

B Appendix - Lineaire algebra

B.1 Vectorrekening over de reële ruimte

B.1.1 Scalaren en vectoren

We onderscheiden

- *scalaren* (of *scalaire grootheden*): door een *getal* bepaalde grootheden, zoals massa en temperatuur.
- *vectoren*: door een *richting* en een *getal* bepaalde grootheden, zoals snelheid en kracht. Dit getal heet de *grootte* of de *absolute waarde* van de vector.

Notaties

a, b, p, x , etc. zijn *scalaren*

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \vec{A}, \vec{B}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \underline{x}, \underline{y}$ zijn *vectoren*

$|\mathbf{A}| = A$ is de *absolute waarde* van $\mathbf{A}$.

$\mathbf{a}$ heet een *eenheidsvector* als $|\mathbf{a}| = 1$.

$\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ betekent: $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ hebben dezelfde richting. Er geldt dan ook $\mathbf{B} \parallel \mathbf{A}$.

$\mathbf{A}$ en $-\mathbf{A}$ zijn vectoren met gelijke grootte en tegengestelde richtingen.

Opmerkingen

- Vectoren kunnen door *pijlen* gerepresenteerd worden. Alle evenwijdige, gelijkgerichte, even lange pijlen stellen éénzelfde ‘vrije’ vector voor.
- De *nulvector* $\mathbf{0}$ is een vector met onbepaalde richting en met grootte 0.
- Uit $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ en $A = B$ volgt $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ en omgekeerd.

B.1.2 Product van een scalar en een vector

Voor het product van een scalar en een vector geldt de volgende definitie:

als $c > 0$, dan $(c\mathbf{A}) \parallel \mathbf{A}$ en $|c\mathbf{A}| = cA$;

als $c < 0$, dan $(c\mathbf{A}) \parallel -\mathbf{A}$ en $|c\mathbf{A}| = -cA$;

als $c = 0$, dan $c\mathbf{A} = \mathbf{0}$;

met als gevolg dat wanneer $\mathbf{a}$ de eenheidsvector is in de richting van $\mathbf{A}$ dan is $\mathbf{A} = A\mathbf{a}$.

B.1.3 Som en verschil van vectoren

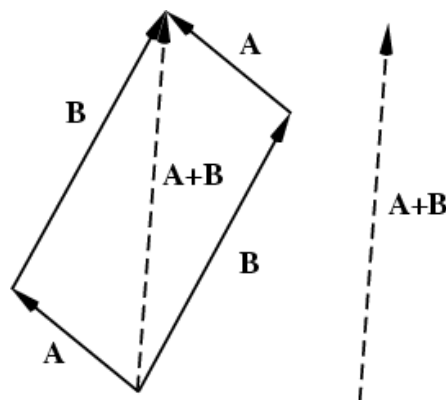
Elke twee vectoren $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ hebben een som, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Als het beginpunt van de pijl die $\mathbf{B}$ representeert samenvalt met het eindpunt van de pijl die $\mathbf{A}$ voorstelt, dan wordt $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ gerepresenteerd door de pijl vanaf het beginpunt van de $\mathbf{A}$ -pijl naar het eindpunt van de $\mathbf{B}$ -pijl. Dit wordt weergegeven in Fig. 65.

Voor optellen van vectoren gelden de *axioma's*

- | | |
|---|--|
| 1. $\forall_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} [\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}]$ | commutatieve eigenschap |
| 2. $\forall_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}} [(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})]$ | associatieve eigenschap |
| 3. $\exists_0 \forall_{\mathbf{A}} [\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}]$ | $\mathbf{0}$ heet het neutrale element |
| 4. $\forall_{\mathbf{A}} \exists_{-\mathbf{A}} [\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}]$ | inversiteits eigenschap |

Voor vermenigvuldigen van vectoren met scalaren gelden de *axioma's*

1. $\forall_{p,q,\mathbf{A}}[(p+q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A}]$ eerste distributieve eigenschap
2. $\forall_{p,\mathbf{A},\mathbf{B}}[p(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = p\mathbf{A} + p\mathbf{B}]$ tweede distributieve eigenschap
3. $\forall_{p,q,\mathbf{A}}[p(q\mathbf{A}) = (pq)\mathbf{A}]$ associatieve eigenschap
4. $\forall_{\mathbf{A}}[1\mathbf{A} = \mathbf{A}]$ neutraliteitseigenschap van het getal 1.



