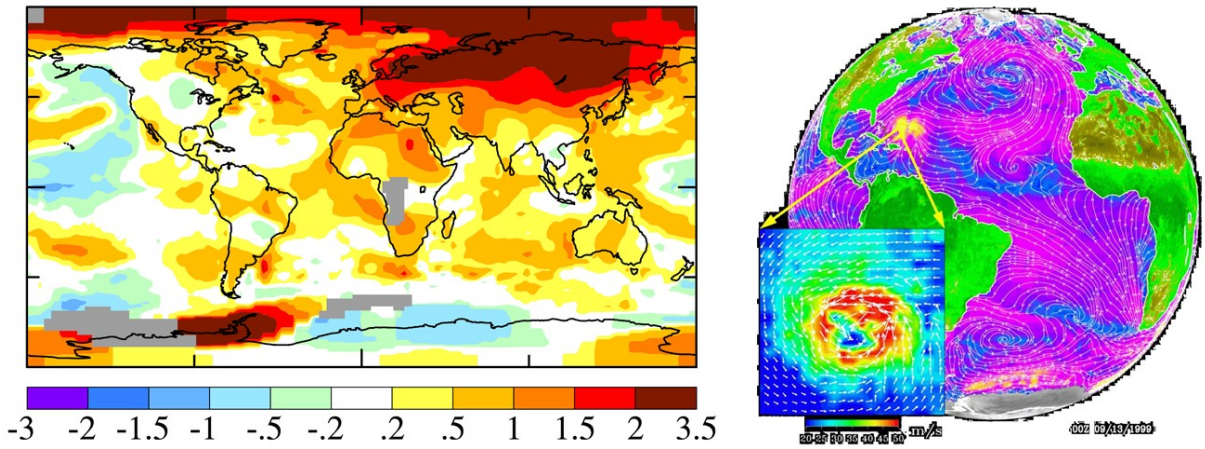
# 4 Wiskunde I - Differentiaaltopologie

In een ruimte zijn een punt, scalair en een vector voorbeelden van topologische objecten. Als de scalair of vector kan variëren van punt tot punt, spreken we over een scalairveld, respectievelijk een vectorveld. In. Fig. 26 geven we een voorbeeld van een scalairveld en een vectorveld op het oppervlak van de aarde. Een tensor is een object dat de begrippen getal, vector, 1-vorm en matrix




**Figuur 26:** *Links: voorbeeld van een scalairveld, het verschil tussen de temperatuurverdeling gemeten op aarde in 2008 ten opzichte van het gemiddelde van de jaren 1951 - 1980; rechts: windverdeling aan het oppervlak van de aarde als voorbeeld van een vectorveld.*

generaliseert. Tensoren kunnen gezien worden als zelfstandige geometrische grootheden, die los staan van eventuele referentiesystemen. Het is onze doelstelling om alle fundamentele wetten van de natuur uit te drukken in dergelijke topologische of geometrische objecten. Dat is de essentie van het relativiteitsprincipe: *de fundamentele wetten van de natuurkunde zijn onafhankelijk van de keuze van het referentiesysteem.* Door gebruik te maken van tensoren verkrijgen we een dergelijke beschrijving die onafhankelijk van het referentiesysteem is.

In de relativiteitstheorie beschouwen we tensorvelden in ruimtetijd. Allereerst bespreken we hoe ruimtetijd in kaart gebracht kan worden. We zullen aannemelijk maken dat ruimtetijd een differentieerbare variëteit is. Vervolgens bespreken we de verschillende topologische objecten die in ruimtetijd betekenis hebben: scalair veld, vector, 1-vorm, tensoren. Later zullen we zien dat het mogelijk is om het begrip inproduct te definiëren in ruimtetijd en voeren de zogenaamde metrische tensor in.

## 4.1 Puntgebeurtenis

Het begrip *puntgebeurtenis*[36] staat centraal in de algemene relativiteitstheorie. Het is een zogeheten primitief begrip, dit wil zeggen een begrip dat wordt gedefinieerd in termen van andere begrippen. Wat dit betreft is het vergelijkbaar met het begrip 'punt' uit de euclidische meetkunde. Primitieve begrippen worden niet gedefinieerd, omdat in hun definities weer andere begrippen optreden, die weer gedefinieerd zouden moeten worden, enz. Aan deze oneindige regressie wordt een einde gemaakt in de axiomatische methode. De daarin optredende axioma's zijn te beschouwen als impliciete definities van de in de theorie voorkomende primitieve begrippen. We volgen derhalve een axiomatische opbouw van de algemene relativiteitstheorie. Hier introduceren we het begrip puntgebeurtenis met voorbeelden. In de materiële werkelijkheid om ons heen

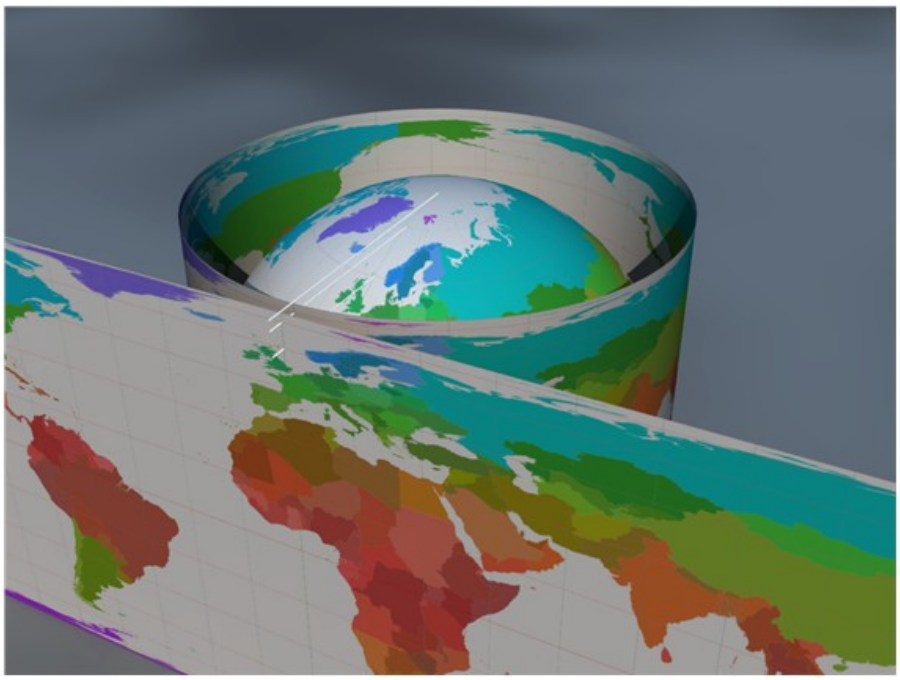
[36] In het Engels spreken van een *event*.

vinden allerlei gebeurtenissen plaats: de zon gaat op, twee auto's botsen op elkaar, ... Dat zijn allemaal gebeurtenissen en karakteristiek voor gebeurtenissen is dat ze zich in een zeker gebied van de ruimte afspelen en dat ze in een zeker tijdinterval gebeuren. Gebeurtenissen zijn vaak zeer complex en we ontleden ze dan ook verder. Een gebeurtenis kan worden beschouwd als te zijn opgebouwd uit zeer vele gebeurtenissen, die op een kleiner gebied en een kleiner tijdinterval betrekking hebben. Het geïdealiseerde limietgeval van een gebeurtenis, die op een oneindig klein gebied plaats heeft en oneindig kort duurt noemen we een *puntgebeurtenis*. Een puntgebeurtenis is een gebeurtenis met een scherp bepaalde plaats en een scherp bepaald tijdstip. Een voorbeeld van een puntgebeurtenis is de explosie van een oneindig klein rotje met een oneindig kort durende knal. Een ander voorbeeld is de botsing van twee massapunten, immers als de twee massapunten elkaar raken is er sprake van een scherp bepaalde plaats en een scherp bepaald tijdstip.

Het begrip puntgebeurtenis houdt een extrapolatie van onze ervaring in, omdat er een eindige ondergrens is voor het scheidend vermogen voor afstanden en tijdsduren. Ieder fysisch proces is te beschouwen als een collectie van puntgebeurtenissen. De verzameling van alle mogelijke puntgebeurtenissen noemen we *ruimtetijd*. Ruimtetijd is niet slechts een verzameling, ruimtetijd heeft meer mathematische structuur. Het fundamentele begrip in de differentiaalmeetkunde is dat van een differentieerbare ruimte (differentieerbare variëteit). We zullen trachten dit plausibel te maken en daarna postuleren dat ruimtetijd een differentieerbare variëteit is.

## 4.2 Differentieerbare variëteit

Het oppervlak van de aarde vormt een twee-dimensionaal gekromd oppervlak. Dit oppervlak kan worden ingebed in de drie-dimensionale euclidische wereld. Een belangwekkende vraag is

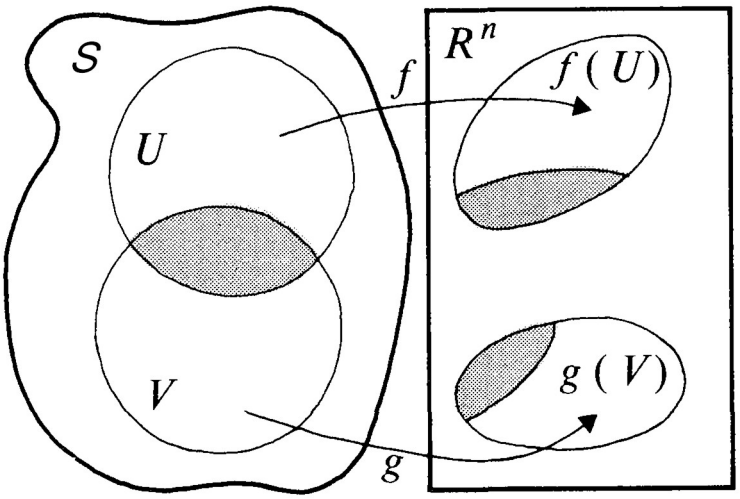


**Figuur 27:** *Het aardoppervlak kan in kaart worden gebracht met een voldoend aantal elkaar gedeeltelijk overlappende kaarten ($n \geq 2$ kaarten).*

nu: kan men over dergelijke twee-dimensionale oppervlakken spreken zonder het hulpmiddel van de drie-dimensionale euclidische ruimte? In de algemene relativiteitstheorie is ruimtetijd een gekromde vier-dimensionale ruimte; deze willen we graag beschrijven zonder haar in te bedden

in een hoger dimensionale euclidische ruimte. Het antwoord is bevestigend, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld: in de geografie beschrijft men het aardoppervlak, een oppervlak dat ongelijk is aan de twee-dimensionale euclidische ruimte $\mathbb{E}^2$, met behulp van een atlas, bestaande uit twee-dimensionale kaarten, waarbij de drie-dimensionale ruimte niet nodig is. Een kaart beschrijft een stukje van het aardoppervlak met behulp van een stukje $\mathbb{R}^2$.

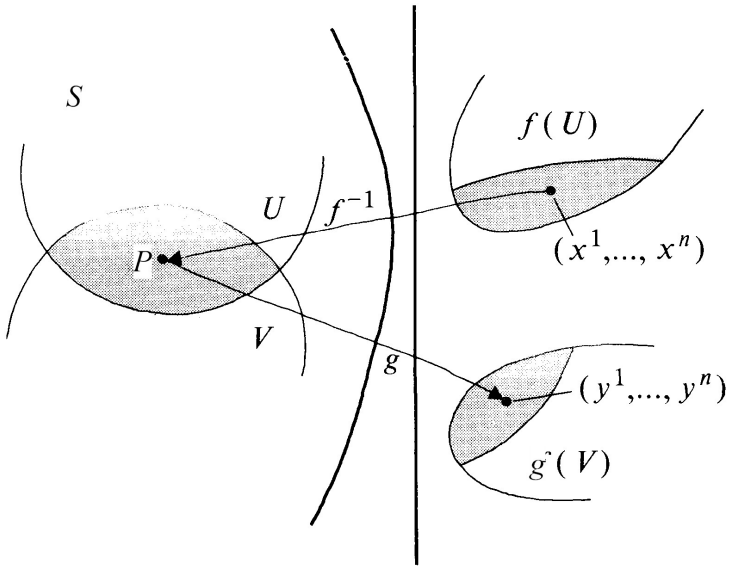
Het gehele aardoppervlak (zie Fig. 27) kan in kaart worden gebracht met een voldoend aantal elkaar gedeeltelijk overlappende kaarten. Teneinde ook de polen correct te kunnen afbeelden zijn er minstens 2 kaarten nodig. Voor het realiseren van een kaart zijn verschillende afbeeldingen $f$, $g$, ... mogelijk. Hier passen we cilinderprojectie toe (de polen worden hierbij niet correct afgebeeld). Mercatorprojectie is een cilinderprojectie, waarna een breedtegraad-afhankelijke schaalcorrectie wordt toegepast, hetgeen leidt tot hoekgelijkheid. Merk op dat wanneer we een klein gebied rond een bepaald punt steeds verder uitvergroten, we de topologische structuur van de euclidische ruimte meer en meer benaderen.




