

**Deeltjes en velden**

donderdag 14 oktober 2013

**OPGAVEN WEEK 4****Opgave 1:** Collider en zwaartepuntsenergie

In een collider botsen twee hoog-energetische deeltjes A en B met energieën  $E_A$  en  $E_B$  onder een hoek  $\theta$  op elkaar. Toon aan dat de totale zwaartepuntsenergie  $E_{CM}$  gegeven wordt door

$$E_{CM}^2 = 2E_A E_B (1 + \cos \theta),$$

indien de massa's van de deeltjes verwaarloosd worden.

*Antwoord:* Deeltje A heeft vierimpuls  $p_A = \begin{pmatrix} E_A/c \\ \vec{p}_A \end{pmatrix}$  en deeltje B als  $p_B = \begin{pmatrix} E_B/c \\ \vec{p}_B \end{pmatrix}$ . Omdat de massa's van beide deeltjes verwaarloosd kan worden, geldt  $E_A = |\vec{p}_A|c$  en  $E_B = |\vec{p}_B|c$ . We kunnen nu het kwadraat van de totale vierimpuls uitrekenen,

$$p = p_A + p_B \rightarrow p^2 = p_\mu p^\mu = p_A^2 + p_B^2 + 2p_A p_B = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + 2p_A p_B \approx 2p_A p_B. \quad (1)$$

Hiervoor geldt

$$2p_A p_B = 2 \frac{E_A E_B}{c^2} - 2|\vec{p}_A||\vec{p}_B| \cos \alpha = 2 \frac{E_A E_B}{c^2} - 2 \frac{E_A E_B}{c^2} \cos \alpha = 2 \frac{E_A E_B}{c^2} (1 + \cos \theta). \quad (2)$$

Merk op dat de hoek  $\theta = 180^\circ - \alpha$ , met  $\alpha \leq 90^\circ$ .

Als we naar het zwaartepunt gaan, dan geldt in dit systeem dat  $\vec{p}'_A = \vec{p}'_B$ . We schrijven de viervectoren nu als  $p'_A = \begin{pmatrix} E'_A/c \\ \vec{p}'_A \end{pmatrix}$  en  $p'_B = \begin{pmatrix} E'_B/c \\ -\vec{p}'_A \end{pmatrix}$ . De totale vierimpuls in het zwaartepuntsstelsel is  $p_{CM} = p'_A + p'_B = \begin{pmatrix} E_{CM}/c \\ 0 \end{pmatrix}$ . We berekenen nu  $p_{CM}^2$  en dat levert  $p_{CM}^2 = E_{CM}^2/c^2$ . Het inproduct van viervectoren is Lorentzinvariant en dus geldt

$$p_{CM}^2 = p^2 \rightarrow E_{CM}^2 = 2E_A E_B (1 + \cos \theta). \quad (3)$$

*Opgave b:* Bij DESY in Hamburg wordt een 6 km lange opslagring gebruikt om de substructuur van het proton te onderzoeken in colliderexperimenten. In deze ring versnelt men protonen tot 820 GeV, die frontaal botsen (dus  $\theta = 0$ ) met elektronen die tot 30 GeV versneld worden (merk op dat rustmassa's van elektron en proton verwaarloosbaar zijn ten opzichte van deze energieën). Bereken de totale zwaartepuntsenergie.

*Antwoord:* We hebben dan de volgende viervectoren voor het proton  $p_1 = \begin{pmatrix} E_1/c = 820 \text{ GeV}/c \\ \vec{p}_1 = 820 \text{ GeV}/c \end{pmatrix}$  en voor het elektron  $p_2 = \begin{pmatrix} E_2/c = 30 \text{ GeV}/c \\ \vec{p}_2 = 30 \text{ GeV}/c \end{pmatrix}$ . Invullen levert

$$E_{CM}^2 = 2E_A E_B (1 + \cos \theta) = 2(820 \text{ GeV}/c)(30 \text{ GeV}/c)(1 + \cos 0^\circ) = 49,200 (\text{GeV}/c)^2. \quad (4)$$

*Opgave c:* Stel, dat we hetzelfde experiment beschouwen, maar nu Lorentzgetransformeert naar het systeem waarin de protonen in rust zijn. Toon aan dat de elektronen in dat systeem een energie van  $5 \times 10^4 \text{ GeV}$  hebben.

Hint:

De massa van een elektron is  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$ .

De massa van een proton is  $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ .

Een Lorentztransformatie (in de  $x$ -richting) wordt gegeven door

$$x^{\mu'} = \Lambda^\mu_{\nu'} x^\nu \quad \text{met} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Antwoord:* In het systeem waarin de protonen in rust zijn, zien de relevante viervectoren er als volgt uit. Voor het proton  $p_1 = \begin{pmatrix} E_1/c = m_p \\ \vec{p}_1 = 0 \end{pmatrix}$  en voor het elektron  $p_2 = \begin{pmatrix} E_2/c = E_2/c \text{ GeV}/c \\ \vec{p}_2 = E_2/c \text{ GeV}/c \end{pmatrix}$ . Nu moet gelden

$$E_{\text{CM}}^2 = 2E_1 E_2 (1 + \cos \theta) = 2(0,938 \text{ GeV}/c)(E_2 \text{ GeV}/c)(1 + \cos 0^\circ) = 49.200 (\text{GeV}/c)^2. \quad (5)$$

Hieruit volgt dat  $E_2 = 26,2 \text{ TeV}$ .

