5 SYMMETRIEËN

5.1 Inleiding

Het onderzoek naar symmetrieën en de daarmee verbonden behoudswetten is in de deeltjesfysica buitengewoon nuttig gebleken. Uit de klassieke fysica weten we bijvoorbeeld, dat de eis, dat wetten invariant dienen te zijn onder een translatie in de tijd, leidt tot behoud van energie. Verder leidt invariantie ten opzichte van ruimtelijke rotaties tot behoud van impulsmoment. Terwijl de wetten van behoud van energie, impuls, en impulsmoment altijd geldig zijn, weten we nu dat andere symmetrieën in bepaalde wisselwerkingen geschonden worden. Het was bijvoorbeeld een ongelofelijke verrassing voor fysici, toen bleek dat de spiegelsymmetrie in de zwakke wisselwerking (en enkel in deze!) geschonden is, zelfs *maximaal*. Ook begrijpen we tegenwoordig nog niet, of slechts ten dele, waarom dit zo is, of waarom bepaalde symmetrieën ($\mathcal{CP}$, $\mathcal{T}$) slechts 'een beetje' geschonden worden.

Hier willen we allereerst de theoretische quantummechanische basis samenvatten, omdat we dat voor de bespreking van deze fenomenen nodig zullen hebben. Een systeem wordt beschreven door een golffunctie, ψ. Een fysische *observabele* wordt voorgesteld door een quantummechanische *operator*, $\mathbf{O}$, waarvan de verwachtingswaarden gegeven worden door de eigenwaarden van deze operator. De eigenwaarden komen overeen met de resultaten van metingen, en de verwachtingswaarde van $\mathbf{O}$ in de toestand ψ_a is gedefinieerd als[62]

$$< O >= \int \psi_a^* \mathbf{O} \psi_a dV. \tag{536}$$

Omdat de verwachtingswaarden experimenteel bepaald kunnen worden, dienen ze reëel te zijn, en moet $\mathbf{O}$ dus *hermitisch* zijn. Als $\mathbf{O}$ een operator is, dan wordt de hermitisch toegevoegde operator $\mathbf{O}^\dagger$ gedefineerd als

$$\int (\mathbf{O}\psi)^* \phi dV = \int \psi^* \mathbf{O}^\dagger \phi dV, \tag{537}$$

en de operator $\mathbf{O}$ is hermitisch als geldt $\mathbf{O}^\dagger = \mathbf{O}$.

We nemen aan dat de tijdsafhankelijkheid van de golffunctie, ψ, gegeven is door de Schrödingervergelijking,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H}\psi. \tag{538}$$

Indien de Hamiltoniaan $\mathbf{H}$ reëel is, dan geldt ook

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = (\mathbf{H}\psi)^* = \psi^* \mathbf{H}. \tag{539}$$

[62] Indien we twee toestanden beschouwen, dan kan men op analoge wijze schrijven

$$O_{ba} = \int \psi_b^* \mathbf{O} \psi_a dV, \tag{534}$$

en O_{ba} wordt het *overgangsmatrixelement* genoemd tussen de toestanden a en b. De verwachtingswaarde van $\mathbf{O}$ in toestand a is het diagonale element van O_{ba} voor $b = a$,

$$< O >= O_{aa}. \tag{535}$$

De niet-diagonale elementen corresponderen niet direct met klassieke grootheden. Echter de overgangen tussen toestand a en b zijn gerelateerd aan O_{ba}.

Voor de verandering in de tijd van een observabele, O, krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} < O > &= \frac{\partial}{\partial t} \int \psi^* \mathbf{O} \psi dV \\ &= \int \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \mathbf{O} \psi + \psi^* \mathbf{O} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dV \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \psi^* (\mathbf{HO} - \mathbf{OH}) \psi dV. \end{aligned} \tag{540}$$

We zien dus dat $< O >$ niet verandert, dus een bewegingsconstante is, indien de *commutator* $[\mathbf{H},\ \mathbf{O}]$ gelijk is aan nul,

$$[\mathbf{H}, \mathbf{O}] \equiv \mathbf{HO} - \mathbf{OH} = 0. \tag{541}$$

Er kan dan een golffunctie gevonden worden, die *gelijktijdig* een eigenfunctie is van $\mathbf{O}$ en van $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{H}\psi = E\psi \qquad \text{en} \qquad \mathbf{O}\psi = o\psi, \tag{542}$$

waarbij o de eigenwaarde is van $\mathbf{O}$ in toestand ψ.

Om te illustreren op welke manier *behoudswetten* gevonden kunnen worden, voeren we een *unitaire*[63], tijdonafhankelijke symmetrietransformatie $\mathbf{U}$ in,

$$\psi'(\vec{r}, t) = \mathbf{U}\psi(\vec{r}, t). \tag{543}$$

Omdat ψ' dient te voldoen aan *dezelfde* Schrödingervergelijking, krijgen we

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{HU} = \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{HU}, \tag{544}$$

en dus

$$[\mathbf{H},\ \mathbf{U}] = 0. \tag{545}$$

We zien dus dat de operator voor de symmetrietransformatie eveneens commuteert met de Hamiltoniaan.

Indien $\mathbf{U}$ ook nog hermitisch is, $\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}$, dan is er een observabele geassocieerd met $\mathbf{U}$. Als dat niet het geval is, dan kan er, zoals we in de volgende voorbeelden nog zullen laten zien, een met $\mathbf{U}$ geassocieerde variabele gedefiniëerd worden. We dienen hierbij onderscheid te maken tussen het geval dat $\mathbf{U}$ een *continue* of een *niet continue* transformatie vertegenwoordigt. In het eerste geval krijgen we in het algemeen een *additief behouden grootheid* (zoals impuls, impulsmoment, energie), terwijl we in het tweede geval een *multiplicatief quantumgetal* (bijvoorbeeld pariteit) zullen vinden.

5.2 Behoud van impuls

Voor een continue transformatie is het efficiënt een additionele operator (een zogenaamde *generator*) $\mathbf{G}$ in te voeren,

$$\mathbf{U} = e^{i\epsilon\mathbf{G}} = \mathbf{1} + i\epsilon\mathbf{G} + \frac{1}{2!}(i\epsilon\mathbf{G})^2 + .., \tag{546}$$

[63] Een unitaire transformatie leidt tot een behouden norm van de golffunctie; dit wil zeggen dat $\int \psi^* \psi dV = \int (\mathbf{U}\psi)^* \mathbf{U}\psi dV = \int \psi^* \mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U}\psi dV$, en dus $\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = 1$. Voor een unitaire operator geldt dus dat $\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{-1}$. Unitaire operatoren zijn generalisaties van $e^{i\alpha}$, de complexe getallen met absolute waarde 1. Als de operator $\mathbf{M}$ wordt voorgesteld door een matrix met elementen M_{ik}, dan is $\mathbf{M}^*$ de complex geconjugeerde matrix met elementen M^*_{ik}, $\tilde{\mathbf{M}}$ met elementen M_{ki} is de getransponeerde matrix, en $\mathbf{M}^{\dagger}$ met elementen M^*_{ki} is de hermitisch geconjugeerde matrix. Verder geldt $(\mathbf{AB})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}$. $\mathbf{E} = \mathbf{I} = \mathbf{1}$ is de eenheidsmatrix met elementen $E_{ik} = \delta_{ik}$. De matrix $\mathbf{H}$ wordt hermitisch genoemd als geldt $H^*_{ki} = H_{ik}$. De matrix $\mathbf{U}$ is unitair als $U^*_{ki}U_{ik} = U_{ik}U^*_{ki} = \delta_{ik}$.

waarbij ϵ een reëele grootheid is. Uit de unitariteit van $\mathbf{U}$ volgt dan dat

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = e^{-i\epsilon \mathbf{G}^\dagger} e^{i\epsilon \mathbf{G}} = \mathbf{1} \quad \rightarrow \quad \mathbf{G}^\dagger = \mathbf{G}, \tag{547}$$

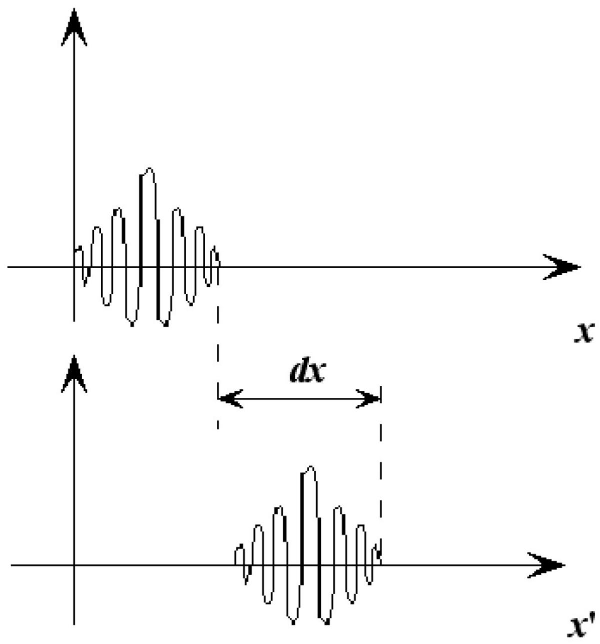
en we vinden dat de hermitische operator $\mathbf{G}$ de gezochte behouden grootheid vertegenwoordigt.

Indien $\mathbf{U}$ met een symmetrietransformatie overeenkomt, $[\mathbf{H},\ \mathbf{U}] = 0$, dan vinden we in de limiet van een infinitesimale transformatie, $\mathbf{U} = \mathbf{1} + i\epsilon\mathbf{G}$, direct de relatie

$$\mathbf{H}(\mathbf{1} + i\epsilon\mathbf{G}) - (\mathbf{1} + i\epsilon\mathbf{G})\mathbf{H} = 0, \tag{548}$$

en dus

$$[\mathbf{H},\ \mathbf{G}] = 0. \tag{549}$$



Figuur 60: *Illustratie van een symmetrietransformatie aan de hand van de translatie van de golffunctie van een deeltje. Het pakket verschuift over een afstand $\epsilon = dx$.*

We zullen deze procedure toelichten aan de hand van een eenvoudig voorbeeld. We beschouwen in figuur 60 de translatie van de golffunctie van een deeltje in *één* dimensie. We eisen, dat voor een waarnemer in het getransleerde coördinatensysteem dezelfde wetten gelden[64], en dus

$$\begin{aligned} \psi'(x') = \psi(x - \epsilon) &= \psi(x) - \epsilon \tfrac{d\psi(x)}{dx} + .. \\ &= (1 + i\epsilon\mathbf{G} + ..)\psi(x). \end{aligned} \tag{550}$$

Hiermee vinden we

$$\mathbf{G} = i\frac{d}{dx} = -\frac{1}{\hbar}\mathbf{p_x}. \tag{551}$$

De operator $\mathbf{U}$ commuteert met de Hamiltoniaan $\mathbf{H}$, en daarmee dan ook $\mathbf{G}$, die evenredig is met de impulsoperator $\mathbf{p_x}$. De hiermee corresponderende observabele p_x is de gezochte behouden grootheid.

[64]We hadden natuurlijk net zo goed kunnen aannemen dat het systeem over dezelfde afstand in de tegenovergestelde richting verschoven wordt.

In het algemeen vertegenwoordigt de translatieoperator

$$\mathbf{U}(\vec{a}) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\vec{\mathbf{P}}) \tag{552}$$

de volgende transformaties ($\vec{\mathbf{P}}$ is de totale impuls van het systeem),

$$\begin{aligned}
\vec{r}' &= \mathbf{U}\,\vec{r}\,\mathbf{U}^{-1} &&= \vec{r}-\vec{a} &&: \text{ ruimtecordinaten}\\
\vec{p}' &= \mathbf{U}\,\vec{p}\,\mathbf{U}^{-1} &&= \vec{p} &&: \text{ impulsen}\\
\vec{s}' &= \mathbf{U}\,\vec{s}\,\mathbf{U}^{-1} &&= \vec{s} &&: \text{ spins}
\end{aligned} \tag{553}$$

5.3 Lorentztransformaties vormen een groep

Groeptheorie is een belangrijk deel van de wiskundige beschrijving van de moderne fysica. In het volgende zullen we enkele aspecten hiervan demonstreren aan de hand van de Lorentztransformaties. We beginnen met de abstracte definities en gaan dan over naar representaties met matrices.

5.3.1 Definities

Een groep G is een verzameling van elementen, $g_1, g_2, .., g_n$ met een definitie van vermenigvuldiging. Dit betekent

1. $g_i \cdot g_j = g_k \in G$. Producten van elementen zijn ook elementen van de groep,
2. vermenigvuldiging is *associatief*, $(g_i \cdot g_j)\cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k)$,
3. het identiteits-element bestaat en is een element van de groep, $1 \in G$, $1 \cdot g_i = g_i \cdot 1 = g_i$,
4. de groep bevat een unieke inverse voor elk element, $g_i \in G \rightarrow g_i^{-1} \in G$, zodat $g_i \cdot g_i^{-1} = g_i^{-1} \cdot g_i = 1$.

Merk op dat het niet nodig is dat vermenigvuldiging commutatief is. We onderscheiden

$$\begin{aligned}
g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i &\quad \text{(commutatief)} \quad \text{een Abelse groep,}\\
g_i \cdot g_j \neq g_j \cdot g_i &\quad \text{(niet} - \text{commutatief)} \quad \text{een niet} - \text{Abelse groep.}
\end{aligned} \tag{554}$$

Als het aantal elementen eindig is ($n < \infty$), dan hebben we te maken met een eindige of discrete groep. De kleinste groep is de triviale groep met $n = 1$ en met enkel het element $g = 1$. Ga maar na dat aan alle eisen op een triviale manier voldaan is. In de natuurkunde hebben de relevante groepen een oneindig aantal elementen, maar kunnen de individuele elementen g gespecificeerd worden door een eindig aantal parameters N. Er geldt

$$g = G(x_1, x_2, .., x_N). \tag{555}$$

Van bijzonder belang zijn groepen waarvan de parameters continue variëren over een bepaald bereik. Het aantal parameters is eindig, maar het aantal elementen is dan oneindig. Als het bereik van deze parameters gebonden is (dus niet oneindig wordt), dan noemen we een dergelijke groep *compact*. Bijvoorbeeld, de parameterruimte van de compacte groep SO(3) is een bol met straal π. Tenslotte hebben de groepen die wij nu gaan beschouwen de additionele eigenschap dat de afgeleiden $\partial g/\partial x_i$ naar alle parameters bestaat. Groepen met deze eigenschap worden Lie groepen genoemd.

Als we naar het gedrag bij de oorsprong van de parameterruimte kijken, dan geldt per definitie dat

$$g(0,0,..,0) \equiv 1 \tag{556}$$

het identiteits-element is. In de buurt van de oorsprong van de parameterruimte corresponderen de groepelementen met infinitesimale transformaties en zijn de afgeleiden erg belangrijk. Men spreekt over de *generatoren* X_k en er geldt

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_{x_i=0,\ \text{all}\ j} \equiv X_k. \tag{557}$$

De generatoren definiëren de N-dimensionale algebra (vectorruimte), waar zowel optelling (van elementen van de algebra) als vermenigvuldiging met constanten gedefinieerd zijn. Het algemene element van deze Lie algebra kan worden uitgedrukt als een lineaire combinatie van de generatoren

$$\vec{X} = \sum_{k=1}^{N} c_k X_k. \tag{558}$$

Dit is analoog aan de vertrouwde drie-dimensionale vectorruimte, afgezien van het feit dat hier de generatoren de basisvectoren zijn (in plaats van $\vec{i}, \vec{j}$ en $\vec{k}$). We kunnen ons de generatoren voorstellen in termen van een soort Taylor expansie van de groepelementen in de buurt van de oorsprong. De groepelementen kunnen verkregen worden uit de elementen van de algebra door exponentiëren (we komen hier straks over te spreken).

De algebra laat ook de definitie van een vector product (uitproduct) toe, dat weer een element van de algebra produceert. De algebra is gesloten onder deze operatie. Dit product is de vertrouwde commutator

$$[X_k, X_l] \equiv X_k X_l - X_l X_k = C_{klm} X_m. \tag{559}$$

De tensor C_{ijk} wordt de *structuurconstante(n)* van de algebra genoemd en specificeert volledig de structuur van de algebra en hiermee van de groep zelf (in de buurt van de oorsprong van de parameterruimte).

5.3.2 Groeptheoretische aspecten van de Lorentztransformaties

We kunnen Lorentztransformaties (we kiezen als voorbeeld een boost in de z-richting) uitdrukken in matrixnotatie als

$$p^{\mu'} \equiv \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} p^{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \tag{560}$$

De invariantie van het scalair product impliceet de volgende eigenschap voor de matrixrepresentatie van de boost

$$p_1^{\mu'} p_{2\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} p_1^{\nu} g_{\mu\sigma'} \Lambda^{\sigma'}{}_{\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} g_{\nu\delta} p_2^{\delta} = p_1^{\nu} p_{2\nu} \to \Lambda^{\mu}{}_{\nu} g_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}{}_{\delta} = g_{\nu\sigma}. \tag{561}$$

Als we de eerste Λ transponeren, kunnen we de laatste relatie opschrijven in conventionele matrixnotatie. Er geldt

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \tag{562}$$

We gebruiken nu de eigenschappen van de metriek, $g^2 = 1$, $g = g^{-1} = g^T$ (merk op dat 1 staat voor de eenheidsmatrix) en vermenigvuldigen vergelijking (562) met g en vinden (merk op dat deze resultaten niet van de keuze van de metriek afhangen)

$$1 = g\Lambda^T g\Lambda \equiv \Lambda^{-1}\Lambda \to \Lambda^{-1} = g\Lambda^T g. \tag{563}$$

We hebben hiermee aangetoond dat zowel Λ als Λ^{-1} bestaat en het is ook makkelijk aan te tonen dat het resultaat van achtereenvolgende boosts weer een boost is, $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_3$. Dit zijn de eigenschappen die we eisen als boosts een groep moeten vormen. Het is ook eenvoudig te demonstreren dat boosts, net als rotaties, in het algemeen niet commuteren (dus $\Lambda_1\Lambda_2 \neq \Lambda_2\Lambda_1$). We verwachten dat de matrixvoorstelling van de boosts de representatie van een niet-Abelse groep is (dat is een groep waarvan de elementen niet commuteren). De groep is kwestie is de Lorentzgroep SO(3,1), waar de O staat voor "orthogonaal" en de notatie (3,1) uitdrukt dat we 3 ruimtelijke dimensies en 1 tijddimensie hebben, met verschillende tekens in de metriek.

Algemene 4×4 reële matrices hebben 16 reële parameters. We hebben echter te maken met bepaalde eisen die gesteld worden aan de Lorentzgroep. De matrixvergelijkingen (562) leveren 10 relaties (1 voor elke term op de diagonaal en 6 voor de niet-diagonale elementen)[65]. Er zijn dus $6 = 16 - 10$ parameters die de groep beschrijven. We laten geen reflecties toe in de "proper" Lorentzgroep (dat duiden we aan met de letter "S" in SO(3,1)) en eisen verder dat $\det(\Lambda) = +1$ (en niet -1). We staan ook de vorm $\mathrm{diag}(-1, -1, -1, -1)$ niet toe, hetgeen een reflectie in alle 4 dimensies voorstelt.

Deze 6 parameters kunnen makkelijk begrepen worden als de 3 Euler hoeken die de gebruikelijke rotaties in de 3D-ruimte voorstellen (dat zijn orthogonale transformaties die de lengte van 3-vectoren invariant houden) plus de 3 parameters die de boosts zelf beschrijven. Deze laatste transformaties kunnen we ons voorstellen als de "hyperbolische" (imaginaire) rotaties die de tijddimensie met een van de ruimtelijke dimensies mengt. Ze zijn orthogonaal in de zin dat ze de lengte van 4-vectoren behouden die gedefinieerd zijn in termen van het geschikte scalaire product. Het feit dat de metriek de 4 dimensies niet op dezelfde manier behandelt, verklaart de $(3, 1)$ notatie[66]. De relatie is bijzonder helder als we de uitdrukking voor de gebruikelijke rotatie over een hoek ϕ om de z-as (hetgeen de x en y componenten mengt; zie ook vergelijking (63)) vergelijken met een boost in de z-richting geschreven in termen van de rapidity y_u (hetgeen de t en z componenten mengt; zie ook vergelijking (67)). We vinden

$$\Lambda(\{x, y\}, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{564}$$

en

$$\Lambda(\{t, z\}, y_u) = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}. \tag{565}$$

De basisvormen zien er hetzelfde uit. De boosts hebben enkel hyperbolische functies.

We kunnen de volledige transformatie uitdrukken in exponentiële vorm als

$$\Lambda = e^L = 1 + L + \frac{L^2}{2} + ... \tag{566}$$

[65] De elementen boven de diagonaal zijn identiek aan die onder de diagonaal, want als de vergelijking transponeren, krijgen we weer dezelfde vergelijking: $(\Lambda^T g\Lambda)^T = \Lambda^T g\Lambda$.

[66] In de Euclidische 4D-ruimte, waarin de metriek $\mathrm{diag}(1, 1, 1, 1)$ is, vindt men SO(4).

waar L zelf weer een reële 4×4 matrix is. We kunnen ons L voorstellen als een generator van "kleine" transformaties, die we dan itereren ot een volledige transformatie Λ. Omdat we enkel de "proper" transformatie toestaan, geldt

$$\det(\Lambda) = e^{\mathrm{Tr}(L)} = 1 \to \mathrm{Tr}(L) = 0. \tag{567}$$

We vinden dus dat L traceless en reëel moet zijn. Evenzo hebben we

$$\Lambda^T = e^{L^T} = 1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + ... \tag{568}$$

en

$$\Lambda^{-1} = g\Lambda^T g = e^{-L} = g\left(1 + L^T + \frac{L^T L^T}{2} + ...\right)g = gg + gL^T g + \frac{gL^T ggL^T g}{2} + ... = e^{gL^T g}. \tag{569}$$

We nemen de logaritme van bovenstaande uitdrukking en gebruiken $g = g^{-1} = g^T$ en vinden

$$gL^T g = -L \to L^T g = (gL)^T = -gL. \tag{570}$$

Aldus vinden we dat gL zowel spoorloos als antisymmetrisch is, terwijl L spoorloos is en gemengde symmetrie heeft. Hij heeft precies de 6 vrije componenten die we nodig hebben om SO(3,1) te representeren: de 6 niet-diagonale componenten van een spoorloze, antisymmetrische 4×4 tensor. We kunnen de algemene uitdrukking voor L schrijven als

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & -L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & -L_{13} & -L_{23} & 0 \end{pmatrix}, \tag{571}$$

met L_{01}, L_{02} en L_{03} de boosts en L_{12}, L_{13} en L_{23} de rotaties.

In de 6-dimensionale vectorruimte van deze matrices kunnen we de volgende verzameling matrices als basis kiezen. Deze matrices vormen een representatie van de generatoren van SO(3,1), dus van de elementen van haar algebra. We kiezen

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{572}$$

We herkennen de eerste rij als de gebruikelijke basisset voor rotaties: S_1 genereert een rotatie om de x-as (en mengt y en z), S_2 een rotatie om de y-as en S_3 om de z-as. De matrices in de tweede rij representeren de corresponderende generatoren van de boosts in de x, y en z richtingen. Het is eenvoudig te controleren dat zowel S_i^2 als K_i^2 diagonale matrices zijn (elke S_i^2 heeft twee -1 elementen op de diagonaal, terwijl elke K_i^2 twee $+1$ elementen heeft). Verder geldt $S_i^3 = -S_i$ en $K_i^3 = K_i$. Bijvoorbeeld

$$S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad K_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{573}$$

Vervolgens definiëren we twee reële vectoren

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad \text{en} \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3), \tag{574}$$

die de 6 parameters bevatten die we nodig hebben. Met de producten

$$\begin{aligned} \vec{\theta} \cdot \vec{S} &\equiv \theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 + \theta_3 S_3, \\ \vec{y} \cdot \vec{K} &= y_1 K_1 + y_2 K_2 + y_3 K_3, \end{aligned} \tag{575}$$

kan men eenvoudig laten zien dat

$$\begin{aligned} \left(\vec{\theta} \cdot \vec{S}\right)^3 &= -\vec{\theta} \cdot \vec{S} \left|\vec{\theta}\right|^2, \\ \left(\vec{y} \cdot \vec{K}\right)^3 &= -\vec{y} \cdot \vec{K} |\vec{y}|^2. \end{aligned} \tag{576}$$

Bovenstaande relaties vereenvoudigen de taak van het expanderen van de volgende uitdrukkingen

$$L = -\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K} \quad \text{en} \quad \Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^{-\vec{\theta} \cdot \vec{S} - \vec{y} \cdot \vec{K}}, \tag{577}$$

waar de keuze van het teken (-1) aangeeft dat we het referentiesysteem transformeren, en niet de toestandsvectoren. We demonstreren het formalisme aan de hand van twee voorbeelden.