**Figuur 28:** *De omgeving $U$ en $V$ in $\mathcal{S}$ overlappen (het gearceerde gebied). De bijbehorende $n-$kaarten naar $\mathbb{R}^n$, $(U, f)$ en $(V, g)$, geven twee verschillende afbeeldingen (en dus twee coördinatenstelsels) in het overlapgebied. De relatie tussen deze coördinaten karakteriseert de differentieerbaarheidsklasse van de variëteit.*

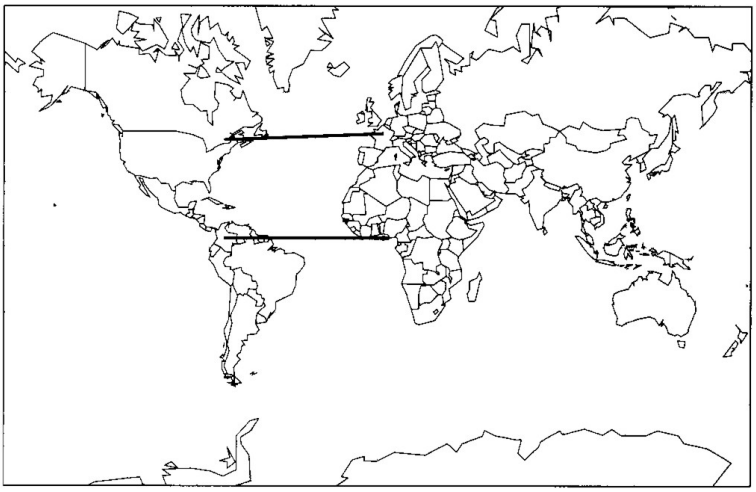
Wiskundig gebruiken we de volgende definities (zie Fig. 28 met $\kappa$ gelijk aan $f$ en $g$). Stel dat $\mathcal{S}$ een verzameling is. Een *n-kaart* van een punt $\mathcal{P}$ van $\mathcal{S}$ is een paar $(U, \kappa)$, waarbij $U \subset \mathcal{S}$ een deelverzameling is die $\mathcal{P}$ bevat, en $\kappa$ een bijectieve afbeelding $\kappa : U \longmapsto O \subset \mathbb{R}^n$ met $O$ een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Een kaart $(U, \kappa)$ voegt aan ieder punt $\mathcal{P} \in U \subset \mathcal{S}$ *coördinaten* $(x^1, x^2, ..., x^n)$ toe gedefinieerd door $(x^1, x^2, ..., x^n) \equiv \kappa(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}^n$. We noteren ook wel korter $(x^i) \equiv (x^1, x^2, ..., x^n)$, waarbij stilzwijgend $i = 1, 2, ..., n$. De associatie van punten met de waarden van hun parameters kan men zien als een afbeelding van punten van een variëteit naar punten van de euclidische ruimte met de juiste dimensie. Een variëteit lijkt lokaal op een euclidische ruimte: hij is 'glad' en heeft een bepaald aantal dimensies.

Via de afbeelding $\kappa$ krijgt de oorspronkelijke deelverzameling $U$ van $\mathcal{S}$ eveneens sommige van de structuren die de open deelverzameling $O \subset \mathbb{R}^n$ heeft. Een kaart geeft een *coördinatisering* van $U$; een kaart wordt ook wel een *coördinatenstelsel van $U$* genoemd. De coördinatenlijnen in $O$ worden met $\kappa^{-1}$ teruggebracht naar $U$. Een kaart moet een bijectieve, bicontinue afbeelding zijn van het aardoppervlak naar $\mathbb{R}^2$. Een bijectieve afbeelding $\kappa$ heet *bicontinu* als $\kappa$ en $\kappa^{-1}$ continu zijn. Een bicontinue bijectie heet een *homeomorfisme*. We tonen alles nog eens in Fig. 29.




**Figuur 29:** *Een vergroting van Fig. 28 toont hoe het overlappende gebied een afbeelding maakt van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$, die gegeven wordt door $f^{-1}$ gevolgd door $g$ (dit wordt $g \circ f^{-1}$ genoemd).*

Een $n$-atlas op $\mathcal{S}$ is een collectie kaarten $\{(U_\alpha, \kappa_\alpha)\}$ zo dat $\{U_\alpha\}$ een overdekking van $\mathcal{S}$ is, dit wil zeggen $\mathcal{S} = \cup_\alpha U_\alpha$. Door een atlas wordt ieder punt van $\mathcal{S}$ minstens één keer in kaart gebracht. Door de atlas op verzameling $\mathcal{S}$ wordt het mogelijk analyse te bedrijven en kan men bijvoorbeeld over differentieerbaarheid gaan praten.



**Figuur 30:** *Een kaart geeft een afbeelding van het aardoppervlak naar de 2D euclidische ruimte. Op de kaart lijkt de afstand tussen Montreal en Parijs op die tussen Bogota en Lagos.*

Samenvattend kunnen we het volgende zeggen. Het begin is een structuurloze verzameling $\mathcal{S}$. Deze wordt verdeeld in elkaar gedeeltelijk overlappende deelverzamelingen, en deze deelverzamelingen worden stuk voor stuk in kaart gebracht, met andere woorden deze deelverzamelingen worden gecoördinatiseerd. Als $\mathcal{S}$ helemaal is overdekt door zulke gebiedjes, en als de overgangen tussen de verschillende coördinatenstelsels voldoende vaak differentieerbaar zijn, dan heet $\mathcal{S}$ een differentieerbare variëteit. Het hebben van een kaart is een goede eerste stap in de beschrijving

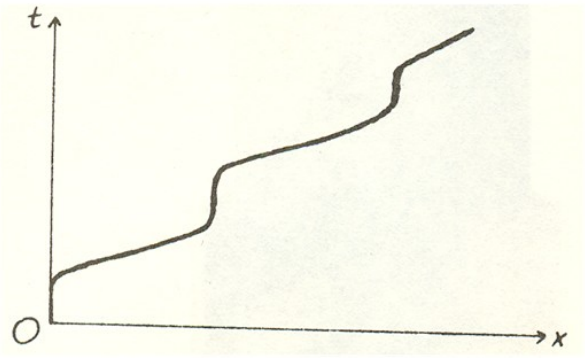
van het aardoppervlak. Echter voor het berekenen van afstanden is er meer informatie nodig, want we dienen te weten hoe afstanden op de kaart overeenkomen met afstanden op het aardoppervlak (zie Fig. 30). Deze informatie wordt gegeven door de metriek. De differentieerbare variëteit die ruimtetijd beschrijft heeft deze extra structuur. De metrische tensor volgt uit de Einsteinvergelijkingen en wordt bepaald door de energie-, massa- en impulsverdelingen, samengevat door de energie-impuls tensor.

### 4.3 Ruimtetijd van de ART

We zullen nu plausibel proberen te maken dat ruimtetijd een differentieerbare variëteit is. Daartoe wordt een geïdealiseerde waarnemer ingevoerd, dat is een waarnemer met verwaarloosbare afmetingen ten opzichte van de beschouwde schaal. Hierbij moet men denken aan een massapunt met daarop een glad lopende klok. Deze klok hoeft voorlopig helemaal niet eenparig (uniform) te lopen, als hij maar niet stilstaat. Bij iedere puntgebeurtenis op de plaats van deze waarnemer (dus op de plaats van het massapunt) hoort nu een eenduidig bepaald tijdstip, namelijk de tijd $t$ die de klok aanwijst als de puntgebeurtenis $\mathcal{P} = \mathcal{P}(t)$ plaatsvindt. Voor een zeker tijdinterval $I$ is er dus een bijectie

$$\gamma : t \in I \subset \mathbb{R} \longmapsto \gamma(t) = \mathcal{P}(t) \in \mathcal{S}. \tag{96}$$

Dit is een kromme in $\mathcal{S}$, de *wereldlijn* van de waarnemer. Er zijn talloze voorbeelden van wereldlijnen te geven. Eén zo'n voorbeeld is de wereldlijn van een punttrein, dat is een trein met verwaarloosbare afmetingen ten opzichte van de beschouwde schaal (zie Fig. 31). Hierin is $x$ de afstand van de punttrein tot het station $O$ en $t$ is de tijd die verstreken is sinds het vertrek uit station $O$.

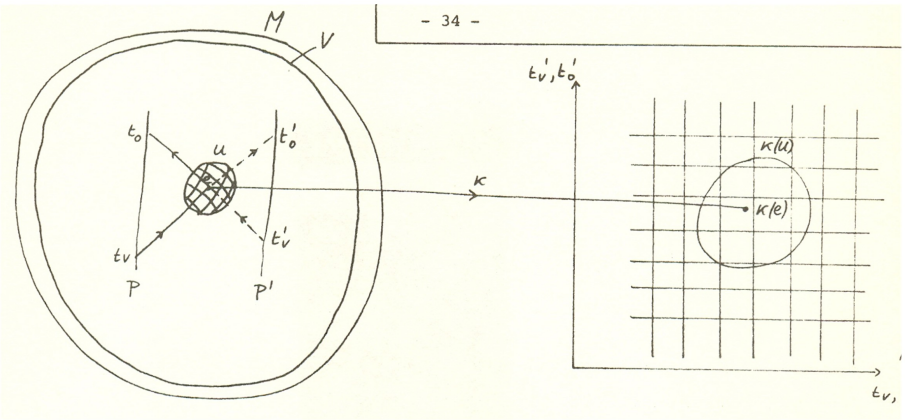



**Figuur 31:** *Wereldlijn van een punttrein. De vertikale delen van de wereldlijn komen overeen met gebeurtenissen waarbij de trein stilstaat.*

Lichtsignalen zijn van groot belang voor het beschrijven van de structuur van ruimtetijd. Bij lichtsignalen moet men denken aan golfpakketjes van radarsignalen, lichtpulsen of $\gamma$-quanta, waarvan de ruimtelijke afmetingen en de tijdsduur weer verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de beschouwde schaal. Het is gebruikelijk doch niet geheel juist dergelijke golfpakketjes collectief met de term *foton* aan te duiden. Het belang van fotonen met betrekking tot de structuur van ruimtetijd is het gevolg van de empirisch vastgestelde universaliteit van de voorplanting van elektromagnetische golven in vacuüm, dat wil zeggen de voortplantingssnelheid in vacuüm is onafhankelijk van de bewegingstoestand van de bron en van de golflengte, de intensiteit en de polarisatie van de elektromagnetische golven.

Beschouw nu een radarstation $P$, dat een puntgebeurtenis $e$ waarneemt. Het radarstation is klein genoeg om dit met een wereldlijn in $\mathcal{S}$ te beschrijven. Bij de puntgebeurtenis $e$ kan men

denken aan een vliegtuig waaraan op een zeker tijdstip en op een zekere plaats het radarsignaal wordt gereflecteerd. De tijd $t_V$ van vertrek van het radarsignaal en de tijd $t_O$ van ontvangst van het gereflecteerde radarsignaal worden door het radarstation $P$ geregistreerd. In de newtonse mechanica wordt een puntgebeurtenis vastgelegd door vier coördinaten, $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$. Daarom introduceren we een tweede radarstation $P'$, dat een andere wereldlijn beschrijft en tijden $t'_V$ en $t'_O$ registreert voor dezelfde puntgebeurtenis $e$ met de klok op $P'$. Men veronderstelt nu dat er een deelverzameling $U$ van $\mathcal{S}$ bestaat, zodanig dat voor iedere puntgebeurtenis uit $U$ de vier reële getallen $(t_V, t_O, t'_V, t'_O)$ een coördinatenstelsel vormen. De kaart $(U, \kappa)$ met $U \subset \mathcal{S}$ en $\kappa(e) = (t_V, t_O, t'_V, t'_O)$ heet een *radarcoördinatenstelsel*. Er is hier ondersteld dat een radarstation door slechts één uitgaande en één terugkomende radarpuls met $e$ verbonden is. Als het heelal gesloten is zou puntgebeurtenis $e$ door meer dan twee radarsignalen met een radarstation verbonden kunnen zijn. We beperken daarom in bovenstaande constructie alle wereldlijnen tot een deelverzameling $V$ van $\mathcal{S}$, zodat $e$ en $P$, respectievelijk $e$ en $P'$ door slechts twee radarpulsen worden verbonden. Dit wordt schematisch weergegeven in Fig. 32. Door nu




**Figuur 32:** *Twee waarnemers brengen een gebeurtenis in kaart door er radarpulsen aan te reflecteren. Radarcoördinaten van een puntgebeurtenis e worden gevormd door tijden van vertrek en ontvangst van deze radarpulsen.*

ruimtetijd $\mathcal{S}$ lapjesgewijs helemaal in kaart te brengen op bovenstaande wijze komt men tot de uitspraak: ruimtetijd is een vierdimensionale differentieerbare variëteit.