### Opgave 2: Algemene vragen

In het volgende beschouwen we de belangrijkste eigenschappen van elementaire deeltjes. Geef een kort antwoord op de vragen en bespreek experimenten indien relevant.

*Opgave a)* Geef argumenten waarom quarks een quantumgetal kleur dienen te hebben. Hoe weten we het aantal kleuren?

*Antwoord:* Anders kan bijvoorbeeld het deeltje  $\Omega^-$  niet bestaan. Dit deeltje bestaat uit drie  $s$ -quarks en heeft spin 1. Het Pauli principe verbiedt dat drie quarks exact dezelfde quantumtoestand bezetten. Kleur biedt de oplossing: elke quark heeft een ander kleur-quantumgetal. Voor het experimentele bewijs: zie opgave 3.

*Opgave b)* Teken het Feynmandiagram voor neutronverval.

*Antwoord:* Zie dictaat. Fig. 10c op bladzijde 27.

### Opgave 3: Aantal kleurladingen

We beschouwen de verhouding  $R$  van werkzame doorsneden,

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}.$$

*Opgave a):* Maak een schatting van  $R$  voor een totale zwaartepuntenergie van  $2.8 \text{ GeV}$ . Leg duidelijk uit welke aanname's je maakt.

*Antwoord:* Merk op dat bij energieën lager dan  $M_Z = 91.2 \text{ GeV}$  het dominante Feynmandiagram voor  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  gegeven wordt door  $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Het Feynmandiagram voor  $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$  verloopt op analoge wijze. De quarks vormen vervolgens hadronen. Er geldt

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_i q_i^2,$$

met  $N_c$  het aantal kleuren ( $N_c = 3$ ) en  $q_i$  de ladingen van de quarks die geproduceerd kunnen worden in de annihilatie. Voor een totale zwaartepuntenergie van  $2.8 \text{ GeV}$  zijn dat  $u$ ,  $d$  en  $s$  quarks. We vinden dus  $R = N_c \sum_i q_i^2 = 3 \times \left( \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right) = 2.0$ .

*Opgave b):* Hoe verwacht je dat  $R$  zal veranderen als de energie hoog genoeg is om ook  $b$ -quarks te produceren?

*Antwoord:* Dan kunnen  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$  en  $b$  quarks geproduceerd worden en vinden we  $R = N_c \sum_i q_i^2 = 3 \times \left( \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \right) = 3.2$ .

#### Opgave 4: $\Lambda$ -hyperonen

$\Lambda$ -hyperonen worden geproduceerd door een pionenbundel op deuterium te laten botsen. Er vindt dan onder andere de reactie  $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda$  plaats.

*Opgave* We beschouwen de reactie  $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda$ . Bereken de drempelwaarde (dat is de minimumwaarde) van de kinetische energie van het pion, voor de productie van een kaon onder een hoek van  $90^\circ$  in het laboratoriumsysteem waarin het neutron in rust is.

*Antwoord:* Behoud van vierimpuls geeft

$$p_\pi + p_n = p_K + p_\Lambda \rightarrow p_\Lambda^2 = -m_\Lambda^2 = (p_\pi + p_n - p_K)^2 = -m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 + 2p_\pi \cdot p_n - 2p_n \cdot p_K - 2p_\pi \cdot p_K. \quad (6)$$

In het laboratoriumsysteem geldt

$$p_\pi = (E_\pi, \vec{p}_\pi) \quad p_n = (m_n, 0), \quad \text{en} \quad p_K = (E_K, \vec{p}_K). \quad (7)$$

Dus geldt

$$-m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 - 2m_n E_\pi + 2m_n E_K + 2E_\pi E_K - 2\vec{p}_\pi \cdot -\vec{p}_K = -m_\Lambda^2. \quad (8)$$

We stellen nu  $\vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_K = 0$  ( $90^\circ$  verstrooiing) en vinden

$$E_\pi = \frac{m_\Lambda^2 - m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 + 2m_n E_K}{2(m_n - E_K)}. \quad (9)$$

Dus om  $E_\pi$  minimaal te maken, moeten we  $E_K$  zo klein mogelijk maken (en dat hadden we kunnen raden), dus proberen we  $E_K = m_K$ . Dit levert

$$\begin{aligned} E_{\pi \text{ drempel}} &= \frac{m_\Lambda^2 - m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 + 2m_n m_K}{2(m_n - m_K)} \\ &= \frac{m_\Lambda^2 - m_\pi^2}{2(m_n - m_K)} - \frac{m_n - m_K}{2} = \frac{1115^2 - 140^2}{2(940 - 494)} - \frac{940 - 494}{2} \\ &= 1149 \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (10)$$

en de drempelwaarde voor de kinetische energie bedraagt  $1149 - 140 = 1009 \text{ MeV}$ .