Figuur 65: Representatie van het optellen van twee vectoren $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Het resultaat is de vector $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Verder geldt de definitie

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \text{ en } \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{ heet het verschil van } \mathbf{A} \text{ en } \mathbf{B}.$$

B.1.4 Lineaire afhankelijkheid; ontbinden van vectoren, kentallen

De som $p\mathbf{A} + q\mathbf{B}$ heet een lineaire combinatie van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, terwijl $p\mathbf{A} + q\mathbf{B} + r\mathbf{C}$ een lineaire combinatie heet van $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$.

Definitie: een stelsel vectoren heet *lineair onafhankelijk* als geen van die vectoren gelijk is aan een lineaire combinatie van andere vectoren uit dat stelsel.

Stelling: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ zijn lineair onafhankelijk dan en slechts dan als uit $p\mathbf{A} + q\mathbf{B} + r\mathbf{C} = \mathbf{0}$ volgt dat $p = q = r = 0$.

Als $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$, dan heten $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ de componenten van $\mathbf{C}$ in de richtingen van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

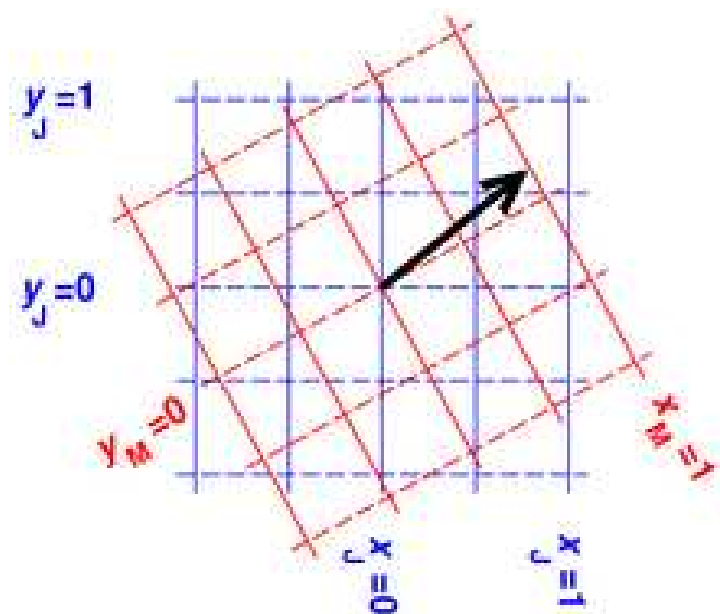
Als $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$ de *eenheidsvectoren* zijn in de richtingen van de positieve x -, y - en z -as van een cartesiaans coördinatenstelsel, dan is

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}. \quad (436)$$

Elke vector $\mathbf{A}$ is dus gelijk aan een lineaire combinatie van de onderling lineair onafhankelijke vectoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$. De getallen A_1 , A_2 en A_3 noemen we de *kentallen* van $\mathbf{A}$ ten opzichte van de basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Blijkbaar geldt

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3)\mathbf{k},$
2. $c\mathbf{A} = cA_1\mathbf{i} + cA_2\mathbf{j} + cA_3\mathbf{k},$
3. $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}.$



Figuur 66: De vector $\mathbf{A}$ kan ontbonden worden in een lineaire combinatie van de onderling lineair onafhankelijke vectoren $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$ die een basis vormen.

B.1.5 Inwendig of scalair product van vectoren

Definitie

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv A \cdot B \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) \quad (437)$$

Het *inwendig product* van vectoren is dus een *scalar*.

Eigenschappen

1. $\forall_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}]$ commutatieve eigenschap
2. $\forall_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}} [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}]$ distributieve eigenschap

Uit de definitie volgt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \quad \text{en} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{als} \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B}. \quad (438)$$

Dus ook $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ en $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ en dus

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{i=1}^3 A_i B_i. \quad (439)$$

Merk op dat als $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, dan is $A = 0$ of $B = 0$ of $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

B.1.6 Voorbeelden

1. Als $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, dan is $A = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$.

2. Gegeven: $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

Te bewijzen: $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

Bewijs:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\ &= 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-7) \\ &= 10 - 3 - 7 = 0,\end{aligned}\tag{440}$$

dus $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$.