Voorbeeld: passieve rotatie van de assen rond de z-as

We kiezen de vectoren $\vec{\theta} = (0, 0, \phi)$ en $\vec{y} = (0, 0, 0)$. Het is eenvoudig te verifiëren dat

$$-\vec{\theta} \cdot \vec{S} = -\phi S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 \\ 0 & -\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{578}$$

Ook geldt

$$\left(-\vec{\theta} \cdot \vec{S}\right)^2 = \phi^2 S_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \left(-\vec{\theta} \cdot \vec{S}\right)^3 = -\phi^2(-\phi S_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\phi^3 & 0 \\ 0 & \phi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{579}$$

We schrijven

$$e^{-\phi S_3} = -S_3 \left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + ...\right) - S_3^2 \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + ...\right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{580}$$

We gebruiken de reeksontwikkelingen van de goniometrische functies en vinden

$$e^{-\phi S_3} = -S_3 \sin\phi - S_3^2 \cos\phi + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{581}$$

We herkennen de "passieve" rotatie om de z-as (vergelijk dit met uitdrukking (564).

Voorbeeld: een boost langs de z-as

We kiezen de vectoren $\vec{\theta} = (0, 0, 0)$ en $\vec{y} = (0, 0, y_u)$. We schrijven weer

$$-\vec{y} \cdot \vec{K} = -y_u K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{582}$$

Ook geldt

$$\left(-\vec{y}\cdot\vec{K}\right)^2 = y_u^2 K_3^2 = \begin{pmatrix} y_u^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_u^2 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \left(-\vec{y}\cdot\vec{K}\right)^3 = -y_u^2(-y_u K_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -y_u^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_u^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (583)$$

We schrijven de volledige boost als

$$e^{-y_u K_3} = -K_3\left(y_u - \frac{y_u^3}{3!} + ...\right) + K_3^2\left(1 - \frac{y_u^2}{2!} + ...\right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (584)$$

We gebruiken de reeksontwikkelingen van de hyperbolische functies en vinden

$$e^{-y_u K_3} = -K_3 \sinh y_h + K_3^2 \cosh y_u + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y_u & 0 & 0 & -\sinh y_u \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh y_u & 0 & 0 & \cosh y_u \end{pmatrix}. \quad (585)$$

We herkennen de boost langs de z-as (vergelijk dit met uitdrukking (565).

We weten dat een groep waarvan de elementen geparametriseerd zijn in termen van continue variabelen (in ons specifieke geval de θ_i en y_i) een Lie groep wordt genoemd. De partiële afgeleiden van de groepelementen naar deze parameters in de buurt van het identiteitselement (dat is nabij de oorsprong in de parameterruimte)

$$\left.\frac{\partial\Lambda(\vec{\theta},\vec{y})}{\partial\theta_k}\right|_{\vec{\theta}=0,\vec{y}=0} \equiv -S_k, \quad \text{en} \quad \left.\frac{\partial\Lambda(\vec{\theta},\vec{y})}{\partial y_l}\right|_{\vec{\theta}=0,\vec{y}=0} \equiv -K_l \quad (586)$$

worden de *generatoren* van de groep genoemd (modulo factoren i). Zoals reeds eerder opgemerkt is deze naamgeving toepasselijk omdat deze matrices (operatoren) geassocieerd zijn met het genereren van infinitesimale transformaties. De commutatoren van de generatoren definiëren de Lie algebra van de (Lie) groep. We hebben bijvoorbeeld

$$[S_1,S_2] = S_3,\ [S_2,S_3] = S_1 \quad \text{en} \quad [K_1,K_2] = -S_3,\ [S_1,K_2] = K_3, \quad (587)$$

etc. De algemene structuur is bespreken we in de volgende sectie.

5.3.3 Connectie met quantummechanica

We hebben de Lorentzgroep beschouwd en gevonden dat

$$g(\vec{\theta},\vec{y}) = \Lambda(\vec{\theta},\vec{y}) = e^L, \quad \text{met} \quad L = -\vec{\theta}\cdot\vec{S} - \vec{y}\cdot\vec{K}. \quad (588)$$

We herkennen de matrices $\vec{S}$ en $\vec{K}$ als matrixrepresentaties van (minus) de generatoren van de groep SO(3,1). We hebben gezien dat de verschillende matrices niet commuteren en de elementen van de groep doen dat ook niet,

$$e^{-\theta_1 S_1}e^{-\theta_2 S_2} \neq e^{-\theta_2 S_2}e^{-\theta_1 S_1} \neq e^{-\theta_1 S_1 - \theta_2 S_2}. \quad (589)$$

Dit is een niet-Abelse groep. Merk op dat in het algemeen geldt dat

$$e^A e^B = e^B e^A \quad \text{enkel en alleen als} \quad [A,B] = 0. \quad (590)$$

Als geldt dat

$$[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0; \quad [A,B] \neq 0, \quad (591)$$

dan vinden we

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}. \tag{592}$$

Dit wordt het Baker-Hausdorf Lemma genoemd.

De matrices S en K werden als reële matrices gedefinieerd. We willen echter de generatoren van de groep relateren aan fysische operatoren in de quantummechanica, en dat zijn *Hermitische* operatoren die waarschijnlijkheid behouden. We verwachten dat deze operatoren door Hermitische matrices gerepresenteerd worden (dus dat geldt $M^\dagger = \left(M^T\right)^\star = M$). Met deze Hermitische notatie definiëren we 6 nieuwe matrices

$$J_k = iS_k \quad \text{en} \quad \tilde{K}_k = iK_k \ (k = 1, 2, 3), \tag{593}$$

waar de J_k (maar niet de $\tilde{K}_k$) Hermitische matrices zijn. Er geldt

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad \tilde{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{594}$$

We herkennen de J_k als de Hermitische representatie van de operatoren voor het impulsmoment. Met deze keuze wordt de SO(3,1) groep gerepresenteerd door

$$\Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J} + i\vec{y}\cdot\vec{\tilde{K}}}. \tag{595}$$

Verder definiëren we de generatoren als

$$\left.\frac{1}{i}\frac{\partial g}{\partial x_k}\right|_{x_j=0 \quad \text{voor alle } j} \equiv Y_k \quad \text{en} \quad [Y_j, Y_k] = iC_{jkl}Y_l, \tag{596}$$

en vinden de gebruikelijke uitdrukkingen in de quantummechanische context. We kunnen de specifieke uitdrukkingen voor de matrices gebruiken en vinden de elementen van de structuurconstanten van de groep SO(3,1) in Hermitische vorm als

$$[J_j, J_k] = i\epsilon_{jkl}J_l, \quad \left[J_j, \tilde{K}_k\right] = i\epsilon_{jkl}\tilde{K}_l, \quad \text{en} \quad \left[\tilde{K}_j, \tilde{K}_k\right] = -i\epsilon_{jkl}J_l. \tag{597}$$

We gebruiken het Levi-Civita symbool ϵ_{jkl} dat een unieke volledige antisymmetrische 3-tensor in 3 dimensies voorstelt $(j, k, l = 1, 2, 3)$), $1 = \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321}$, terwijl alle andere componenten gelijk aan nul zijn (merk op dat $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$). We zien dat het product van twee rotaties weer een rotatie is. De rotaties vormen een groep. Deze groep is SO(3) en kennen we uit de quantummechanica. Dat geldt echter niet voor het product van twee boosts (in verschillende richtingen), hetgeen resulteert in de combinatie van een boost en een rotatie.

We kunnen het formalisme nog verder voeren en beschouwen hiertoe de matrices J_k en $\tilde{K}_k$ als de 6 niet-nul componenten van een antisymmetrische tensor in de 4-dimensionale ruimtetijd, in plaats van als 2 verschillende 3-vectoren. We maken dit expliciet en definiëren de tensoren $M_{\mu\nu}$ en $\omega^{\mu\nu}$ met $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ als

$$\begin{aligned} M_{kl} = \epsilon_{klm} J_m \quad k,l,m = 1,2,3, \quad \text{en} \quad M_{k0} = \tilde{K}_k = -J_{0k}, \\ \omega^{kl} = \epsilon_{klm} \theta_m \quad k,l,m = 1,2,3, \quad \text{en} \quad \omega^{k0} = y_k = -\omega^{0k}. \end{aligned} \tag{598}$$

We kunnen de groep nu representeren als

$$\Lambda(\vec{\theta}, \vec{y}) = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{J} + i\vec{y}\cdot\vec{\tilde{K}}} = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}}. \tag{599}$$

De transformaties van de groep SO(3,1) behouden niet alleen de "lengte" van 4-vectoren (dus $r^\mu r_\mu$), maar laten ook de twee tensoren $g_{\mu\nu}$ (de metrische tensoren) en $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ (het 4D analogon van ϵ_{ijk}) invariant.

Wigner realiseerde zich dat de echte symmetriegroep voor deeltjesfysica niet de homogene Lorentzgroep is, maar dat die ook de translaties in ruimtetijd dient te bevatten. Deze inhomogene Lorentzgroep staat bekend als de Poincaré groep. De generator van ruimtetijd translaties P_μ wordt gegeven door

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu\prime} = x^\mu + a^\mu \quad \text{en} \quad P_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{600}$$

Er zijn 4 translatie operatoren in de Poincaré groep, en ook 3 generatoren voor Lorentz boosts en 3 generatoren voor rotaties. In totaal zijn er 10 generatoren in de Poincaré groep, die we met behulp van vergelijking (598) kunnen schrijven als

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i\left(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right), \quad (\mu,\nu,\rho,\sigma = 0,1,2,3). \tag{601}$$

De commutatierelaties voor de translatie generatoren zijn

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= i\left(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho\right). \end{aligned} \tag{602}$$

De algemene inhomogene Lorentztransformaties die de Lorentz boosts, rotaties en ruimtetijd translaties bevatten, worden gegeven door

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \tag{603}$$

waarbij de matrix Λ die de boosts en rotaties bevat, gegeven wordt door vergelijking (599). Noethers theorema is bekend uit de mechanica en stelt dat er met elke symmetrie die door lokale acties gegenereerd wordt, een behouden stroom correspondeert. Met symmetrie wordt bedoeld de covariantie van de vorm die een natuurkundige wet heeft met betrekking tot een één-dimensionale Lie groep. We kunnen Noethers theorema toepassen op bovenstaande symmetriën en vinden dat de translatie in de tijd leidt tot de wet van behoud van energie, translaties in positie tot behoud van impuls, en de rotaties tot behoud van impulsmoment.

We kunnen de algemene transformatie van de Poincaré groep aangeven met de notatie $\{\Lambda, a\}$. Het eenheidselement wordt aangegeven met $\{1, 0\}$ en de samengestelde transformatie $\{\bar{\Lambda}, \bar{a}\}\{\Lambda, a\}$ levert

$$x^{\mu\prime\prime} = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \left(x^{\nu\prime}\right) + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \left(\Lambda^\nu{}_\rho x^\rho + a^\nu\right) + \bar{a}^\mu = \bar{\Lambda}^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho x^\rho + \left(\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu + \bar{a}^\mu\right). \tag{604}$$

Tenslotte merken we op dat er slechts twee invarianten zijn in de Poincaré groep die commuteren met alle generatoren. Dat zijn de Casimir invarianten (of Casimir operatoren)[67]. De eerste

[67] De Poincaré groep heeft rang 2, zodat er enkel twee invarianten zijn. In het algemeen is de rang van een SO(N) groep gelijk aan $N/2$ als N even is en $(N-1)/2$ als N oneven is.

Casimir invariant C_1 is geassocieerd met de massa invariantie, en de tweede Casimir invariant C_2 refereert aan spin invariantie. Er geldt

$$C_1 \equiv P^\mu P_\mu, \quad \text{en} \quad C_2 \equiv W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1), \tag{605}$$

met s de spin van het deeltje, en W_μ de zogenaamde Pauli-Lubanski pseudo-vector die gedefinieerd is als

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma. \tag{606}$$

Het is opmerkelijk dat slechts uitgaande van de Minkowski-metriek en het bijbehorende Lorentz-invariante lijnelement, toepassing van wiskunde in de vorm van de groeptheoretische beschouwing van transformaties die dit lijnelement invariant laten, ons geleid hebben tot belangrijke behoudswetten en essentiële definities van massa en spin in de vorm van Casimir operatoren.

5.4 Behoud van lading

Indien lading niet behouden zou zijn, dan zou het elektron kunnen vervallen, bijvoorbeeld in een foton en een (elektron) neutrino[68]

$$e \to \gamma + \nu_e. \tag{607}$$

Dit proces is tot nu toe niet waargenomen. Bij het verdwijnen van een gebonden elektron dient, wanneer het ontstane gat weer gevuld wordt, karakteristieke röntgenstraling uitgezonden te worden. De levensduur van het elektron is groter dan 4.3×10^{23} jaar[69]. Verder zijn er veel aanwijzingen dat alle ladingen een heeltallig veelvoud zijn van de elementaire lading (bijvoorbeeld het experiment van Millikan, de neutraliteit van atomen)

$$q = Qe. \tag{608}$$

We nemen daarom aan dat het ladingsgetal een additief behouden, discrete, grootheid is. In elke willekeurige reactie

$$a + b + .. + i \to c + d + .. + f \tag{609}$$

is de som van de bijbehorende ladingsgetallen constant.

$$\sum Q_i = \sum Q_f \tag{610}$$

Wat is hier het bijbehorende symmetrieprincipe?

Stel dat ψ_q de golffunctie is van een object met lading q,

$$i\hbar\frac{\partial\psi_q}{\partial t} = \mathbf{H}\psi_q, \tag{611}$$

en $\mathbf{Q}$ is de *ladingsoperator*. Indien $< Q >$ behouden is, dan geldt

$$[\mathbf{H},\ \mathbf{Q}] = 0, \tag{612}$$

en ψ_q is gelijktijdig een eigenfunctie van $\mathbf{Q}$ met eigenwaarde q,

$$\mathbf{Q}\psi = q\psi. \tag{613}$$

[68] Als we het argument omkeren, dan garandeert de wet van behoud van lading de stabiliteit van de lichtste geladen deeltjes.

[69] De samenhang tussen de wet van behoud van lading en het Pauli principe wordt besproken door bijvoorbeeld L.B. Okun, Physics Letters **B239** (1990).

De bijbehorende symmetrie werd door Hermann Weyl[70] gevonden

$$\psi'_q = e^{i\epsilon\mathbf{Q}}\psi_q. \tag{614}$$

Dergelijke symmetrietransformaties heten *ijktransformaties* en spelen tegenwoordig een grote rol in de deeltjesfysica. *IJkinvariantie* betekent weer dat de getransformeerde golffuncties dienen te voldoen aan dezelfde Schrödingervergelijking,

$$i\hbar\frac{\partial\psi'_q}{\partial t} = \mathbf{H}\psi'_q. \tag{615}$$

We zullen in het vervolg nog een hele reeks van gelijksoortige behouden grootheden vinden (baryongetal B, leptongetallen L_e, L_μ en L_τ, enzovoort).

5.4.1 Lokale ijksymmetrieën

We hebben gezien dat een *globale ijktransformatie*, $\epsilon = \text{constant} \neq \epsilon(\vec{r},t)$, leidt tot ladingsbehoud, waarbij we dienen op te merken dat we deze lading nog niet hebben geïdentificeerd met de elektrische lading. Elektrische lading is behouden in *elk* ruimtetijd punt, en we hebben te maken met een *lokale* behoudswet. Het is daarom wenselijk, maar ook esthetisch aantrekkelijk, om de fase van de golffunctie, $e^{i\epsilon\mathbf{Q}}$, vrij te kunnen kiezen, op *elk* ruimtetijd punt. We willen vergelijking (614) voor de golffunctie van een geladen deeltje (bijvoorbeeld een quark, of een geladen lepton) generaliseren naar

$$\psi'_q = e^{i\epsilon(\vec{r},t)\mathbf{Q}}\psi_q = e^{i\epsilon(x)\mathbf{Q}}\psi_q. \tag{616}$$

De oneindige set fasetransformaties (616) vormen een unitaire groep genaamd U(1). Omdat $\epsilon(x)$ een scalaire grootheid is, wordt de groep U(1) Abels genoemd[71]. De lokale ijktransformatie (616) creëert *verschillende* fases voor ψ_q op verschillende lokaties in ruimtetijd. De beschrijving van een *vrij* geladen deeltje wordt gegeven door vergelijking (611) en bevat afgeleiden naar $x = t, \vec{x}$. Deze afgeleiden zijn *niet* invariant onder lokale ijktransformaties. We zien bijvoorbeeld

$$\frac{\partial\psi'_q}{\partial t} = e^{i\epsilon(x)\mathbf{Q}}\frac{\partial\psi_q}{\partial t} + e^{i\epsilon(x)\mathbf{Q}}\frac{\partial\epsilon}{\partial t}\psi \neq e^{i\epsilon(x)\mathbf{Q}}\frac{\partial\psi_q}{\partial t}. \tag{617}$$

De tweede term, met $\partial\epsilon/\partial t$, bevat willekeurige functies van ruimtetijd en deze verhinderen de invariantie van de vergelijkingen. We dienen nieuwe dynamica toe te voegen aan het systeem, indien we aan het principe van lokale symmetrie willen vasthouden. Lokale ijkinvariantie kan bereikt worden door een nieuw dynamisch veld in te voeren, en ons deeltje (quark of geladen lepton) te laten koppelen aan dat veld. Voordat we deze procedure uitvoeren, maken we een korte excursie naar de elektrodynamica[72].

[70] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover New York, 1950.

[71] Meer complexe fasetransformaties zijn ook mogelijk, waarbij deze worden gespecificeerd door niet-commuterende operatoren. Men spreekt dan van niet-Abelse groepen. Zo is de groep SU(2) de basis van de elektrozwakke wisselwerking, en de groep SU(3) de basis van de quantum chromodynamica.

[72] De klassieke elektrodynamica wordt volledig gegeven door de vergelijkingen van Maxwell. Deze beschrijven de gekoppelde elektrische, $\mathbf{E}$, en magnetische, $\mathbf{B}$, velden en er geldt,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} &= \tfrac{\rho}{\epsilon_0} && \text{wet van Coulomb,}\\
\nabla\times\mathbf{B} - \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0\mathbf{J} && \text{wet van Ampre,}\\
\nabla\times\mathbf{E} + \tfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && \text{wet van Faraday,}\\
\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 && \text{geen magnetische monopolen.}
\end{aligned} \tag{618}$$

We definiëren de *vector* en *scalaire* potentialen, $\mathbf{A}$ en ϕ, waarvoor geldt

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{en} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}}. \tag{622}$$

Hiermee kunnen we het systeem van gekoppelde vergelijkingen vereenvoudigen. Het is reeds lang bekend, dat met vergelijking (622) de velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ niet uniek gedefinieerd zijn. Historisch gezien is dit de eerste manifestatie van een ijksymmetrie, en wel in de klassieke elektrodynamica. We zien namelijk dat $\mathbf{B}$ en $\mathbf{E}$ in vergelijking (622) invariant zijn als we $\mathbf{A}$ en ϕ vervangen door

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\epsilon, \quad \text{en} \quad \phi' = \phi + \frac{\partial \epsilon}{\partial t}. \tag{623}$$

De grootheid $\epsilon(\vec{r}, t) = \epsilon(x)$ is een *willekeurige* scalaire functie van ruimtetijd. Elke lokale verandering in de elektrische potentiaal kan gecombineerd worden met een corresponderende verandering in de magnetische potentiaal, zodanig dat $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ invariant zijn. Dergelijke herdefinities hebben dus geen gevolgen voor de klassiek observabele velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$, en we concluderen dat de klassieke elektrodynamica een ijkinvariant formalisme is. We kunnen deze vrijheid in de definitie van de potentialen gebruiken om ongekoppelde (of in ieder geval meer eenvoudige) differentiaalvergelijkingen te verkrijgen voor $\mathbf{A}$ en ϕ.

Deze formele behandeling van de elektromagnetische potentialen krijgt een nieuwe en belangrijke betekenis als we het quantumgedrag van een geladen deeltje beschouwen in een ijkinvariante theorie. De waarschijnlijkheid om het deeltje ergens aan te treffen wordt gegeven door de golffunctie ψ_q. Het is belangrijk in te zien dat ψ_q niet het elektrische veld van een deeltje (bijvoorbeeld een elektron), maar het *materiële* veld voorstelt. We hebben gezien dat de eis van lokale ijksymmetrie van de golffunctie *verschillen* in fase creëerde tussen verschillende ruimtetijd coördinaten. We kunnen verhinderen dat deze arbitraire effecten observabel worden door de elektromagnetische potentialen te gebruiken als *ijkvelden*. Als we de functie $\epsilon(x)$ in vergelijking (617) identiek kiezen aan de functie in vergelijkingen (761), dan compenseert de ijktransformatie van $\mathbf{A}$ en ϕ precies de willekeurige faseveranderingen van de golffunctie ψ_q. Omdat de faseverschillen over willekeurig grote afstanden gecompenseerd dienen te worden, dient het ijkveld, $A_\mu = (A_0, \vec{A}) = (\phi, \mathbf{A})$ een oneindige dracht te hebben. Het hiermee corresponderende quantum, het foton, dient daarom een massa te hebben die bij gelijk is aan nul. Het ijkveld A_μ is een *vectorveld* en daarom dient de spin van het ijkdeeltje gelijk te zijn aan één. Het opgestelde formalisme voor ψ_q, $\mathbf{A}$ en ϕ vertegenwoordigt hiermee een theorie die lokaal ijkinvariant is.

Teneinde deze lokale ijkinvariantie te demonstreren, gaan we over van de bewegingsvergelijking van een vrij deeltje naar die van een deeltje dat wisselwerkt met het ijkveld. Hiertoe herdefiniëren we de energie- en impulsoperatoren,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi, \quad \text{en} \quad \frac{\hbar}{i}\nabla \to \frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}, \tag{624}$$

We beschouwen de velden in het vacuüm veroorzaakt door de ladings- en stroomdichtheden ρ en $\mathbf{J}$. Deze grootheden gehoorzamen aan *lokale* behoudswetten, die verkregen kunnen worden door afgeleiden te nemen van de Maxwellvergelijkingen. Er geldt

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{619}$$

en

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2}\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J}. \tag{620}$$

Vervolgens maken we gebruik van de relaties $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ en $1/c^2 = \mu_0\epsilon_0$, en vinden de gezochte relatie tussen lading en stroom, die geldig is op elke lokatie.

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{t}} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{621}$$

en kunnen we de Schrödingervergelijking voor een geladen deeltje dat wisselwerkt met het ijkveld A_μ schrijven als,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi_q = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)^2\psi_q. \tag{625}$$

Deze substituties worden de *minimale substitutie* genoemd, en de Schrödingervergelijking is hiermee lokaal ijkinvariant en we hebben

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t} - q\phi'\right)\psi_q' &= e^{i\epsilon\mathbf{Q}}\left(i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi_q, \\ \tfrac{1}{2m}\left(\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}'\right)^2\psi_q' &= e^{i\epsilon\mathbf{Q}}\tfrac{1}{2m}\left(\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)^2\psi_q. \end{aligned} \tag{626}$$

De structuur van vergelijking (760) is kennelijk zodanig dat de willekeurige faseveranderingen van ψ_q opgeheven worden door het ijkgedrag van $\mathbf{A}$ en ϕ. De interpretatie van de parameter q wordt duidelijk als we vergelijking (760) herschrijven als

$$i\hbar\frac{\partial\psi_q}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)^2\psi_q + q\phi\psi_q. \tag{627}$$

We zien hier de vertrouwde uitdrukking voor de Schrödingervergelijking van een deeltje in een elektromagnetisch veld, waarbij de tweede term de elektrostatische potentiële energie (Coulomb energie) vertegenwoordigt, $V = q\phi$. We kunnen q nu identificeren met de elektrische lading.

Samenvattend komen we tot de opmerkelijke conclusie dat de eis van lokale ijkinvariantie zowel het *bestaan* als de *vorm* van de interactie dicteert. Uit het formalisme volgt dat de massa van het ijkdeeltje, het foton, gelijk moet zijn aan nul. Verder dient de spin van het ijkdeeltje gelijk te zijn aan één. Het principe van ijksymmetrie kan ook toegepast worden op de relativistische golfvergelijking voor spin-$\frac{1}{2}$ deeltjes, de Diracvergelijking. De eis dat aan lokale U(1) symmetrie dient te zijn voldaan, leidt dan tot de ijkinvariante theorie die quantumelektrodynamica heet.

5.4.2 Behoud van baryongetal

Gelukkig is ook het proton stabiel. De levensduur is voor een groot aantal vervalkanalen[73] gemeten, en is groter dan 10^{30} jaar. Enkele voorbeelden zijn

$$\begin{array}{lll} p & \to e^+\pi^0 & \tau > 5.5\times10^{32}\ \text{jaar} \\ p & \to \mu^+\pi^0 & \tau > 2.7\times10^{32}\ \text{jaar} \\ p & \to e^+\gamma & \tau > 4.6\times10^{32}\ \text{jaar} \\ p & \to e^+\ \text{wat dan ook} & \tau > 0.6\times10^{30}\ \text{jaar.} \end{array} \tag{628}$$

Tegenwoordig wordt met de allergrootste inspanning gezocht naar het verval van het proton, omdat bepaalde theoretische modellen een eindige levensduur τ_p van het proton van ongeveer 10^{33} jaar voorspellen. Tot nu toe kon er geen eenduidig protonverval aangetoond worden.

