

Opgave 1: Comptonverstrooiing

Een röntgenfoton van 0.3 MeV ondergaat een frontale botsing met een elektron in rust. Gebruik behoud van energie en impuls om de snelheid van het teruggestoten elektron te vinden.

Antwoord: Met een frontale botsing wordt bedoeld dat $\phi = 180^\circ$ en dus geldt $(1 - \cos 180^\circ) = 2$. Een röntgenfoton van 0.3 MeV heeft een energie van $E = (0.3 \times 10^6)(1.6 \times 10^{-19}) = 4.8 \times 10^{-14}$ J. Hiermee correspondeert een frequentie van $\nu = E/h = 4.8 \times 10^{-14} \text{ J} / 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js} = 7.2 \times 10^{19}$ Hz en een golflengte van $\lambda = c/\nu = 3 \times 10^8 \text{ m/s} / 7.2 \times 10^{19} \text{ Hz} = 4.1 \times 10^{-12} \text{ m}$.

De golflengte van het verstrooide foton is

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos \phi) = 4.1 \times 10^{-12} \text{ m} + 0.0243 \times 10^{-10} \text{ m} \cdot 2 = 8.96 \times 10^{-12} \text{ m}. \quad (1)$$

De energie van het verstrooide foton is dan

$$E' = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} = \frac{(6.626 \times 10^{-34} \text{ Js})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{8.96 \times 10^{-12} \text{ m}} = 2.2 \times 10^{-14} \text{ J} = 137 \text{ keV}. \quad (2)$$

We vinden nu voor de kinetische energie van het elektron

$$T_e = h(\nu - \nu') = 4.8 \times 10^{-14} \text{ J} - 2.2 \times 10^{-14} \text{ J} = 2.6 \times 10^{-14} \text{ J} = 163 \text{ keV}. \quad (3)$$

De impuls van het elektron volgt uit

$$E^2 = (T_e + m_e c^2)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (4)$$

De rustenergie van een elektron bedraagt

$$m_e c^2 = (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8.2 \times 10^{-14} \text{ J} = 511 \text{ keV}. \quad (5)$$

Voor de totale energie van het elektron vinden we dan $E = T_e + m_e c^2 = 2.6 \times 10^{-14} \text{ J} + 8.2 \times 10^{-14} \text{ J} = 1.1 \times 10^{-13} \text{ J} = 674 \text{ keV}$. De impuls volgt nu uit

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - (m_e c^2)^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{(1.1 \times 10^{-13} \text{ J})^2 - (8.2 \times 10^{-14} \text{ J})^2}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2}} = 2.4 \times 10^{-22} \text{ kg m/s}. \quad (6)$$

De snelheid volgt uit een relativistische uitdrukking,

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E} \rightarrow v = \frac{2.4 \times 10^{-22} \text{ kg m/s}}{1.1 \times 10^{-13} \text{ J}} = 2.0 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (7)$$

Dit correspondeert met 65 % van de lichtsnelheid.

Opgave 2: Waterstofatoom

Bepaal de golflengten van waterstof die in het optische spectrum (3800 Å tot 7700 Å) liggen.

Antwoord: Voor de golflengten van de lijnen in het waterstofspectrum geldt

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{l^2} - \frac{1}{u^2} \right) \rightarrow \lambda = \frac{1}{R} \frac{l^2 u^2}{u^2 - l^2}. \quad (8)$$

met $u = 1, 2, \dots$ en $l = 1, 2, \dots$ quantumgetallen. Verder is $R = 0.01097 \text{ nm}^{-1}$ de Rydberg constante.