3. Gegeven: $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Te berekenen: $\cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B})$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= AB \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) \\ &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) \\ &= \sqrt{50} \cdot \sqrt{6} \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}).\end{aligned}\tag{441}$$

Verder geldt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 3 - 8 - 5 = -10.\tag{442}$$

Dus $10\sqrt{3} \cdot \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = -10$, ofwel $\cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B}) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

4. Als $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ en $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, dan is

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3 \cdot -7 - 1 \cdot 1)\mathbf{i} - (2 \cdot -7 - 1 \cdot 5)\mathbf{j} + (2 \cdot 1 - -3 \cdot 5)\mathbf{k} \\ &= 20\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 17\mathbf{k}.\end{aligned}\tag{443}$$

B.2 Lineaire ruimten en lineaire afbeeldingen

B.2.1 Lineaire ruimten

Elke verzameling, waarbinnen de elementen ‘opgeteld’ en ‘met een scalar vermenigvuldigd’ kunnen worden, wordt een *lineaire ruimte* ofwel een *vectorruimte* genoemd en de elementen ervan heten vectoren.

Definitie: Een verzameling L heet een *lineaire ruimte* over een getallenlichaam K als geldt

- $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \exists! \mathbf{c} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}]$
- $\forall p \in K, \mathbf{a} \in L \exists! \mathbf{b} \in L [p\mathbf{a} = \mathbf{b}]$,

terwijl de volgende acht axioma's gelden

1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}]$
2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L [(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})]$
3. $\exists \mathbf{0} \in L \forall \mathbf{a} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}]$
4. $\forall \mathbf{a} \in L \exists -\mathbf{a} \in L [\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}]$
5. $\forall p, q \in K, \mathbf{a} \in L [(p + q)\mathbf{a} = p\mathbf{a} + q\mathbf{a}]$
6. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L, p \in K [p(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = p\mathbf{a} + p\mathbf{b}]$
7. $\forall p, q \in K, \mathbf{a} \in L [p(q\mathbf{a}) = (pq)\mathbf{a}]$
8. $\forall \mathbf{a} \in L [1\mathbf{a} = \mathbf{a}]$

We hebben in hoofdstuk B.1 reeds gezien dat vectoren aan bovenstaande axioma's voldoen. Hier bekijken we een en ander op meer abstractie wijze en het getallenlichaam K kan $K \in \mathbb{R}$, respectievelijk $K \in \mathbb{C}$, zijn. Men spreekt dan van een *reële*, respectievelijk *complexe*, vectorruimte L . In paragraaf B.1 hebben we ons beperkt tot een discussie van reële vectorruimten. Ook in deze paragraaf beschouwen we enkel reële vectorruimten. Later zullen we de discussie uitbreiden tot complexe vectorruimten.

B.2.2 Eigenschappen

Als L een lineaire ruimte is gelden de volgende *Stellingen*

1. $\exists! \mathbf{0} \in L \forall \mathbf{a} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}]$
2. $\forall \mathbf{a} \in L \exists! -\mathbf{a} \in L [\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}]$

Definitie $\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

Stellingen

1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L [\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}]$
2. $\forall \mathbf{a} \in L [0\mathbf{a} = \mathbf{0}]$
3. $\forall \mathbf{a} \in L [(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}]$
4. $\forall p \in \mathbb{R} [p\mathbf{0} = \mathbf{0}]$

B.2.3 Lineaire onafhankelijkheid, basis, dimensie

Definitie: Een deelverzameling S van een lineaire ruimte L heet een *onafhankelijke stelsel vectoren* als $S \neq \{\mathbf{0}\}$, terwijl geen enkel element van S gelijk is aan een lineaire combinatie van andere elementen van S .

Stelling 1: Als $\mathbf{0} \in S$, dan is S een afhankelijk stelsel.

Stelling 2: $S = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ is dan en slechts dan een onafhankelijk stelsel als uit $\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ volgt dat $c_i = 0$ voor alle $i = 1, \dots, n$.

Definitie: B heet een *basis* van de lineaire ruimte L als

1. $B \subset L$,
2. B een onafhankelijk stelsel is,
3. elk element van L gelijk is aan een lineaire combinatie van elementen van B .

Als $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dan geldt

$$\forall \mathbf{a} \in L \exists \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R} \left[\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i \right]. \quad (444)$$

Deze getallen a_1 tot en met a_n heten de *kentallen* van $\mathbf{a}$ ten opzichte van de basis B . We noemen $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ‘de’ basis van R_3 van de drietallige getalgrepen.