Het bovenstaande is een van de redenen, waarom men, volledig analoog aan het ladingsgetal Q, een baryongetal B invoert, dat strikt behouden is. We willen echter op *een* verschil wijzen: in een veldentheorie met een lokale ijksymmetrie volgt uit een exact behouden grootheid (zoals bijvoorbeeld de lading) het bestaan van een veld (een ijkveld) met een lange dracht, dat aan deze lading koppelt. Tot nu toe kon er echter geen wisselwerking met lange dracht gevonden worden, die verbonden is met het baryongetal: het equivalentieprincipe verlangt dat de verhouding van

[73] Het zal duidelijk zijn dat het verval $p \to 3\nu$, dat ook nog ladingsbehoud schendt, moeilijk experimenteel te meten zal zijn. Ook kan men zich nog afvragen of het verval $p \to$ NIETS, dat energiebehoud schendt, 'denkbaar' is.

zware en trage massa voor alle objecten gelijk is. Dit heeft men bijvoorbeeld voor de elementen Al en Pt met een nauwkeurigheid van ongeveer 10^{-12} gecontroleerd. Omdat voor deze beide elementen de verhouding van massa en baryongetal, vanwege de verschillende bindingsenergieën, aanzienlijk verschillend is, volgt hieruit dat de bewuste koppeling aan het baryongetal zeker een factor 10^9 zwakker is dan de gravitatie.

Bij het verval van het neutron zijn de lading, baryongetal (en leptongetal) behouden.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & n & \rightarrow & p & + & e^- & + & \bar{\nu}_e \\ \\ Q & : & 0 & = & 1 & - & 1 & + & 0 \\ B & : & 1 & = & 1 & + & 0 & + & 0 \\ L_e & : & 0 & = & 0 & + & 1 & - & 1 \end{array} \tag{629}$$

Het proton en neutron zijn de enige 'gewone' deeltjes, die een baryonlading dragen. Er bestaat echter een reeks van resonanties of aangeslagen toestanden, die eveneens $B = 1$ hebben: N(1440), N(1550), ..; $\Delta(1232)$, $\Delta(1620)$, ..; Λ_0, $\Sigma^\pm$, Σ^0, Ξ^0, Ξ^-, Ω^-, enzovoort. Al deze deeltjes zijn, zoals we tegenwoordig aannemen, uit drie quarks samengesteld, die elk een baryongetal $B = \frac{1}{3}$ dragen. De corresponderende antibaryonen, die uit drie antiquarks zijn samengesteld, hebben $B = -1$.

Bij alle kernen is natuurlijk het baryongetal gelijk aan het aantal nucleonen (A), en dus

$$B = A = N + Z. \tag{630}$$

In het geval van leptonen, $e^\pm$, ν_e, $\bar{\nu}_e$, $\mu^\pm$, enzovoort en mesonen, die uit een quark-antiquark paar zijn opgebouwd, hebben we dat $B = 0$.

Bij alle vervalprocessen en reacties die men tot nu toe heeft waargenomen, is steeds het baryongetal behouden. We weten echter niet waarom[74].

5.4.3 Behoud van leptongetal

Ook in reacties met lichte deeltjes heeft men ontdekt dat, analoog aan het geval van baryonen, deze steeds in paren optreden. Men heeft bijvoorbeeld de reactie

$$\gamma \rightarrow e^+e^- \qquad \text{in het veld van een kern.} \tag{631}$$

Verder constateert men dat bepaalde reacties toegestaan en weer andere verboden zijn. Om deze waarnemingen te kunnen 'verklaren' heeft men een leptongetal L ingevoerd, en gepostuleerd dat dit in alle wisselwerkingen behouden is. Hiertoe beschouwen we eerst twee gewone β-vervallen,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & n & \rightarrow & p & + & e^- & + & \bar{\nu}_e \\ & & {}^3\mathrm{H} & \rightarrow & {}^3\mathrm{He} & + & e^- & + & \bar{\nu}_e \\ \\ L_e & : & 0 & = & 0 & + & 1 & - & 1. \end{array} \tag{632}$$

Indien we aan het elektron $L_e = 1$ toekennen[75], dan volgt voor het gelijktijdig uitgezonden neutrino $\bar{\nu}_e$ een $L_e = -1$ en we noemen het daarom een antineutrino. Later zullen we nog zien dat de quantumgetallen, die verwant zijn aan de lading, het tegenovergestelde teken krijgen voor

[74] Een antwoord in de trant van 'omdat er een corresponderende ijkinvariantie bestaat', verschuift slechts de vraagstelling!

[75] We schrijven hier L_e voor het elektronische leptongetal, omdat er nog twee verdere leptongetallen (L_μ, en L_τ) worden ingevoerd (we worden hiertoe later gedwongen).

antideeltjes (de lading zelf is bijvoorbeeld voor een positron, het antideeltje van het elektron, positief; voor een antiproton negatief). Hiermee lijkt het natuurlijk, om voor β-verval de volgende leptongetallen aan te nemen,

$$\begin{array}{lrcrcrcl l} & p & \rightarrow & n & + & e^+ & + & \nu_e & \text{in kernen} \\ \text{bijvoorbeeld} & {}^{35}\mathrm{Ar} & \rightarrow & {}^{35}\mathrm{Cl} & + & e^+ & + & \nu_e & \text{typisch } \beta^+ - \text{verval} \\ L_e \ : & 0 & = & 0 & - & 1 & + & 1 & \\ \text{of} & {}^{37}\mathrm{Ar} & + & e^- & \rightarrow & {}^{37}\mathrm{Cl} & + & \nu_e & \\ L_e \ : & 0 & + & 1 & = & 0 & + & 1 & . \end{array} \tag{633}$$

Uit de kinematica van het β-verval (kurieplot) weten we dat de massa's van ν_e en $\bar{\nu}_e$ nul zijn (of tenminste dat die zeer klein zijn, $m_{\bar{\nu}_e} < 10 - 15$ eV/c^2). Uit het behoud van impulsmoment kunnen we concluderen dat de spin van het neutrino gelijk is aan $\frac{1}{2}$. De ladingen zijn gelijk aan nul en de beide deeltjes hebben slechts een zeer geringe wisselwerking met materie. Ze kunnen bijvoorbeeld zonder meer dwars door de aarde heenvliegen, zonder geabsorbeerd te worden.

In welk opzicht zijn het elektron-neutrino en elektron-antineutrino dan verschillend? - In hun leptongetal! We kunnen experimenteel aantonen dat de leptongetallen (met de geassocieerde behoudswetten) een zinvol concept vormen. Een mogelijkheid is de studie van neutrino reacties. Het is echter niet zo eenvoudig om reacties met neutrinos te bestuderen. Vanwege de buitengewoon kleine werkzame doorsnede duurde het bijvoorbeeld bijna twintig jaar, voordat het bestaan van het door Wolfgang Pauli in 1930 gepostuleerde (anti-)neutrino door Cowan en Reines[76] aangetoond kon worden.

We beschrijven in het volgende het basisidee van dit experiment. Antineutrinos kunnen in een substantie, die waterstof bevat, de volgende reacties induceren,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & \bar{\nu}_e & + & p & \rightarrow & n & + & e^+ \\ L_e & : & -1 & + & 0 & \rightarrow & 0 & - & 1. \end{array} \tag{634}$$

Als een bron met voldoende intensiteit voor $\bar{\nu}_e$ komt een kernreactor[77] in aanmerking. Bij de splijting van zware kernen worden primair elementen met een neutronenoverschot geproduceerd, wat dan leidt tot verschillende β^--vervalreeksen. Gemiddeld worden er per verval ongeveer zes $\bar{\nu}_e$ geëmitteerd met energieën tussen 0 en 8 MeV.

Figuur 61 toont de detector, bestaande uit een tank gevuld met 200 liter water (met wat $CdCL_2$ erin). De tank is opgesteld tussen drie vloeistofscintillatoren met elk een 1400 liter inhoud (in die tijd een gigantisch experiment!). Het positron wordt snel afgeremd en annihileert met een elektron,

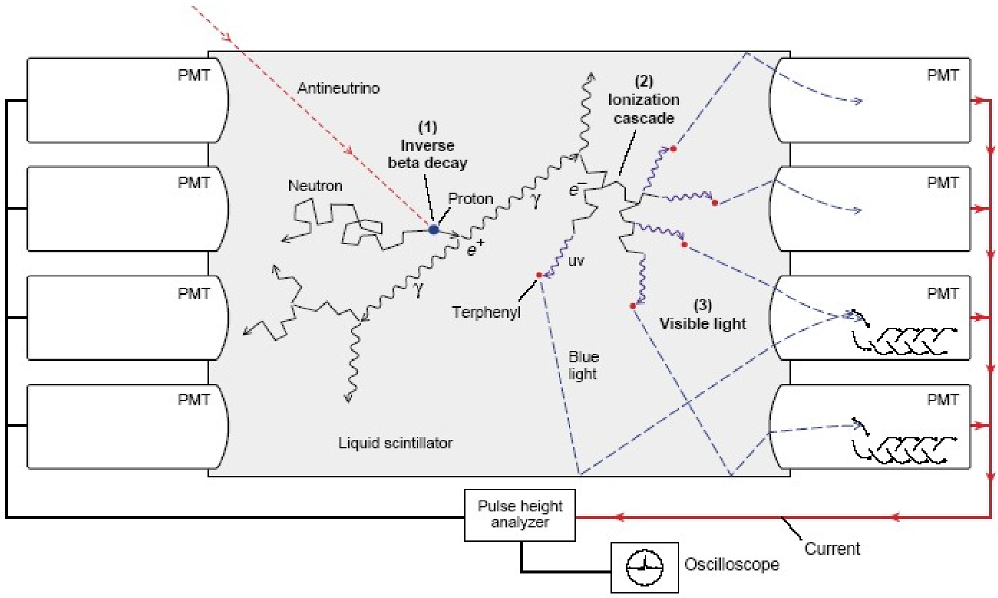
$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma. \tag{635}$$

De beide annihilatiequanta worden in coincidentie gemeten met behulp van de scintillatoren. De gevormde neutronen worden door botsingen in het water afgeremd tot thermische energieën, en worden tenslotte ingevangen[78] in het ^{113}Cd. De in deze reactie geproduceerde γ-quanta worden in additie in een (vertraagde) coincidentie geregistreerd, wat een goede signatuur van de echte

[76] Zie F. Reines and C.L. Cowan, Physical Review **113** (1959) 273.

[77] Aanvankelijk hadden Cowan en Reines ook een atoomexplosie als bron voor elektronische antineutrinos in beschouwing genomen.

[78] Het element ^{113}Cd is een uiterst effectieve neutronenabsorber: de werkzame doorsnede heeft een resonantie bij $T_n = 0.0253$ eV met een maximum werkzame doorsnede van $\sigma_{n\gamma} = 2450 \pm 30$ barn.



Figuur 61: *Schematische voorstelling van de experimentele opstelling die door Cowan en Reines gebruikt is om het bestaan van het antineutrino aan te tonen.*

gebeurtenissen geeft. Met een ingeschakelde reactor (700 MW) werd een verhoogde telsnelheid van 3.0 ± 0.2 events per uur gemeten. Hieruit kon een gemiddelde werkzame doorsnede van

$$< \sigma >= (12^{+7}_{-4}) \times 10^{-44} \ \ \mathrm{cm}^2 \tag{636}$$

afgeleid worden, hetgeen in overeenstemming was met de theoretische verwachting. Bijna gelijktijdig werd door R. Davis bij dezelfde reactor getoond dat antineutrinos de reactie

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \bar{\nu}_e & + & {}^{37}\mathrm{Cl} & \rightarrow & {}^{37}\mathrm{Ar} & + & e^- \\ L_e & : & -1 & + & 0 & \rightarrow & 0 & + & 1! \end{array} \tag{637}$$

niet induceren.

Daarentegen kon later gedemonstreerd worden dat de neutrinos die van de zon afkomstig zijn daadwerkelijk, zoals we volgens het behoud van leptongetal verwachten, deze reactie induceren,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \nu_e & + & {}^{37}\mathrm{Cl} & \rightarrow & {}^{37}\mathrm{Ar} & + & e^- \\ L_e & : & 1 & + & 0 & \rightarrow & 0 & + & 1! \end{array} \tag{638}$$

Het aantal van de in deze reactie gedurende enkele decennia verzamelde ^{37}Ar atomen is echter ongeveer een factor 2 - 3 lager dan we volgens de berekeningen verwachten. Dit is het beroemde probleem van de zonneneutrinos[79], dat een van de grootste calamiteiten van de hedendaagse kern- en deeltjesfysica is.

Ook de metingen van het dubbele β-verval en verschillende andere experimentele feiten geven aan dat het ν_e en $\bar{\nu}_e$ verschillende deeltjes zijn, die respectievelijk gekarakteriseerd kunnen worden

[79] De belangstellende lezer(es) zij verwezen naar een artikel van X. Shi en D.N. Schramm, Physics Letters **B283** (1992) 305.

door $L_e = +1$ of $L_e = -1$[80].

In reacties, waaraan de 'zware' elektronen $\mu^\pm$ en $\tau^\pm$ deelnemen, worden vaak neutrinos geproduceerd, geabsorbeerd, of verstrooid. Hierbij dringt zich dan direct de vraag op of deze deeltjes zich hetzelfde gedragen als de ons tot nu toe bekende elektronische neutrinos ν_e en $\bar{\nu}_e$. Bijvoorbeeld, het positief geladen pion vervalt meestal naar een μ^+ en slechts zelden naar een e^+,

$$\begin{array}{llll} \pi^+ & \to \mu^+ + \nu_\mu & \text{B.R.} & = 0.999878 \\ \pi^+ & \to e^+ + \nu_e & \text{B.R.} & = 1.2 \times 10^{-4}. \end{array} \tag{639}$$

De antideeltjes vervallen, met dezelfde levensduur en dezelfde vervalwaarschijnlijkheden, als volgt,

$$\begin{array}{ll} \pi^- & \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \pi^- & \to e^- + \bar{\nu}_e. \end{array} \tag{640}$$

Ook de in het verval naar muonen optredende neutrinos hebben een spin $\frac{1}{2}$, een lading 0 en vermoedelijk een rustmassa die gelijk is aan nul ($m_\mu < 0.17$ MeV/c^2). Ondanks dit alles onderscheiden ze zich van de elektronische neutrinos ν_e en $\bar{\nu}_e$ (dat is de reden waarom we verschillende symbolen gebruikt hebben). We kunnen dit alles weer aantonen door naar de volgende reacties te kijken.

$$\begin{array}{cccccccccl} & & \nu_e & + & n & \to & p & + & e^- & \\ L_e & : & 1 & + & 0 & = & 0 & + & 1 & \text{treedt op} \\ L_\mu & : & 0 & + & 0 & = & 0 & + & 0 & \\ & & & & & & & & & \\ & & \nu_\mu & + & n & \to & p & + & e^- & \\ L_e & : & 0 & + & 0 & \neq & 0 & + & 1 & \text{treedt niet op} \\ L_\mu & : & 1 & + & 0 & \neq & 0 & + & 0 & \\ & & & & & & & & & \\ & & \nu_\mu & + & n & \to & p & + & \mu^- & \\ L_e & : & 0 & + & 0 & = & 0 & + & 0 & \text{treedt op} \\ L_\mu & : & 1 & + & 0 & = & 0 & + & 1 & \end{array} \tag{641}$$

Er zijn twee experimenten die met bijzonder grote nauwkeurigheid aantonen dat de leptonfamilies wezenlijk verschillend zijn en daarmee dat L_e en L_μ afzonderlijk behouden zijn.

- De reactie[81]

  $$\mu^- \to e^- + e^+ + e^- \tag{642}$$

  bleek *niet* op te treden. De branching ratio is kleiner dan 10^{-12}.

- Eveneens bleken de reacties

  $$\begin{array}{lll} \mu^- +^{32}\text{S} & \to e^- +^{32}\text{S}, & \sigma/\sigma_{\nu,\text{ capture}} < 7 \times 10^{-11} \\ \mu^- +^{32}\text{S} & \to e^+ +^{32}\text{Si}, & \sigma/\sigma_{\nu,\text{ capture}} < 9 \times 10^{-10} \end{array} \tag{643}$$

  niet op te treden[82]. Merk op dat het tweede proces ook het behoud van totaal leptongetal schendt.

[80]We kunnen op deze plaats niet ingaan op de vraag of beide deeltjes zich 'enkel' onderscheiden in hun heliciteit. Indien de deeltjes een, ook al nog zo kleine, massa zouden hebben, dan kunnen deze beide toestanden in elkaar getransformeerd worden (door een Lorentztransformatie van een voldoende hoge snelheid uit te voeren).

[81]De belangstellende lezer(es) wordt verwezen naar het artikel van Bellgardt *et al.*, Nuclear Physics **B299** (1988) 1. Het betreft hier het zogenaamde SINDRUM experiment op het Paul Scherrer Instituut in Villingen te Zwitzerland.

[82]Badertscher *et al.*, Nuclear Physics **A377** (1982) 106.

5.5 Spiegeling in de ruimte en pariteit

De unitaire pariteitstransformatie $\mathcal{P}$ inverteert alle ruimtelijke coördinaten (spiegeling om de oorsprong) en impulsen,

$$\begin{array}{lll} \vec{\mathbf{r}}' & = \mathcal{P}\,\vec{\mathbf{r}}\,\mathcal{P}^{-1} & = -\vec{\mathbf{r}} \\ \vec{\mathbf{p}}' & = \mathcal{P}\,\vec{\mathbf{p}}\,\mathcal{P}^{-1} & = -\vec{\mathbf{p}}. \end{array} \tag{644}$$

Impulsmomenten en spins veranderen niet van teken,

$$\begin{array}{lll} \vec{L}' & = (-\vec{r} \times (-\vec{p})) & = \vec{L} \\ \vec{s}' & = \vec{s}. & \end{array} \tag{645}$$

We nemen aan dat ook de interne quantumgetallen van het deeltje (lading, baryongetal, enzovoort) bij deze transformatie gelijk blijven.

Tot het jaar 1956 heeft men het voor vanzelfsprekend gehouden, dat alle natuurwetten spiegelinvariant zijn[83],

$$[\mathbf{H},\ \mathcal{P}] = 0. \tag{646}$$

Hiermee kunnen we dan weer golffuncties vinden die gelijktijdig eigentoestanden zijn van zowel $\mathbf{H}$ als $\mathcal{P}$,

$$\begin{array}{ll} \mathbf{H}\psi & = E\psi \\ \mathcal{P}\psi & = \pi\psi. \end{array} \tag{647}$$

Voor *niet-ontaarde* systemen geldt dat $\pi = \pm 1$. Als voorbeeld kunnen we het waterstofatoom nemen. In dit geval is de potentiaal sferisch symmetrisch,

$$\mathbf{H}(\vec{r}) = \mathbf{H}(-\vec{r}) = \mathbf{H}(r), \tag{648}$$

en dus $[\mathbf{H}, \mathcal{P}] = 0$. De golffuncties

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \chi(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \tag{649}$$

hebben een goed gedefinieerde pariteit, namelijk $(-1)^l$. Indien we echter de fijnstructuur verwaarlozen, dan zijn in het waterstofatoom (met de grondtoestand als enige uitzondering: $n = 1$, $l = 0$) de niveaus ontaard. De eerste aangeslagen toestand bijvoorbeeld, met hoofdquantumgetal $n = 2$, heeft dan dezelfde energie voor de beide baanimpulsmomenten $l = 0$ en $l = 1$. We kunnen dan zonder meer een lineaire combinatie van golffuncties opschrijven, die *geen* goed gedefinieerde pariteit heeft, $\psi(-\vec{r}) \neq \pm\psi(\vec{r})$.

De toestand van een nucleon (n of p) *is* een eigentoestand van $\mathcal{P}$, omdat er geen enkel ander object bestaat met dezelfde lading, dezelfde massa, enzovoort. Wegens het behoud van baryongetal en lading is de relatieve pariteit van toestanden met verschillende quantumgetallen Q en B willekeurig. We kunnen hiermee de eigenpariteit van het elektron π_e, het proton π_p, en die van het neutron π_n willekeurig op $+1$ vastleggen[84]. Het was een onvoorstelbaar grote verrassing toen Lee en Yang[85] er in 1956 op wezen, dat het helemaal niet evident en vanzelfsprekend is dat de pariteit in alle wisselwerkingen behouden is. Korte tijd later lukte het daadwerkelijk om aan te tonen dat in de zwakke wisselwerking de pariteit geschonden is (zelfs maximaal geschonden is)[86]. We zullen nu enkele van deze experimenten toelichten.

[83] Het feit dat er slecht één vorm van vitamine C bestaat, die helpt tegen verkoudheid en de andere vorm niet, is geen tegenvoorbeeld! Evenmin het feit dat men in alle café's ter wereld slechts rechtshandige kurketrekkers aantreft.

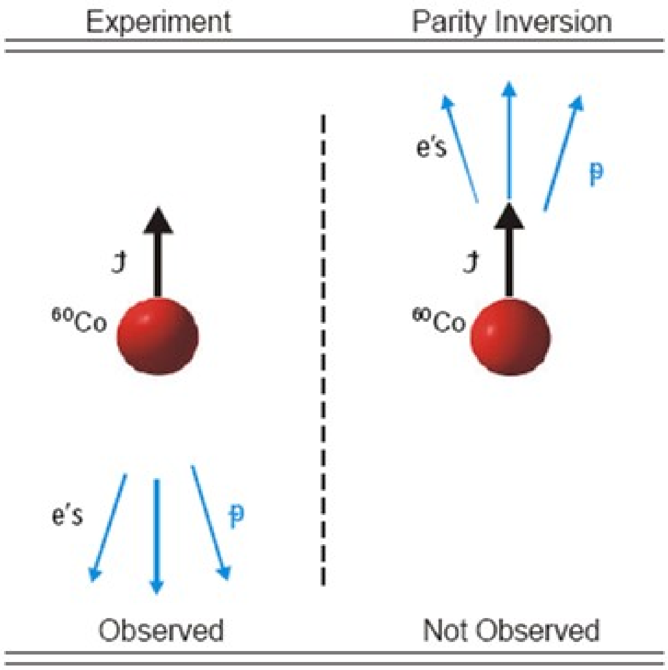
[84] We zullen later zien dat het proton en neutron een isospindoublet vormen. Een andere normering zou daarom niet gelukkig gekozen zijn.

[85] T.D. Lee en C.N. Yang, Physical Review **104** (1956) 257.

[86] Experimentele fysici hadden dit reeds eerder kunnen merken als ze deze invariantie niet altijd als volledig vanzelfsprekend hadden aangenomen.

5.5.1 Pariteitschending in β-verval

De schending van de pariteit werd voor het eerst eenduidig bewezen door mevrouw Wu en haar medewerkers[87]. Het concept van dat experiment wordt in figuur 62 schematisch voorgesteld.



Figuur 62: *Schematische voorstelling van de experimentele opstelling die door Wu en medewerkers gebruikt is om de schending van pariteit te demonstreren bij β-verval van ^{60}Co.*

Een gepolariseerde kern met spin $\vec{J}$ emitteert elektronen met een impuls $\vec{p}_e$. Rechts in figuur 62 is de pariteitgetransformeerde experimentele situatie geschetst. Spiegelinvariantie eist dat we beide situaties niet kunnen onderscheiden, en dat dus de telsnelheden $I(\vartheta)$ en $I(\pi - \vartheta)$ gelijk dienen te zijn.