Er zijn naast genoemde manier nog andere manieren om ruimtetijd van coördinaten te voorzien. We noemen er twee.

1. Breng in ruimtetijd een voldoend dichte zwerm willekeurig bewegende deeltjes aan (massapunten), en voorzie ieder van deze deeltjes van een klok die weer niet noodzakelijkerwijs eenparig hoeft te lopen, als hij maar niet stilstaat. Kenmerk verder ieder deeltje door drie reële getallen $(x, y, z)$ om ze van elkaar te onderscheiden. Aan een puntgebeurtenis worden nu vier reële getallen toegevoegd, namelijk het drietal plaatscoördinaten $(x, y, z)$ van het massapunt $P$ waar de puntgebeurtenis $e$ plaatsvindt en het tijdstip $t$ dat de klok van $P$ aanwijst op het moment dat de puntgebeurtenis $e$ wordt waargenomen. We krijgen zo een kaart $e \longmapsto (t, x, y, z)$. Het coördinatenstelsel wordt zo geconstrueerd dat voor naburige puntgebeurtenissen bijbehorende $(t, x, y, z)$ weinig verschillen.

2. Neem vier waarnemers met ieder een lopende klok, die willekeurig bewegen. Laat deze waarnemers de aankomsttijden $t^\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ van een lichtsignaal registreren dat door een puntgebeurtenis $e$ is uitgezonden. Men krijgt voor de puntgebeurtenis $e$ dan vier coördinaten $(t^\mu)$.

De belangrijkste begrippen met betrekking tot de structuur van ruimtetijd zijn dus *puntgebeurtenis*, *massapunt*, *foton* en *klok*.

## 4.4 Coördinatentransformaties

Als we kijken naar Fig. 29, zien we dat om een punt $\mathcal{P}$ van de variëteit te labelen, we een systeem van $n$ coördinaten gebruiken, maar waarbij de keuze van de coördinaten arbitrair is. Het idee hierachter is dat niet de 'labels', maar de punten zelf, en de topologische en geometrische relaties ertussen van belang zijn. We mogen punten herlabelen door coördinatentransformaties uit te voeren, $x^\alpha \to x^{\alpha'}$, uitgedrukt door $n$ vergelijkingen

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^0, x^1, ..., x^{n-1}) \quad \text{met } \alpha' = 0, 1, 2, ..., n-1, \tag{97}$$

waarbij we de nieuwe coördinaten geven als functie van de oude coördinaten. Merk op dat we het accent aan de index hangen om de nieuwe coördinaten aan te geven. We kunnen een coördinatentransformatie dus passief beschouwen als het toekennen van nieuwe (geaccentueerde) coördinaten $(x^{0'}, x^{1'}, ..., x^{(n-1)'})$ aan een punt van de variëteit, waarvan de oude coördinaten gegeven worden door $(x^0, x^1, ..., x^{n-1})$.

We zullen aannemen dat de functies gegeven in vergelijking (97) eenwaardig, continu en differentieerbaar zijn over het valide bereik van hun argumenten. Door elke vergelijking in (97) te differentiëren naar de oude coördinaten $x^\beta$, krijgen we de $n \times n$ partiële afgeleiden $\partial x^{\alpha'}/\partial x^\beta$. Deze kunnen we samennemen in de $n \times n$ transformatiematrix $\Lambda^{\alpha'}_{\ \beta}$

$$\Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^{n-1}} \\ \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^0} & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x^{(n-1)'}}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{98}$$

zodat rijen worden gelabeld met een index in de teller van de partiële afgeleide en kolommen door een index in de noemer. De elementen van de transformatiematrix zijn functies van de coördinaten, en daarom zijn de numerieke waarden van de matrixelementen in het algemeen verschillend als ze worden uitgerekend op verschillende punten $\mathcal{P}$ van de variëteit. De determinant van de transformatiematrix wordt de *jacobiaan* van de transformatie genoemd en wordt aangeduid met

$$J = \det\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right). \tag{99}$$

Het is duidelijk dat de numerieke waarde van $J$ van punt tot punt in de variëteit verandert.

Stel dat $J \neq 0$ voor een bepaald bereik van de coördinaten $x^\beta$, dan betekent dit dat we (in principe) vergelijkingen (97) kunnen oplossen naar de oude coördinaten $x^\beta$. We krijgen op deze wijze de *inverse* transformatievergelijkingen

$$x^\alpha = x^\alpha(x^{0'}, x^{1'}, ..., x^{(n-1)'}) \quad \text{met } \alpha = 0, 1, ..., n-1. \tag{100}$$

Op dezelfde manier als hierboven kunnen we de inverse transformatiematrix $\Lambda^\alpha_{\ \beta'} = \partial x^\alpha/\partial x^{\beta'}$ en de Jacobiaan van de inverse transformatie $J' = \det(\partial x^\alpha/\partial x^{\beta'})$ bepalen.

Als we de kettingregel gebruiken, dan kunnen we eenvoudig laten zien dat de inverse transformatiematrix de inverse is van de transformatiematrix, omdat

$$\sum_{\beta=0}^{n-1} \Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} \Lambda^{\beta}_{\ \gamma'} = \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma'}} = \delta^\alpha_\gamma = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{als } \alpha = \gamma, \\ 0 & \text{als } \alpha \neq \gamma, \end{array} \right\} \tag{101}$$

waar we de Kronecker delta $\delta^\alpha_\gamma$ gebruiken, alsmede het feit dat

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma} = 0 \qquad \text{als } \alpha \neq \gamma, \tag{102}$$

omdat de coördinaten in zowel het geaccentueerde als in het niet-geaccentueerde systeem onafhankelijk zijn. Omdat de twee transformatiematrices elkaars inverse zijn, volgt $J' = 1/J$.

We beschouwen twee naburige punten $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ in de variëteit, met respectievelijk coördinaten $x^\alpha$ en $x^\alpha + dx^\alpha$. In het nieuwe systeem wordt de infinitesimale coördinatenafstand tussen $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ gegeven door de totale differentiaal

$$dx^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^1} dx^1 + ... + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{n-1}} dx^{n-1}, \tag{103}$$

waar we bedoelen dat de partiële afgeleiden aan de rechterzijde van de vergelijking worden uitgerekend op punt $\mathcal{P}$. We kunnen dit economischer schrijven als

$$dx^{\alpha'} = \sum_{\beta=0}^{n-1} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} dx^\beta = \left.\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\right|_{\mathcal{P}} dx^\beta = \left.\Lambda^{\alpha'}_{\ \beta}\right|_{\mathcal{P}} dx^\beta, \tag{104}$$

waar we in de laatste stap de sommatieconventie van Einstein hebben ingevoerd. Dit betekent dat als er in de uitdrukking dezelfde index zowel boven als beneden voorkomt, we automatisch sommeren over alle waarden die die index kan aannemen.

## 4.5 Geometrische objecten

In het bovenstaande hebben we gepostuleerd dat ruimtetijd een differentieerbare variëteit is. We bespreken nu de verschillende topologische objecten die in ruimtetijd betekenis hebben: scalair veld, vector, 1-vorm, tensoren. Merk op dat de metrische tensor en het concept inproduct pas later aan de orde komen.

### 4.5.1 Puntgebeurtenis

Het begrip puntgebeurtenis hebben we reeds eerder besproken. Ruimtetijd is de verzameling van alle mogelijke puntgebeurtenissen.

### 4.5.2 Curve

Het is gebruikelijk om bij een curve te denken aan een reeks verbonden punten in ruimtetijd. Dit noemen we een *pad* en we reserveren het woord *curve* voor een geparametriseerd pad. We definiëren een curve als een afbeelding van een interval van de reële lijn naar een pad in ruimtetijd. Dit betekent dat een curve een pad is, waarbij met elke puntgebeurtenis een reëel getal geassocieerd is. Dit getal noemen we de parameter. Een curve $\mathcal{P}(\lambda)$ is te identificeren als een verzameling puntgebeurtenissen die gerelateerd zijn via een parameter $\lambda$. Elke puntgebeurtenis heeft coördinaten die uitgedrukt kunnen worden als een functie van $\lambda$. Er geldt

$$\text{Curve} : \{x^0 = f(\lambda), x^1 = g(\lambda), x^2 = h(\lambda), x^3 = k(\lambda), a \leq \lambda \leq b\}. \tag{105}$$

Als we de parameter vervangen (maar niet de puntgebeurtenissen) door $\lambda' = \lambda'(\lambda)$, vinden we

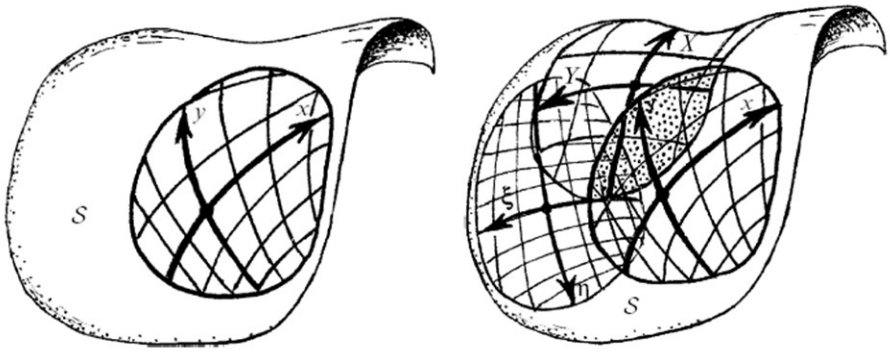
$$\{x^0 = f'(\lambda'), x^1 = g'(\lambda'), x^2 = h'(\lambda'), x^3 = k'(\lambda'), a' \leq \lambda' \leq b'\}, \tag{106}$$

waarbij $f'$, $g'$, $h'$ en $k'$ nieuwe functies zijn en waar geldt $a' = \lambda'(a)$ en $b' = \lambda'(b)$. Wiskundig noemen we dit een nieuwe curve, terwijl de afbeelding (het pad dat in ruimtetijd gevolgd wordt) hetzelfde blijft. Een oneindig aantal curven kunnen dus hetzelfde pad hebben.

Voor de parameter wordt typisch de tijd op de klok van een meereizende waarnemer gebruikt. Als een metriek ontbreekt kunnen we echter niet spreken over lengte langs een curve.

### 4.5.3 Scalairveld

We beschouwen alleen differentieerbare variëteiten en dat zijn ruimten die continu en differentieerbaar zijn. Dit betekent dat we op elk punt van de variëteit een scalairveld $\Phi$ kunnen definiëren en dat deze functie overal kan worden gedifferentieerd. Stel we hebben een gladde functie $\Phi$




**Figuur 33:** *Grafische voorstelling van een differentieerbare variëteit $\mathcal{S}$. Binnen een lokaal gebied kan een kaart met gladde (reële getallen) coördinaten $(x, y)$ de punten in de variëteit labelen. Om de hele variëteit te bestrijken dienen we verschillende kaarten samen te 'lijmen'.*

gedefinieerd op $\mathcal{S}$, denk bijvoorbeeld aan de temperatuur op het aardoppervlak. In moderne wiskundige taal is $\Phi$ dan een gladde afbeelding van $\mathcal{S}$ naar de ruimte van reële getallen $\mathbb{R}$, omdat $\Phi$ aan ieder punt van $\mathcal{S}$ een reëel getal toekent, dit wil zeggen $\Phi$ maakt een afbeelding van $\mathcal{S}$ naar de reële getallen. Een dergelijke functie wordt vaak een *scalairveld* op $\mathcal{S}$ genoemd. Binnen een bepaald lokaal gebied heeft $\Phi$ een coördinatenvergelijking $\Phi = f(x, y)$ op de bijbehorende kaart. De gladheid van het scalairveld $\Phi$ komt dan tot uitdrukking in de *differentieerbaarheid* van de functie $f(x, y)$. Het zal de lezer opgevallen zijn dat onderscheid wordt gemaakt tussen $\Phi$ en $f$. De reden is dat $\Phi$ gedefinieerd is op het oppervlak, maar uitgedrukt kan worden in verschillende coördinatensystemen. De wiskundige uitdrukking voor $f(x, y)$ kan verschillen voor verschillende kaarten, terwijl de grootheid $\Phi$ op elk specifiek punt van het oppervlak bestreken door deze kaarten niet verandert. Voor een andere kaart in Fig. 33 geldt bijvoorbeeld $\Phi = F(X, Y)$. Als de kaarten overlappen geldt $f(x, y) = F(X, Y)$. De specifieke uitdrukking voor $F$, in termen van $X$ en $Y$, zal in het algemeen verschillen van de uitdrukking voor $f$ in termen van $x$ en $y$. In het algemeen is $X$ een gecompliceerde functie van $x$ en $y$ in het overlapgebied, en dat geldt ook voor $Y$. Met deze functies dienen we rekening te houden als we van $f$ naar $F$ gaan. Dergelijke functies, die de coördinaten van één systeem beschrijven in termen van die van het andere systeem,

$$X = X(x, y) \qquad \text{en} \qquad Y = Y(x, y), \tag{107}$$

en hun inverse

$$x = x(X, Y) \qquad \text{en} \qquad y = y(X, Y), \tag{108}$$

noemen we *overgangsfuncties*.