Merk op dat $R^{-1} = 91 \text{ nm}$. We zien dus dat er geen golflengten van zichtbaar licht corresponderen met overgangen van aangeslagen toestanden, $u = 2, 3, \dots$, naar de grondtoestand met $l = 1$. Zichtbaar zijn wel overgangen naar de eerste aangeslagen toestand, met $l = 2$. Bijvoorbeeld

$$\begin{array}{llll}
 u = 3 & \lambda_{3 \rightarrow 2} = 656 \text{ nm} & \text{wel} & \\
 u = 4 & \lambda_{4 \rightarrow 2} = 485 \text{ nm} & \text{wel} & \\
 u = 5 & \lambda_{5 \rightarrow 2} = 433 \text{ nm} & \text{wel} & \\
 u = 6 & \lambda_{6 \rightarrow 2} = 410 \text{ nm} & \text{wel} & \\
 u = 7 & \lambda_{7 \rightarrow 2} = 396 \text{ nm} & \text{wel} & \\
 u = 8 & \lambda_{8 \rightarrow 2} = 388 \text{ nm} & \text{wel} & \\
 u = 9 & \lambda_{9 \rightarrow 2} = 381 \text{ nm} & \text{wel} & \\
 u = 10 & \lambda_{10 \rightarrow 2} = 379 \text{ nm} & \text{niet.} &
 \end{array} \tag{9}$$

Toestanden met $l \geq 3$ zijn niet zichtbaar.

Opgave 3: De Broglie-golflengte

Bepaal de versnelspanning die nodig is om een elektron een de Broglie-golflengte van $1 \text{ \AA}$ te geven. Dit correspondeert met de grootte van de inter-atoomafstanden van een kristal.

Antwoord: De kinetische energie van het elektron is gelijk aan de elektrostatische energie,

$$\frac{p^2}{2m} = eV, \tag{10}$$

met p, m en e respectievelijk de impuls, massa en lading van het elektron. De versnelspanning wordt gerepresenteerd door V . De de Broglie golflengte λ staat met de impuls in verband volgens

$$p = \frac{h}{\lambda}, \tag{11}$$

met h de constante van Planck. Hiermee vinden we voor de versnelspanning

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{p^2}{2me} \\
 &= \frac{h^2}{2m \cdot \lambda^2 \cdot e} \\
 &= \frac{(6,626 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \cdot (9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (10^{-10} \text{ m})^2 \cdot (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})} \\
 &= 151 \text{ V}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Merk op dat de kinetische energie van 151 eV klein is ten opzichte van de massa van het elektron, $m = 511 \text{ keV}$, en dat het gebruik van de niet-relativistische uitdrukking voor de kinetische energie dus gerechtvaardigd is.

Opgave 4: Fotonflux

Licht met golflengte van $3000 \text{ \AA}$ en intensiteit $15 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$, valt loodrecht op een oppervlak van 4 cm^2 . Bepaal dan het aantal fotonen dat per seconde het oppervlak raakt.

Antwoord: Monochromatisch licht is licht met één specifieke golflengte, in dit geval $3000 \text{ \AA}$. De golflengte is dus $\lambda = (3000) \cdot (10^{-10} \text{ m}) = 3 \times 10^{-7} \text{ m}$. Hiermee vinden we voor de frequentie

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{3 \times 10^{-7} \text{ m}} = 1.0 \times 10^{15} \text{ Hz}. \tag{13}$$

De energie per foton bedraagt $E = h\nu = (6.6 \times 10^{-34} \text{ Js}) \cdot (1.0 \times 10^{15} \text{ Hz}) = 6.6 \times 10^{-19} \text{ J}$. Het licht valt loodrecht op een oppervlak van $A = 4 \text{ cm}^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ met een intensiteit van $15 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$. Dit betekent dat het vermogen $P = IA = (15 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2) \cdot (4 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 6.0 \times 10^{-5} \text{ J/s}$ is. Het aantal fotonen dat per seconde het oppervlak raakt is dus gelijk aan

$$\dot{N} = \frac{P}{E} = \frac{6.0 \times 10^{-5} \text{ J/s}}{6.6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 9.1 \times 10^{13} \text{ s}^{-1}. \quad (14)$$

Opgave 5: Harmonische oscillator

De golffunctie $\Psi(x, t)$ voor de laagste energietoestand van een eenvoudige harmonische oscillator, bestaande uit een deeltje met massa m waarop een lineaire herstelkracht met krachtconstante C werkt, kan worden geschreven als $\Psi(x, t) = Ae^{-(\sqrt{Cm}/2\hbar)x^2}e^{-(i/2)\sqrt{C/m}t}$, waarbij de reële constante A elke waarde kan aannemen.

1. Verifieer dat deze uitdrukking een oplossing is van de schrödingervergelijking voor de betreffende potentiaal ($V(x, t) = V(x) = Cx^2/2$).