Het experiment werd uitgevoerd met de isotoop ^{60}Co. Deze kern heeft een spin $J^\pi = 5^+$ en vervalt met een halfwaardetijd van $\tau_{\frac{1}{2}} = 5.2$ jaar bij voorkeur (> 99 %) naar een aangeslagen toestand (met $J^\pi = 4^+$) van ^{60}Ni. De ^{60}Co kernen kunnen gepolariseerd worden, als men ze in een sterk magneetveld $\vec{B}$ plaatst en afkoelt. De reden is dat de toestanden met een verschillend magnetisch quantumgetal M, waarbij $-J \leq M \leq J$, in een magnetisch veld een verschillende energie hebben,

$$E(M) = E_0 - g\mu_N BM. \tag{650}$$

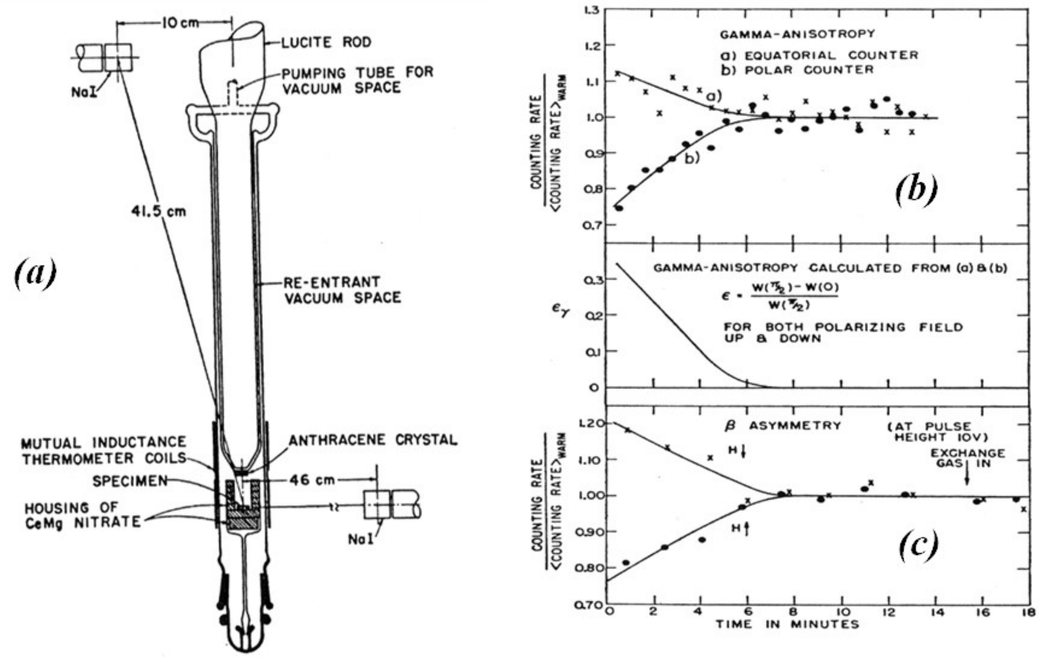
De relatieve bezettingsgraad van toestand (M') wordt door de Boltzmann-factor gegeven,

$$\frac{n(M')}{n(M)} = \frac{e^{-E(M')/kT}}{e^{-E(M)/kT}} = e^{\frac{(M'-M)g\mu_N B}{kT}}. \tag{651}$$

Voor $kT \ll g\mu_N B$ is enkel het laagste niveau bezet en is de kern volledig gepolariseerd (afhankelijk van het teken van g is $\vec{J}$ dan parallel of antiparallel aan $\vec{B}$). De ^{60}Co bron werd opgesloten in een kristal van ceriummagnesiumnitraat. Wanneer dit materiaal geplaatst wordt in een relatief

[87] C.S. Wu, E. Ambler, R.W. Hayward, D.D. Hopes, en R.P. Hudson, Physical Review **105** (1957) 1413.

zwak extern magnetisch veld (≈ 0.05 T) dan zullen de elektronische momenten zorgen voor een lokaal magnetisch veld in de orde van 10 - 100 T. Door de hyperfijn interactie zal dan het ^{60}Co gepolariseerd worden, indien een temperatuur van ongeveer 10 mK bereikt wordt[88]. De kernpolarisatie werd gemeten door naar het verval te kijken van ^{60}Ni naar de grondtoestand. Voor een E2 transitie wordt een hoekverdeling van de vorm $W(\theta) = \sum_{n=0}^{2} a_{2n} \times \cos^{2n}\theta$ verwacht. Men meet de γ-anisotropie coëfficiënt $[W(\pi/2) - W(0)]/W(\pi/2)$ met twee NaI detectoren.



Figuur 63: *(a) Experimentele opstelling zoals door Wu en medewerkers gebruikt om de schending van pariteit te demonstreren bij β-verval van ^{60}Co; (b) foton asymmetrie gemeten met detector A ($\bullet$) en detector B ($\circ$) als functie van de tijd als het kristal opwarmt; het verschil tussen de curves is een maat voor de netto polarisatie van de kernen; (c) β-asymmetrie in de telsnelheid gemeten met het anthracene kristal voor twee richtingen van het magnetisch veld ($\bullet$, down $\downarrow$; $\circ$, up $\uparrow$).*

Figuur 63 toont nogmaals het principe van de experimentele opstelling alsook het resultaat voor de β-asymmetrie. Men meet de telsnelheid van de uitgezonden elektronen met een anthracene kristal voor de twee verschillende oriëntaties van het aangelegde externe magnetische veld. Bij voldoende lage temperaturen observeert men inderdaad een asymmetrie die het bestaan van de pariteitschending bewijst. Als het radioactieve preparaat opwarmt, dan verdwijnt de asymmetrie, omdat de polarisatie kleiner wordt (het laatste is een belangrijke systematische contrôle).

5.5.2 Heliciteit van leptonen

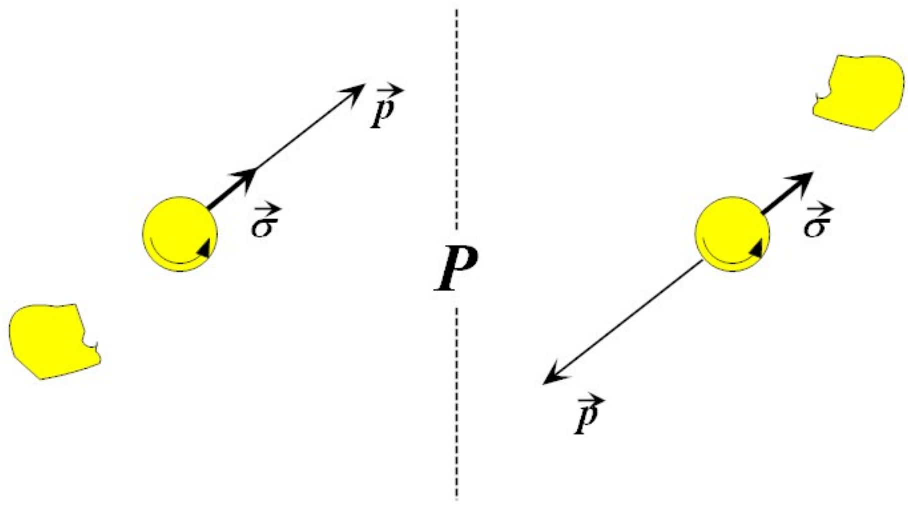
In hoofstuk 5.5.1 hebben we ons bezig gehouden met de asymmetrie in de elektronenemissie in het zwakke verval van een *gepolariseerde* kern. De pseudoscalaire grootheid

$$A = < \vec{p}_e \cdot \vec{J} >, \tag{652}$$

waarbij $\vec{p}_e$ de impuls van het elektron (of positron) en $\vec{J}$ de spin van de moederkern is, verandert onder een pariteitstransformatie van teken. Observabelen kunnen daarom in het geval van

[88]Dit is de techniek van adiabatische kerndemagnetisatie van een paramagnetisch zout.

spiegelsymmetrie niet van A afhankelijk zijn. We hebben echter gezien dat spiegelsymmetrie niet geldt voor de zwakke wisselwerking (we zullen het later nog hebben over de elektromagnetische en sterke wisselwerking).



Figuur 64: *Heliciteit van deeltjes die uitgezonden worden door een ongepolariseerde bron. De figuur rechts toont de situatie na een pariteitstransformatie.*

Figuur 64 toont een andere pseudoscalaire grootheid die verdwijnen moet voor deeltjesverval, indien de pariteit behouden is: de heliciteit van deeltjes die uitgezonden worden door een *niet gepolariseerde* bron,

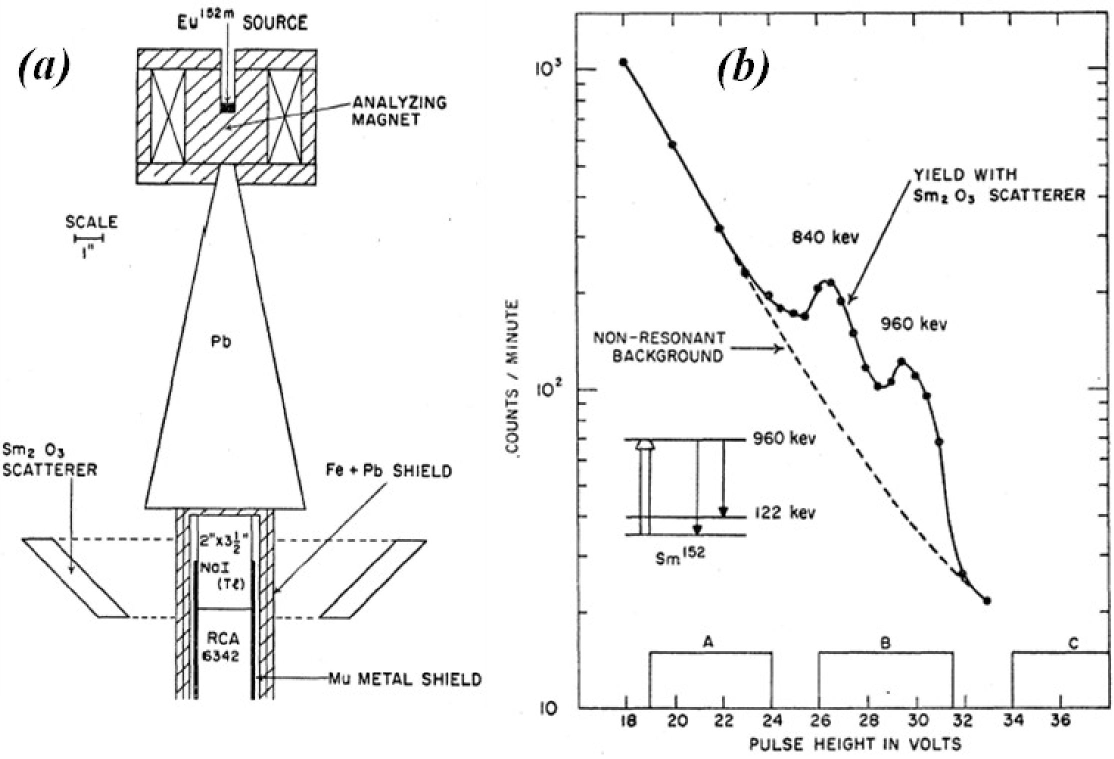
$$h = < \ \hat{p} \cdot \hat{\sigma} \ > . \tag{653}$$

Hierbij is $\hat{p}$ een eenheidsvector in de bewegingsrichting van het deeltje en $\hat{\sigma}$ is de spinrichting van dit deeltje. Indien de spin altijd gericht is langs de bewegingsrichting (rechtshandig circulair gepolariseerd), dan is $< \ h \ > = +1$. Voor volledig linkshandig circulair gepolariseerde deeltjes geldt dat $< \ h \ > = -1$.

In een geraffineerd experiment[89] van Goldhaber, Grodzins en Sunyar kon reeds in 1958 aangetoond worden dat de heliciteit van het neutrino, dat geëmitteerd wordt in het zwakke verval van ^{152}Eu, negatief is. Men vond $< h_{\nu_e} > = -1.0 \pm 0.3$.

Figuur 65 toont de experimentele opstelling en de data. Na het invangen van een K-elektron in ^{152}Eu wordt allereerst een neutrino ν_e met energie $E_\nu = 840$ keV uitgezonden. Het verval gaat naar een aangeslagen toestand van ^{152}Sm met een levensduur van ongeveer $\tau_{\frac{1}{2}} = 2 \times 10^{-14}$ s. Deze toestand vervalt onder de emissie van een γ-quantum naar de grondtoestand. We doen eerst de aanname dat het neutrino naar 'boven' (positieve z-as) en het γ-quantum naar 'beneden' geëmitteerd wordt. Uit het behoud van impulsmoment in de z-richting volgt dan, dat het γ-quantum linkshandig circulair gepolariseerd is, indien de heliciteit van het ν_e negatief is (en omgekeerd). Het γ-quantum vliegt door een stuk gemagnetiseerd ijzer (met de magnetische veldrichting van $\vec{B}$ parallel of antiparallel aan de z-richting). De absorptie voor rechts- en linkshandig circulair gepolariseerde γ-quanta is verschillend. Het blijkt dat inderdaad $\sigma_\gamma = -1$ en dus $\sigma_\nu = -\frac{1}{2}$. Hoe kan men echter vaststellen dat het neutrino naar 'boven' geëmitteerd werd en dat dus zijn heliciteit inderdaad negatief is? Dat kan door resonante verstrooiing aan een ^{152}Sm verstrooier. De energie van het γ-quantum heeft precies de juiste waarde om het 961 keV niveau aan te slaan

[89]Zie het artikel van M. Goldhaber, L. Grodzins, and A.W. Sunyar, Physical Review **109** (1958) 1015.



Figuur 65: *Experimentele opstelling die door Goldhaber, Grodzins en Sunyar gebruikt is om te tonen dat dat de heliciteit van neutrino's, die geëmitteerd worden in het verval van ^{152}Eu, negatief is. De analysatormagneet selecteert de circulaire polarisatie van de fotonen. Het Sm_2O_3 verstrooit door kernfluoresentie straling naar de NaI detector.*

in het geval dat de aangeslagen kern naar beneden, en het neutrino daarom naar boven gevlogen is.

Sinds 1958 is een groot aantal experimenten uitgevoerd, die alle tonen dat de heliciteit van de bij β-verval van kernen uitgezonden leptonen altijd als volgt is:

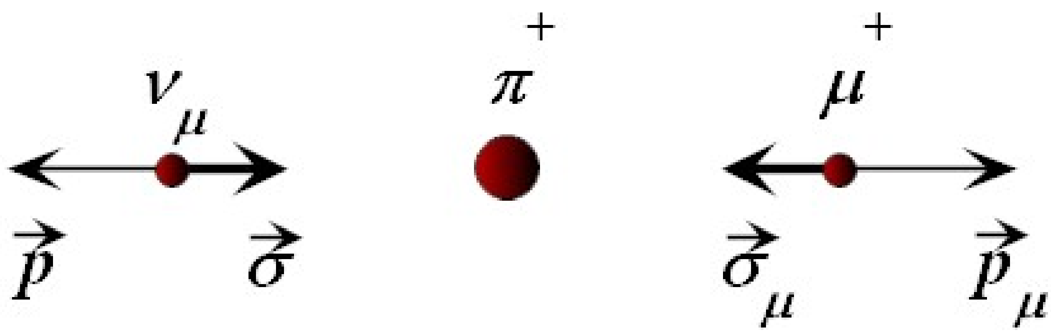
- alle neutrino's (ν_e, maar ook ν_μ en ν_τ) hebben een heliciteit -1, en alle antineutrino's ($\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_\tau$) hebben een heliciteit $+1$.
- De in β-verval uitgezonden geladen leptonen (e^-) hebben een heliciteit $-v/c$, terwijl de antideeltjes (e^+) een heliciteit $+v/c$ hebben.

Dit is in overeenstemming met het standaard model van de elektrozwakke wisselwerking. Elke afwijking zou een sensatie betekenen, omdat dat direct een aanwijzing zou geven dat er naast de gebruikelijke linkshandige vectorbosonen ($W_L^\pm$) ook nog rechtshandige deeltjes ($W_R^\pm$) zouden bestaan, die wegens hun grotere massa tot nu toe nog niet geproduceerd konden worden met deeltjesversnellers.

We willen nog een uitzondering bespreken, die optreedt in het verval van geladen pionen, bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} \pi^+ &\to \mu^+ + \nu_\mu, \qquad \text{B.R.} = 0.999878 \\ \pi^+ &\to e^+ + \nu_e, \qquad \text{B.R.} = 1.2 \times 10^{-4}, \end{aligned} \tag{654}$$

hebben de geladen leptonen wegens behoud van impulsmoment in zekere zin de 'verkeerde' heliciteit (zie figuur 66). Als we enkel de faseruimtefactoren in beschouwing nemen en aannemen



Figuur 66: *Schematische voorstelling van de heliciteiten in het verval van een positief geladen pion in een muon en een muon neutrino.*

dat de matrixelementen voor de beide vervallen gelijk zijn, dan krijgen we het verkeerde resultaat,

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_\mu} = \frac{1 + (m_e/m_\pi)^2}{1 + (m_\mu/m_\pi)^2} \frac{1 - (m_e/m_\pi)^2}{1 - (m_\mu/m_\pi)^2} \simeq 3.5. \tag{655}$$

Enkel als we deze uitdrukking vermenigvuldigen met de correctiefactor

$$f = \frac{1 - v_e/c}{1 - v_\mu/c} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \frac{1 + (m_\mu/m_\pi)^2}{1 + (m_e/m_\pi)^2} = 3.7 \times 10^{-5}, \tag{656}$$

vinden we het juiste resultaat. Dit betekent dat deze uitzondering inderdaad de regel bevestigt, of preciezer geformuleerd, het feit dat het gecorrigeerde resultaat zo goed met de gemeten waarde overeenkomt, levert inderdaad een belangrijke test voor de aard van de aan het verval ten grondslag liggende wisselwerking (een pure $V - A$ koppeling, zoals die door het standaard model met enkel linkshandige $W^\pm$ geëist wordt).

5.5.3 Behoud van pariteit in de sterke wisselwerking

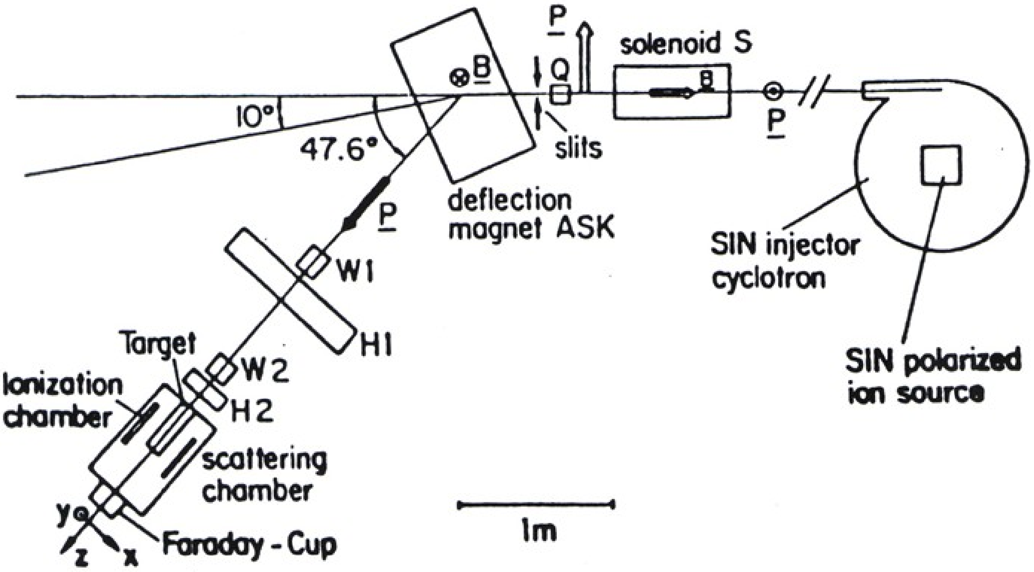
Het behoud van pariteit in de sterke wisselwerking is geverifiëerd in een groot aantal experimenten. Een van de meest nauwkeurige experimenten[90] werd uitgevoerd met de opstelling die schematisch geschetst is in figuur 67.

Het injectorcyclotron levert een transversaal gepolariseerde protonenbundel met een energie van $T_p = 50$ MeV, een intensiteit van ongeveer 5 μA en een polarisatie P_y van 0.8. Met behulp van spinprecessie in verschillende magnetische velden wordt een longitudinaal gepolariseerde bundel verkregen, die dan aan een waterstoftarget verstrooid wordt. Behoud van pariteit eist nu dat de werkzame doorsnede voor protonen met positieve heliciteit σ^+ even groot is als die voor protonen met negatieve heliciteit σ^-. Het experiment leverde als resultaat

$$\frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\sigma^+ + \sigma^-} = (-1.5 \pm 0.2) \times 10^{-7}. \tag{657}$$

De minuscule afwijking van nul is van dezelfde orde van grootte als we op theoretische gronden zouden verwachten. De quarks en dus ook de nucleonen ondergaan *ook* een zwakke wisselwerking, en deze schendt de pariteit maximaal. De corresponderende sterkte is echter ongeveer 10^{-7} keer kleiner in vergelijking tot de dominante sterke wisselwerking.

[90]Zie het artikel van S. Kystrin *et al.*, Physical Review Letters **58** (1987) 1616.



Figuur 67: *Experimentele opstelling voor de meting van pariteitsschending in proton-proton verstrooiing. Hierbij worden longitudinaal gepolariseerde protonen met een energie van 50 MeV verstrooid aan waterstof.*

Omgekeerd kunnen we soms het feit dat de pariteit in de sterke wisselwerking behouden is gebruiken om de *eigenpariteit* van een deeltje te bepalen. Als voorbeeld bespreken we op welke wijze de pariteit van het negatief geladen pion, $\mathcal{P}_\pi$, bepaald kan worden uit de reactie

$$\pi^- + d \rightarrow n + n. \tag{658}$$

We nemen aan dat we de spins van alle aan de reactie deelnemende deeltjes kennen,

$$J_\pi = 0, \qquad J_d = 1, \qquad J_n = \frac{1}{2}. \tag{659}$$

Eveneens weten we de eigenpariteit van het deuteron[91], $\mathcal{P}_d = +1$.

Als het π^- door de deuteriumkern wordt ingevangen, dan worden in het algemeen in eerste instantie toestanden met baanimpulsmoment $l_{\pi d} \neq 0$ bezet. Het pionische deuterium vervalt echter snel naar een toestand met $l_{\pi d} = 0$, waarbij karakteristieke röntgenstraling uitgezonden wordt. Deze fotonen kan men detecteren, en hiermee experimenteel bepalen, dat na de vangst van een negatief pion in een S-toestand, de hierboven besproken reactie inderdaad optreedt. Het totale impulsmoment bedraagt dan

$$|\vec{J}_{\rm tot}| = |\vec{l}_{\pi d} + \vec{J}_\pi + \vec{J}_d| = 1 = |\vec{l}_{nn} + \vec{J}_n + \vec{J}_n|, \tag{660}$$

en de pariteit is $\mathcal{P}_{\rm tot} = \mathcal{P}_\pi \cdot \mathcal{P}_d \cdot (-1)^{l_{\pi d}} = \mathcal{P}_\pi = (\mathcal{P}_n)^2\ (-1)^{l_{nn}}$.

Omdat de golffunctie van de beide neutronen antisymmetrisch dient te zijn, verloopt de reactie enkel via een $^3P_1$-toestand met $l_{nn} = 1$. Hiermee vinden we dat $\mathcal{P}_\pi = -1$. Ook de beide andere tot hetzelfde isospintriplet behorende pionen, π^+ en π^0, hebben een negatieve eigenpariteit.

[91] Het deuteron bestaat uit een proton en een neutron, die hoofdzakelijk in een S-toestand met baanimpulsmoment $l_{pn} = 0$ gebonden zijn.

5.6 Ladingssymmetrie van de sterke wisselwerking

In de kernfysica was het reeds lang geleden opgevallen dat het proton en het neutron zeer gelijksoortige deeltjes zijn, als men maar afziet van de elektromagnetische wisselwerking. Allereerst valt het ons op dat de beide massa's bijna gelijk zijn,

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} = 7 \times 10^{-4}. \tag{661}$$

We weten ook dat zogenaamde spiegelkernen (dit zijn kernen waarbij alle neutronen getransformeerd zijn in protonen en omgekeerd) zeer verwante eigenschappen hebben, zoals dezelfde niveauschema's, goede overeenkomsten in de bindingsenergieën nadat we correcties voor de elektromagnetische wisselwerking hebben aangebracht, enzovoort.