Teneinde het bovenstaande concreet te maken, stelt U zich de volgende situatie voor. Een waarnemer die we voorzien van het label $\mathcal{O}$ besluit om de temperatuur van een bepaald gebiedje van het aardoppervlak in kaart te brengen. Hiertoe maakt hij een kaart van het gebied en gebruikt hij coördinaten $x$ en $y$. Een bepaald punt $\mathcal{P}$ van het aardoppervlak komt overeen met een bepaald punt $(x, y)$ op zijn kaart. Een tweede waarnemer (die we labelen met $\mathcal{O}'$) komt op hetzelfde idee. Hij maakt ook een kaart, echter met volledig andere coördinaten $(x', y')$. Na verloop van tijd besluiten beide waarnemers om hun analyse te vergelijken en leggen ze de

kaarten naast elkaar. Het blijkt mogelijk om een wiskundige transformatie[37] te vinden tussen plaatsvectoren $\mathbf{x} = (x, y)$ op de kaart van waarnemer $\mathcal{O}$ en $\mathbf{x}' = (x', y')$ van $\mathcal{O}'$. Stel dat de transformatie correspondeert met de volgende set lineaire vergelijkingen,

$$\begin{array}{rcl} x' &=& 5x - 2y \\ y' &=& 3x + 2y \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{109}$$

Deze vergelijkingen definiëren een lineaire transformatie[38] (of lineaire afbeelding) van een punt $(x, y)$ naar een corresponderend beeld $(x', y')$. In matrixvorm mogen we dit schrijven als $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, en indien de afbeelding bijectief (een-op-een afbeelding[39]) is, geldt $\det\mathbf{A} \neq 0$. We noemen de twee coördinatenstelsels gerelateerd door $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ respectievelijk het systeem $\mathcal{O}'$ en $\mathcal{O}$. Stel dat het punt $\mathcal{P}$ van de variëteit in het systeem $\mathcal{O}$ gegeven wordt door de coördinaten $(x, y) = (0, -1)$. Met vergelijking (109) vinden we voor het punt $(x, y) = (0, -1)$ het beeldpunt $(x', y') = (2, -2)$ in systeem $\mathcal{O}'$. Het origineel in $\mathcal{O}$ en het beeldpunt in $\mathcal{O}'$ hebben verschillende coördinaten op beide kaarten, maar stellen hetzelfde punt $\mathcal{P}$ in de variëteit voor.

Stel dat waarnemer $\mathcal{O}$ de temperatuur $T$ in zijn coördinatenstelsel kan beschrijven met uitdrukking $T: \ T(x, y) = 30 + 8x - y$ (dit is een scalairveld $T$ dat verschillende waarden kan aannemen op verschillende punten). Op punt $(x, y) = (0, -1)$ wordt de temperatuur dan gegeven door $T = 30+8\times 0-(-1) = 31°$C. Om de corresponderende uitdrukking voor de andere waarnemer, die in coördinatenstelsel $\mathcal{O}'$, te vinden, dienen we eerst de inverse transformatie gegeven door vergelijking (109) af te leiden. Hiertoe inverteren we de bijbehorende matrix en vinden

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & +2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \tag{110}$$

Er geldt dan $x = \frac{1}{16}(2x'+2y')$ en $y = \frac{1}{16}(-3x'+5y')$ en we krijgen een andere uitdrukking voor de temperatuur. We vinden $T: \ T(x', y') = 30+\frac{8}{16}(2x'+2y')-\frac{1}{16}(-3x'+5y') = 30+\frac{19}{16}x'+\frac{11}{16}y'$. Als we nu weer naar de temperatuur op hetzelfde punt (beeldpunt $(x', y') = (2, -2)$) kijken, vinden we weer $T(x', y') = T(2, -2) = 30 + \frac{19\times 2}{16} + \frac{11\times(-2)}{16} = 30 + 2,375 - 1,375 = 31°$C, zoals het hoort, want de temperatuur is een scalairveld dat zich niets aantrekt van het coördinatenstelsel dat we kiezen. Beide waarnemers zijn het eens: in de variëteit (het stukje aardoppervlak waar de kaarten overlappen in dit geval) is de temperatuur op punt $\mathcal{P}$ gelijk aan 31°C.

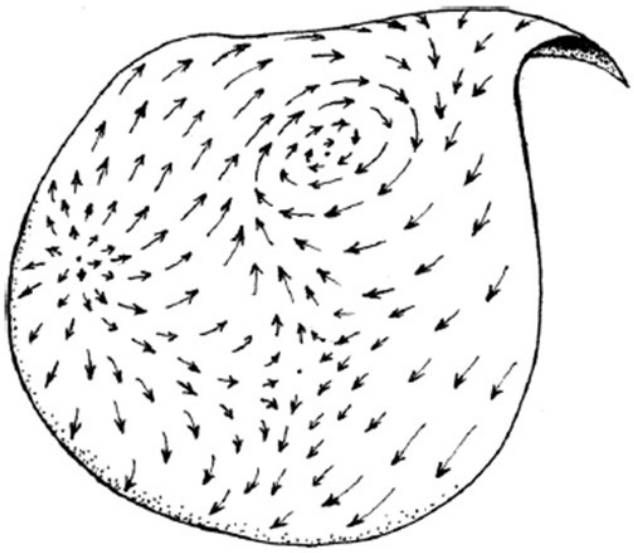
### 4.5.4 Vectorveld

Het begrip vector is ontstaan in de fysica en wel door begrippen als snelheid en versnelling. Deze objecten hebben een grootte en een richting en ze kunnen worden opgeteld en met een reëel getal vermenigvuldigd. Veel verwarring komt voort uit het feit dat de naam 'vector' refereert naar twee verschillende concepten: enerzijds een zuiver numeriek object (een rij of kolom getallen) en anderzijds een object met geometrische of topologische eigenschappen. In deze laatste betekenis is de vector onafhankelijk van het referentiesysteem en heeft daarom geen unieke decompositie in numerieke elementen. We benadrukken het om een vector (of meer algemeen een tensor) te zien als een 'geometrisch object', iets dat men zich kan voorstellen zonder te moeten refereren naar een specifiek referentiesysteem. Fig. 34 geeft een voorstelling van een vectorveld, bijvoorbeeld

[37] Voor tensorrekening is basiskennis van transformatietheorie onontbeerlijk. Dit voorbeeld is een eerste kennismaking.

[38] De transformaties die een rol spelen in de ART zijn over het algemeen niet lineair.

[39] Er is altijd sprake van een *alias-alibi* aspect bij dergelijke transformaties: als $(x', y')$ wordt beschouwd als het definiëren van nieuwe coördinaten (een nieuwe naam) voor $(x, y)$, dan hebben we te maken met het alias aspect; als $(x', y')$ beschouwd wordt als een nieuwe positie (plaats) voor $(x, y)$, dan komt het alibi aspect te voorschijn. In tensorrekening zijn we in het algemeen meer geïnteresseerd in het alias aspect.



**Figuur 34:** *Grafische voorstelling van een vectorveld als een 'verdeling van pijltjes over de variëteit' getekend op $\mathcal{S}$. De vectoren zijn gebonden aan hun plaats.*

de horizontale windsnelheid op het oppervlak van de aarde.

Een topologische vector is een object $\vec{V}$ dat leeft in een bepaalde ruimte, in ons voorbeeld van het aardoppervlak is dat een niet-euclidische twee-dimensionale ruimte met constante positieve kromming[40]. De vector heeft een bepaalde betekenis in die ruimte en stelt in ons voorbeeld de horizontale windsnelheid op het oppervlak van de aarde voor. We kunnen vectoren tekenen als pijltjes, zonder te refereren naar een bepaalde basis, en dat hebben we gedaan in Fig. 34.

Er is geen unieke manier om een topologische vector te expanderen in termen van componenten. Zonder verdere informatie is een bewering als

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{111}$$

zonder enige betekenis, omdat we niet weten welke basis we dienen te gebruiken. Wat we dienen te doen, is iets te schrijven als

$$\vec{V} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{112}$$

waarmee we met het pijltje $\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}$ bedoelen dat de vector $\vec{V}$ componenten $a$ en $b$ heeft, die gegeven zijn in het referentiesysteem van waarnemer $\mathcal{O}$ (bijvoorbeeld het $(x, y)$ systeem). De vector $\vec{V}$ is een pijl met als componenten een verzameling van coördinatenstelsel afhankelijke getallen. We kunnen ook schrijven

$$\vec{V} = a\vec{e}_{x(\mathcal{O})} + b\vec{e}_{y(\mathcal{O})}, \tag{113}$$

waarbij $\vec{e}_{x(\mathcal{O})}$ en $\vec{e}_{y(\mathcal{O})}$ de basisvectoren in het referentiesysteem van waarnemer $\mathcal{O}$ zijn. We hadden net zo goed een andere waarnemer kunnen kiezen, bijvoorbeeld $\mathcal{O}'$, en dan geldt

$$\vec{V} \underset{\mathcal{O}'}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \tag{114}$$

[40] Andere voorbeelden zijn de Hilbertruimte met complexe golffuncties van de quantummechanica, of de Minkowskiruimte van de speciale relativiteitstheorie.

waarbij

$$\vec{V} = p\vec{e}_{X(\mathcal{O}')} + q\vec{e}_{Y(\mathcal{O}')}, \tag{115}$$

met $\vec{e}_{X(\mathcal{O}')}$ en $\vec{e}_{Y(\mathcal{O}')}$ de basisvectoren in het referentiesysteem van waarnemer $\mathcal{O}'$ (bijvoorbeeld het $(X, Y)$ systeem). Merk op dat vergelijkingen (112) - (115) alle geldige beschrijvingen zijn van *dezelfde* topologische vector $\vec{V}$.

Het is verleidelijk om te denken dat het symbool $\vec{e}_x$ de $x$-component van de $\vec{e}$-vector voorstelt. We bedoelen echter met $\vec{e}_x$ een volledige vector, waarbij het subscript $x$ onderdeel is van de naam van de vector en aangeeft welke van de basisvectoren we bedoelen (namelijk de basisvector in de $x$-richting). De vector $\vec{e}_x$ heeft zelf componenten, waarvan de $x$-component geschreven kan worden als $(\vec{e}_x)_x$. De volledige basis[41] geven we in dit geval aan met $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.

Elke complete set vectoren kan gebruikt worden als basis. In Fig. 33 zijn de referentiesystemen van drie waarnemers weergegeven. Een topologische vector wordt voorgesteld door de pijl (zie Fig. 34) en hoort niet bij een of ander referentiesysteem. Het is een topologisch object met zelfstandig bestaansrecht. De waarnemers bekijken het echter vanuit hun eigen gezichtspunt (referentiesysteem). Cruciaal is te begrijpen dat de vector *niet* verandert als we van het ene naar het andere referentiesysteem gaan. Er geldt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{O}} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{\mathcal{O}'}. \tag{116}$$

Natuurlijk zijn de componenten $a$ en $b$ niet gelijk aan $p$ en $q$ en dienen we een voorschrift te vinden hoe we deze kunnen berekenen als we van basis veranderen. We gaan als volgt te werk: kies eerst een puntgebeurtenis $\mathcal{P}$. Op deze puntgebeurtenis kiezen we dan een complete set onafhankelijke vectoren (hierbij is elke redelijke keuze geoorloofd). We noemen deze vectoren $\vec{e}_i$ en gebruiken deze als basis om andere vectoren op punt $\mathcal{P}$ in te expanderen: $\vec{u} = \sum u^\alpha \vec{e}_\alpha$ en $\vec{v} = \sum v^\alpha \vec{e}_\alpha$.

Fig. 35 toont dat deze basis een tangentenruimte $T_P$ definieert op punt $\mathcal{P}$. Alle vectoren worden *lokaal* op dit punt beschreven[42]. In Fig. 35 hebben we als coördinaten $\chi(\mathcal{P})$ en $\psi(\mathcal{P})$ gebruikt. De richtingsafgeleiden $\partial_\alpha \equiv \partial_{\vec{e}_\alpha}$ langs deze coördinaten spannen de tangentenruimte (de raakruimte in punt $\mathcal{P}$) op. De basisvectoren worden hiermee gegeven door de richtingsafgeleiden langs de coördinaatlijnen en zijn $\partial/\partial\chi$ en $\partial/\partial\psi$. We kunnen een vector dus zien als een richtingsafgeleide (dat is de moderne wiskundige zienswijze). We zien dat deze vectoren *niet* in de variëteit liggen, maar een eigen vectorruimte opspannen. Alhoewel Fig. 35 een inzichtelijke voorstelling geeft, dienen we ons te realiseren, dat een abstracte variëteit beschouwd dient te worden als een zelfstandige entiteit: er is geen hogere-dimensionele ruimte waarin de variëteit en zijn tangentenruimten zijn ingebed. We geven een toelichting aan de hand van een voorbeeld dat de gang van zaken in de vertrouwde drie-dimensionale euclidische ruimte beschrijft.