Stelling 3: Als de lineaire ruimte L een basis heeft die uit n elementen bestaat, dan bestaat elke basis van L uit n elementen.

Definitie: De *dimensie* van L is het aantal elementen van de basis van L .

B.2.4 Inwendig product, norm en orthogonaliteit van vectoren

Definitie: Een *inwendig product* binnen een vectorruimte L is een afbeelding van $L \times L$ naar $\mathbb{R}$, waarvoor, als $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}$ het aan $\mathbf{a} \in L$ en $\mathbf{b} \in L$ toegevoegde getal is, geldt

1. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L [(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})]$
2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L [(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})]$
3. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L, p \in \mathbb{R} [(p\mathbf{a}, \mathbf{b}) = p(\mathbf{a}, \mathbf{b})]$
4. $\forall \mathbf{a} \in L [(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0]; (\mathbf{a}, \mathbf{0}) = 0$

Het getal $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \angle(\mathbf{A}; \mathbf{B})$ zullen we ‘het’ inwendig product in V_3 noemen. Met ‘het’ inwendig product in $\mathbb{R}_n$ duiden we aan

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (445)$$

Dit inwendig product noteren we dus door de eerste vector als *rijvector* en de tweede als *kolomvector* te schrijven.

Definitie: De *norm* $|\mathbf{a}|$ van de vector $\mathbf{a}$ is het getal $\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$.

Definitie: De vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ zijn *onderling orthogonaal* dan en slechts dan als $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

B.2.5 Lineaire afbeeldingen

Een *afbeelding* van de verzameling A naar de verzameling B is een relatie waarvan A de originelenverzameling is en B de beeldverzameling omvat, terwijl elk origineel één beeld heeft (een functie is dus een afbeelding).

Definitie: Een afbeelding $\mathcal{F}$ van de lineaire ruimte L_1 naar de lineaire ruimte L_2 heet een *lineaire afbeelding* als

$$1. \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in L_1 [\mathcal{F}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathcal{F}(\mathbf{a}) + \mathcal{F}(\mathbf{b})] \text{ en}$$

$$2. \forall \mathbf{a} \in L_1, p \in \mathbb{R} [\mathcal{F}(p\mathbf{a}) = p\mathcal{F}(\mathbf{a})] .$$

Merk op dat als $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ een basis is van L dan is de afbeelding van L naar $\mathbb{R}_n$, waarvoor geldt dat het beeld van $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i$ de ‘kentalvector’ $(a_1, \dots, a_n)$ is, een lineaire afbeelding.

B.3 Matrixrekening

B.3.1 Matrices

Het stelsel van k lineaire vergelijkingen met n onbekenden x_1 tot en met x_n ,

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot & & \cdot \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \dots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \end{array} \quad (446)$$

is volkomen gekarakteriseerd door de getalverzamelingen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{pmatrix}. \quad (447)$$

Het eerste van deze getallenschema's heet een *matrix van de orde* $k \times n$; deze matrix bevat namelijk k rijen en n kolommen. De andere twee getalgroepen zijn blijkbaar kolomvectoren, die ook opgevat kunnen worden als matrices van de orde $n \times 1$, respectievelijk $k \times 1$.

Definitie: Een matrix is een in rijen en kolommen gesorteerde getalverzameling.

De getallen van die verzameling heten de *elementen* van de matrix. Ze worden bij voorkeur met twee indices genoteerd, waarvan de eerste het rangnummer van de rij en de tweede dat van de kolom aangeeft.

Als het aantal rijen k en het aantal kolommen n is dan heet $k \times n$ de orde van de matrix. Als $k = n$ dan heet de matrix een *vierkante matrix* van de orde n ofwel een $n \times n$ matrix.

De matrix met elementen a_{ij} , ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n$) wordt dan wel kortweg aangeduid met

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n). \quad (448)$$

Opmerkingen:

1. Elke rij van een matrix is op zichzelf beschouwd een rijvector en elke kolom van de matrix een kolomvector.
2. $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ betekent dat $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ van dezelfde orde, $k \times n$, zijn en dat $a_{ij} = b_{ij}$ voor elke $i = 1, \dots, k$ en elke $j = 1, \dots, n$.

B.3.2 Determinant van een matrix

De *determinant* van de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ is het getal

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (449)$$

De *ondermatrix* $\mathbf{A}_{ij}$ van de matrix $\mathbf{A}$ is de matrix die ontstaat als uit $\mathbf{A}$ de i^{de} rij en de j^{de} kolom weggelaten worden.

