

1 Opgave

Zoals gebruikelijk is in de theoretische fysica, worden de eenheden zodanig gekozen dat de lichtsnelheid c en de constante van Planck $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ precies gelijk zijn aan 1. Dat is een handige notatie, omdat de (vaak lange) formules dan simpeler ogen. Dit geldt ook voor Lagrangianen: ook die zien er eenvoudiger uit als alle natuurconstanten gelijk worden gesteld aan 1. Dit betekent natuurlijk wel dat de Lagrangianen niet de correcte eenheid hebben. Om de eenheden weer goed te krijgen dienen de constanten weer te worden terugeplaatst. Gebruik deze methode om de constanten c en $\hbar$ weer terug te plaatsen in de Lagrangianen van de Klein-Gordon en Dirac-vergelijking.

2 Opgave.

De Lagrangiaan van de Dirac-vergelijking bevat zowel de Dirac spinor ψ als de adjoint spinor $\bar{\psi}$ (waarin $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, en $\psi^\dagger = (\psi^*)^T$). Er is een tweede manier om de Lagrangiaan te schrijven:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \psi \gamma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} \right) - m \bar{\psi} \psi.$$

Laat zien dat deze Lagrangiaan inderdaad de Dirac-vergelijking oplevert voor de Dirac spinor ψ . Laat ook zien dat deze Lagrangiaan een bewegingsvergelijking oplevert voor de adjoint spinor $\bar{\psi}$.

3 Opgave

Niet alleen quantummechanische of relativistische natuurkunde kunnen worden beschreven met behulp van de formulering van Lagrange, maar ook klassieke. In het dictaat wordt dat al gedemonstreerd voor de Wetten van Newton, maar ook de Wetten van Maxwell, die de interactie tussen elektrische en magnetische velden beschrijven, kunnen worden geschreven in Lagrangiaanse vorm. Deze Lagrangiaan is

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

waarin de *Maxwell stress tensor* $F^{\mu\nu}$ gedefinieerd is als

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Laat zien dat deze Lagrangiaan inderdaad de Maxwell vergelijkingen opleveren (in de afwezigheid van ladingen en elektrische stroom). Ter herinnering: de Maxwell vergelijkingen in afwezigheid van lading en stroom zijn gegeven door

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$