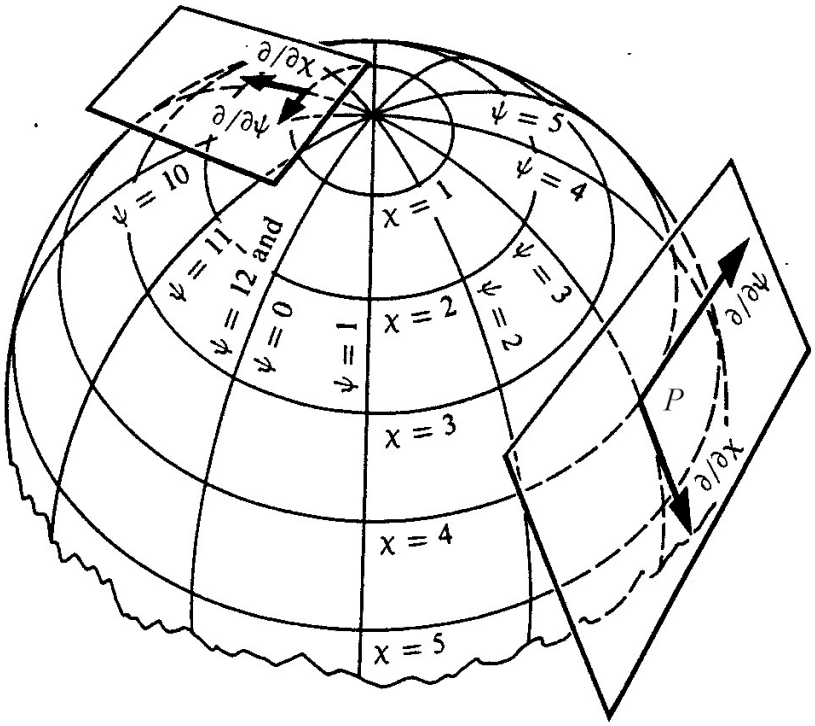
Voorbeeld: coördinatensysteem in euclidische ruimte

We beschouwen de euclidische ruimte met cartesische coördinaten $(x, y, z)$ en de bijbehorende basis van eenheidsvectoren $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. We gebruiken dit systeem als algemene referentie om andere, niet cartesische coördinaten in te beschrijven. We hebben een tweede coördinatensysteem $(u, v, w)$ dat niet cartesisch is, bijvoorbeeld de sferische coördinaten $(r, \theta, \phi)$. Er geldt

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \tag{117}$$

[41] Er worden vaak andere symbolen gebruikt voor de basisvectoren, zoals **i**, **j** en **k**. Ook is het mogelijk om $\vec{e}$ te zien als een object met hogere rang, bijvoorbeeld een vector van vectoren. Dat is niet fout, maar in ons geval ook niet nuttig.

[42] We stappen dus af van het begrip vrije vector. In de algemene relativiteitstheorie kunnen we een vector niet eenvoudig vrij verplaatsen!




**Figuur 35:** *De basisvectoren die door een coördinatensysteem worden geïnduceerd, vormen een tangentenruimte op elke gebeurtenis van de variëteit.*

en we kunnen dit inverteren om $u, v, w$ te schrijven in termen van $x, y, z$. We kunnen bovenstaande vergelijking schrijven als

$$\vec{r} = x(u,v,w)\vec{i} + y(u,v,w)\vec{j} + z(u,v,w)\vec{k}, \tag{118}$$

Indien we $w$ gelijk zetten aan de constante $w_0$, terwijl $u, v$ mogen variëren, krijgen we

$$\vec{r} = x(u,v,w_0)\vec{i} + y(u,v,w_0)\vec{j} + z(u,v,w_0)\vec{k}. \tag{119}$$

hetgeen een parametrische vergelijking is voor het coördinatenoppervlak $w = w_0$, waarbij de coördinaten $u, v$ de rol van parameters spelen. We kunnen de parametrische vergelijkingen voor de twee andere oppervlakken op identieke wijze verkrijgen. Als we in bovenstaande vergelijking $v = v_0$ en $w = w_0$ stellen, maar $u$ laten variëren, krijgen we

$$\vec{r} = x(u,v_0,w_0)\vec{i} + y(u,v_0,w_0)\vec{j} + z(u,v_0,w_0)\vec{k}. \tag{120}$$

Dat is een parametrische vergelijking voor de coördinatencurve gegeven door de snijlijn van vlakken $v = v_0$ en $w = w_0$, waarbij $u$ de rol van parameter langs de curve speelt. We kunnen de parametrische vergelijkingen voor de twee andere curven op identieke wijze verkrijgen. Door elk punt $\mathcal{P}$ met coördinaten $(u_0, v_0, w_0)$ gaan drie *coördinaatvlakken* gegeven door $u = u_0$, $v = v_0$ en $w = w_0$. De vlakken snijden elkaar in *coördinaatcurven*.

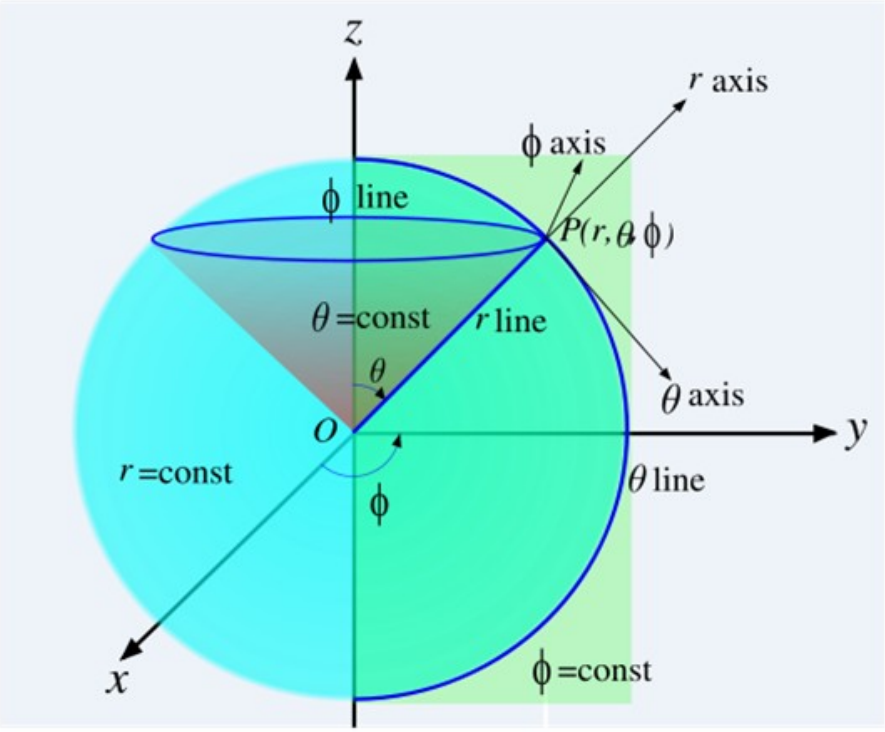
Voor sferische coördinaten hebben we

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta. \tag{121}$$

waarbij de coördinaten het volgende bereik hebben: $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$ en $0 \leq \phi < 2\pi$. Fig. 36 toont dat het coördinaatvlak $r = r_0$ een bol is met straal $r_0$, het coördinaatvlak $\theta = \theta_0$ is een oneindige kegel met de apex in de oorsprong en de as verticaal, en het coördinaatvlak $\phi = \phi_0$ is een half-oneindig vlak met de $z$-as als rand.

De oppervlakken $\theta = \theta_0$ en $\phi = \phi_0$ snijden elkaar en dat resulteert in de coördinaatcurve die een deellijn is die vanaf $O$ vertrekt door $\mathcal{P}$ gaat; de oppervlakken $\phi = \phi_0$ en $r = r_0$ snijden elkaar in de curve die een halve cirkel is met eindpunten op de $z$-as en die door $\mathcal{P}$ gaat; en de oppervlakken $r = r_0$ en $\theta = \theta_0$ snijden elkaar in de horizontale cirkel door $\mathcal{P}$ met het middelpunt op de $z$-as.

Als we vergelijking (120) differentiëren naar de parameter $u$, krijgen we een tangentenvector aan de coördinaatcurve. Omdat we tijdens differentiëren $v$ en $w$ constant houden (want op deze wijze was de curve gedefinieerd),




**Figuur 36:** *De coördinaatoppervlakken (bol, kegel en half-vlak) en coördinaatcurven voor sferische coördinaten.*

hebben we in feite de *partiële afgeleide* naar $u$ genomen van vergelijking (117). Als we op dezelfde manier vergelijking (117) partieel afleiden naar $v$ en $w$, krijgen we de tangentenvectoren van de andere twee coördinaatcurven. De drie partiële afgeleiden

$$\vec{e}_u \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \qquad \vec{e}_v \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \qquad \vec{e}_w \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}, \tag{122}$$

berekend op punt $(u_0, v_0, w_0)$ geven tangentenvectoren aan de drie coördinaatcurven die door $\mathcal{P}$ gaan. Op deze wijze verkrijgen we de *natuurlijke basis* $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ op punt $\mathcal{P}$. In het algemeen is deze basis niet orthogonaal en zijn de vectoren geen eenheidsvectoren.

Gegeven een vectorveld $\vec{\lambda}$, kunnen we in elk punt $\mathcal{P}$ de vector $\vec{\lambda}$ refereren aan basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$,

$$\vec{\lambda} = \lambda^u \vec{e}_u + \lambda^v \vec{e}_v + \lambda^w \vec{e}_w. \tag{123}$$

We gebruiken $u^i$ $(i = 1, 2, 3)$ in plaats van $(u, v, w)$ voor de coördinaten, en $\{\vec{e}_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ in plaats van $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ voor de natuurlijke basis. Voor een vector $\vec{\lambda}$ duiden we de componenten in de basis $\{\vec{e}_i\}$ aan met $\lambda^i$ $(i = 1, 2, 3)$. We kunnen vergelijking (123) nu uitdrukken als

$$\vec{\lambda} = \lambda^1 \vec{e}_1 + \lambda^2 \vec{e}_2 + \lambda^3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} \lambda^i \vec{e}_i. \tag{124}$$

We spreken nu af dat een index uit het midden van het alfabet $(i, j, k, ...)$ altijd loopt over de waarden 1,2 en 3. Verder sommeren we automatisch als dezelfde index voorkomt als superscript en subscript (dit heet de sommatieconventie van Einstein). We kunnen vergelijking (124) nu schrijven als $\vec{\lambda} = \lambda^i \vec{e}_i$. Merk op dat de twee indices die we op deze wijze gebruiken, *dummy indices* genoemd worden. We mogen deze vervangen door andere letters (die nog niet in gebruik zijn).

---

In het volgende bestuderen we vectoren in ruimtetijd. Omdat ruimtetijd uit drie ruimtelijke en één tijddimensie bestaat, vormt het een vier-dimensionale structuur. De vectoren die in ruimtetijd leven, worden dan ook viervectoren genoemd. Als we een coördinatenstelsel aanbrengen, hebben deze vectoren vier componenten. Een typische vector is de verplaatsingsvector

$\Delta\vec{x} \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, die twee gebeurtenissen $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ verbindt. Een andere notatie is $\Delta\vec{x} \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} \{\Delta x^\alpha\}$. Als we willen weten wat de componenten van deze vector zijn in een ander coördinatenstelsel, bijvoorbeeld het systeem $\mathcal{O}'$, dan schrijven we $\Delta\vec{x} \underset{\mathcal{O}'}{\longrightarrow} \left\{\Delta x^{\alpha'}\right\}$. We gebruiken het accent boven de index om de nieuwe coördinaten aan te geven. De vector $\Delta\vec{x}$ is hetzelfde en daarvoor hebben we geen nieuwe notatie nodig als we van referentiesysteem veranderen. We kunnen de nieuwe vectorcomponenten $\Delta x^{\alpha'}$ vinden met behulp van de transformatiematrix van het ene naar het andere systeem (zie vergelijkingen (98) en (103)), en we schrijven

$$\Delta x^{\alpha'} = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} \Delta x^\beta = \Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} \Delta x^\beta \tag{125}$$

voor willekeurige $\alpha'$. De verzameling $\Lambda^{\alpha'}_{\ \beta}$ bestaat uit 16 getallen die de transformatiematrix vertegenwoordigen. De notatie maakt weer gebruik van Einsteins sommatieconventie en vergelijking (125) stelt eigenlijk vier verschillende vergelijkingen voor ($\alpha' = 0, 1, 2, 3$).