Voorbeeld: Als $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, dan is $\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

De determinant van de vierkante matrix $\mathbf{A}$, $(n \times n)$ is het getal

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|, (i = 1, \dots, n), \quad (450)$$

en ook

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|, (j = 1, \dots, n). \quad (451)$$

Dit zijn de formules voor het *ontwikkelen* van det $\mathbf{A}$ volgens de i^{de} rij, respectievelijk volgens de j^{de} kolom.

Voorbeeld: We ontwikkelen volgens de eerste rij.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 22 + 9 = 46. \quad (452)$$

B.3.3 Product van een matrix met een kolomvector

Definitie: Het product van een $k \times n$ -matrix $\mathbf{A}$ met een n -dimensionale kolomvector $\mathbf{x}$ is gelijk aan de k -dimensionale kolomvector $\mathbf{b}$ waarvan het i^{e} -element, $(i = 1, \dots, k)$, gelijk is aan het inwendig product van de i^{e} -rijvector van de matrix $\mathbf{A}$ met de kolomvector $\mathbf{x}$.

Dus als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$ en $\mathbf{x} = (x_i), (n \times 1)$, dan is $\mathbf{b} = (b_i), (k \times 1)$, waarbij $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, (i = 1, \dots, k)$.

Het hele vergelijkingstelsel van de paragraaf B.3.1 kan dus genoteerd worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

B.3.4 Matrix als transformatie-operator

Als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$, dan definieert $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ een afbeelding van $\mathbf{x}$ naar $\mathbb{R}_k$,

$$\mathbf{A} : x \in \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbf{Ax} (= \mathbf{y} \in \mathbb{R}_k). \quad (453)$$

Deze afbeelding is blijkbaar een *lineaire afbeelding*, want

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_n [\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}]$ en
2. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}_n, p \in \mathbb{C} [\mathbf{A}(p\mathbf{x}) = p\mathbf{Ax}]$.

Stellingen:

1. Als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$, terwijl $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de basis van $\mathbb{R}_n$ is, dan is $\mathbf{Ae}_i$ de i^{e} -kolomvector van $\mathbf{A}$, $(i = 1, \dots, n)$.
2. Als T een lineaire afbeelding is van $\mathbb{R}_n$ naar $\mathbb{R}_k$, dan bestaat er een matrix $\mathbf{A}$, $(k \times n)$, zodanig, dat voor elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n$ geldt, dat het beeld van $\mathbf{x}$ onder de transformatie T (dus $T\mathbf{x}$) gelijk is aan het product $\mathbf{Ax}$.

Deze matrix $\mathbf{A}$ is de matrix waarvan de i^{e} -kolomvector, $(i = 1, \dots, n)$, het T -beeld van de i^{e} basisvector $\mathbf{e}_i$ van $\mathbb{R}_n$ (dus $T\mathbf{e}_i$) is. Deze $\mathbf{A}$ heet de *transformatiematrix* van de afbeelding T .

B.3.5 Som van matrices

Als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$ en $\mathbf{B} = (b_{ij}), (k \times n)$, dan is de afbeelding $\mathbf{C}$ die aan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n$ als beeld toevoegt $\mathbf{Cx} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx}$ een lineaire afbeelding. De transformatiematrix van deze afbeelding is

$$\mathbf{C} = (c_{ij}), (k \times n), \quad \text{met} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n). \quad (454)$$

Deze matrix $\mathbf{C}$ noemen we de *som* van matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$. Merk op dat enkel matrices van gelijke orde een som hebben. De vermenigvuldiging met een kolomvector is distributief ten opzichte van matrixoptelling. Bovendien is matrixoptelling commutatief en associatief.

Voorbeeld: Als $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, dan

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad (455)$$

en

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (456)$$

B.3.6 Product van scalar met matrix

Als $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times n)$, dan is $\mathbf{A} + \mathbf{A} = (a_{ij} + a_{ij}) = (2a_{ij})$. Deze matrix van orde $k \times n$ noemen we $2\mathbf{A}$. Analooft kan het product van een matrix met een willekeurige scalar gedefinieerd worden als

$$p\mathbf{A} = (pa_{ij}). \quad (457)$$

Zowel ten opzichte van optellen van matrices als van scalaren is deze vermenigvuldiging distributief, $(p+q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A}$ en $p(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = p\mathbf{A} + p\mathbf{B}$. Bovendien geldt de associatieve eigenschap $(pq)\mathbf{A} = p(q\mathbf{A})$, terwijl kennelijk $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Samenvattend concluderen we dat de verzameling van matrices van een bepaalde orde een lineaire ruimte is.

