

1 Opgave.

Stel dat we kansdichtheid ρ van het Klein-Gordon veld ϕ zouden definiëren op de 'Schödingermanier' :

$$\rho = \phi^* \phi,$$

waarin ϕ de Klein-Gordonfunctie is.

De stroom $\vec{j}$ van kansdichtheid wordt in Schrödingers theorie gedefinieerd als

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m} (\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^*).$$

Samen met de kansdichtheid ρ vormt de kansdichtheidsstroom $\vec{j}$ een vector $j^\mu = (\rho, \vec{j})$. In Schrödingers theorie kan dan worden aangetoond dat er moet gelden.

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Dit heet de *continuïteitsvergelijking*.

a).

Laat zien dat in Klein-Gordons theorie *niet* geldt dat $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Uitwerking: De continuïteitsvergelijking kan worden geschreven als

$$\frac{d\rho}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

De linkerzijde uitgewerkt geeft

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\phi^*}{dt} \right) \phi + \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \phi^*.$$

De rechterzijde uitgewerkt geeft (afgezien van de factor $\frac{-i}{2m}$):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= (\vec{\nabla} \phi^*) \phi + \phi^* (\vec{\nabla}^2 \phi) - c.c. \\ &= \phi^* \left(\frac{d^2 \phi}{dt^2} + m^2 \phi \right) - \phi \left(\frac{d^2 \phi^*}{dt^2} + m^2 \phi^* \right) \\ &= \phi^* \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \phi \frac{d^2 \phi^*}{dt^2}. \end{aligned}$$

(in de tweede vergelijking is de Klein-Gordonvergelijking zelf gebruikt om $\vec{\nabla}^2 \phi$ te herschrijven). Een som van tweede afgeleides is niet gelijk aan een som van eerste afgeleides, zodat volgt dat linkerzijde niet gelijk is aan rechterzijde.

b).

Leg uit waarom dit betekent dat $\rho = \phi^+ \phi$ niet de fysische betekenis kan hebben van een kansdichtheid.

Uitwerking: Het feit dat de definitie $\rho = \phi^* \phi$ niet voldoet aan de continuïteitsvergelijking betekent dat de kansdichtheid niet continue is: er verdwijnt kansdichtheid in de tijd zonder dat het in de ruimte is weggestroomd. Een kansdichtheid mag daar niet aan voldoen: het zou betekenen dat er kansen worden geteleporteerd.

Stel dat de stroom $\vec{j}$ wordt gedefinieerd als

$$\rho = \frac{i}{2m} \left(\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^* \right).$$

c).

Laat zien dat, met deze definitie van ρ , dat de vector $(\rho, \vec{j})$ nu wél voldoet aan de continuïteitsvergelijking.

Uitwerking: De rechterzijde van de kansdichtheid voldoet aan dezelfde uitkomst als eerder, te weten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \phi^* \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \phi \frac{d^2 \phi^*}{dt^2}.$$

De linkerzijde voldoet nu aan (opnieuw afgezien van de factor $\frac{-i}{2m}$)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d\phi^*}{dt} \frac{d\phi}{dt} + \phi^* \frac{d^2 \phi}{dt^2} - c.c. \\ &= \phi^* \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \phi \frac{d^2 \phi^*}{dt^2}. \end{aligned}$$

Dit is inderdaad gelijk aan de linkerzijde.

2 Opgave.

De vier lineair onafhankelijke oplossingen van de Dirac-vergelijking zijn

$$\psi = N u^{(1,2)}(p) e^{-ip_\mu x^\mu}, \quad \psi = N v^{(1,2)}(p) e^{ip_\mu x^\mu},$$

waarin

$$\begin{aligned} u^{(1)}(p) &= \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} E+m \\ 0 \\ p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, & u^{(2)}(p) &= \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ E+m \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}, \\ v^{(1)}(p) &= \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ E+m \\ 0 \end{pmatrix}, & v^{(2)}(p) &= \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \\ 0 \\ E+m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a).

Laat zien dat, in de niet-relativistische limiet, de onderste twee componenten van de eerste twee oplossingen veel kleiner zijn dan de bovenste twee componenten. Laat ook zien dat in de niet-relativistische limiet, de bovenste twee componenten van de laatste twee oplossingen veel kleiner zijn dan de onderste twee.

Uitwerking:

In de niet-relativistische limiet geldt dat de energie E gegeven wordt door $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$, waarin $\vec{p}$ de normale, niet-relativistische impuls is, $\vec{p} = m\vec{v}$. Als dit wordt ingevuld in elk van de vier componenten van de spinor $u^{(1)}(p)$ wordt gevonden

$$u^{(1)}(p) = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{\frac{p_z^2}{2m} + m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(hierin is, zonder verlies van algemeenheid, gekozen dat de impuls alleen in z-richting staat, zodat $p_x = 0$ en $p_y = 0$. De derde component is gelijk aan

$$\frac{p_z}{\frac{p_z^2}{2m} + m} = \frac{2v}{v^2 + 2}.$$

Als hierin de missende factoren c worden ingevuld (op twee plaatsen: in de noemer moet een c^2 worden ingevuld om de twee termen van gelijk eenheid te maken, en in de teller moet een c staan om deze component dezelfde eenheid te geven als de andere drie componenten van de spinor), wordt dit:

$$\frac{2v}{v^2 + 2} = \frac{2(v/c)}{(v/c)^2 + 2}.$$

In de limiet $v \ll c$ wordt dit gelijk aan nul, wat inderdaad veel kleiner is dan de bovenste twee componenten (die van orde 1 zijn). Op dezelfde manier kan de rest van de opgave worden gedaan.

b).