Een algemene vector (wij zijn geïnteresseerd in viervectoren) is *gedefinieerd* als een verzameling getallen (de componenten van de vector ten opzichte van een bepaalde basis, $\mathcal{O}$) als $\vec{V} \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} (V^0, V^1, V^2, V^3) = \{V^\alpha\}$ en door de regel dat zijn componenten in systeem $\mathcal{O}'$ gegeven worden door

$$V^{\alpha'} \equiv \Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} V^\beta. \tag{126}$$

Dus de componenten van een vector (vergelijking (126)) transformeren op dezelfde manier als de coördinaten (vergelijking (125)).

De componenten $V^\alpha$ van een vector $\vec{V}$ ten opzichte van de natuurlijke basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ worden de *contravariante componenten* genoemd. Een object waarvan de componenten contravariant transformeren, een vector, noemen we een $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tensor.

Stel dat we twee systemen met curvelineaire coördinaten hebben in ruimtetijd, aangegeven met $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$. De contravariante componenten van een vector veranderen volgens vergelijking (126) als we van het ene naar het andere systeem gaan. We noemen $\{\vec{e}_\alpha\}$ de basis in het systeem van waarnemer $\mathcal{O}$ en $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ de basis in het systeem van waarnemer $\mathcal{O}'$. Er geldt

$$\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha = V^{\alpha'} \vec{e}_{\alpha'}. \tag{127}$$

We kunnen bovenstaande relatie gebruiken om de transformatiewet voor de basisvectoren te vinden, dit wil zeggen de relatie tussen $\{\vec{e}_\alpha\}$ en $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$. Met vergelijking (126) kunnen we vergelijking (127) schrijven als

$$\underbrace{\Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} V^\beta}_{V^{\alpha'}} \vec{e}_{\alpha'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \ \rightarrow\ V^\beta \Lambda^{\alpha'}_{\ \beta} \vec{e}_{\alpha'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \ \rightarrow\ V^\alpha \Lambda^{\beta'}_{\ \alpha} \vec{e}_{\beta'} = V^\alpha \vec{e}_\alpha \ \rightarrow\ V^\alpha (\Lambda^{\beta'}_{\ \alpha} \vec{e}_{\beta'} - \vec{e}_\alpha) = 0. \tag{128}$$

In de eerste stap maken we gebruik van het feit dat $\Lambda^{\beta'}_{\ \alpha}$ en $V^\beta$ gewoon getallen zijn, en dat hun volgorde in een eindige som niet uitmaakt. In de tweede stap gebruiken we het feit dat $\beta$ en $\alpha'$ dummy indices zijn: we veranderen $\beta$ in $\alpha$ en $\alpha'$ in $\beta'$. De laatste vergelijking moet waar zijn voor elke verzameling $\{V^\alpha\}$ omdat $\vec{V}$ een willekeurige vector is. We vinden

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda^{\beta'}_{\ \alpha} \vec{e}_{\beta'} \tag{129}$$

en dit is de transformatiewet voor basisvectoren. Het is geen transformatie van componenten, maar geeft de basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ van $\mathcal{O}$ als een lineaire som van de basis $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ van $\mathcal{O}'$. Als we dit

vergelijken met relatie (126) dan zien we dat het transformatiegedrag verschilt. Omdat de componenten $V^\alpha$ van de vector $\vec{V}$ met de inverse transformatiematrix van die van de basisvectoren transformeert, noemen we de componenten van een vector contravariant.

We kunnen de inverse transformaties vinden door ons te realiseren dat de systemen $\mathcal{O}$ en $\mathcal{O}'$ op gelijke voet staan. We kunnen derhalve de indices met en zonder accenten verwisselen en vinden voor de inverse transformatie van basis en componenten

$$\vec{e}_{\beta'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}\vec{e}_\alpha, \qquad \text{en} \qquad V^\alpha = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}V^{\beta'}. \tag{130}$$

Dit volgt ook uit het feit dat eerst heen en vervolgens terug transformeren niets mag veranderen. Dit leidt tot de identiteit

$$\Lambda^{\nu}{}_{\beta'}\Lambda^{\beta'}{}_{\alpha} = \delta^{\nu}{}_{\alpha}. \tag{131}$$

Merk op dat we bovenstaand verband al hadden gevonden in vergelijking (101).

We eindigen de discussie over vectoren met een voorbeeld in $\mathbb{R}^2$. Stel dat $V^i$ met $i = 1, 2$ de contravariante componenten zijn van een vector, en dat $V^i = (x^2, x^1)$ in het coördinatenstelsel $\mathbf{x} = \{x_i\}$. We willen nu de componenten van deze vector, $V^{i'}$, berekenen in het systeem $\mathbf{x}' = \{x^{i'}\}$ met transformatie

$$\begin{array}{rcl} x^{1'} &=& (x^2)^2 \neq 0 \\ x^{2'} &=& x^1 x^2. \end{array} \tag{132}$$

Volgens de definitie van covariantie, vergelijking (126), geldt

$$V^{i'} = V^r \Lambda^{i'}{}_{r} = V^1 \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^1} + V^2 \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^2}, \tag{133}$$

waarbij we vergelijking (98) gebruikt hebben om $\Lambda^{i'}{}_{r}$ uit te werken. We zien dat we de transformatiematrix nodig hebben voor geval $i = 1$ en $i = 2$. We vinden

$$\Lambda^{i'}{}_{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{pmatrix}. \tag{134}$$

Dit geeft

$$V^{1'} = V^1(0) + V^2(2x^2) = 2x^1x^2 \qquad V^{2'} = V^1(x^2) + V^2(x^1) = (x^2)^2 + (x^1)^2 \tag{135}$$

en in termen van de geaccentueerde coördinaten wordt dit

$$V^{1'} = 2x^{2'} \qquad V^{2'} = x^{1'} + \frac{(x^{2'})^2}{x^{1'}}. \tag{136}$$

### 4.5.5 Lineaire functionaal, 1-vorm of covectorveld

Een tensor van het type $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wordt een covector, een covariante vector, een lineaire functionaal[43] of een 1-vorm genoemd. De lineaire functionaal[44] $\tilde{p}$ heeft een vector als argument en beeldt af op de reële getallen: $\tilde{p}(\vec{V})$ is een reëel getal[45]. De functionalen voldoen aan de axioma's voor

[43] Terwijl een functie een getal als argument neemt en een getal als resultaat oplevert, neemt een functionaal een functie als argument en levert een getal als resultaat. Een voorbeeld is de totale massa die hoort bij een dichtheidsverdeling, waarbij $m = \int \rho(x, y, z)dxdydz$.

[44] Net zoals we vectoren aangeven door een pijltje ($\vec{V}$) boven het symbool te plaatsen, geven we een lineaire functionaal aan door er een tilde ($\tilde{p}$) boven te plaatsen.

[45] Je kunt de 1-vorm zien als een apparaat met een sleuf. Als in deze sleuf een vector geplaatst wordt, dan rolt er een getal uit het apparaat.

een vectorruimte. Deze ruimte wordt de *duale vectorruimte* genoemd om het te onderscheiden van de ruimte van alle vectoren $\vec{V}$. De componenten van $\tilde{p}$ worden $p_\alpha$ genoemd en er geldt

$$p_\alpha \equiv \tilde{p}(\vec{e}_\alpha). \tag{137}$$

Elke component met één enkel subscript is per conventie de component van een 1-vorm; een superscript geeft een component van een vector aan. In termen van componenten wordt het reële getal $\tilde{p}(\vec{V})$ gegeven door

$$\tilde{p}(\vec{V}) = \tilde{p}(V^\alpha \vec{e}_\alpha) = V^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = V^\alpha p_\alpha. \tag{138}$$

Merk op dat we in bovenstaande afleiding gebruik maken van de lineariteit van de functionaal. Voor ruimtetijd ($n = 4$) is het getal $\tilde{p}(\vec{V})$ gelijk aan $V^0p_0 + V^1p_1 + V^2p_2 + V^3p_3$ en de bewerking wordt *contractie van* $\vec{V}$ *en* $\tilde{p}$ genoemd.

De componenten van $\tilde{p}$ op een andere basis $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ zijn

$$p_{\alpha'} \equiv \tilde{p}(\vec{e}_{\alpha'}) = \tilde{p}(\Lambda^\beta{}_{\alpha'}\vec{e}_\beta) = \Lambda^\beta{}_{\alpha'}\tilde{p}(\vec{e}_\beta) = \Lambda^\beta{}_{\alpha'}p_\beta. \tag{139}$$

Als we dit vergelijken met uitdrukking (130) dan zien we dat de componenten van 1-vormen op precies dezelfde wijze transformeren als basisvectoren en tegengesteld aan de componenten van vectoren. Met tegengesteld bedoelen we met de inverse transformatie (zie weer vergelijking (130)). Dit gebruik van de inverse garandeert dat het $V^\alpha p_\alpha$ systeem onafhankelijk is voor iedere vector $\vec{V}$ en 1-vorm $\tilde{p}$. De inverse transformatie geeft aanleiding tot het woord *duaal* in *duale vectorruimte*. De eigenschap van transformeren *met* basisvectoren geeft aanleiding tot de *co* in *covariante vector*. Omdat componenten van gewone vectoren tegengesteld transformeren aan de basisvectoren, worden ze *contravariant* genoemd.

Omdat de 1-vormen een vectorruimte opbouwen, kunnen we een verzameling van onafhankelijke 1-vormen als basis kiezen. We hebben de basis $\{\vec{e}_\alpha\}$ reeds gebruikt om de componenten van de 1-vorm te definiëren. We kunnen nu de geassocieerde 1-vorm basis $\tilde{\omega}^\alpha, \alpha = 0, ..., 3$ definiëren die we *duaal* aan $\{\vec{e}_\alpha\}$ noemen. Dat wil zeggen dat we de verzameling $\{\tilde{\omega}\}$ zó kiezen, dat

$$\tilde{p} = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha. \tag{140}$$

We vinden op deze manier specieke 1-vormen als basis. Merk op dat we de notatie weer zodanig kiezen, dat we gebruik kunnen maken van de sommatieconventie. Als we vergelijking (140) gebruiken, vinden we

$$\tilde{p}(\vec{V}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(\vec{V}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(V^\beta \vec{e}_\beta) = p_\alpha V^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta). \tag{141}$$

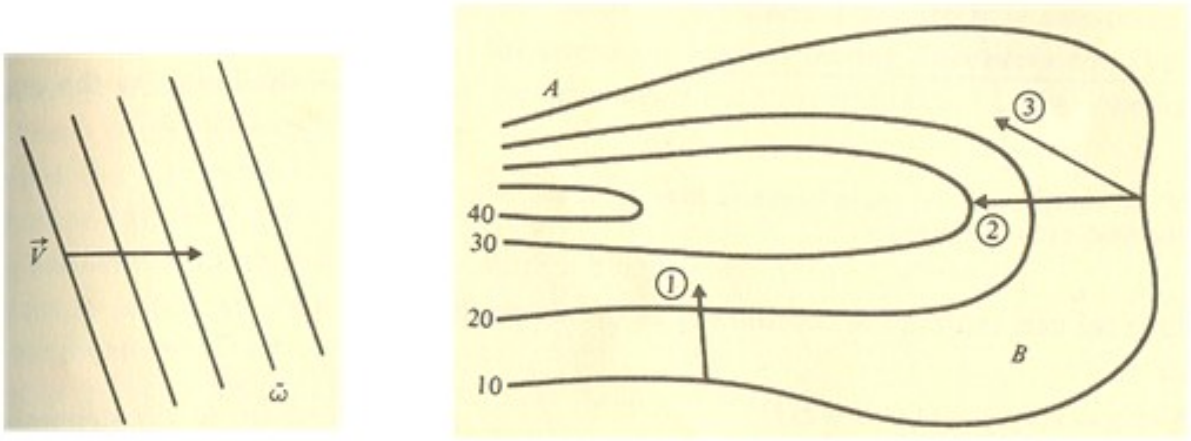
Het bovenstaande dient gelijk te zijn aan $p_\alpha V^\alpha$ en daaruit volgt

$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta. \tag{142}$$

Bovenstaande relatie definieert de 1-vorm basis: de vector basis induceert een unieke en bruikbare 1-vorm basis[46].

Bij vectoren denken we meestal aan een pijl als we een beeld nodig hebben. Het kan handig zijn om ook een voorstelling van een 1-vorm te hebben (we wagen een poging in Fig. 37). Dit beeld moet het feit uitdrukken dat een 1-vorm een afbeelding is van een vector naar een reëel getal. In de drie-dimensionale ruimte kan men zich een 1-vorm $\tilde{p}$ op punt $\mathcal{P}$ voorstellen als een aantal

[46] Dit is niet de enig mogelijke basis voor 1-vormen. Men kan eenvoudig laten zien dat andere basis 1-vormen voldoen aan $\tilde{\omega}^{\alpha'} = U^{\alpha'}_\beta \tilde{\omega}^\beta$.