Verder zijn ook de werkzame doorsneden voor spiegelreacties, zoals

$$\begin{array}{llllll} \sigma(n+^3\mathrm{He} & \rightarrow & ..) & \simeq \sigma(p+^3\mathrm{H} & \rightarrow & ..) \\ \sigma(d+d & \rightarrow & n+^3\mathrm{He}) & \simeq \sigma(d+d & \rightarrow & p+^3\mathrm{H}) \end{array} \tag{662}$$

bijna gelijk. Het lijkt logisch om een operator $\mathbf{C_s}$ (voor charge symmetry) in te voeren, die een proton verandert in een neutron en omgekeerd. Het blijkt echter efficiënter te zijn om de actie van $\mathbf{C_s}$ te definiëren voor quarktoestanden

$$\begin{array}{llll} \mathbf{C_s}|u> & = -|d\ >, & \mathbf{C_s}|d> & = +|u\ > \\ & & & \\ \mathbf{C_s}|\bar{u}> & = -|\bar{d}\ >, & \mathbf{C_s}|\bar{d}> & = +|\bar{u}\ > . \end{array} \tag{663}$$

Indien $\mathbf{C_s}$ inderdaad een goede symmetrie van de sterke wisselwerking is, dan volgt uit deze aanname ook de gelijkheid van vervalsnelheden en werkzame doorsneden voor reacties die exotische deeltjes bevatten. Ter illustratie gaan we uit van de reactie

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda + K^0. \tag{664}$$

Als we een ladingsymmetrietransformatie doorvoeren, dan vinden we

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{C_s}|\pi^- > & = \mathbf{C_s}|\bar{u}d > & = - & |\bar{d}u > & = - & |\pi^+ > \\ \mathbf{C_s}|p > & = \mathbf{C_s}|uud > & = & |ddu > & = & |n > \\ \mathbf{C_s}|\Lambda > & = \mathbf{C_s}|uds > & = - & |dus > & = - & |\Lambda > \\ \mathbf{C_s}|K^0 > & = \mathbf{C_s}|d\bar{s} > & = & |u\bar{s} > & = & |K^+ >, \end{array} \tag{665}$$

en verwachten we dat de werkzame doorsnede voor de volgende (spiegel)reactie precies even groot is,

$$\pi^+ + n \rightarrow \Lambda + K^+. \tag{666}$$

Vanzelfsprekend breekt de elektromagnetische wisselwerking deze symmetrie! Echter nadat we alle elektromagnetische correcties uitvoeren, zo goed als we dat tegenwoordig maar kunnen, blijft er toch een kleine discrepantie bestaan. Dat kunnen we bijzonder duidelijk zien als we naar de massa's kijken,

$$\begin{array}{ll} m_n & > m_p \\ m_{K^0} & > m_{K^+} \\ m_{\Sigma^+} & < m_{\Sigma^0} < m_{\Sigma^-} \ \ (!) \end{array} \tag{667}$$

Op zich is het hoogst verwonderlijk dat de geladen deeltjes vaak *lichter* zijn dan de overeenkomstige ongeladen deeltjes. Deze kleine *symmetriebreking* voert men tegenwoordig terug[92] op het

[92] Zie het artikel van B.M.K. Nefkens, G.A. Miller, en I. Slaus, Comments on Nuclear and Particle Physics **20** (1992) 221.

verschil in massa[93] van de up en down quarks,

$$m_d - m_u = 3.3 \pm 0.3 \ \ \mathrm{MeV/c^2}. \tag{668}$$

Ter volledigheid noemen we hier nog **G**-conjugatie, hetgeen nauw verbonden is met de ladingssymmetrie[94],

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{C_s C}, \tag{669}$$

waarbij **C** de operator is die een deeltje verandert in een antideeltje, en die we in de toekomst nog uitvoerig zullen bespreken. Er geldt dan

$$\mathbf{G}|u>=|\bar{d}>, \quad \mathbf{G}|d>=-|\bar{u}> . \tag{670}$$

5.7 Isospinsymmetrie in de sterke wisselwerking

De hierboven besproken ladingssymmetrie eist dat de sterke wisselwerking tussen twee protonen even groot is als die tussen twee neutronen,

$$V_{nn} = V_{pp}. \tag{671}$$

Inderdaad is het experimenteel aangetoond dat de diepte van de bijbehorende potentialen hooguit zo'n 0.5 % verschillen. Het is echter ook gebleken dat geldt

$$V_{np} \simeq (V_{nn} = V_{pp}). \tag{672}$$

De kernkrachten tussen een proton en een neutron zijn bij benadering gelijk aan die tussen de identieke deeltjes. In een naïef model dient men de diepte van de potentiaalput voor het *np*-systeem ongeveer (2.6 ± 0.5) % groter te kiezen. Deze additionele symmetrie wordt als *ladingsonafhankelijkheid* van de kernkracht aangeduid. Het is niet triviaal te testen of de sterke wisselwerking werkelijk exact ladingsonafhankelijk is. Ter illustratie van de moeilijkheden, die in zulk een analyse optreden, beschouwen we de wisselwerking tussen twee nucleonen bij lage energie. In de limiet van zeer lage energieën, $E \to 0$, wordt de werkzame doorsnede gegeven door de *verstrooiingslengte*, a_{NN}. Er geldt dan

$$\sigma_{\rm elas}^{\rm NN} \to 4\pi a_{\rm NN}^2 \qquad (E \to 0). \tag{673}$$

In het volgende beschouwen we nucleon-nucleon verstrooiing in de ${}^1S_1$-toestand[95].De metingen geven als resultaat voor de verstrooiingslengte

$$\begin{aligned} a_{pp} &= -7.83 \pm 0.01 \quad \text{fm} \\ a_{np} &= -23.75 \pm 0.01 \quad \text{fm}. \end{aligned} \tag{674}$$

De verstrooiingslengte voor het *nn*-systeem kon tot nu toe slechts uit drie-deeltjes reacties verkregen worden, en bedraagt

$$\begin{aligned} \pi^- + d &\to n + n + \gamma, \quad a_{nn} = -18.6 \pm 0.5 \ \ \text{fm} \\ n + d &\to n + n + p, \quad a_{nn} = -16.9 \pm 0.6 \ \ \text{fm}. \end{aligned} \tag{675}$$

[93]Het is niet triviaal om de massa's van de quarks te bepalen, omdat er geen vrije quarks zijn. In het algemeen vindt men in de literatuur de waarden voor de zogenaamde *current masses*. Dat is de waarde die men dient te gebruiken in de QCD Lagrangiaan. Omdat de quarks omgeven zijn door een wolk van gluonen en quark-antiquark paren, hangt de massa af van de energie van de reactie, en dat kan in QCD berekend worden. Gebruikelijke waarden die geldig zijn bij een impulsoverdracht van ongeveer 1 GeV/c bedragen $m_u = 2 - 8$ MeV en $m_d = 5 - 15$ MeV.

[94]Dat is ook relevant voor de discussie van de zwakke wisselwerking. Het blijkt namelijk dat er geen vreemdheid behoudend semileptonisch verval bestaat, dat de G-pariteit schendt (zogenaamde stromen van de tweede soort). Dit komt in het standaard model en in het experiment (tenminste als die correct zijn uitgevoerd) niet voor.

[95]Het is niet zinvol om in dit verband de verstrooiing in de triplettoestand te bestuderen, omdat wegens het Pauliprincipe deze niet voor het *nn*- en *pp*-systeem gedefiniëerd is.

De theoretische analyse van deze gegevens is echter nog omstreden.

Als volgende stap dienen we een correctie uit te voeren voor de tussen de beide protonen werkende Coulombpotentiaal. De berekening geeft

$$a_{pp}^{\text{corr}} = -17.1 \pm 0.2 \quad \text{fm}. \tag{676}$$

Binnen de meetnauwkeurigheid vinden we hiermee reeds dat $a_{nn} = a_{pp}^{\text{corr}}$.

Verder zijn er nog een reeks additionele elektromagnetische correcties die toegepast dienen te worden, bijvoorbeeld die voor de interne ladingsverdeling van de nucleonen, de invloed van de magnetische momenten, de vacuümpolarisatie, enzovoort. Als we twee protonen (of neutronen) verstrooien, hoeven we in eerste-orde slechts rekening te houden met de uitwisseling van het π^0, terwijl in het geval van proton-neutron verstrooiing we ook het geladen pion (met een andere massa!) dienen te gebruiken. Nieuwe berekeningen tonen dat indien al deze effecten worden meegenomen, waarschijnlijk het verschil tussen V_{nn}, V_{pp} en V_{np} volledig verdwijnt. Het is echter duidelijk dat we geen schakelaar hebben waarmee we de elektromagnetische wisselwerking op een consistente manier uit kunnen zetten.

Omdat een proton en neutron zich met betrekking tot hun sterke wisselwerking niet onderscheiden en ook nagenoeg dezelfde massa hebben, is het zinvol om beide als verschillende toestanden van *één* deeltje, het nucleon, te beschouwen. In een formele analogie aan de gewone spin $\vec{s}$ voert men de *isospin* $\vec{t}$ en zijn projectie t_z op een vaste as (in de isospinruimte!) in.

Het nucleon komt voor in twee toestanden, en daarom stelt men dat het bijbehorende isospin-quantumgetal t gelijk is aan $t = \frac{1}{2}$. De toestand met $t_z = +\frac{1}{2}$ komt overeen met een proton[96], en die met $t_z = -\frac{1}{2}$ met een neutron. Men spreekt van een isospindoublet[97]. Het is gebleken dat veel deeltjes, kernen en resonanties ondergebracht kunnen worden in *isospinmultipletten*. Alle leden van zulk een multiplet hebben nagenoeg dezelfde eigenschappen (bijvoorbeeld massa's, spins) en wisselwerkingen. De drie pionen π^+, π^0 en π^- vormen bijvoorbeeld een isospintriplet ($t = 1$, met $t_z = +1,\ 0,\ -1$).

Een systeem dat bestaat uit een proton en een neutron, kan nu op twee manieren beschreven worden,

$$\begin{array}{llllll} \vec{r}_1 & = \vec{r}_p, & s_{1z} & = s_p, & t_z & = +\frac{1}{2} \\ \vec{r}_2 & = \vec{r}_n, & s_{2z} & = s_n, & t_z & = -\frac{1}{2} \\ & & & & & \\ \vec{r}_1 & = \vec{r}_n, & s_{1z} & = s_n, & t_z & = -\frac{1}{2} \\ \vec{r}_2 & = \vec{r}_p, & s_{2z} & = s_p, & t_z & = +\frac{1}{2}. \end{array} \tag{677}$$

In het tweede geval zijn alle coördinaten (plaats, spin, en isospin) verwisseld. Teneinde deze tweeduidigheid te elimineren is het nuttig om een *uitgebreid* Pauli principe in te voeren: de golffunctie van twee nucleonen dient antisymmetrisch te zijn, indien plaats, spin, en isospin-coördinaten verwisseld worden. Voor het pp- en het nn-systeem impliceert deze eis het normale Pauli principe. Voor het np-systeem wordt hiermee de bovengenoemde tweeduidigheid geëlimineerd. We doen met deze eis echter geen additionele aanname, maar verkrijgen alleen een iets gemakkelijker formalisme[98]. In het vervolg van onze discussie gaan we eerst heel naïef te werk: we bespreken isospin op een wijze die identiek is aan de normale spin en kijken dan pas later of we interessante (goede of foute?) resultaten vinden.

[96] We gebruiken hier de conventie uit de deeltjesfysica. In de klassieke kernfysica wordt $t_z = +\frac{1}{2}$ aangenomen voor het neutron. De volgende beschouwingen veranderen niet principiëel als men de andere conventie gebruikt.

[97] De elektromagnetische wisselwerking breekt de ladingsonafhankelijkheid: men krijgt een opsplitsing van de grondtoestand van het nucleon. Beschouw de analogie met de werking van een magneetveld op de spin in het Zeeman effect.

[98] Als dit uitgebreide Pauli principe U dus niet 'aanstaat', dan kunt U van het gebruik afzien. De eindresultaten zullen altijd hetzelfde zijn.

Als we aannemen dat de hamiltoniaan commuteert met de isospin operator $\vec{\mathbf{t}}$,

$$[\mathbf{H},\ \vec{\mathbf{t}}] = 0, \tag{678}$$

kunnen we weer een unitaire operator invoeren, die nu een rotatie in de isospinruimte vertegenwoordigt. Deze rotatie is, zoals gebruikelijk, gegeven door de richting van de rotatieas $\vec{\chi}$ en de grootte van de draaihoek χ,

$$\mathbf{R}(\vec{\chi}) = \exp(-i\vec{\chi}\cdot\vec{\mathbf{t}}). \tag{679}$$

Natuurlijk commuteren ook hier de rotaties om verschillende assen niet (in tegenstelling tot translaties), en we krijgen

$$[t_x,\ t_y] = it_z \quad \text{cyclisch.} \tag{680}$$

Alle resultaten die we kennen van de relaties voor impulsmomenten kunnen direct overgenomen worden. Voor de eigenwaarden vinden we in het bijzonder

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^2|t,t_3> &= t(t+1)|t,t_3> \\ \mathbf{t}_3|t,t_3> &= t_3|t,t_3> . \end{aligned} \tag{681}$$

De mogelijke waarden voor t en t_3 zijn

$$t = 0,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{3}{2},\ .. \tag{682}$$

$$-t \le t_3 \le +t \quad (2t+1 \ \text{ mogelijkheden}). \tag{683}$$

Vanzelfsprekend dienen we twee isospins met *dezelfde* Clebsch-Gordan coëfficienten te combineren zoals we vroeger met het impulsmoment hebben gedaan. Verder krijgen we natuurlijk dezelfde rotatiematrices als we hadden in hoofdstuk **??**.

5.7.1 Δ resonantie en isospinformalisme

De werkzame doorsnede voor elastische verstrooiing van positief geladen pionen aan protonen vertoont bij een kinetische pion energie van ongeveer 200 MeV een resonantie. Isospin T en derde component T_z van deze resonantie kunnen als volgt gevonden worden,

$$\begin{array}{lclcl} p & + & \pi^+ & \rightarrow & \Delta^{++} \\ |\frac{1}{2},+\frac{1}{2}> & + & |1,+1> & \rightarrow & |\frac{3}{2},+\frac{3}{2}> . \end{array} \tag{684}$$

Merk op dat we de z-componenten weer algebraïsch dienen op te tellen: $\frac{1}{2}+1 = +\frac{3}{2}$. Voor T zijn er in eerste instantie twee mogelijkheden[99], de waarden $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{2}$. De eigenwaarde $T = \frac{1}{2}$ vervalt echter, omdat de projectie gelijk is aan $+\frac{3}{2}$.

Hiermee hebben we dus een toestand met $T = \frac{3}{2}$ afgeleid en vragen ons dan ook direct af waar we de overige van de $(2T+1) = 4$ componenten van het multiplet kunnen vinden. Als we deze deeltjes experimenteel kunnen vinden (wat inderdaad het geval is!), dan vormt dat het eerste bewijs van de bruikbaarheid van ons concept.

Wanneer we negatief geladen pionen[100] op een waterstoftarget schieten, dan vinden we meteen al twee reacties (elastische verstrooiing en ladingsuitwisseling) bij dezelfde resonantieenergie en met dezelfde totale breedte als bij π^+p-verstrooiing

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- + p \\ \pi^- + p &\rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^0 + n. \end{aligned} \tag{685}$$

[99] We gebruiken hier de driehoeksregel, $|t_1 - t_2| \le T \le |t_1 + t_2|$, weer net zoals bij impulsmomenten.

[100] De reacties met ongeladen deeltjes in de begintoestand (n, π^0) zijn experimenteel ietwat minder toegankelijk.

Table 7: *Belangrijke quantumgetallen van de up en down quarks en de bijbehorende antiquarks.*

Deeltje	B	Q	T	T_z
u	$\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
d	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\overline{u}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\overline{d}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$

In het isospinformalisme kunnen we schrijven

$$|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}>= C_1|1, -1> |\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}> + C_2|1, 0> |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}> . \tag{686}$$

De Clebsch-Gordan coëfficienten kunnen we direct uit de tabel aflezen en zijn gelijk aan

$$\begin{aligned} C_1 &=< 1 \quad \tfrac{1}{2} \quad -1 \quad +\tfrac{1}{2} \quad | \quad \tfrac{3}{2} \quad -\tfrac{1}{2} > \quad = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \\ C_2 &=< 1 \quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad -\tfrac{1}{2} \quad | \quad \tfrac{3}{2} \quad -\tfrac{1}{2} > \quad = \sqrt{\tfrac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{687}$$

Hiermee vinden we direct dat de waarschijnlijkheid voor het verval van een Δ^0 naar $\pi^0 + n$ twee keer zo groot is als die voor het verval naar een $\pi^- + p$. Voor de verhouding van de drie werkzame doorsneden krijgen we

$$\sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p) : \sigma(\pi^- p \to \pi^- p) : \sigma(\pi^- p \to \pi^0 n) = 9 : 1 : 2. \tag{688}$$

Daadwerkelijk vindt men deze relatie bevestigd in het experiment - een verder bewijs voor de juistheid van onze gedachtengang[101].

5.7.2 Isospin en het quarkmodel

Het is opvallend dat bij de isospin-multipletten die we tot nu toe besproken hebben (N, π, Δ) de lading in het multiplet altijd met T_z toeneemt. Men kan eenvoudig nagaan dat de relatie

$$Q = \frac{B}{2} + T_z \tag{689}$$

geldig is. Reeds in de inleiding hebben we benadrukt dat de gewone hadronen (de andere zullen we in het vervolg bespreken) uit up (u) en down (d) quarks en hun antideeltjes ($\bar{u}$, $\bar{d}$) zijn samengesteld. We kunnen een consistent beeld krijgen als we deze quarks eveneens als een isospindoublet opvatten (zie tabel 7).
Mesonen zijn opgebouwd uit een quark en een antiquark, en de eigenschappen van enkele mesonen die zijn opgebouwd uit up en down quarks en de bijbehorende antiquarks zijn gegeven in tabel 8. In het spectrum van mesonen vinden we ook nog andere deeltjes, die isospindoubletten vormen. We vermoeden dat deze uit de 'gewone' u of d quarks (en de antiquarks ($\bar{u}$, $\bar{d}$)) en een ander quark (s, c, b, t of $\bar{s}$, $\bar{c}$, $\bar{b}$, $\bar{t}$), met isospin $T = 0$, zijn samengesteld. Hiermee is de isospin van deze mesonen $T = \frac{1}{2}$ en krijgen we inderdaad doubletten.

Baryonen zijn opgebouwd uit drie quarks, en de eigenschappen van enkele baryonen die zijn opgebouwd uit up en down quarks zijn gegeven in tabel 9.

[101]In een meer formele afleiding dan we hier voorgesteld hebben, bewijst men eerst dat uit $[\mathbf{H}, \vec{\mathbf{T}}] = 0$ ook $[\vec{\mathbf{S}}, \vec{\mathbf{T}}] = 0$ volgt, waarbij $\vec{\mathbf{S}}$ de *verstrooiingsoperator* is. Voor het matrixelement van $\vec{\mathbf{S}}$ geldt dan dat $< T', T_3'|\mathbf{S}|T, T_3 >$ gelijk is aan nul, indien $T' \neq T$ en $T_3' \neq T_3$. De waarde hangt niet van T_3 af. In de hierboven geschetste afleiding hebben we aangenomen dat in de resonantie de overgang $< T = \frac{3}{2}, T_3|\mathbf{S}|T = \frac{3}{2}, T_3 >$ domineert. Buiten het resonantiegebied (of zelfs in een $T = \frac{1}{2}$ resonantie) geldt dit natuurlijk niet meer.

Table 8: *Eigenschappen van enkele mesonen, waarvan we aannemen dat ze zijn opgebouwd uit up en down quarks en de bijbehorende antiquarks.*

Meson	Massa [MeV/c^2]	T	T_z	J^π
η^0	547.45(19)	0	0	0^-
ω^0	781.94(12)	0	0	0^-
$\pi^-,\ \pi^0,\ \pi^+$	$m_{\pi^\pm} = 139.56995(35)$ $m_{\pi^0} = 134.9764(6)$	1	$-1,\ 0,\ +1$	0^-
$\rho^-,\ \rho^0,\ \rho^+$	768.5(6)	1	$-1,\ 0,\ +1$	1^-

Table 9: *Eigenschappen van enkele baryonen, waarvan we aannemen dat ze zijn opgebouwd uit up en down quarks.*

Baryon	Massa [MeV/c^2]	T	T_z	J^π
$n,\ p$	$m_n = 939.56563(28)$ $m_p = 938.27231(28)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}^+$
$N(1520)\ D_{13}$	1515 - 1530	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}^-$
$\Delta(1232)\ P_{33}$	1230 - 1234	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ +\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}^+$
$\Delta(1620)\ S_{31}$	1615 - 1675	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ +\frac{1}{2},\ +\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}^-$

Ook onder de baryonen hebben we vertegenwoordigers die niet in dit schema passen, bijvoorbeeld het $\Lambda = (uds)$ dat een isospinsinglet is, of het isospintriplet $\Sigma^- = (dds)$, $\Sigma^0 = (uds)$, $\Sigma^+ = (uus)$. Bijzonder opvallend is het feit (we kunnen dat pas later verklaren) dat deze deeltjes voor een deel lange levensduren hebben en niet, net als de aangeslagen N en Δ, zeer snel vervallen. Klaarblijkelijk mist er iets wezenlijks in onze klassificatie.

5.7.3 Isospin en de elektromagnetische wisselwerking

Hier bespreken we een analogie tussen spin J en isospin T. Een deeltje met spin J dat zich in een magnetisch veld bevindt, kan door de volgende hamiltoniaan beschreven worden,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_0} + \mathbf{H_B}, \quad \text{met} \quad H_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \tag{690}$$

Normaal gesproken geldt

$$[\mathbf{H_0},\ \vec{\mathbf{J}}] = 0, \tag{691}$$

en de energie van een deeltje hangt niet af van de richting van de spin in de ruimte. Daarentegen breekt de term $H_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ deze symmetrie en hebben we dat

$$[\mathbf{H_B},\ \vec{\mathbf{J}}] \neq 0. \tag{692}$$

Dit is de bekende Zeeman opsplitsing. We hebben nu nog maar één symmetrie-as (we kiezen de z-richting langs $\vec{B}$) en er geldt

$$[\mathbf{H},\ \mathbf{J_z}] = 0. \tag{693}$$

In onze analogie merken we op dat er in de sterke wisselwerking goede redenen zijn om aan te nemen dat deze interactie ladingsonafhankelijk is. Er geldt dan

$$[\mathbf{H_S},\ \vec{\mathbf{T}}] = 0. \tag{694}$$

De elektromagnetische wisselwerking breekt deze symmetrie en er geldt

$$[\mathbf{H_S} + \mathbf{H}_{\text{em}},\ \vec{\mathbf{T}}] \neq 0. \tag{695}$$

Daarentegen hebben we altijd behoud van lading en baryongetal

$$[\mathbf{H_S} + \mathbf{H}_{\text{em}},\ \mathbf{Q}] = 0 \ \text{ en} \tag{696}$$

$$[\mathbf{H_S} + \mathbf{H}_{\text{em}},\ \mathbf{B}] = 0. \tag{697}$$

Als we de relatie $Q = \frac{B}{2} + T_z$ gebruiken dan krijgen we

$$[\mathbf{H_S} + \mathbf{H}_{\text{em}}, \mathbf{T_3}] = 0, \tag{698}$$

en is ook voor de elektromagnetische wisselwerking T_3 een goed quantumgetal[102].

Het bovenstaande resultaat is correct, maar het bewijs is niet echt haarzuiver. We kunnen dat reeds afleiden uit het feit dat de relatie $Q = \frac{B}{2} + T_z$ niet geldig is voor een Λ, want dan geldt $0 \neq \frac{1}{2} + 0$! Het blijkt dat deze relatie uitgebreid dient te worden (Gell-Mann, 1953; Nishizima, 1954) tot

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \tag{699}$$

waarbij Y de zogenaamde *hyperlading* is,

$$Y = B + S + .. \tag{700}$$

5.8 Vreemdheid

Nadat men erin geslaagd was versnellers met voldoende hoge energie te bouwen, bleek dat bij botsingen van gewone deeltjes er nieuwe, *zeldzame* hadronen gevormd werden. Hiertoe behoren onder andere de volgende mesonen,

$$K^0,\ K^+,\ \overline{K}^0,\ K^-, \tag{701}$$

en de baryonen

$$\Lambda^0,\ \Sigma^-,\ \Sigma^0,\ \Sigma^+. \tag{702}$$

Deze zeldzame deeltjes werden steeds in paren gecreëerd (de zogenaamde *associated production*), bijvoorbeeld

$$\begin{array}{cccccccc} \pi^- & + & p & \rightarrow & \Lambda & + & K^0 \\ & & & \rightarrow & \Sigma^- & + & K^+ \\ \pi^+ & + & p & \rightarrow & \Sigma^+ & + & K^+. \end{array} \tag{703}$$

Daarentegen worden de volgende reacties *niet* gevonden

$$\begin{array}{cccccccc} \pi^- & + & p & \not\rightarrow & \Lambda & + & \pi^0 & \\ & & & \not\rightarrow & \Sigma^- & + & \pi^+ & \\ & & & \not\rightarrow & \Sigma^+ & + & K^- & (!) \\ \pi^+ & + & p & \not\rightarrow & \Sigma^+ & + & \pi^+. & \end{array} \tag{704}$$

[102] Daarentegen is natuurlijk T in elektromagnetische processen niet behouden, bijvoorbeeld $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

Als laag-energetisch K-mesonen geschoten worden op een waterstoftarget, dan constateert men dat met negatieve kaonen een hele reeks van zeldzame baryonen geproduceerd kan worden, bijvoorbeeld

$$\begin{array}{cccccccc} K^- & + & p & \to & \Lambda & + & \pi^0 \\ & & & \to & \Sigma^- & + & \pi^+ \\ & & & \to & \Sigma^0 & + & \pi^0 \\ & & & \to & \Sigma^+ & + & \pi^-. \end{array} \tag{705}$$

Met K^+ of K^0 kunnen dit soort deeltjes niet op deze manier geproduceerd worden, bijvoorbeeld

$$\begin{array}{ccccccc} K^0 & + & p & \not\to & \Lambda & + & \pi^+ \\ K^+ & + & p & \not\to & \Sigma^+ & + & \pi^+. \end{array} \tag{706}$$

Al deze bevindingen kunnen 'verklaard' worden als men een nieuw, additief quantumgetal, de *vreemdheid* S invoert, dat behouden is in het productieproces. Gewone deeltjes hebben $S = 0$, terwijl de kaonen K^0 en K^+ een vreemdheid $S = 1$ hebben en de deeltjes Λ^0, Σ^-, Σ^+, Σ^0, K^-, $\overline{K}^0$ een vreemdheid $S = -1$ bezitten.