Oplossing: We onderzoeken of de vergelijking een oplossing is, door hem in te vullen in de Schrödingervergelijking en te controleren of hij hieraan voldoet. De Schrödingervergelijking luidt

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (15)$$

Allereerst bepalen we de relevante partiële afgeleiden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} &= -\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar} x \Psi(x, t), \\ \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{\sqrt{Cm}}{\hbar} \Psi(x, t) + \frac{Cmx^2}{\hbar^2} \Psi(x, t), \\ \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{C}{m}} \Psi(x, t). \end{aligned} \quad (16)$$

Invullen in de Schrödingervergelijking levert

$$+\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\sqrt{Cm}}{\hbar} \Psi(x, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{Cmx^2}{\hbar^2} \Psi(x, t) + \frac{Cx^2}{2} \Psi(x, t) = -i\hbar \frac{i}{2} \sqrt{\frac{C}{m}} \Psi(x, t). \quad (17)$$

We kunnen nu overal $\Psi(x, t)$ wegstrepen. We vinden dan

$$+\frac{\hbar}{2m} \sqrt{Cm} - \frac{Cx^2}{2} + \frac{Cx^2}{2} = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{C}{m}} \quad (18)$$

en het is duidelijk dat de vergelijking inderdaad een oplossing van de Schrödingervergelijking is.

2. Bewijs dat $\Psi(x, t)^* \Psi(x, t)$ reëel is, en enkel positief of nul kan zijn.

Oplossing: Hiertoe schrijven we de golffunctie als

$$\Psi(x, t) = a(x, t) + ib(x, t), \quad (19)$$

met $a(x, t)$ het reële deel en $b(x, t)$ het imaginaire deel van de golffunctie. Voor de complex geconjugeerde golffunctie geldt dan

$$\Psi^*(x, t) = a(x, t) - ib(x, t), \quad (20)$$

Het product $\Psi(x, t)^* \Psi(x, t)$ kan geschreven worden als

$$\Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = (a(x, t) - ib(x, t))(a(x, t) + ib(x, t)) = a^2(x, t) + b^2(x, t) \geq 0. \quad (21)$$

3. Bereken de waarschijnlijkheidsdichtheid voor de eenvoudige harmonische oscillator in de laagste energietoestand met behulp van de gegeven golf functie.

Oplossing: De waarschijnlijkheidsdichtheid wordt gegeven door de uitdrukking $\Psi(x, t)^* \Psi(x, t)$ en indien we de gegeven golf functie gebruiken, vinden we

$$\Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = \left(A e^{-(\sqrt{Cm}/2\hbar)x^2} e^{(i/2)\sqrt{C/mt}} \right) \left(A e^{-(\sqrt{Cm}/2\hbar)x^2} e^{-(i/2)\sqrt{C/mt}} \right). \quad (22)$$

De complexe exponenten (het fasedeel) vallen weg en we houden over

$$\Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = A^2 e^{-ax^2} \quad \text{met} \quad a = \frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}. \quad (23)$$

4. Evalueer de voorspellingen van de klassieke fysica voor de waarschijnlijkheidsdichtheid van een eenvoudige harmonische oscillator in de opgave en vergelijk het resultaat met dat gevonden in de vorige deelopgave.

Oplossing: In de klassieke fysica hebben we te maken met een deeltje, dat zich als het ware in een paraboolvormige kom bevindt. Klassiek komt de laagste energietoestand overeen met de situatie dat het deeltje zich in rust op positie $x = 0$ bevindt. Uiteraard is dat in strijd met de onzekerheidsrelatie en vinden we in de quantummechanica derhalve een nulpuntsenergie. We zullen in het volgende de situatie met klassieke fysica beschrijven.