**Figuur 37:** *Geometrische voorstelling van een vector (door middel van een pijl) en een 1-vorm (als een verzameling van parallelle vlakken). Links: de waarde $\tilde{p}(\vec{V})$ is gelijk aan 2,5. Rechts: een topologische kaart demonstreert de gradiënt 1-vorm (lokale contouren van constante hoogte). De verandering van hoogte voor een reis (pijl) is het aantal contouren dat door de pijl doorboord wordt. Deze is het grootst voor reis (2).*

parallelle vlakken. De contractie met een vector $\vec{V}$ is dan het aantal vlakken dat door de vector 'doorboord' wordt. Hoe dichter de oppervlakken bij elkaar staan, hoe groter $\tilde{p}(\vec{V})$.

Het dualisme is overigens compleet, omdat we vectoren ook kunnen beschouwen als functies die 1-vormen afbeelden op de reële getallen. Gegeven vector $\vec{V}$ krijgen we een reëel getal als we de vector voorzien van een 1-vorm,

$$\vec{V}(\tilde{p}) \equiv \tilde{p}(\vec{V}) \equiv p_\alpha V^\alpha. \tag{143}$$

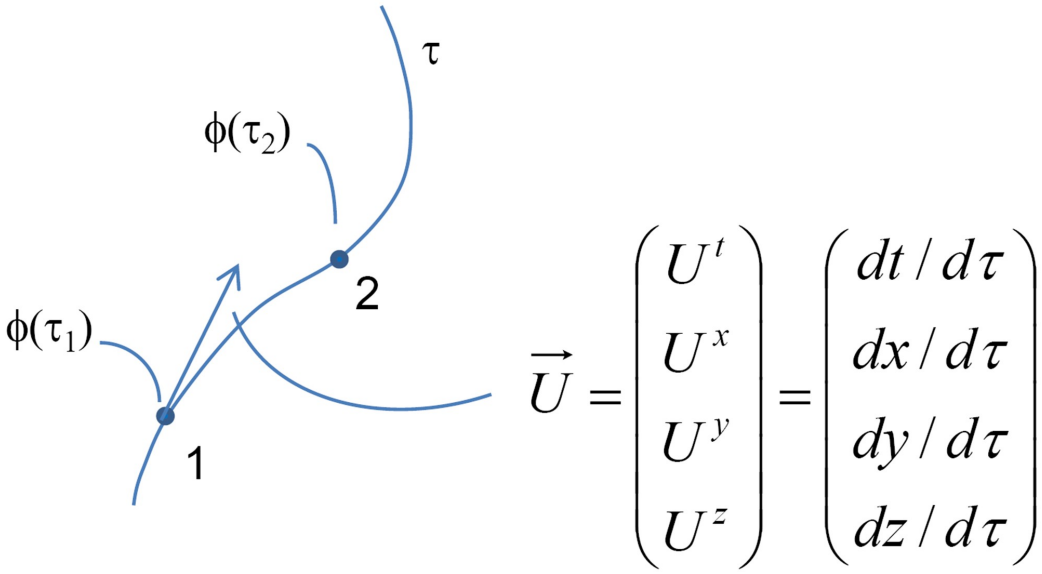
Vectoren hebben dus geen speciale positie als objecten die als input dienen voor tensoren. We kunnen een vector ook als tensor zien: een lineaire functie van een 1-vorm naar een reëel getal. Vectoren en 1-vormen hebben hiermee een gelijke en symmetrische status.

*Gradiënt*

Voordat we de beschrijving van 1-vormen afsluiten zullen we nog een speciale 1-vorm bespreken, de gradiënt. We beschouwen in Fig. 38 een scalair veld $\phi(\vec{x}) = \phi(t, x, y, z)$. Hierbij zijn $\{t, x, y, z\}$ de coördinaten van waarnemer $\mathcal{O}$ die verbonden is met dit referentiesysteem. Een bewegende waarnemer meet een waarde voor $\phi$ voor elke gebeurtenis die hij meemaakt en deze waarde verandert voortdurend. We parametriseren de wereldlijn met de eigentijd $\tau$ van deze bewegende waarnemer en dit stelt ons in staat om de coördinaten van gebeurtenissen op de wereldlijn uit te drukken als functies van $\tau$. Er geldt $t = t(\tau), x = x(\tau), y = y(\tau)$, en $z = z(\tau)$. De viersnelheid heeft componenten $\vec{U} \to \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$ en is duidelijk een viervector, want het is de verplaatsingsvector gedeeld door een getal (de eigentijd). Omdat $\phi$ een functie is van $t$, $x$, $y$ en $z$, is $\phi$ op de wereldlijn impliciet een functie van $\tau$, dus $\phi(\tau) = \phi[t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)]$. De mate van verandering van $\phi$ op de wereldlijn, dat is de afgeleide, bedraagt

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial t}U^t + \frac{\partial\phi}{\partial x}U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y}U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z}U^z = \tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{U}). \tag{144}$$

Het is duidelijk dat we in bovenstaande vergelijking erin geslaagd zijn om met de vector $\vec{U}$ het getal $d\phi/d\tau$ te produceren, dat de mate van verandering van $\phi$ is langs de wereldlijn waaraan




**Figuur 38:** *Het pad in ruimtetijd wordt geparametriseerd door de eigentijd $\tau$ van een deeltje. Op tijd $\tau_1$ heeft het scalaire veld $\phi$ de waarde $\phi(\tau_1)$ en op tijd $\tau_2$ de waarde $\phi(\tau_2)$. De viersnelheid $\vec{U}$ is de raakvector aan de wereldlijn.*

$\vec{U}$ een tangent vector is. Dit getal $d\phi/d\tau$ wordt verkregen met een uitdrukking die duidelijk een lineaire functie van $\vec{U}$ is en hiermee hebben we dus een 1-vorm gedefinieerd. Vergelijken met uitdrukking (138) toont dat deze 1-vorm de componenten $\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ heeft. Deze 1-vorm wordt de gradiënt van $\phi$ genoemd en aangeduid met $\tilde{\mathrm{d}}\phi$. Er geldt

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathcal{O}}{\rightarrow} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \quad \text{of ook } \tilde{\mathrm{d}}\phi = \nabla\phi \ \text{ met } \nabla_\alpha\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \left(\equiv \phi_{,\alpha}\right). \tag{145}$$

Merk op dat ondanks de notatie, $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ niet klein hoeft te zijn. We zien dus verder dat de gradiënt een 1-vorm is, terwijl we in de vectoranalyse geleerd hebben dat het een vectorgrootheid is. De reden hiervoor is dat er een metriek nodig is om 1-vormen aan vectoren te relateren. Op dit moment hebben we deze extra mathematische structuur nog niet aan onze variëteit opgelegd.

We kunnen vergelijking (145) nog controleren op haar consistentie door te bestuderen hoe de componenten transformeren. Voor een 1-vorm moet gelden $(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_\beta$. We weten hoe partiële afgeleiden transformeren, namelijk

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}}, \tag{146}$$

hetgeen betekent dat $(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_\beta$, want gegeven dat $x^\beta = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}x^{\alpha'}$ geldt

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\alpha'}} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta}. \tag{147}$$

De componenten van de gradiënt transformeren met de inverse van de componenten van vectoren. De gradiënt is dus een 1-vorm.

Van nu af aan zullen we partiële afgeleiden aanduiden met de komma-notatie. Er geldt de definitie

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \equiv \phi_{,x} \quad \text{of algemeen} \quad \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha} \equiv \phi_{,\alpha}. \tag{148}$$

Merk op dat de index $\alpha$ aan de linkerkant als een boven-index optreedt en aan de rechterkant als een beneden-index.

### 4.5.6 Algemene tensorvelden

De $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren zijn tensoren die twee vectorargumenten hebben. Een voorbeeld is de metrische tensor, maar een eenvoudiger voorbeeld is het product van twee 1-vormen. We gebruiken hierbij de volgende regel: als $\tilde{p}$ en $\tilde{q}$ beide 1-vormen zijn, dan is $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ de $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor die, als hij de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ als argumenten krijgt, het getal $\tilde{p}(\vec{A})\ \tilde{q}(\vec{B})$ produceert. Het is dus het product van de getallen geproduceerd door de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tensoren. Het symbool $\otimes$ wordt het tensorproduct genoemd en geeft de formele notatie hoe we een $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor moeten samenstellen uit 1-vormen. Overigens is $\otimes$ niet commutatief: $\tilde{p} \otimes \tilde{q} \neq \tilde{q} \otimes \tilde{p}$ zijn verschillende tensoren. De eerste geeft de waarde $\tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B})$ en de tweede $\tilde{q}(\vec{A})\tilde{p}(\vec{B})$.

De meest algemene $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor is geen eenvoudig tensorproduct van twee 1-vormen, maar kan wel altijd voorgesteld worden als een som van dergelijke tensoren. Hiertoe beschouwen we de componenten van een willekeurige $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor[47] $\mathbf{f}$. Er geldt $f_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)$, waarbij elke index vier waarden kan aannemen voor ruimtetijd. In totaal heeft $\mathbf{f}$ dus 16 componenten. De waarde van $\mathbf{f}$ voor willekeurige vectoren is

$$\mathbf{f}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{f}(A^\alpha \vec{e}_\alpha, B^\beta \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta \mathbf{f}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta}. \tag{149}$$

De vraag is of we een basis kunnen vormen voor deze tensoren[48]. Kunnen we een verzameling bestaande uit 16 verschillende $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ definiëren, zodat geldt $\mathbf{f} = f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$? Als dat zo is, dan dient te gelden

$$f_{\mu\nu} = \mathbf{f}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = f_{\alpha\beta}\ \tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) \tag{150}$$

en dat betekent, dat moet gelden

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = \delta^\alpha{}_\mu \delta^\beta{}_\nu. \tag{151}$$

Volgens vergelijking (142) is $\delta^\alpha{}_\mu$ de waarde van $\tilde{\omega}^\alpha$ voor $\vec{e}_\mu$ en hetzelfde geldt voor $\delta^\beta{}_\nu$. Daarom is $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}$ een tensor, waarvan de waarde het product is van de waarden van de twee basis 1-vormen. We concluderen derhalve

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta} = \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta. \tag{152}$$

De tensoren $\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta$ vormen een basis voor alle $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensoren, en we mogen schrijven

$$\mathbf{f} = f_{\alpha\beta}\ \tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta. \tag{153}$$

Op deze wijze is een algemene $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor een som over eenvoudige tensorproduct tensoren.

Een tensor van het type $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ is een afbeelding (functie) van $M$ 1-vormen en $N$ vectoren naar reële getallen, die lineair is in elk van zijn $M+N$ argumenten[49]. Merk op dat deze definitie van een

[47] We noteren een vector als $\vec{V}$ en een 1-vorm als $\tilde{p}$. We kiezen ervoor om een algemene tensor vet te drukken, bijvoorbeeld als $\mathbf{f}$.

[48] Vergelijk dit eens met wat we gedaan hebben in vergelijking (140).

[49] Men kan een dergelijke tensor opvatten als een apparaat met $M$ gaten waar men 1-vormen en $N$ gaten waar men vectoren in kan stoppen. Nadat men die $M$ 1-vormen en $N$ vectoren erin gestopt heeft, rolt er een reëel getal uit het apparaat. De uitkomst is lineair in elk van de vectoren en 1-vormen die als input gebruikt zijn.

tensor geen gebruikt maakt van de componenten van de 1-vormen en vectoren. De tensor dient hetzelfde reële getal als uitkomst te geven, onafhankelijk van het gebruikte coördinatensysteem.

Net als een 1-vorm en vector heeft ook een tensor componenten. De definitie is als volgt: de componenten in een referentiesysteem $\mathcal{O}$ van een tensor van het type $\begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$ zijn de waarden van de functie als men voor de argumenten de basis 1-vormen $\{\vec{e}^{\alpha}\}$ en basisvectoren $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ van het systeem $\mathcal{O}$ gebruikt. De componenten van een tensor zijn dus afhankelijk van het referentiesysteem van de waarnemer, omdat de basis immers per systeem verschilt. De tensor zelf kan gezien worden als een topologisch object dat zelfstandig bestaat in ruimtetijd en onafhankelijk gezien kan worden van coördinatenstelsels.

## 4.6 Metrische tensor

Tot nu toe hebben we alleen variëteiten beschouwd die een relatief eenvoudige vorm hebben. De variëteit is continu en differentieerbaar, waardoor we 1-vormen, vectoren en andere tensoren kunnen definiëren. Verder betreft het een amorfe verzameling punten (of puntgebeurtenissen). Er is nog geen meetkunde gedefinieerd. Zo kunnen we twee vectoren (of 1-vormen) niet afbeelden op een reëel getal. Er is dan ook nog geen concept van inproduct.