Laat zien dat de niet-relativistische limiet van de eerste twee oplossingen voldoet aan de Schrödinger-vergelijking.

Uitwerking:

De niet-relativistische limiet van de spinor $\psi = N u^{(1)}(p) e^{-ip_\mu x^\mu}$ heeft een $u^{(1)}(p)$ van de vorm zoals afgeleid in de vorige opgave, zodat

$$\psi(p) = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{\frac{p_z^2}{2m} + m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu}$$

. Het betreft een systeem zonder interacties, zodat het zou moeten voldoen aan de Schrödingervergelijking van een vrij deeltje, te weten

$$-\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2\psi = i\frac{d\psi}{dt}.$$

Het is direkt duidelijk dat de eerste twee componenten en de vierde component van de spinor hier automatisch aan voldoen (het zijn immers constanten, zodat alle afgeleiden gelijk zijn aan nul). De enige overgebleven component voldoet ook aan de Schrödingervergelijking, zoals volgt door deze in te vullen. De linkerzijde levert dan op

$$-\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi = \frac{1}{2m}\frac{p_z}{\frac{p_z^2}{2m} + m}p_z^2u^{(1)},$$

en de rechterzijde levert op

$$i\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2m}\frac{p_z}{\frac{p_z^2}{2m} + m}Eu^{(1)}.$$

Aangezien in de klassieke limiet geldt dat $E = \frac{p_z^2}{2m}$, is zo gevolgd dat linkerzijde gelijk is aan rechterzijde. Oftewel: elke component van de oplossing $\psi = u^{(1)}e^{-ip_\mu x^\mu}$ van de Diracvergelijking voldoet aan de Schrödingervergelijking, in de klassieke limiet. Hetzelfde kan eenvoudig worden aangetoond voor de oplossing $\psi = u^{(2)}e^{-ip_\mu x^\mu}$.

c).

Onderzoek of de niet-relativistische limiet van de andere twee oplossingen $\psi = v^{(1,2)}e^{ip_\mu x^\mu}$ voldoet aan de Schrödinger-vergelijking.

Uitwerking:

Op eenzelfde manier als voorgedaan in de vorige opgave, kan worden aangetoond dat de andere twee oplossingen van de Dirac vergelijking niet voldoen aan de Schrödingervergelijking: het teken van de energie staat verkeerd om.

3 Opgave

Het kan worden aangetoond dat, na een Lorentz-transformatie in de i -richting, de Dirac spinor ψ verandert in de spinor $\psi' = S\psi$, waarin de matrix S wordt gegeven door

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)} & -\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma^i \\ -\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma^i & \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \end{pmatrix}.$$

Hierin is $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, en is σ^i de Pauli-matrix om de i -component van de spin te meten.

a).

Laat zien dat $\psi^+\psi$ niet invariant is onder de Lorentz-transformatie. Laat zien dat $\psi^+\psi$

altijd een positief getal is.

Uitwerking:

Als de spinoren getransformeerd worden door S , geldt dat $\psi \rightarrow S\psi$ en dat $\psi^+ \rightarrow \psi^+ S^+$ (hier is de regel gebruikt dat de getransponeerde van een matrixprodukt gelijk is aan het matrixprodukt van de getransponeerden, maar dan in omgekeerde volgorde). Als dit wordt ingevuld, wordt gevonden dat de getransformeerde van $\psi^+\psi$ gegeven wordt door

$$\psi^+\psi \rightarrow \psi^+ S^+ S \psi.$$

Dit kan alleen gelijk zijn aan $\psi^+\psi$ wanneer er geldt dat $\psi^+\psi$ de eenheidsmatrix is (oftewel: als de matrix S *unitair* is). Het is echter eenvoudig om aan te tonen dat de gegeven matrix S niet aan deze regel voldoet.

b).

Laat zien dat $\bar{\psi}\psi$ (waarin $\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0$) wél invariant is onder de Lorentz-transformatie. Laat zien dat $\bar{\psi}\psi$ in het algemeen geen positief getal is.

Uitwerking:

Als de spinor ψ transformeert als $\psi \rightarrow S\psi$, transformeert $\bar{\psi} \rightarrow \psi^+ S^+ (\gamma^0)^+$. De γ -matrix γ^0 is invariant onder conjugaties, zodat $\bar{\psi} \rightarrow \psi^+ S^+ (\gamma^0)$. Het produkt $\bar{\psi}\psi$ transformeert dus als

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \psi^+ S^+ \gamma^0 S \psi.$$

Het is eenvoudig om aan te tonen dat $S^+ \gamma^0 S$ gelijk is aan γ^0 , zodat er is gevolgd dat

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \psi^+ \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi,$$

oftewel dat $\bar{\psi}\psi$ invariant is onder Lorentz-transformaties.

c).

Leg bij elk van de uitdrukkingen, $\psi^+\psi$ en $\bar{\psi}\psi$ uit of het wel of geen goede kandidaat is voor de kansdichtheid van fermionen.

Uitwerking:

De eerste uitdrukking kan geen kansdichtheid zijn omdat het niet invariant is onder Lorentz-transformaties; de tweede uitdrukking kan geen kansdichtheid zijn omdat de uitkomst negatief kan worden.