Het klassieke deeltje is onderhevig aan een kracht die evenredig is met de verplaatsing van de evenwichtstoestand en gericht is naar $x = 0$. De oscillator heeft een potentiële energie,

$$V(x) = \frac{C}{2} x^2, \quad (24)$$

zodat het deeltje een kracht

$$F = -\frac{dV}{dx} = -Cx \quad (25)$$

ervaart, met C de zogenaamde veerconstante. Door gebruik te maken van de tweede wet van Newton, vinden we de differentiaalvergelijking

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Cx. \quad (26)$$

Deze vergelijking heeft als oplossing (controleer dat maar door invullen)

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (27)$$

waarbij A de amplitude, ϕ de fasehoek en $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}$ de hoekfrequentie zijn. We kunnen de snelheid van het klassieke deeltje vinden door de afgeleide te nemen en dat levert

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (28)$$

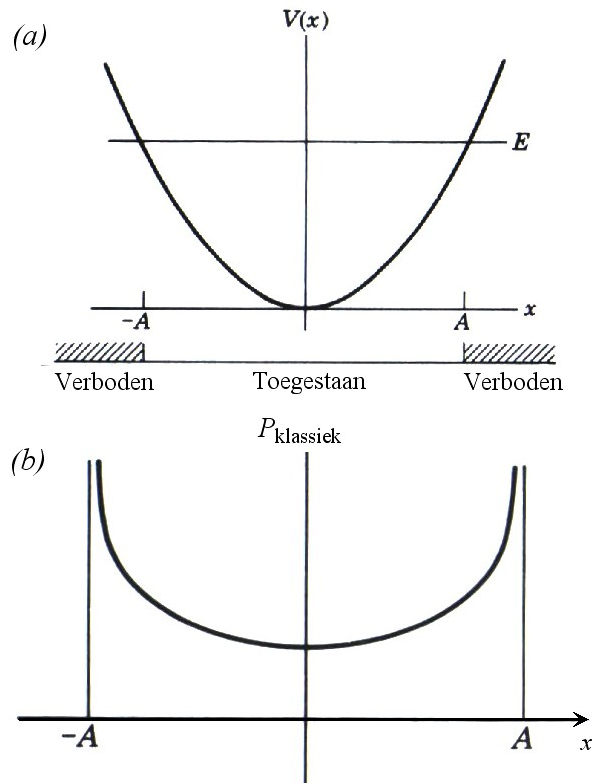
De uitdrukkingen voor x en v komen voor in de formule voor de totale energie en produceren een bewegingconstante.

$$\begin{aligned}
 E &= K + V = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2 \\
 &= \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{C}{2}A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\
 &= \frac{C}{2}A^2.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Dit resultaat kan geherschikt worden, zodat we v als functie van x krijgen,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{C}{2}x^2 \right)} = \sqrt{\frac{C}{m} (A^2 - x^2)}. \tag{30}$$

Het is duidelijk dat x^2 niet groter kan zijn dan A^2 , anders kan v niet de fysische snelheid van het klassieke deeltje voorstellen.



Figuur 1: *Potentiële energie voor een harmonische oscillator (figuur (a)) en klassieke waarschijnlijkheidsdichtheid (figuur (b)).*

We kunnen ons het klassieke beeld voorstellen met behulp van figuur 1. De bovenste figuur toont de potentiële energie $V(x)$ samen met een gekozen waarde voor de constante totale energie E . We merken op dat een dergelijke willekeurige keuze toegestaan is in de klassieke fysica. De figuur toont dat

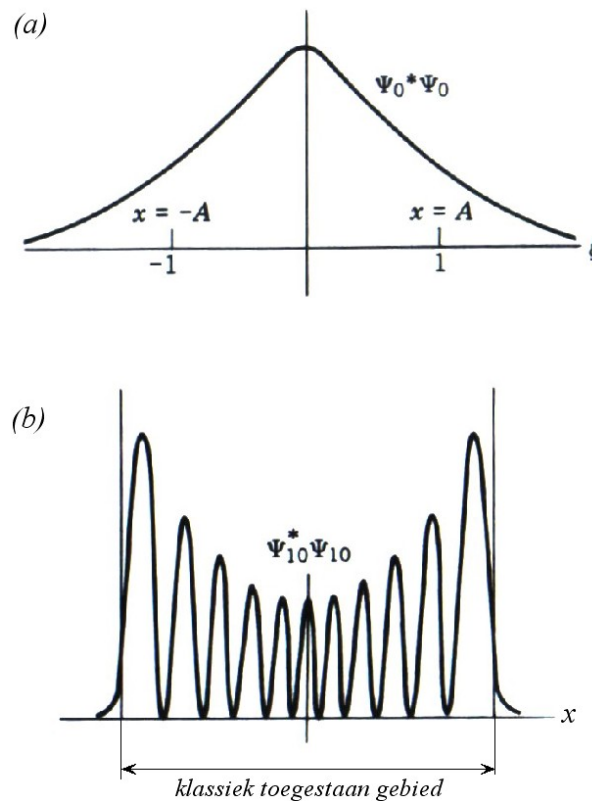
$$V(x) = E \quad \text{voor} \quad x = \pm A = \pm \sqrt{\frac{2E}{C}} \tag{31}$$