B.3.7 Product van matrices

Definitie: Het product $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ van de matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}), (k \times m)$ met de matrix $\mathbf{B} = (b_{ij}), (m \times n)$, is de matrix $\mathbf{C} = (c_{ij}), (k \times n)$, waarvan

$$c_{ij} = \sum_{h=1}^m a_{ih}b_{hj}, (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n). \quad (458)$$

Het element c_{ij} van $\mathbf{C}$ is dus gelijk aan het inwendig product van de i^e rijvector van $\mathbf{A}$ met de j^e kolomvector van $\mathbf{B}$.

Voorbeeld: Als $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, dan

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}. \quad (459)$$

Opmerkingen

1. De vermenigvuldiging van een matrix met een kolomvector is een bijzonder geval van deze matrixvermenigvuldiging: een kolomvector is immers een matrix van de orde $m \times 1$.
2. Het product $\mathbf{AB}$ bestaat slechts dan als het aantal kolommen van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal rijen van $\mathbf{B}$.

Matrix vermenigvuldiging is in het algemeen niet commutatief, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Het verschil tussen deze twee volgordes noemen we de *commutator*,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{AB} - \mathbf{BA}. \quad (460)$$

Tenslotte merken we op dat matrixvermenigvuldiging wel associatief is ($(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}$) en distributief ($(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ en $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$).

B.3.8 Diagonale matrices

Onder de *hoofddiagonaal* van een vierkante matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ van de n -de orde verstaan we de getallenrij $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$. Een *diagonale matrix* is een vierkante matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, waarvoor geldt, dat $a_{ij} = 0$ als $i \neq j$, terwijl er minstens één i is waarvoor $a_{ii} \neq 0$. Alleen in de hoofddiagonaal staan dus elementen die ongelijk nul zijn.

Als $\mathbf{P}$ een diagonale matrix is waarvan alle diagonaalelementen gelijk aan p zijn en $\mathbf{B}$ een zodanige matrix is, dat $\mathbf{PB}$, respectievelijk $\mathbf{BP}$ bestaat, dan is volgens de definitie van matrixvermenigvuldiging en vermenigvuldigen met een scalar

$$\mathbf{PB} = p\mathbf{B}, \quad \text{respectievelijk} \quad \mathbf{BP} = p\mathbf{B}. \quad (461)$$

Een diagonale matrix, waarvan alle diagonaaltermen onderling gelijk zijn heet daarom een *scalaire matrix*. Een scalaire matrix, waarvan alle diagonaaltermen gelijk zijn aan 1 wordt aangeduid met de letter $\mathbf{I}$. Zo een *eenheidsmatrix* $\mathbf{I}$ is *neutraal element* ten opzichte van matrixvermenigvuldiging.

B.3.9 Geadjungeerde en inverse matrices

Definitie: De *geadjungeerde* matrix $\text{adj } \mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, $(n \times n)$, van de matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(n \times n)$, is de matrix, waarvan het algemene element gelijk is aan $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ji}|$.

Definitie: Als $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, dan heet $\mathbf{B}$ een *rechterinverse* van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}$ een *linkerinverse* van $\mathbf{B}$.

Voorbeeld: Omdat $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$, is iedere matrix in het product de inverse van de ander.

Stelling 1: Als $\mathbf{A}$ een $(k \times n)$ -matrix is, $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_{k \times k}$ en $\mathbf{CA} = \mathbf{I}_{n \times n}$, dan $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, $(n \times k)$.

Bewijs: $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{n \times n} \mathbf{B} = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = \mathbf{CI}_{k \times k} = \mathbf{C}$.

Stelling 2: Als $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ en $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, dan is $\mathbf{A}$ vierkant.

Bewijs: Als $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(k \times n)$, dan $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $(n \times k)$, $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, $(k \times k)$, en $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, $(n \times n)$.

De som van de diagonaalelementen van respectievelijk $\mathbf{AB}$ en $\mathbf{BA}$ is dan $k = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$ en $n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k a_{ij} b_{ji}$, dus $n = k$.