Indien we vervolgens het verval van deze deeltjes beschouwen, dan stellen we vast dat hun levensduur veel groter is dan men eigenlijk zou verwachten. Zo vervalt bijvoorbeeld het niet zeldzame Δ^0, dat in de reactie

$$\pi^- + p \to \Delta^0 \to \pi^- + p \tag{707}$$

gevormd wordt, met een levensduur van ongeveer $\tau \sim 5 \times 10^{-24}$ s. Daarentegen leeft het Λ^0, dat in de reactie

$$\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0 \tag{708}$$

gevormd wordt, veel langer ($\tau \sim 3 \times 10^{-10}$ s), ofschoon het voldoende energie bezit om weer in een proton of in een neutron te vervallen,

$$\begin{array}{cccccc} \Lambda^0 & \to & p^+ & + & \pi^- \\ & \to & n & + & \pi^0. \end{array} \tag{709}$$

Het zal duidelijk zijn dat in dit verval de vreemdheid *niet* behouden is. De lange levensduur alsmede aanwijzingen uit experimenten waarin men schending van pariteit onderzoekt, duiden aan dat dergelijke vervallen veroorzaakt worden door de zwakke wisselwerking. We komen nu tot de belangrijke conclusie dat *de vreemdheid enkel behouden is in de sterke en elektromagnetische wisselwerking, echter niet in de zwakke wisselwerking.*

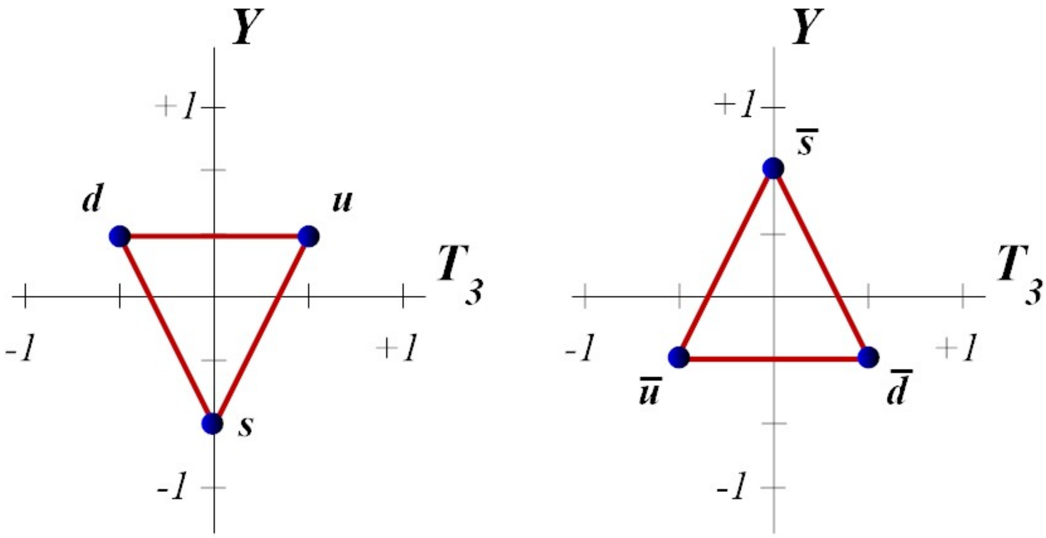
Met de introductie van vreemdheid kan men een esthetisch aantrekkelijke ordening bereiken en systematiek aanbrengen in de veelheid van mesonen en baryonen. Dit kan gebeuren als men in het kader van *groepentheorie* van de groep SU(2) (isospin) overgaat naar de groep SU(3)[103]. Een andere mogelijkheid, die iets eenvoudiger is en misschien meer inzicht verschaft in de dynamica, wordt geboden door het *quarkmodel.* We voeren een nieuwe quark s in, die een vreemdheid $S = -1$ (!) heeft. Het bijbehorende antiquark $\bar{s}$ heeft een vreemdheid $S = +1$. In het vervolg zullen we laten zien hoe een reeks mesonen uit een $(q\bar{q})$-paar en baryonen uit een (qqq)-triplet opgebouwd kunnen worden.

[103]Nadat later nog andere quantumgetallen (charm, beauty of bottomness, truth) gevonden werden, die in de sterke wisselwerking behouden zijn, was men gedwongen over te gaan naar SU(4), SU(5), en SU(6). Deze weg is niet zo succesvol gebleken, omdat er vanwege de massa's van de corresponderende quarks zeer sterke symmetriebrekingen optreden.

5.9 Mesonen als gebonden quark-antiquark toestanden

Het is nuttig gebleken om met zogenaamde *gewichtsdiagrammen* te werken. In deze grafische voorstelling worden deeltjes voorgesteld als punten in een (T_3, Y)-vlak. De hyperlading[104] is hierbij als volgt gedefinieerd

$$Y = B + S + [\tilde{C} + \tilde{B} + \tilde{T}]. \tag{710}$$



Figuur 68: *Gewichtsdiagrammen voor de (u, d, s) quarks. Verticaal is de hyperlading uitgezet en horizontaal de z-component van de isospin.*

Voor de drie quarks u, d en s, en de drie antiquarks krijgen we de verdeling aangegeven in figuur 68. Voor een $(q\bar{q})$-paar zijn er $9 = 3 \otimes 3$ combinaties. Omdat Y en T_3 additief behouden variabelen zijn, kunnen we ze eenvoudig 'grafisch' optellen! Het resultaat wordt getoond in figuur 69.

Wegens de relatie $Q = \frac{Y}{2} + T_3$ liggen deeltjes met dezelfde lading langs de gestreepte lijnen. Vervolgens proberen we de zo verkregen toestanden met de lichtste mesonen, die we experimenteel gevonden hebben, te identificeren. Voor de hoeken van het octet is dat eenvoudig,

$$\begin{array}{llllll} Y = 1, & S = 1: & K^0 = (d\bar{s}), & K^+ = (u\bar{s}), & m \sim 495 \text{ MeV/c}^2 \\ Y = 0, & S = 0: & \pi^- = (d\bar{u}), & \pi^+ = (u\bar{d}), & m \sim 140 \text{ MeV/c}^2 \\ Y = -1, & S = -1: & K^- = (s\bar{u}), & \overline{K}^0 = (s\bar{d}), & m \sim 495 \text{ MeV/c}^2. \end{array} \tag{711}$$

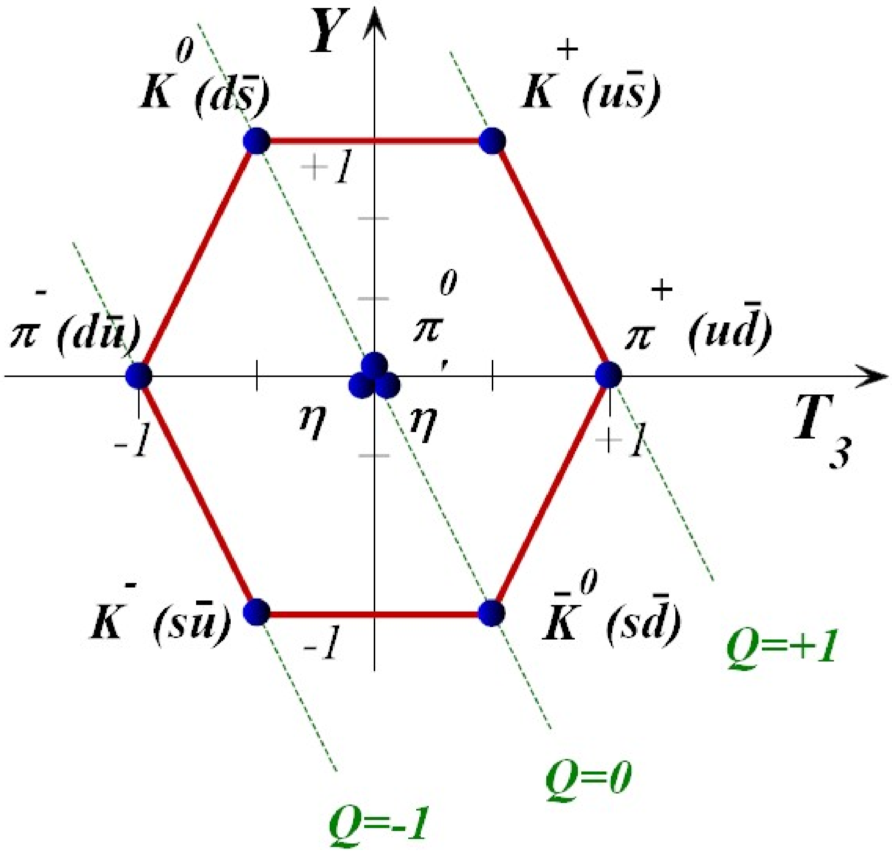
In het midden van het diagram verwachten we nog drie deeltjes, die uit $(u\bar{u})$, $(d\bar{d})$, en $(s\bar{s})$ kunnen zijn samengesteld. Een daarvan moet het neutrale π^0 zijn[105]

$$Y = 0,\ S = 0: \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), \quad m_{\pi^0} \sim 135 \text{ MeV/c}^2. \tag{712}$$

---

[104] De variabelen $\tilde{C}$, $\tilde{B}$, $\tilde{T}$ stellen de additionele quantumgetallen charm, beauty, en truth voor. We gebruiken een tilde in het symbool, teneinde verwarring te voorkomen met de ladingsuitwisseling (C), het baryongetal (B), en de isospin (T).

[105] De compositie kan verkregen worden met behulp van de Clebsch-Gordan coëfficienten voor de isospin (SU(2)). Deze zijn identiek aan die voor de normale spin. Voor het neutrale pion zouden we hiermee eigenlijk een quark-inhoud van $1/\sqrt{2}(u\bar{u} + d\bar{d})$ verwachten. Het minteken wordt veroorzaakt door het feit dat een van de deeltjes een antideeltje is. Voor meer details wordt de lezer(es) verwezen naar G. Baym, Lectures in Quantum Mechanics, Benjamin 1969, Hoofdstuk 15.



Figuur 69: *Gewichtsdiagrammen voor het pseudoscalaire ($J^\pi = 0^-$) meson-octet en meson-singlet.*

Met wat groepentheorie vinden we dat $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$. De toestand

$$Y = 0,\ S = 0: \quad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}), \quad m_{\eta_1} \sim 958\ \text{MeV/c}^2. \tag{713}$$

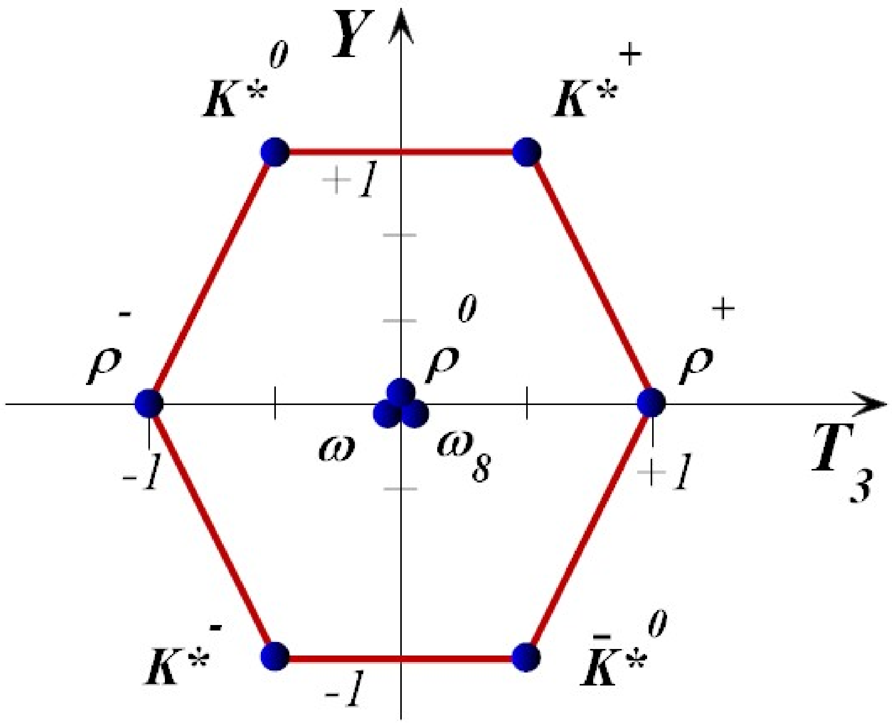
is het gezochte singlet. We zien dat transformaties die de quarks in elkaar overvoeren, bijvoorbeeld $u \to d \to s \to u$, steeds leiden tot hetzelfde resultaat. De laatste toestand kan nu zo gekozen worden dat hij orthogonaal is met de beide andere. We vinden dan

$$Y = 0,\ S = 0: \quad \eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2s\bar{s} - u\bar{u} - d\bar{d}), \quad m_{\eta_8} \sim 549\ \text{MeV/c}^2. \tag{714}$$

Beslissend is het feit dat al deze deeltjes dezelfde spin en pariteit hebben, $J^\pi = 0^-$. In het meest eenvoudige model neemt men aan, dat steeds een quark en een antiquark met baanimpulsmoment $l = 0$ gekoppeld zijn. De pariteit is dan oneven, omdat de eigenpariteit van het fermion en het antifermion tegenovergesteld zijn.

Merk op dat de symmetrie enigszins gebroken is door de elektromagnetische wisselwerking. De deeltjes binnen een isospinmultiplet hebben nagenoeg (~ 5 MeV/c^2) dezelfde massa. Daarentegen hebben deeltjes die ook s en $\bar{s}$ quarks bevatten, wezenlijk grotere massa's (alle kaonen, en de η_1 en η_8).

Figuur 70 demonstreert dat men in de natuur ook nog een octet en een singlet van *vectormesonen* aantreft. Ook hier neemt men weer aan dat het relatieve baanimpulsmoment van het $q\bar{q}$-paar



Figuur 70: *Gewichtsdiagrammen voor de vectormesonen ($J^\pi = 1^-$) met relatief kleine massa's.*

gelijk is aan $l = 0$. Daarentegen koppelen de beide eigenspins nu tot 1. De corresponderende massa's zijn iets groter.

$$\begin{array}{llllll} Y = 1, & S = 1: & K^{*0} = (d\bar{s}), & K^{*+} = (u\bar{s}), & m \sim 896 \text{ MeV/c}^2 \\ Y = 0, & S = 0: & \rho^- = (d\bar{u}), & \rho^+ = (u\bar{d}), & m \sim 770 \text{ MeV/c}^2 \\ Y = -1, & S = -1: & K^{*-} = (s\bar{u}), & \overline{K}^{*0} = (s\bar{d}), & m \sim 892 \text{ MeV/c}^2 \\ Y = 0, & S = 0: & \rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}), & & m \sim 768 \text{ MeV/c}^2. \end{array} \tag{715}$$

In dit geval is het echter wel zo, dat de experimenteel gevonden deeltjes ϕ en ω mengsels zijn van

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}), \quad \text{en} \\ \omega_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}). \end{aligned} \tag{716}$$

We hebben voor deze mengsels

$$\begin{aligned} \phi &= -\ \omega_8 \cos\theta + \omega_1 \sin\theta \\ \omega &= \quad \omega_8 \sin\theta + \omega_1 \cos\theta. \end{aligned} \tag{717}$$

De menghoek bedraagt ongeveer $\theta = 35°$. We vinden hiermee in goede benadering

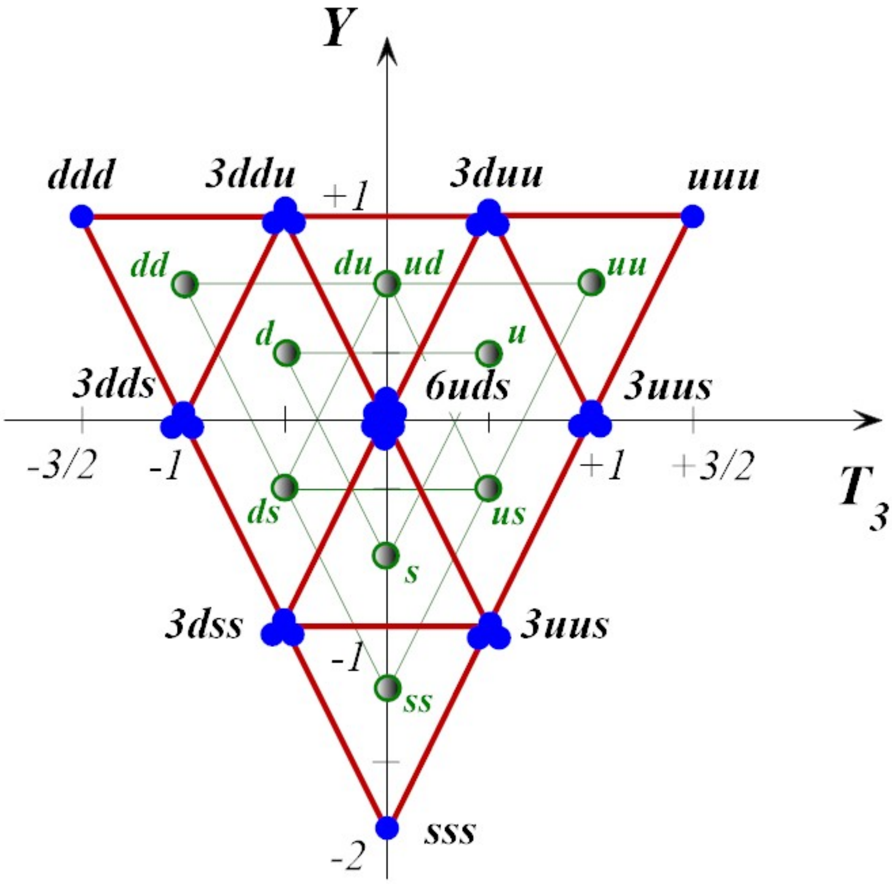
$$\begin{array}{lllll} Y = 0, & S = 0: & \phi \simeq (s\bar{s}), & m \sim 1020 \text{ MeV/c}^2 \\ Y = 0, & S = 0: & \omega \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}), & m \sim 783 \text{ MeV/c}^2. \end{array} \tag{718}$$

Hiermee kunnen we nu ook begrijpen waarom de ϕ bij voorkeur vervalt in kaonen, die eveneens s en $\bar{s}$ quarks bevatten.

5.10 Opbouw van baryonen uit drie quarks

Het quarkmodel is uiterst succesvol gebleken voor de klassificatie van de baryonen. We zullen beginnen met het bespreken van drie-quark toestanden (u, d, en s). Met behulp van groepentheorie kan men laten zien dat de 27 verschillende combinaties geordend kunnen worden in een decouplet, twee octetten, en een singlet,

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 27 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \tag{719}$$



Figuur 71: *Gewichtsdiagram voor de samenstelling van baryonen uit quarks met flavors up, down, en strange.*

We bespreken eerst het octet van de baryonen met spin $J = \frac{1}{2}$ en even pariteit. Hiertoe behoren ook het proton en neutron. In een naïef model koppelen de drie quarkspins tot $J = \frac{1}{2}$ (de toestanden met $J = \frac{3}{2}$ bespreken we later), terwijl het baanimpulsmoment gelijk is aan nul. Opvallend zijn de volgende zaken.

- De acht baryonen in het octet (zie figuur 72) zijn allemaal stabiel met betrekking tot de sterke wisselwerking[106]. De levensduur van deze deeltjes is daarom naar verhouding groot. Afgezien van het verval van de Σ^0, dat verloopt onder invloed van de elektromagnetische wisselwerking, eisen de behoudswetten zelfs dat de zwakke wisselwerking altijd de oorzaak voor het verval is.

[106]Men overwege welk verval naar lichtere deeltjes mogelijk is, zonder dat een van de quantumgetallen - B of S - verandert.

Table 10: *Levensduur, massa, en dominant vervalkanaal voor baryonen met* $J^{+} = \frac{1}{2}^{+}$, *die zijn opgebouwd uit* u, d, *en* s *quarks.*

Deeltje	Massa [MeV]	Levensduur [s]	Dominant verval
p	938.3	∞	
n	939.6	887	$pe^{-}\overline{\nu}_e$
Λ^0	1115.6	2.6×10^{-10}	$p\pi^-$
Σ^-	1197.4	1.5×10^{-10}	$n\pi^-$
Σ^0	1192.6	7.4×10^{-20}	$\Lambda^0\gamma$
Σ^+	1189.4	8.0×10^{-17}	$p\pi^0$
Ξ^-	1321	1.6×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^-$
Ξ^0	1321	2.9×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^0$

- Tabel 10 toont dat binnen een isospinmultiplet de massa-opsplitsing klein (slechts enkele MeV) is. Dit is het gevolg van het verschil in elektromagnetische interactie en het kleine massaverschil tussen de u- en d-quarks. Veel groter is daarentegen de symmetriebreking, wanneer de hyperlading (Y) of het aantal s-quarks in de configuratie verandert. Bij benadering geldt voor de baryonmultipletten de *massaformule van Gell-Mann en Okubo*.

$$M = a + bY + c[T(T+1) - \frac{Y^2}{4}], \tag{720}$$

  waarbij a, b, en c empirisch te bepalen constanten zijn.

- Er bestaat geen baryon met positieve vreemdheid, omdat het s-quark een vreemdheid $S = -1$ heeft.

- In constrast tot de mesonen, vindt men bij baryonen de antideeltjes *niet* in hetzelfde multiplet.

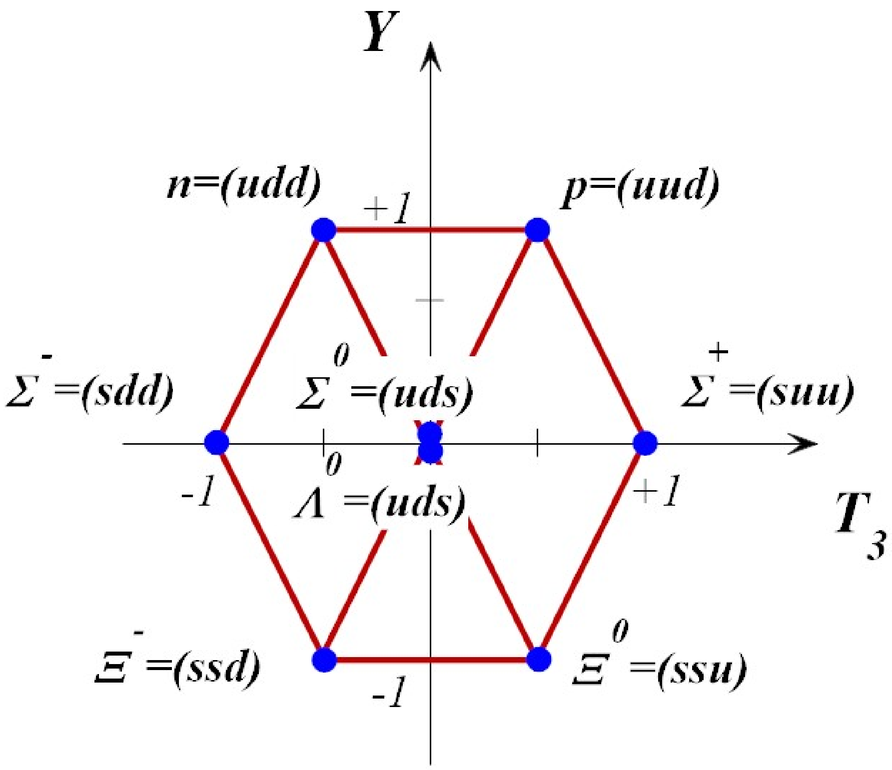
Tenslotte bespreken we nog de deeltjes in het baryondecouplet. Hier koppelen de drie quarkspins en het baanimpulsmoment $l = 0$ tot $J^{\pi} = \frac{3}{2}^{+}$. Bovenaan vinden we de ons goed bekende vier Δ's (een $T = \frac{3}{2}$-isospin quartet), dan volgt een triplet ($T = 1$) en een doublet ($T = \frac{1}{2}$). Het gaat hierbij om de deeltjes Σ^* en Ξ^* die dezelfde quarkinhoud hebben als de corresponderende Σ en Ξ uit het SU(3)-octet, dat we al behandeld hebben.