en klassieke beweging is verboden voor $|x| > A$.

Indien x in het toegestane gebied $[-A, A]$ is, kan een klassieke waarschijnlijkheidsdichtheid worden gedefinieerd, die tot uitdrukking brengt wat de kans is om het deeltje in een specifiek interval dx aan te treffen. De corresponderende waarschijnlijkheid $P_{\text{klassiek}}(x)dx$ moet omgekeerd evenredig zijn met de snelheid in het gegeven interval. We vinden

$$P_{\text{klassiek}}(x)dx = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} \quad (32)$$

en merken op dat de totale waarschijnlijkheid gelijk aan 1 dient te zijn. Deze waarschijnlijkheidsverdeling is getekend in figuur 1. Ter vergelijking tonen we in figuur 2 de quantummechanische waarschijnlijkheidsdichtheid voor de in de opgave gegeven golffunctie. In



Figuur 2: Waarschijnlijkheidsdichtheid voor de grondtoestand van een quantummechanische harmonische oscillator (figuur (a)) en waarschijnlijkheidsdichtheid voor de $n = 10$ toestand van de harmonische oscillator (figuur (b)).

figuur 2 zien we dat de quantummechanische waarschijnlijkheidsdichtheid voor de grondtoestand van een harmonische oscillator een maximum heeft bij $x = 0$, terwijl de klassieke waarschijnlijkheidsdichtheid daar juist een minimum heeft. Verder zien we dat de quantummechanische waarschijnlijkheidsdichtheid voor de $n = 10$ toestand van de harmonische oscillator een gemiddelde verdeling heeft, die overeen lijkt te komen met die van de klassieke harmonische oscillator gegeven in figuur 1b.

5. Normeer de golffunctie door de waarde van de willekeurige constante A te bepalen, zodanig dat de totale waarschijnlijkheid het deeltje ergens aan te treffen gelijk wordt aan 1.

Oplossing: We normeren de golffunctie door de totale waarschijnlijkheid op 1 te stellen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx = 1. \quad (33)$$

De waarschijnlijkheidsdichtheid is uitgerekend in opgave 5.3 en we vinden

$$\Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = A^2 e^{-ax^2} \quad \text{met} \quad a = \frac{\sqrt{Cm}}{\hbar}. \quad (34)$$

Derhalve dienen we de volgende integraal te bepalen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t)^* \Psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-ax^2} dx = 1. \quad (35)$$

Teneinde de normalisatie te bepalen, definiëren we de grootheid

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (36)$$

en evalueren het kwadraat van J als een oppervlakte integraal,

$$J^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int \int_{\text{eerste kwadrant}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \quad (37)$$

We transformeren de integratie variabelen naar poolcoördinaten en verkrijgen

$$J^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left| \frac{e^{-r^2}}{-2} \right|_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}. \quad (38)$$

Het resultaat is

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (39)$$

We kunnen onze originele integraal herschrijven als

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-ax^2} dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{A^2}. \quad (40)$$

Vervolgens herdefiniëren we de variabele x door gebruik te maken van $c^2 = a$ en dus $c = \sqrt{a}$. We vinden

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 x^2} dx = \frac{1}{A^2} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 x^2} dcx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{a}}{A^2}. \quad (41)$$

Tenslotte merken we op dat de integrand een even functie is en schrijven

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{a}}{A^2} = 2J. \quad (42)$$

Gebruikmakend van vergelijking (39) vinden we

$$\frac{\sqrt{a}}{A^2} = 2J = \sqrt{\pi}. \quad (43)$$

We krijgen hiermee het eindresultaat

$$A^2 = \sqrt{\frac{a}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{Cm}{\hbar^2 \pi^2}}. \quad (44)$$

6. Bepaal de verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ voor een deeltje in de laagste energietoestand van een harmonische oscillator door gebruik te maken van de golffunctie en waarschijnlijkheidsdichtheid berekend in de vorige opgaven.