Als volgende stap kiezen we nu een $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ tensor $\mathbf{g}$ (van gravitatie) die dienst gaat doen als de metriek van de variëteit. Een dergelijke variëteit noemen we een riemannse variëteit. De metrische tensor maakt het mogelijk om de (kwadratische) lengte van een vector te berekenen, of het scalaire product (inproduct) van twee vectoren te bepalen. Ook zullen we zien dat de metriek een één op één correspondentie levert tussen vectoren en 1-vormen. We definiëren

$$\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A} \cdot \vec{B}, \tag{154}$$

en hieruit volgt direct dat de metrische tensor symmetrisch is, $\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{g}(\vec{B}, \vec{A})$. We beschouwen $\mathbf{g}(\ ,\ )$ als een functie met twee argumenten en die lineair is in deze argumenten, bijvoorbeeld

$$\mathbf{g}(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}, \vec{C}) = \alpha\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{C}) + \beta\mathbf{g}(\vec{B}, \vec{C}). \tag{155}$$

Merk op dat deze definitie van metriek geen gebruik maakt van de componenten van de vectoren. De metriek kan weer gezien worden als een topologisch object in ruimtetijd. In een specifieke basis $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ heeft de metrische tensor componenten die gegeven zijn door

$$\mathbf{g}(\vec{e}_{\alpha}, \vec{e}_{\beta}) = \vec{e}_{\alpha} \cdot \vec{e}_{\beta} = g_{\alpha\beta}. \tag{156}$$

De fundamentele rol van de metriek is om te zorgen voor een afbeelding tussen vectoren en 1-vormen. Om te begrijpen hoe dit werkt, beschouwen we $\mathbf{g}$ en een enkele vector $\vec{V}$. Omdat $\mathbf{g}$ twee vector argumenten nodig heeft, kunnen we de uitdrukking $\mathbf{g}(\vec{V},\ )$, waar nog een argument ontbreekt, beschouwen als een functie van vectoren. Als men aan $\mathbf{g}(\vec{V},\ )$ nog een vector toekent, dan krijgen we een reëel getal. Een dergelijke lineaire functie van vectoren die een reëel getal produceert, noemen we een 1-vorm. We noemen het $\tilde{V}$. Er geldt

$$\mathbf{g}(\vec{V},\ ) \equiv \tilde{V}(\ ), \tag{157}$$

waar we tussen de haakjes het vector argument moeten aanleveren. Dan geldt dat $\tilde{V}$ de 1-vorm is, die voor de vector $\vec{A}$ de waarde $\vec{V} \cdot \vec{A}$ heeft. Er geldt

$$\tilde{V}(\vec{A}) \equiv \mathbf{g}(\vec{V}, \vec{A}) = \vec{V} \cdot \vec{A} = V^{\alpha}A_{\alpha} = V_{\alpha}A^{\alpha}. \tag{158}$$

Omdat $\mathbf{g}$ symmetrisch is, kunnen we ook schrijven $\mathbf{g}(\ ,\vec{V}) \equiv \tilde{V}(\ )$. De componenten van $\tilde{V}$ vinden we als volgt,

$$V_\alpha \equiv \tilde{V}(\vec{e}_\alpha) = \vec{V}\cdot\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha\cdot\vec{V} = \vec{e}_\alpha\cdot(V^\beta\vec{e}_\beta) = (\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta)V^\beta = g_{\alpha\beta}V^\beta. \tag{159}$$

Hiermee hebben we de relatie tussen vectoren en 1-vormen gevonden,

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta}V^\beta. \tag{160}$$

We onderscheiden de componenten $V^\alpha$ van de vector $\vec{V}$ van de componenten $V_\alpha$ van de 1-vorm $\tilde{V}$ *alleen* door de positie van de index $\alpha$. De inverse van de metriek bestaat ook en wordt aangeduid met $g^{\alpha\beta}$. Hiermee vinden we

$$V^\alpha = g^{\alpha\beta}V_\beta. \tag{161}$$

Een vector is een $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ tensor en een 1-vorm is een $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ tensor. We gebruiken de metrische tensor als afbeelding tussen beide. Op dezelfde manier kunnen we een $\begin{pmatrix}M\\N\end{pmatrix}$ tensor afbeelden op een $\begin{pmatrix}N-1\\M+1\end{pmatrix}$ tensor, of door gebruik te maken van de inverse metriek op een $\begin{pmatrix}N+1\\M-1\end{pmatrix}$ tensor. Het is gebruikelijk om voor deze geassocieerde tensoren hetzelfde symbool te gebruiken, maar we dienen ons ervan bewust te zijn dat we te maken hebben met verschillende tensoren. Stel $T^{\alpha\beta}{}_\gamma$ zijn de componenten van een $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ tensor. Dan zijn

$$T^\alpha{}_{\beta\gamma} \equiv g_{\beta\mu}T^{\alpha\mu}{}_\gamma \tag{162}$$

de componenten van een $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ tensor, omdat we het *tweede* 1-vorm argument veranderd hebben in een vector. We noemen dergelijke manipulaties het naar boven brengen en naar beneden halen van indices en gebruiken hierbij de metriek als afbeelding.

We kunnen dit ook doen met de metriek zelf en vinden

$$g^\alpha{}_\beta \equiv g^{\alpha\mu}g_{\mu\beta} = \delta^\alpha{}_\beta. \tag{163}$$

De laatste stap volgt uit het feit dat $g^{\alpha\beta}$ en $g_{\alpha\beta}$ elkaars inverse afbeelding zijn.

Een differentieerbare variëteit is een riemannse variëteit als de kwadratische booglengte langs een curve voldoet aan

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{164}$$

waarbij de componenten van de metrische tensor, $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, ..., x^n)$, continue functies zijn van de coördinaten en verschillen van constanten. In het speciale geval dat $g_{ij} = \delta_{ij}$, reduceert de riemannse ruimte tot de euclidische ruimte $\mathbb{E}^n$. De ruimte is vlak als het mogelijk is om een coördinatentransformatie te vinden, waarvoor $ds^2 = \epsilon_i(dx^i)^2$, waarbij iedere $\epsilon_i$ gelijk is aan $+1$ of $-1$. Een ruimte die niet vlak is, wordt gekromd genoemd.

We vatten het voorgaande samen en illustreren dit aan de hand van een voorbeeld uit de 3D euclidische ruimte.

Voorbeeld: duale basis in euclidische ruimte

We beschouwen de euclidische ruimte met cartesische coördinaten $(x, y, z)$ en de bijbehorende basis van eenheidsvectoren $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. We gebruiken dit systeem weer als algemene referentie om een ander, niet cartesisch systeem, $(u, v, w)$, te beschrijven. We kunnen de gradiënt van een scalaire functie beschouwen als een 1-vorm. Teneinde dat duidelijk te maken gaan we weer even terug naar onze beschrijving in de drie-dimensionale euclidische ruimte. Vergelijking (122) geeft de natuurlijke basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ op punt $\mathcal{P}$, waarbij we de coördinaten $(u, v, w)$ gebruiken om punten te labelen. Er is een andere manier om het coördinatensysteem $(u, v, w)$ te gebruiken om een basis te

construeren op punt $\mathcal{P}$. Allereerst inverteren we vergelijkingen (117) om $u$, $v$ en $w$ te krijgen in termen van $x$, $y$ en $z$,

$$u = u(x,y,z), \qquad v = v(x,y,z), \qquad w = w(x,y,z). \tag{165}$$

Dit stelt ons in staat om elke coördinaat als een scalair veld te beschouwen en de bijbehorende gradiënten te berekenen.

$$\begin{array}{rcl} \nabla u &=& \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \\ \nabla v &=& \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}, \\ \nabla w &=& \frac{\partial w}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\vec{k}. \end{array} \tag{166}$$

Op elk punt $\mathcal{P}$ staan deze gradiëntvectoren loodrecht op de corresponderende coördinaatoppervlakken door $\mathcal{P}$, die overeenkomen met de oppervlakken $u = u_0$, $v = v_0$ en $w = w_0$. We hebben daarom met $\{\nabla u, \nabla v, \nabla w\}$ een alternatieve basis op $\mathcal{P}$. Deze basis is de *duale* van de basis van tangentenvectoren. Teneinde deze basis te onderscheiden van de natuurlijke basis, gebruiken we de indices als superscipten[50].

$$\vec{e}^{\,u} \equiv \nabla u, \qquad \vec{e}^{\,v} \equiv \nabla v, \qquad \vec{e}^{\,w} \equiv \nabla w. \tag{167}$$

Laten we nu een concreet voorbeeld beschouwen. Er geldt

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \qquad z = 2uv + w, \tag{168}$$

waarbij $-\infty < u < \infty, -\infty < v < \infty, -\infty < w < \infty$. Inverteren van deze vergelijkingen geeft

$$u = \frac{1}{2}(x+y), \qquad v = \frac{1}{2}(x-y), \qquad w = z - \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \tag{169}$$

waaraan we kunnen zien dat de coördinaatvlakken $u = u_0$ een familie vlakken vormen, net zoals $v = v_0$, terwijl de coördinaatvlakken $w = w_0$ een familie hyperbolische paraboloïden vormen.

De positievector $\vec{r}$ wordt gegeven door

$$\vec{r} = (u+v)\vec{i} + (u-v)\vec{j} + (2uv + w)\vec{k}, \tag{170}$$

waarmee we voor de vectoren van de natuurlijke basis

$$\begin{array}{rcl} \vec{e}_u &=& \partial\vec{r}/\partial u = \vec{i} + \vec{j} + 2v\vec{k}, \\ \vec{e}_v &=& \partial\vec{r}/\partial v = \vec{i} - \vec{j} + 2u\vec{k}, \\ \vec{e}_w &=& \partial\vec{r}/\partial w = \vec{k} \end{array} \tag{171}$$

vinden. Alleen de laatste vector is een eenheidsvector. Geen van de inproducten $\vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = 4uv$, $\vec{e}_v \cdot \vec{e}_w = 2u$ en $\vec{e}_w \cdot \vec{e}_u = 2v$ is in het algemeen gelijk aan nul. Het systeem is dus niet orthogonaal.

We vinden voor de 1-vormen van de duale basis

$$\begin{array}{rcl} \vec{e}^{\,u} &=& \nabla u = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}, \\ \vec{e}^{\,v} &=& \nabla v = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}, \\ \vec{e}^{\,w} &=& \nabla w = -x\vec{i} + y\vec{j} + \vec{k} = -(u+v)\vec{i} + (u-v)\vec{j} + \vec{k}. \end{array} \tag{172}$$

We zien dat in het algemeen $\vec{e}^{\,u}$ niet parallel is met $\vec{e}_u$, $\vec{e}^{\,v}$ niet met $\vec{e}_v$, en $\vec{e}^{\,w}$ niet met $\vec{e}_w$.

Gegeven een vectorveld $\vec{\lambda}$ dan kunnen we op elk punt $\mathcal{P}$ de vector $\vec{\lambda}$ beschrijven ten opzichte van de natuurlijke basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w\}$ of de duale basis $\{\vec{e}^{\,u}, \vec{e}^{\,v}, \vec{e}^{\,w}\}$. We schrijven

$$\vec{\lambda} = \lambda^i \vec{e}_i = \lambda_i \vec{e}^{\,i}. \tag{173}$$

---

De ruimtetijd van Minkowski is een van de belangrijkste differentieerbare variëteiten, het is de ruimtetijd die beschreven wordt door de speciale relativiteitstheorie. Eenvoudige behandelingen van SRT introduceren de bijbehorende minkowskimetriek zelfs niet expliciet, maar geven ons wel alle ingrediënten die we nodig hebben om deze af te leiden. In het bijzonder weten we dat er voorkeurstelsels zijn voor de coördinaten, de zogenaamde Lorentzframes, en dat als twee gebeurtenissen gescheiden zijn door coördinaatafstanden $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ in een dergelijk frame, dan is het getal

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{174}$$

[50] Door de indices als superscripten te plaatsen kunnen we weer gebruik maken van de elegante en compacte indexnotatie.

onafhankelijk van het Lorentzframe. Als we onze coördinaten herdefiniëren door $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ en griekse letters gebruiken als ruimtetijd indices, dan vinden we

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta, \tag{175}$$

waarbij $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. We zien dat $\vec{V} \cdot \vec{W} = \eta_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta$ en $\eta_{\alpha\beta}$ is in feite de metrische tensor en het Lorentzframe vormt de geassocieerde orthonormale basis. We zien direct de associatie tussen de componenten van een vector en zijn toegevoegde 1-vorm. In een Lorentzframe geldt

$$U_0 = \eta_{0\alpha} U^\alpha = -U^0, \quad \text{en} \quad U_x = U^x, U_y = U^y, U_z = U^z. \tag{176}$$

Een variëteit met metriek $\mathbf{g}$ wordt een minkowski ruimtetijd genoemd als er één enkel coördinatenstelsel bestaat dat de gehele variëteit bedekt en waarin $\mathbf{g}$ de componenten $\eta_{\alpha\beta}$ heeft. In het volgende hoofdstuk zullen we hier in detail op ingaan.