#### Opgave 5: Levensduur van opgeslagen elektronen

Een opslagring voor elektronen wordt gebruikt om kernfysische metingen uit te voeren. De energie van de elektronen bedraagt  $500 \text{ MeV}$ . De ring wordt zo goed mogelijk vacuüm gepompt om verlies van elektronen door Møller scattering (dat is elastische verstrooiing van elektronen aan elektronen) aan het restgas tegen te gaan.

*Opgave a):* Neem aan dat de snelheid van de elektronen in het restgas verwaarloosbaar is. Onder welke hoek worden de elektronen verstrooid, als ze gelijke energie hebben na de verstrooiing?

*Antwoord:* Het eenvoudigste is dit te berekenen door weer naar het zwaartepuntssysteem te gaan. De invariante massa van het twee-elektron systeem bedraagt

$$W = \sqrt{(e + m)^2 - p^2} = \sqrt{2m(e + m)} = 22.62 \text{ MeV}, \quad (11)$$

met  $e$  de energie van het elektron in de bundel ( $500 \text{ MeV}$ ),  $p$  de impuls van dit elektron ( $p = \sqrt{e^2 - m^2}$ ) en  $m$  de massa van het elektron. In het zwaartepuntssysteem hebben beide elektronen dezelfde energie en tegengestelde impuls. Ieder elektron heeft dus een energie  $E_{cm}$  van  $11.31 \text{ MeV}$

en een impuls  $p_{cm}$  van 11.30 MeV. Om de Lorentztransformatie van het zwaartepuntssysteem naar het LAB-systeem te maken neemt men  $\gamma = E/m = 22.13$  en  $\beta = 0.999$ , met de richting van  $\vec{\beta}$  parallel aan de bundelas.

De elektronen hebben in het LAB-systeem gelijke energie als in het zwaartepuntssysteem de verstrooiing plaatsvindt onder  $90^\circ$ . Dan geldt in het zwaartepuntssysteem dat  $\vec{\beta} \cdot \vec{p} = 0$  en dus

$$\tan \theta_{lab} = \frac{p_{cm}}{\beta \gamma e_{cm}} = 2.6^\circ.$$

De elektronen hebben in het LAB-systeem gelijke energie als in het zwaartepuntssysteem de verstrooiing plaatsvindt onder  $90^\circ$ . Dan geldt in het zwaartepuntssysteem dat  $\vec{\beta} \cdot \vec{p} = 0$  en dus

$$\tan \theta_{lab} = \frac{p_{cm}}{\beta \gamma e_{cm}} = 2.6^\circ.$$

*Opgave b):* In de ring kunnen kleine energieverliezen van de elektronen worden gecompenseerd door het gebruik van een zogenaamde cavity. Echter elektronen die te veel energie verliezen of een te grote additionele hoek verkrijgen door verstrooiing aan het restgas, zullen uit de bundel verdwijnen. Daarom is een goed vacuümsysteem van groot belang voor een opslagring (en vertegenwoordigd een belangrijk deel van de kosten van elke versneller). Men is in staat om een druk van  $10^{-6}$  Pa te creëren (ongeveer 11 ordes van grootte kleiner dan de atmosferische druk) bij een temperatuur van 300 K. Het restgas bestaat uit waterstofmolekulen. Neem aan dat de werkzame doorsnede voor verstrooiing van het elektron aan een waterstofmolekuul, met als gevolg dat het elektron uit de bundel verdwijnt, 100 barn bedraagt. Hoe lang duurt het, voordat de bundelstroom door Møller scattering gehalveerd is?

*Antwoord:* Per seconde ziet een electron  $c\rho$  atomen per vierkante meter, waarbij  $c$  de lichtsnelheid is en  $\rho$  de dichtheid in atomen per kubieke meter. Voor  $\rho$  gebruiken we de ideale gaswet

$$\rho = \frac{n}{V} = \frac{p}{k_b T}, \quad (12)$$

met  $p$  de druk in Pa,  $k_b$  de constante van Boltzmann, en  $T$  de temperatuur in Kelvin. Dit geeft dus  $\rho = 2.41 \times 10^{14}$  atomen/m<sup>3</sup> en  $c\rho = 7.24 \times 10^{22}$  atomen s<sup>-1</sup>m<sup>-2</sup>. De werkzame doorsnede  $\sigma$  is gelijk aan 100 barn =  $10^{-26}$  m<sup>2</sup>; dus de kans per seconde dat een electron uit de bundel gestrooid wordt is gelijk aan

$$\tau = c\rho\sigma = 7.24 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}. \quad (13)$$

De stroom in de bundel gedraagt zich dus (bij voldoende aantallen elektronen, zodat Gaussische statistiek toegepast kan worden) als functie van de tijd  $t$  als  $I(t) = I(t=0)e^{-\tau t}$ . De bundelstroom is gehalveerd als  $e^{-\tau t}$  gelijk is aan 0.5, dus na  $t = -\frac{\ln(0.5)}{\tau} = 958$  s.