Definitie: Als $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ dan heten $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ elkaars *inverse matrix*: $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$ en $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Een matrix die een inverse heeft heet *regulier*, terwijl een matrix die geen inverse heeft *singulier* heet. Iedere reguliere matrix is vierkant. Als $\mathbf{A}$ regulier is dan heeft $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ juist één oplossing, namelijk $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Door gebruik te maken van de definities van de determinant, kan men laten zien dat

$$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\text{adj } \mathbf{A})\mathbf{A} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}, \quad (462)$$

dus als $\det \mathbf{A} \neq 0$ en $\mathbf{B} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$, dan $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. We vinden dus dat als $\det \mathbf{A} \neq 0$, dan is $\mathbf{A}$ regulier en $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$.

Een matrix is dan en slechts dan regulier als zijn determinant ongelijk is aan nul. Een vierkante matrix is dan en slechts dan singulier als zijn determinant gelijk is aan nul.

Voorbeeld: Als $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, dan

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (4) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -81, \quad (463)$$

terwijl

$$|\mathbf{A}_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11, \quad |\mathbf{A}_{12}| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad |\mathbf{A}_{13}| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -17, \quad (464)$$

$$|\mathbf{A}_{21}| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad |\mathbf{A}_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -23, \quad |\mathbf{A}_{23}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 14, \quad (465)$$

$$|\mathbf{A}_{31}| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad |\mathbf{A}_{32}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 14, \quad |\mathbf{A}_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad (466)$$

zodat

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -11 & 10 & -8 \\ 1 & -23 & -14 \\ -17 & -14 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{dus} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 11 & -10 & 8 \\ -1 & 23 & 14 \\ 17 & 14 & 5 \end{pmatrix}. \quad (467)$$

B.3.10 De getransponeerde van een matrix; symmetrische en alternerende matrices

Als $\mathbf{A} = (a_{ij})$ een $(k \times n)$ -matrix is en $\mathbf{B} = (b_{ij})$ een $(n \times k)$ -matrix, terwijl $b_{ij} = a_{ji}$ voor elke $i = 1, \dots, n$ en elke $j = 1, \dots, k$, dan heten $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ elkaars *getransponeerde*, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ en $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$.

Voorbeeld: De getransponeerde van $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ is $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. De getransponeerde van een vierkante matrix wordt dus verkregen door die matrix te 'spiegelen ten opzichte van de hoofddiagonaal'.
2. De getransponeerde van een kolomvector is een rijvector en omgekeerd.

Stellingen:

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$.

$$3. (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

$$4. \text{ Als } \mathbf{x} \text{ een kolomvector is dan is } \mathbf{x}^T \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2.$$

Definitie: $\mathbf{A}$ heet een *symmetrische matrix* als $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

$\mathbf{A}$ heet een *alternerende* (*anti-symmetrische* of *scheefsymmetrische*) matrix als $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Voorbeeld: De matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ is symmetrisch, terwijl de matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ anti-symmetrisch is.

B.3.11 Orthogonale matrices

Definitie: De matrix $\mathbf{A}$ heet *orthogonaal* als $\mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$, dus als $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$.

Stelling 1: Een orthogonale matrix is een matrix waarvan de rijvectoren zowel als de kolomvectoren een *orthonormaal* stelsel vormen (dit wil zeggen dat elke twee onderling verschillende rijvectoren, respectievelijk kolomvectoren, onderling orthogonaal zijn, terwijl al die vectoren de norm 1 hebben).

Stelling 2: Als $\mathbf{A}$ orthogonaal is, dan geldt voor elke $\mathbf{x}$ (van de juiste dimensie) dat $|\mathbf{Ax}| = |\mathbf{x}|$. We concluderen dat de norm van een vector invariant is voor een transformatie waarvan de transformatiematrix orthogonaal is. Het omgekeerde van deze stelling geldt ook: als voor een lineaire afbeelding de norm invariant is, dan is de transformatiematrix orthogonaal.

Bewijs: $|\mathbf{Ax}|^2 = (\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ax}) = (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T) (\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$.

Voorbeeld: De lineaire transformatie $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mathbf{x}$ is orthogonaal. Het beeld van $\mathbf{x} = (a, b, c)$ is $\mathbf{y} = \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2b}{\sqrt{6}}, \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}} \right)$ en beide vectoren hebben lengte $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.