Oplossing: De verwachtingswaarde $\langle x \rangle$ volgt uit

$$\langle x \rangle = \langle \Psi | x | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx. \quad (45)$$

We zien direct dat het tijdafhankelijke deel wegvalt en schrijven met behulp van vergelijking (23)

$$\langle x \rangle = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx. \quad (46)$$

Het resultaat van deze integraal is gelijk aan nul, want we integreren over het product van een oneven (x) en een even (e^{-ax^2}) functie. Derhalve is $\langle x \rangle = 0$.

7. Beschouw een deeltje met mass m dat zich vrij kan bewegen langs de x -as tussen posities $x = -a/2$ en $x = +a/2$, maar waarbij het strikt verboden is dat het deeltje zich buiten dit interval bevindt. De golffunctie van het deeltje kan geschreven worden als $\Psi(x, t) = A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar}$ binnen het interval en is gelijk aan nul erbuiten. Bepaal de energie van de laagste energietoestand.

Oplossing: De opgave heeft betrekking op een deeltje in een oneindige rechthoekige put potentiaal. De golffunctie van de laagste energietoestand met $n = 1$ luidt in dat geval

$$\Psi(x, t) = A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} \quad (47)$$

en de bijbehorende energie is gelijk aan

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (48)$$

8. Maak gebruik van bovenstaande golffunctie en bereken de verwachtingswaarden voor x , p , x^2 en p^2 .

Oplossing: Allereerst bepalen we de normering van de golffunctie. Hiertoe berekenen we de integraal

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A \cos \frac{\pi x}{a} e^{+iEt/\hbar} A \cos \frac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx \\ &= \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx \\ &= \frac{A^2}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) dx \\ &= \frac{A^2}{2} \left[x + \underbrace{\frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{a}}_{=0} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \frac{aA^2}{2} = 1 \end{aligned} \quad (49)$$

en dus

$$A = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad \text{en} \quad A^2 = \frac{2}{a}. \quad (50)$$

De verwachtingswaarde van x wordt gegeven door de integraal

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a} x \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx. \quad (51)$$

Deze integraal is gelijk aan nul, omdat de integrand oneven is (product van oneven en even functies). We vinden dus $\langle x \rangle = 0$.

De verwachtingswaarde van p kan slechts worden uitgerekend als we de impulsoperator kennen. Hiervoor geldt $p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$. De verwachtingswaarde wordt gegeven door de integraal

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a} \frac{\hbar}{i} \left(-\frac{\pi}{a} \right) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} dx. \quad (52)$$

Deze integraal is ook gelijk aan nul, omdat de integrand weer oneven is (product van even en oneven functies). We vinden dus $\langle p \rangle = 0$.

De verwachtingswaarde van x^2 is ongelijk aan nul en kan worden gevonden met behulp van een tabellenboek voor standaard integralen. We vinden

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x^2 \Psi dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{2}{a} x^2 \cos^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{2}{a} \frac{a^3}{\pi^3} \left(\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{a^2}{12\pi^2} (\pi^2 - 6). \end{aligned} \quad (53)$$

De berekening van $\langle p^2 \rangle$ is eenvoudiger, omdat we de Schrödingervergelijking kunnen gebruiken. Er geldt

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi^* \left(2mi\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi dx = 2mE_1 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Psi^* \Psi dx = 2mE_1. \end{aligned} \quad (54)$$

We kunnen de onzekerheden in x en p uitrekenen en vinden

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{\pi^2} \frac{\pi^2 - 6}{12} \quad (55)$$

en

$$(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = 2mE_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{a^2}. \quad (56)$$

Het product van de onzekerheden wordt nu

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}} \hbar \approx 0.57 \hbar, \quad (57)$$

een resultaat dat iets groter is dan Heisenberg's ondergrens $\hbar$.