Omdat deze aangeslagen toestanden een grotere massa hebben, vervallen ze in korte tijd via de sterke wisselwerking, $\Xi^* \to \Xi + \pi$, en $\Sigma^* \to \Sigma + \pi$ of $\Sigma^* \to \Lambda + \pi$ (met een vervalsbreedte van $\Gamma_{\text{total}} \sim 40$ MeV). Bijzonder interessant is het deeltje helemaal beneden in het decouplet, het Ω^-, waarvan het bestaan op basis van dit model door Gell-Mann gepostuleerd werd. Het experimentele bewijs[107] van het bestaan van de Ω^- via de reactie

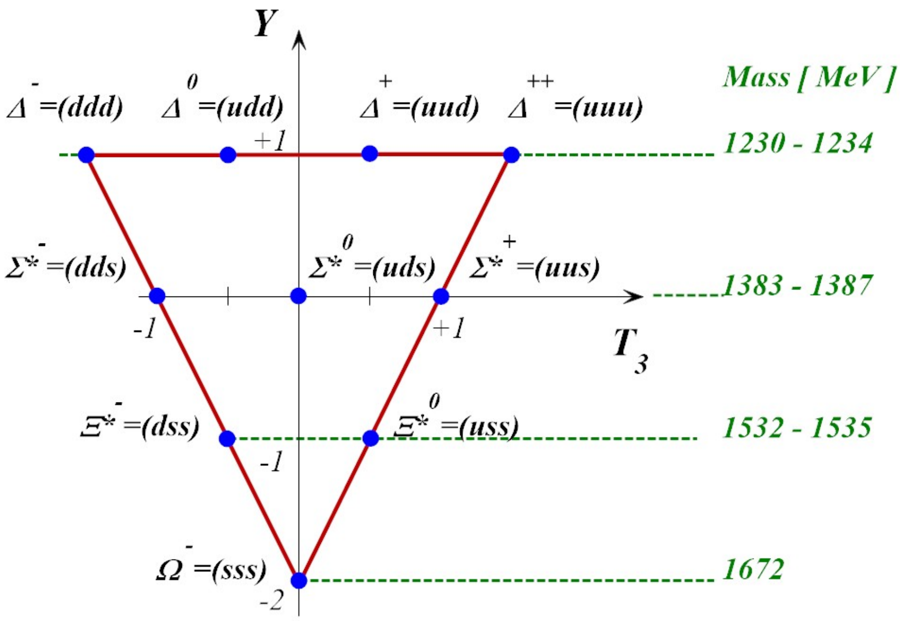
$$\begin{array}{ll} K^- + p \to K^0 + K^+ + & \Omega^- \\ & \downarrow \\ & \Xi^0 + \pi^-, \end{array} \tag{721}$$

was natuurlijk een belangrijke bevestiging van de SU(3)-klassificatie van deeltjes.

[107] Barnes *et al.*, Physical Review Letters **12** (1964) 204.



Figuur 72: *Gewichtsdiagram voor de samenstelling van baryonen uit quarks met flavors up, down, en strange in een octet.*



Figuur 73: *Gewichtsdiagram voor de samenstelling van baryonen uit quarks met flavors up, down, en strange in een decouplet.*

Ook in het decouplet is het massaverschil binnen een isospinmultiplet klein. Daarentegen is het massaverschil groot, en min of meer constant, voor hyperladingen die ± 1 verschillend zijn. Dit feit kon gebruikt worden om de massa van de Ω^- met goede nauwkeurigheid te voorspellen. Omdat de Ω^- een vreemdheid $S = -3$ heeft, kan het slechts zwak vervallen. Hiermee kan dan ook de relatief lange levensduur van $\tau = 8.2 \times 10^{-11}$ s begrepen worden.

Men kan opmerken dat de toestanden in de drie hoeken van het decouplet telkens bezet worden door drie identieke fermionen, die zich in dezelfde toestand bevinden. Dit is natuurlijk verboden door het Pauli principe! Een uitweg uit dit, en andere problemen, kan gevonden worden als men aan de quarks nog een andere eigenschap toekent, het quantumgetal *kleur* (rood, groen, en blauw). Alle deeltjes die men vrij kan observeren zijn kleurloos (wit). De baryonen bestaan altijd uit een rode, een groene, en een blauwe quark; de mesonen bijvoorbeeld uit een rode en een antirode quark. De realiteit van het quantumgetal kleur volgt uit de gemeten verhouding R, gegeven door

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{ hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}. \tag{722}$$

Zoals we hebben gezien in sectie 4.5 zijn de data consistent met $N_c = 3$, waarbij N_c het aantal kleuren voorstelt.

5.11 Additionele quantumgetallen: $\tilde{C}$, $\tilde{B}$, en $\tilde{T}$

In 1974 werd praktisch gelijktijdig in twee verschillende experimenten een nieuw meson, de J/ψ, ontdekt. Figuur 74 geeft de eerste experimentele meetgegevens voor de J/ψ.

Het team van Sam Ting[108] ontdekte een markante piek voor de invariante J-massa in de reactie

$$p +^9 \text{Be} \to \underbrace{e^+e^-}_{\text{J}-\text{meson}} +X \tag{723}$$

bij een protonenergie van 26 GeV, terwijl het team van Burt Richter[109] op hetzelfde moment het ψ-deeltje ontdekte in de e^+e^- reactie bij een $E_{\text{COM}} = 3.097$ GeV.

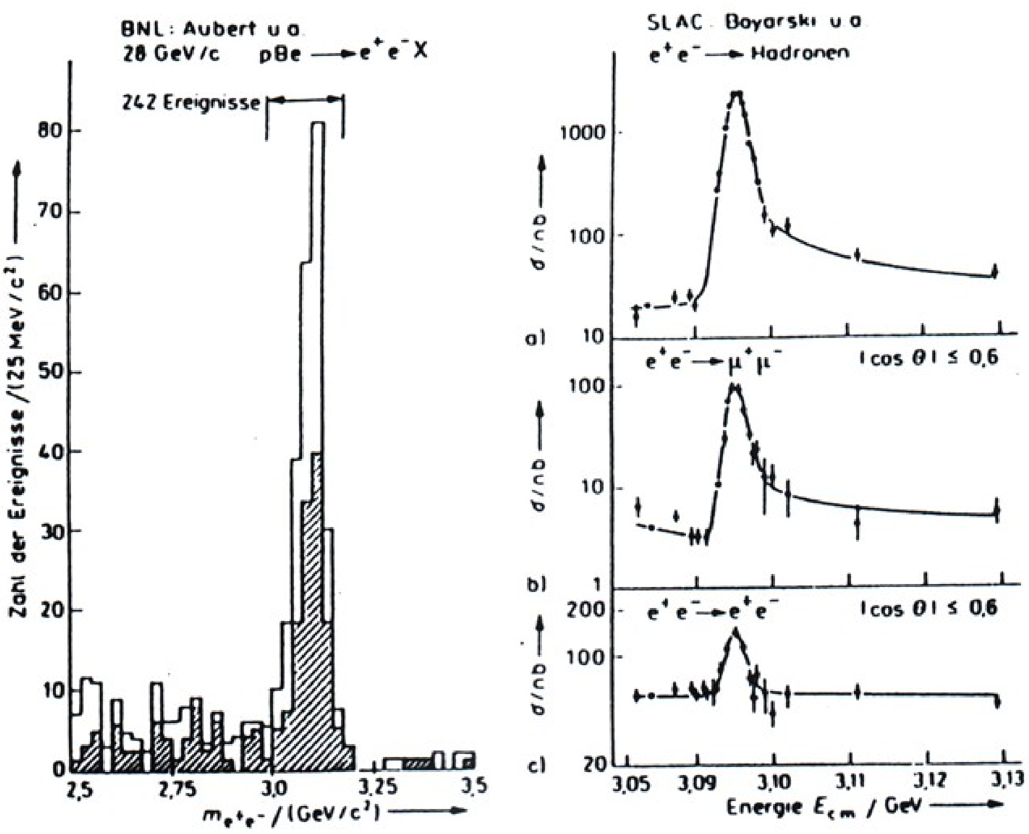
Het gaat in beide gevallen, ondanks de volledig verschillende productieprocessen, om hetzelfde deeltje! Verbazingwekkend is wederom het feit dat, ondanks de zeer hoge rustenergie van de J/ψ, een zo scherpe resonantie optreedt. De breedte bedraagt slechts 68 ± 10 keV. Het ligt dan ook voor de hand dat we bij de productie en verval van dit deeltje te maken hebben met een nieuw quantumgetal. We duiden dit aan met charm en gebruiken het symbool $\tilde{C}$. Tegenwoordig kent men een hele reeks charmonium toestanden, die alle uit een c quark en een $\bar{c}$ antiquark zijn samengesteld.

Men kan natuurlijk weer proberen de mesonen en baryonen te klassificeren in SU(4)-multipletten. Combineren van de drie basis quarkmultipletten geeft dan, analoog aan vergelijking (719), de composities

$$4 \otimes 4 \otimes 4 = 64 = 20 \oplus 20 \oplus 20 \oplus \overline{4}. \tag{724}$$

Vergeleken met SU(3) krijgen de octetten twaalf additionele partners met charm, terwijl het symmetrische decouplet er tien partners bij krijgt. Verder zijn er nu vier antisymmetrische mogelijkheden, in plaats van één in SU(3). Figuur 75 geeft als voorbeeld de baryon 20-pletten, die zijn opgebouwd op een SU(3) octet en decouplet. Wegens de veel grotere massa van het c-quark is de symmetrie echter nog veel meer gebroken dan al het geval was in SU(3) (u, d en s quarks) of zelfs SU(2) (enkel u en d quarks). Het bestaan van de in figuur 75 aangegeven baryonen is tot nu toe slechts ten dele experimenteel aangetoond.

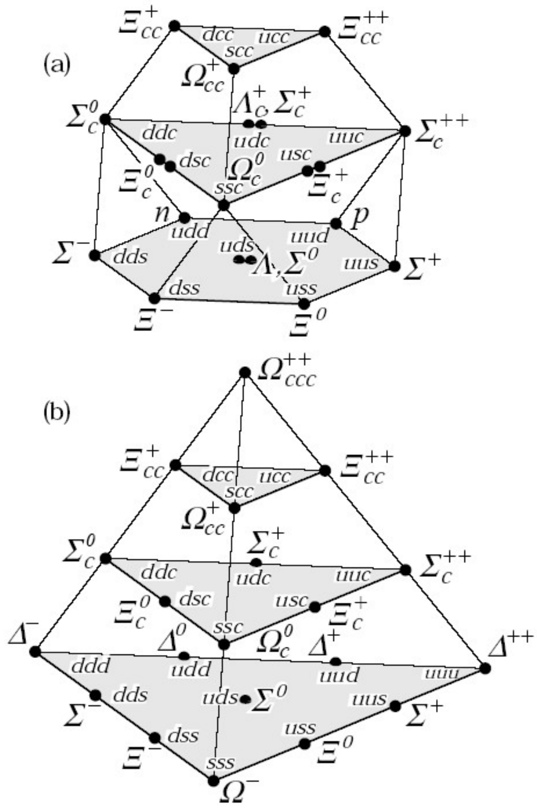
[108]Voor meer informatie zie het artikel van J.J. Aubert *et al.*, Physical Review Letters **33** (1974) 1404.
[109]Voor meer informatie zie het artikel van J.E. Augustin *et al.*, Physical Review Letters **33** (1974) 1406.



Figuur 74: *De eerste data die leiden tot de ontdekking van het J/ψ deeltje. (a) Het effectieve e^+e^--massaspectrum van de reactie $p + Be \to e^+e^- + ...$ (b) De energieafhankelijkheid van de werkzame doorsnede voor de reactie $e^+e^- \to$ hadronen, $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ en $e^+e^- \to e^+e^-$ in de buurt van de J/ψ-resonantie.*

Figuur 76 toont het energiespectrum van het charmoniumsysteem. Men observeert bij energieën van enkele GeVs structuren die in veel opzichten gelijkenis vertonen met het positronium of het waterstofatoom! Een gelijksoortige situatie heeft men later gevonden voor het *bottonium* systeem (figuur 77). Dat wordt veroorzaakt door het feit dat de systemen $c\bar{c}$ en $b\bar{b}$ in essentie niet-relativistische systemen zijn, vanwege de grote massa's van de c en b quarks. Dit in contrast met de mesonen die opgebouwd zijn uit de quarks u, d, en s. Een nauwkeurige analyse laat zien dat $(v/c)^2$, kenmerkend voor relativistische effecten, ongeveer 0.2 is voor het $c\bar{c}$ systeem en kleiner dan 0.1 voor het $b\bar{b}$ systeem. In eerste orde kunnen we daarom de interne beweging beschrijven met een normale Schrödingervergelijking met een potentiaal V. Vanwege hun eenvoud spelen de $c\bar{c}$ en $b\bar{b}$ mesonen een belangrijke rol, en worden ze soms wel de waterstofatomen van de hadronische spectroscopie genoemd. Preciezer geformuleerd, de $Q\overline{Q}$ spectra (waarbij het symbool Q een zware quark aangeeft) lijken sterk op die van het positronium $e\bar{e}$ of het muonium $\mu\bar{\mu}$, die ook gebonden niet-relativistische fermion-antifermion systemen zijn. Zowel de lepton-antilepton als $Q\overline{Q}$ systemen hebben een eindige levensduur omdat de bouwstenen kunnen annihileren naar veldquanta.

De $Q\overline{Q}$ potentiaal, V, heeft twee asymptoten die we denken te kennen op grond van theoretische beschouwingen. Asymptotische vrijheid van QCD leert ons dat wanneer de afstand r tussen quark en antiquark afneemt, V logaritmisch zwakker wordt dan de Coulombwet $1/r$. Verder leert confinement van kleurlading ons dat $V \to \infty$ als $r \to \infty$. Het flux-tube model stelt bijvoorbeeld



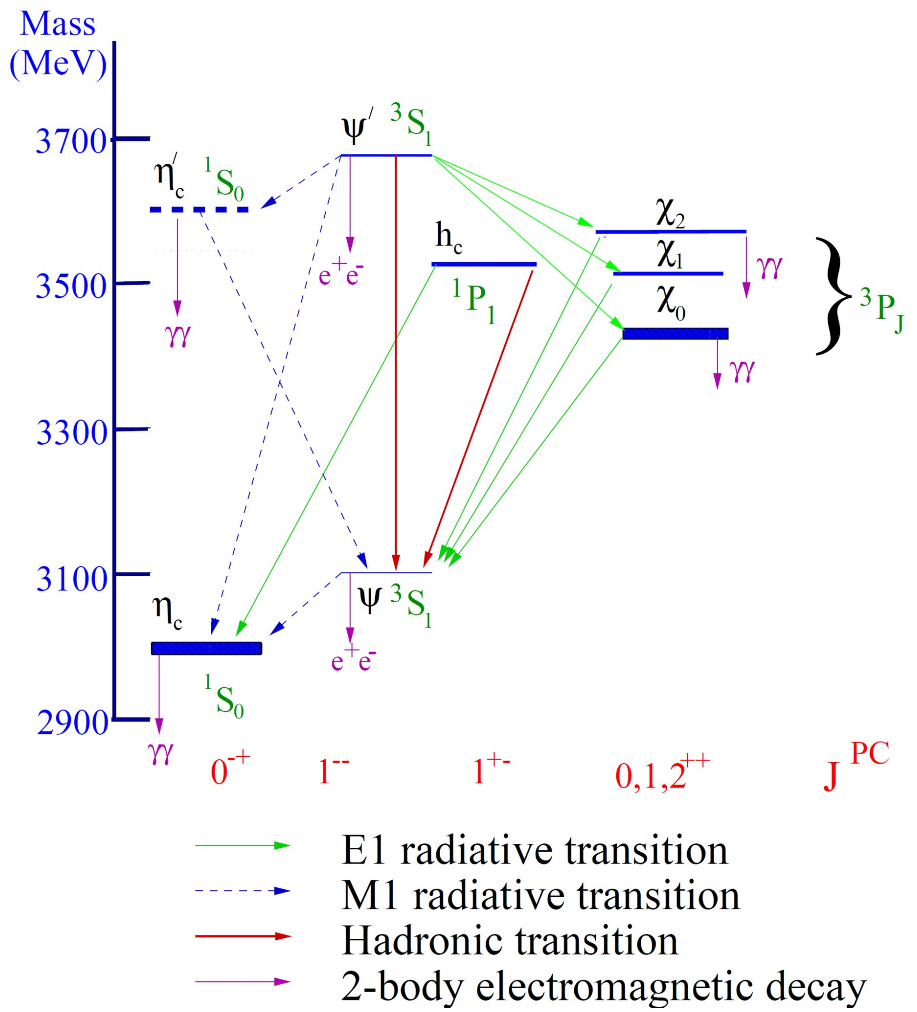
Figuur 75: *SU(4) multipletten van baryonen die zijn samengesteld uit u, d, s en c quarks. (a) Het 20-plet met een SU(3) octet. (b) Het 20-plet met een SU(3) decouplet.*

dat V lineair toeneemt met r voor $r \to \infty$. Een eenvoudige potentiaal (de Richardson potentiaal) die aan deze limieten voldoet is

$$V(r) = -\frac{4}{3}\frac{\alpha_s(r)\hbar c}{r} + k \cdot r, \tag{725}$$

waarbij de factor 4/3 de theoretische consequentie is van het feit dat quarks bestaan met drie verschillende kleuren. De sterke koppelingsconstante α_s is in feite helemaal geen constante, maar hangt af van de afstand tussen quark en antiquark, en wordt kleiner naarmate deze afstand afneemt. Het is niet mogelijk de Schrödingervergelijking analytisch op te lossen voor deze potentiaal, maar het volgende eenvoudige argument kan gebruikt worden om goed inzicht te krijgen in het corresponderende energiespectrum. Beschouw hiertoe figuur 78 waar zowel het spectrum voor de Coulombpotentiaal (rechterzijde) als dat van de drie-dimensionale harmonische oscillator (linkerzijde) is getoond. De parameters zijn met opzet zó gekozen dat de $2S$ niveaus dezelfde excitatie energie hebben. De Coulombpotentiaal gaat naar nul voor grote afstand en heeft daardoor zowel gebonden als ongebonden toestanden. De harmonische oscillator potentiaal groeit met r^2 en is hierdoor zelfs meer 'confining' dan onze voorgestelde quark-antiquark potentiaal $V(r)$. Als we de potentiaal continu deformeren van het Coulombveld naar de oscillator, dan zal deze deformatie ergens gelijk zijn aan $V(r)$. Dientengevolge kunnen we door interpolatie tussen de Coulomb en oscillator spectra de kwalitatieve eigenschappen vinden van het spectrum van de quark-antiquark potentiaal.

In bovenstaande discussie werden alle spinafhankelijke krachten verwaarloosd. In werkelijkheid dienen we de spin-baan en de spin-spin koppelingen mee te nemen, en als gevolg hiervan zal de



Figuur 76: *De huidige status van onze kennis van het charmonium systeem en de bijbehorende transities. Alle toestanden en transities zijn experimenteel waargenomen; enkel de overgang $\psi(2S) \to \eta_c(2S) + \gamma$ (stippellijn) wacht nog op zijn ontdekking.*

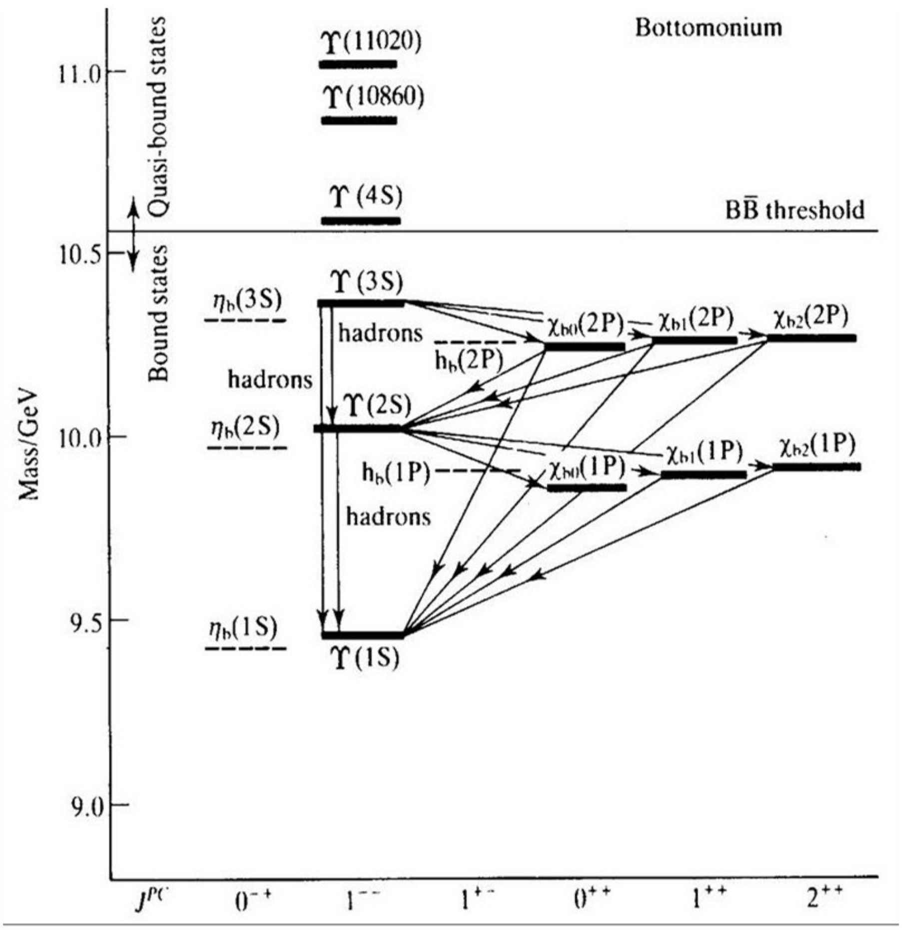
ontaarding van diverse niveaus worden opgeheven. Enkel een gedetailleerde dynamische theorie, zoals QED, is in staat de diverse energieniveaus te voorspellen. Onze kennis van de sterke wisselwerking is op dit moment niet toereikend voor deze taak.

Vanwege de eindige levensduur zullen de $Q\overline{Q}$ systemen na verloop van tijd annihileren. Ze vervallen voornamelijk via de sterke wisselwerking naar hadronen. De geëxciteerde toestanden kunnen echter ook, door emissie van een foton, vervallen naar lagere energietoestanden, net zoals dat gebruikelijk is in de atoomfysica. Figuur 79 toont een deel van het energiespectrum voor het verval van het charmonium.

Men heeft de uitgezonden fotonen gemeten in experimenten met zogenaamde *crystal balls*[110]. De energie van de fotonen varieert van 50 tot 600 MeV en uit de metingen volgt gedetailleerde informatie over het niveauschema, selectieregels, en aard van de overgangen.

Op 22 april 1994 werd in een persconferentie aangekondigd, dat op Fermilab (waar reeds in 1977 het b-quark ontdekt was) eerste aanwijzingen waren gevonden voor het bestaan van het top-quark.

[110] Dat zijn experimenten waarbij detectoren gebruikt worden die de volledige 4π ruimtehoek rond de interactie vertex omspannen. Veel gebruikt worden NaI kristallen die gestapeld zijn in een sferische geometrie.

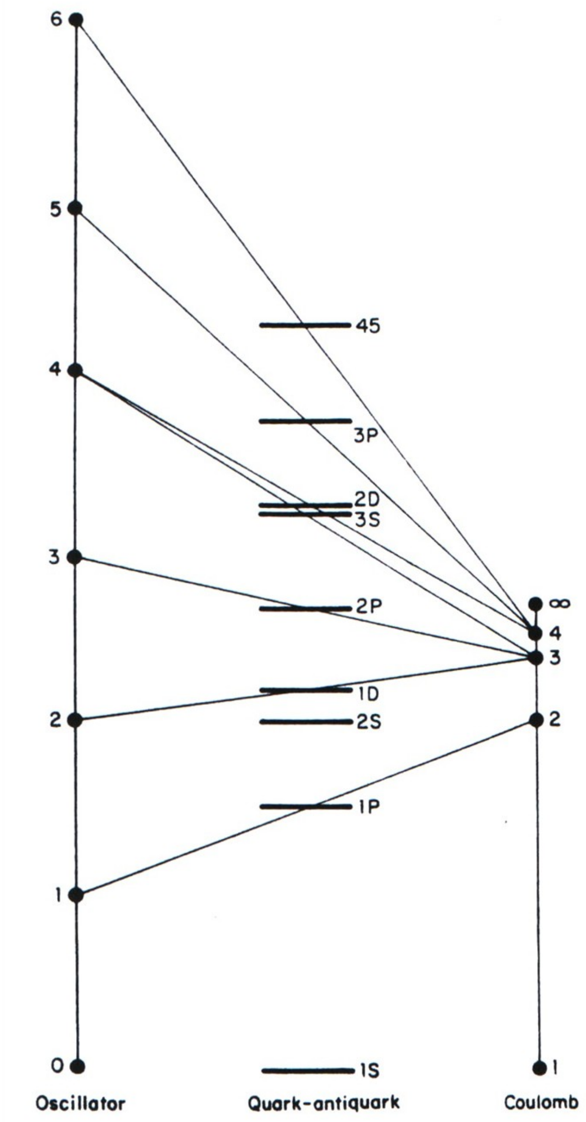


Figuur 77: *Het niveauschema van de $b\bar{b}$-toestanden. De experimenteel waargenomen niveaus zijn aangegeven met getrokken lijnen, terwijl niet waargenomen toestanden zijn aangegeven met stippellijnen.*

Deze experimenten werden uitgevoerd met het Tevatron, een 1 TeV proton-antiproton collider. De top-quarks werden ook weer in paren geproduceerd en vervallen eerst naar een b-quark en een W-boson (dat nu als een reëel deeltje geproduceerd kan worden). De massa bedraagt 180 ± 12 GeV/c^2.

Zoals we tegenwoordig weten kan het quarkmodel nagenoeg alle nu bekende mesonen verklaren. Of er hiernaast ook nog exotische mesonen bestaan, die niet of niet helemaal uit een $(q\bar{q})$-paar bestaan, maar *hybriden* $(q\bar{q}g)$ of *glueballs* zijn, is nog onduidelijk. Er is bijvoorbeeld een $f_J(1710)$ toestand gezien in het verval van de J/ψ, terwijl er ook een structuur gezien wordt bij *dezelfde massa* in 300 GeV/c *pp* interacties (experiment WA76 op CERN). Zowel de massa als de breedte van deze toestand zijn in overeenstemming met de voorspelling voor de grondtoestand van een glueball volgens de meest moderne lattice gauge berekeningen[111].

[111] Een beschrijving is te vinden in *'Review of Particle Physics'*, Physical Review **D54** (1996) 1.



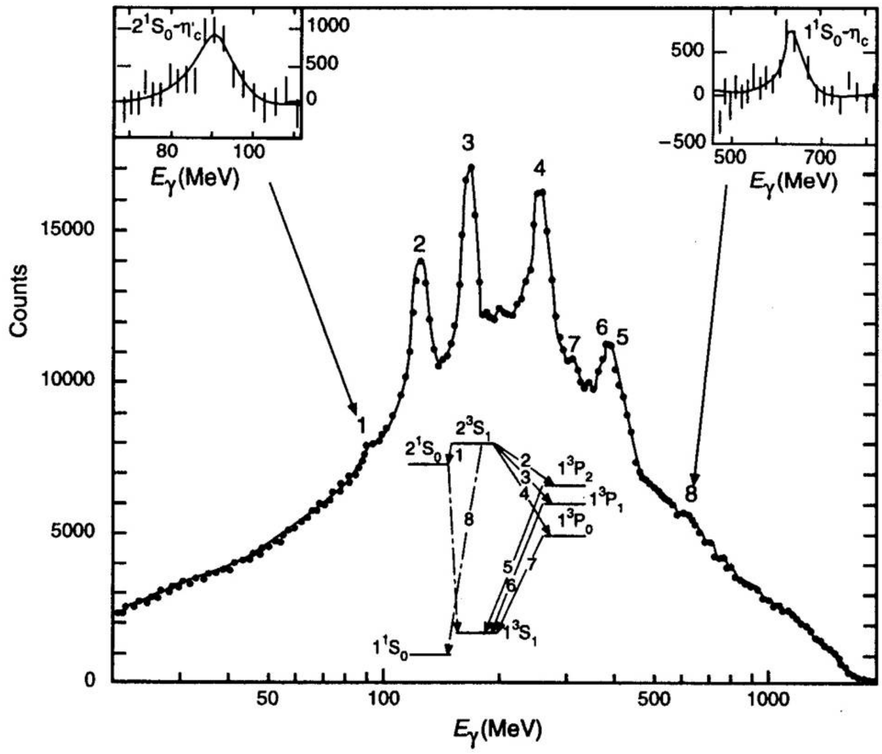
Figuur 78: *Energiespectra van de Coulomb- en de drie-dimensionale harmonische oscillator potentiaal, alsook voor een potentiaal die quark-antiquark paren bindt tot hadronen. De parameters van de potentialen zijn zó gekozen dat ze allemaal dezelfde $1S-2S$ opsplitsing hebben. Het 'quark-antiquark' schema volgt dan uit visuele interpolatie.*

5.12 CPT-theorema: deeltjes en antideeltjes

Als we uitgaan van het relativistisch correcte verband tussen energie en impuls van een deeltje, $E^2=p^2c^2+m^2c^4$, dan kunnen we de hiermee corresponderende relativistische golfvergelijking[112] vinden door de volgende operatoren te substitueren

$$p \to \frac{\hbar}{i}\nabla \quad \text{en} \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}. \tag{726}$$

[112]Dat levert de zogenaamde Klein-Gordon vergelijking die geldig is voor spinloze deeltjes. Merk op dat de fundamentele bouwstenen in de subatomaire fysica allemaal spin-$\frac{1}{2}$ hebben.



Figuur 79: *Het geobserveerde fotonspectrum voor de reactie $\psi' \to \gamma X$. De eerste drie maxima (van links naar rechts) zijn voor de overgangen van de toestand ψ' naar respectievelijk de niveaus $^3P_2$, $^3P_1$ en $^3P_0$. De brede piek bij 400 MeV wordt veroorzaakt door de cascade $^3P_1 \to \psi\gamma$ en $^3P_2 \to \psi\gamma$; deze pieken hebben Dopplerverbreding omdat de P-toestand waaruit ze onstaan in beweging is door het voorgaande ψ' verval.*

We vinden dan de zogenaamde Klein-Gordon vergelijking

$$\left[\Box + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\psi(\vec{r}, t) = 0, \tag{727}$$

waarbij

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad \text{met} \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla. \tag{728}$$

We vinden twee oplossingen voor de energie,

$$E^{\pm} = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}. \tag{729}$$

Het blijkt dat we de oplossing met het negatieve teken niet eenvoudig 'unter den Teppich' kunnen vegen, zoals bijvoorbeeld Schrödinger oorsponkelijk van plan was. Paul Dirac[113] had reeds in 1930 gepostuleerd dat deze tweede oplossing de beweging van een antideeltje vertegenwoordigt. Het antideeltje van het elektron, het positron, werd daarna in 1933 door Anderson[114] in een experiment aangetoond.

We bespreken in het volgende een grove, heuristische gedachtengang, met de bedoeling te tonen hoe men tot deze interpretatie kan komen. De golffunctie met positieve energie,

$$\psi^+(x, t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(px - E^+t)\right\}, \tag{730}$$

[113]Zie het artikel P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (London) **A126** (1930) 360.
[114]Zie het artikel van C.D. Anderson, Physical Review **43** (1933) 491.

representeert een golf met een positieve fasesnelheid

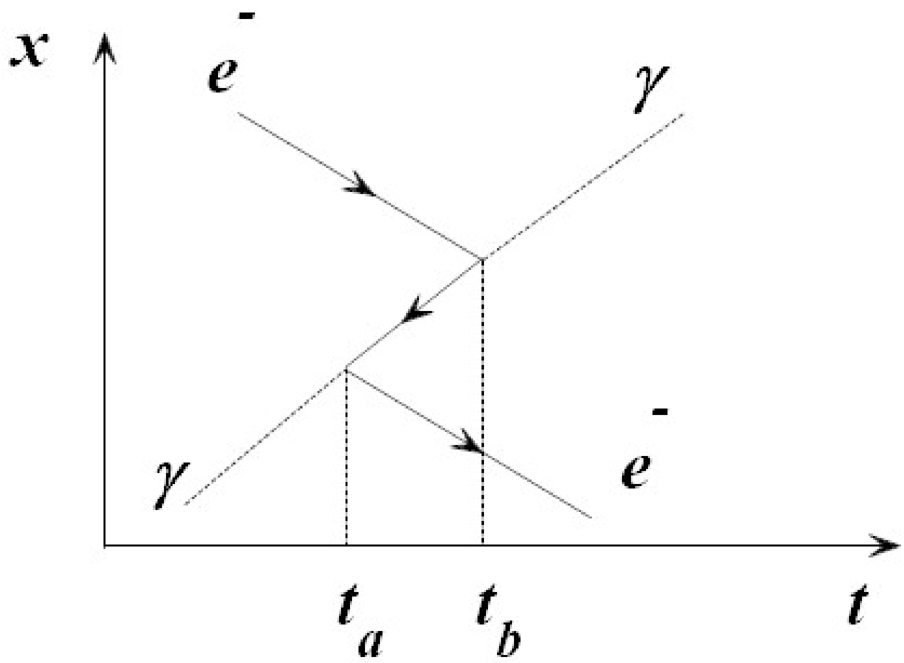
$$v_p^+ = \frac{E^+}{p}. \tag{731}$$

Het maximum van de golf (we bedoelen hier het deeltje)[115] loopt met toenemende tijd t langs de positieve x-as.

Voor de oplossing met negatieve energie kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} \psi^-(x,t) &= \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}(px - E^- t)\right\} \\ &= \exp\left\{\tfrac{i}{\hbar}(px - E^+(-t))\right\}. \end{aligned} \tag{732}$$

Als we de tijdsrichting omkeren[116], $t \to -t$, dan kunnen we ons er eenvoudig van overtuigen dat dit op hetzelfde neerkomt, als wanneer we de lading zouden omdraaien (zie ook appendix B). De tweede oplossing vertegenwoordigt dus de normale beweging van een antideeltje.



Figuur 80: *Beweging van een deeltje en antideeltje in het Feynmandiagram voor foton-elektron verstrooiing.*

Bij de verstrooiing van een γ-quantum aan een elektron, kunnen we het Feynmandiagram geschetst in figuur 80 als volgt interpreteren.

- Voor $t < t_a$ zien we dat een elektron en een foton naar elkaar toe bewegen.
- Op tijdstip $t = t_a$ wordt er een elektron-positron paar gecreëerd.
- Gedurende de periode $t_a < t < t_b$ bestaan er twee elektronen en een positron. De totale lading is echter niet veranderd.

[115] Teneinde de discussie wat explicieter te maken, dient men hier een golfpakket in te voeren en vervolgens te werken met de groepssnelheid.

[116] Zie ook het boek van R.P Feynman, *Quantum Elektrodynamics*, W.A. Benjamin, New York, 1961.

- Op tijdstip $t = t_b$ annihileert het elektron-positron paar.
- Voor $t > t_a$ zien we het verstrooide elektron en foton van elkaar af bewegen.

Men kan eenvoudig controleren dat wanneer enkel elektromagnetische krachten actief zijn, er steeds dezelfde bewegingswet geldt (omdat ze invariant is voor de operaties $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$, en $\mathcal{T}$). We weten echter dat de operatie $\mathcal{P}$ geschonden is in de zwakke wisselwerking, maar na een $\mathcal{CP}$-transformatie wordt ook voor deze wisselwerking weer een bijna invariante bewegingswet verkregen[117]. Men kan echter onder zeer algemene aannamen laten zien dat de gecombineerde operatie $\mathcal{CPT}$ altijd commuteert met $\mathbf{H}$, en wel voor *alle* interacties. Hieruit volgt onder meer dat een deeltje en een antideeltje altijd precies dezelfde massa en levensduur dienen te hebben. Voor alle additieve quantumgetallen (zie tabel 11) treedt daarentegen een tekenverandering op.

Table 11: *Relatie tussen de belangrijke eigenschappen en quantumgetallen voor deeltjes en bijbehorende antideeltjes.*

Grootheid	Deeltje	Antideeltje
Massa	m	m
Levensduur	τ	τ
Spin	J	J
Isospin	T	T
Isospin (z-component)	T_z	$-T_z$
Lading	Q	$-Q$
Vreemdheid	S	$-S$
Charm, enzovoort	$\tilde{C}$	$-\tilde{C}$
Eigenpariteit (fermion)	π	$-\pi$
Eigenpariteit (boson)	π	π
Baryongetal	B	$-B$
Leptongetal	$L_e,\ L_\mu,\ L_\tau$	$-L_e,\ -L_\mu,\ -L_\tau$

Tegenwoordig kent men van bijna alle deeltjes ook het bijbehorende antideeltje. Het bestaan van het antiproton werd in 1955, na lang vergeefs zoeken in kosmische straling, aangetoond in Berkeley. Ook bleek het mogelijk (zie figuur 81) om zelfs het bestaan van exotische deeltjes als het anti-Ω aan te tonen[118]. Het mechanisme van de productie is als volgt (de moeilijkheid zal hopelijk duidelijk zijn: men dient een deeltje met vreemdheid $S = 3$ te produceren!)

$$\begin{array}{rccccccccccccccc} & K^+ & + & d & \to & \overline{\Omega}^+ & + & \Lambda & + & \Lambda & + & p & + & \pi^+ & + & \pi^- \\ B: & 0 & + & 2 & \to & -1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 0 & + & 0 \\ S: & 1 & + & 0 & \to & 3 & - & 1 & - & 1 & + & 0 & + & 0 & + & 0. \end{array} \tag{733}$$

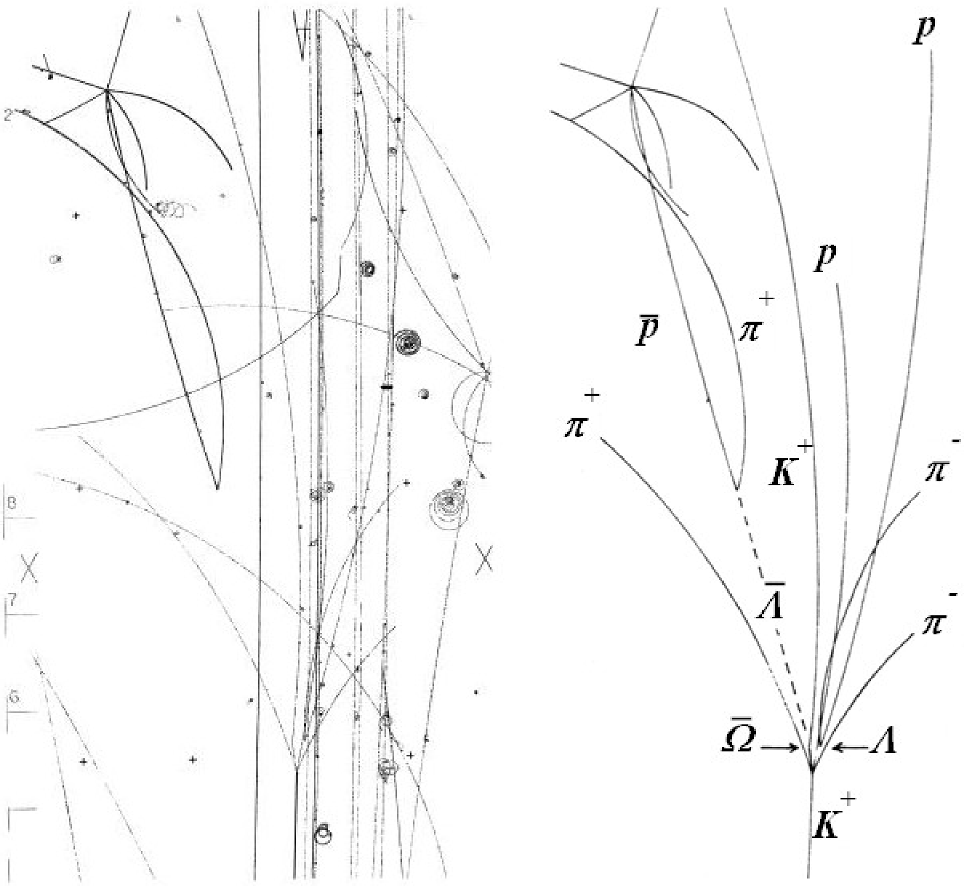
Het Ω^- vervalt voornamelijk in een Λ en een K^-. Hierbij verandert de vreemdheid met $\Delta S = 1$. Het verval van de $\overline{\Omega}^+$, zoals die is weergegeven in figuur 81, verloopt als volgt

$$\overline{\Omega}^+ \to \overline{\Lambda} + K^+. \tag{734}$$

Beide vervallen worden geïnduceerd door de zwakke wisselwerking. De vreemdheid verandert en de levensduur van het anti-Ω is bijzonder groot, $\tau \sim 8.2 \times 10^{-11}$ s.

[117]We zullen later de kleine schending van $\mathcal{CP}$ bespreken, die men heeft waargenomen in het verval van neutrale K-mesonen.

[118]Zie ook het artikel van A. Firestone *et al.*, Physical Review Letters **26** (1971) 410.



Figuur 81: *Tekening (links) en bellenvatfoto (rechts) voor de reactie* $K^+d \rightarrow \overline{\Omega}\Lambda\Lambda p\pi^+\pi^-$ *geobserveerd in de studie van* K^+d*-interacties bij een impuls van 12 GeV/c met de twee-mijl-versneller van het Stanford Linear Accelerator Center.*

Enkel deze paar voorbeelden laten al zien hoe nuttig het concept van een antideeltje is. We gebruiken in het vervolg de operator $\mathcal{C}$ om een deeltje te veranderen in het bijbehorende antideeltje (dus niet enkel de lading verandert nu van teken).

Voor een klein aantal deeltjes (bijvoorbeeld γ en π^0) zijn alle waarden, die onder een $\mathcal{C}$-operatie van teken zouden veranderen, gelijk aan nul. In die gevallen kan men deeltje en antideeltje niet onderscheiden, en zijn het dus hetzelfde object. Als we de operator voor ladingsconjugatie laten werken op een geladen pion,

$$\mathcal{C}|\pi^+ >\rightarrow |\pi^- >\neq \eta|\pi^+ >, \tag{735}$$

krijgen we duidelijk *géén* eigentoestand. Voor het neutrale pion is de situatie echter anders $\mathcal{C}$ $|\pi^0 >= \eta|\pi^0 >$. Indien we $\mathcal{C}$ een tweede keer toepassen, dan krijgen we weer de begintoestand. Hieruit volgt dat $\eta^2 = 1$ en dus dat $\eta = \pm 1$. Men duidt daarom de grootheid η aan als $\mathcal{C}$-pariteit in analogie met de normale pariteit. Ook daar hadden we reeds vastgesteld dat bepaalde toestanden een goed gedefiniëerde pariteit hebben, en andere weer niet.

Voor een situatie met enkel elektromagnetische velden treedt er een tekenverandering op onder een $\mathcal{C}$-transformatie: het foton heeft daarom een negatieve $\mathcal{C}$-pariteit,

$$\mathcal{C}|\gamma >= -|\gamma > . \tag{736}$$

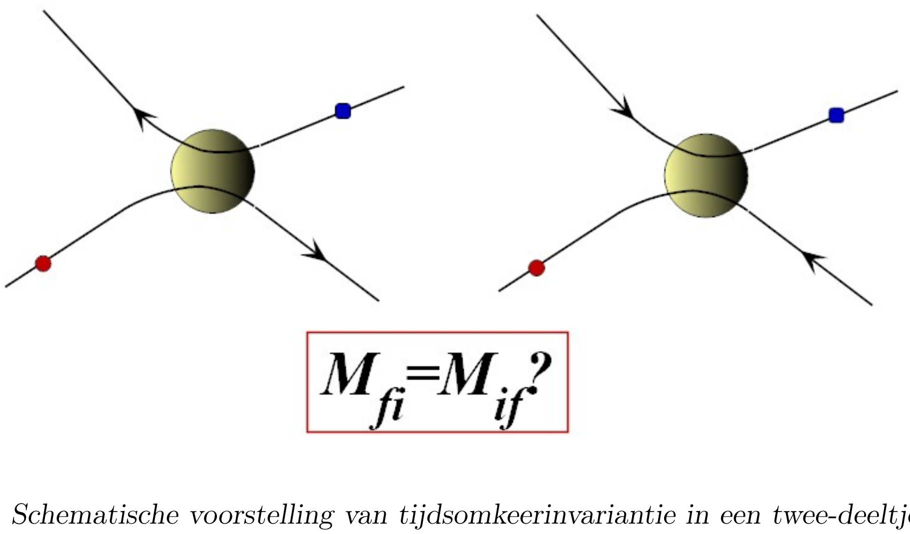
Het neutrale pion vervalt met een levensduur van 8.4×10^{-6} s naar twee fotonen. Daarentegen treedt het verval $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ niet op (B.R. $< 3.1 \times 10^{-8}$). Dit duidt erop dat de elektromagnetische wisselwerking $\mathcal{C}$-invariant is. Daar de $\mathcal{C}$-pariteit een multiplicatief quantumgetal is, moet de $\mathcal{C}$-pariteit van het π^0-meson positief zijn, $\mathcal{C}\ |\pi^0>=+|\pi^0>$. Een hele serie vervolgexperimenten laat zien dat de sterke en de elektromagnetische wisselwerking $\mathcal{C}$-invariant zijn. Daarentegen vinden we dat de zwakke wisselwerking *bijna* invariant is onder de gecombineerde operatie $\mathcal{CP}$ (op kleine afwijkingen na, die we verderop in dit hoofdstuk zullen bespreken). Omdat in de zwakke wisselwerking $\mathcal{P}$ maximaal geschonden is, moet ook $\mathcal{C}$ maximaal geschonden zijn.

5.13 Invariantie van tijdsomkeer

In de klassieke natuurkunde hebben we vastgesteld dat de wet van Newton,

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{737}$$

invariant is onder spiegeling van de tijdas, $t \rightarrow -t$. Alle deeltjesbanen kunnen net zo goed in tegengestelde richting doorlopen worden. Als we enkele deeltjes in een microscopisch systeem observeren (zie figuur 82), kunnen we geen onderscheid maken, of een film, waarop de banen en botsingen geregistreerd staan, voorwaarts of achterwaarts gedraaid wordt. Als de waarschijnlijkheid voor de twee processen getoond in figuur 82 gelijk is, dan spreken we van invariantie van tijdsomkeer, ook wel bekend als *microscopische reversibiliteit*. Dit verandert direct wanneer we een macroscopisch systeem bestuderen, waar irreversibele processen optreden, zoals wrijving, warmtegeleiding, of diffusie (in de vergelijkingen die deze processen beschrijven komen ook eerste-orde afgeleiden naar de tijd voor). Er bestaat klaarblijkelijk in de natuur een voorkeursrichting voor de tijd[119] - enkel uitgaande golven - een schending van elementaire tijdsomkeer. In het volgende zullen we niet over dergelijke fenomenen spreken, maar bedenken of ook in elementaire botsingsprocessen er een voorkeursrichting is voor de tijd ($\mathcal{T}$-invariantie van de wisselwerkingen).



Figuur 82: *Schematische voorstelling van tijdsomkeerinvariantie in een twee-deeltjes botsingsproces.*

Kort nadat Lee en Yang in 1956 het vermoeden geuit hadden, dat de pariteit $\mathcal{P}$ in enkele processen niet behouden zou kunnen zijn, werd in vele experimenten getoond dat deze fundamentele

[119]Het is echter totaal niet duidelijk, of en hoe de verschillende factoren die de richting van de tijd bepalen samenhangen: entropietoename - expansie van het universum - '*It is a poor memory that remembers only backwards*' (Alice in Wonderland).

symmetrie (samen met de ladingsconjugatie) maximaal gebroken is in *alle* overgangen die geïnduceerd worden door de zwakke wisselwerking. Bij tijdsomkeer hebben we te maken met een geheel andere situatie. Kleine schendingen van $\mathcal{CP}$ (of $\mathcal{T}$) werden pas voor het eerst in 1964 bij het verval van de neutrale K-mesonen ontdekt. Daarnaast is het niet gelukt, om ook maar één ander systeem te vinden, waarbij een schending van tijdsomkeer optreedt[120], ofschoon men in de laatste jaren met grote inspanning naar zulke effecten gezocht heeft[121]. Hoewel schending van tijdsomkeer door het standaard model geaccomodeerd worden kan, tast men over het mechanisme van deze kleine symmetriebreking nog volledig in het duister. Er worden daarom ook nu nog verschillende experimenten uitgevoerd (of voorbereid), om de grenzen van de schending van tijdsomkeer vast te leggen[122]. We zullen in het volgende enkele daarvan iets nader beschouwen.

Bij een tijdsomkeer transformatie veranderen de plaats, impuls, en spin van een deeltje als volgt,

$$\begin{array}{llll} \vec{\mathbf{r}}' & = \mathcal{T}\,\vec{\mathbf{r}}\,\mathcal{T}^{-1} & = & \vec{\mathbf{r}} \\ \vec{\mathbf{p}}' & = \mathcal{T}\,\vec{\mathbf{p}}\,\mathcal{T}^{-1} & = - & \vec{\mathbf{p}} \\ \vec{\mathbf{J}}' & = \mathcal{T}\,\vec{\mathbf{J}}\,\mathcal{T}^{-1} & = - & \vec{\mathbf{J}}. \end{array} \tag{738}$$

Als we deze transformatie willen beschrijven dan dienen we te bedenken dat er in de quantum mechanica twee typen observabelen zijn.

- Wanneer we een meting uitvoeren aan een systeem dat geprepareerd is in de toestand $|\psi>$, kunnen we het systeem aantreffen in de toestand $|\phi>$ met een waarschijnlijkheid $|<\phi|\psi>|^2$.
- De verwachtingswaarde van een dynamische operator $\mathbf{D}$ in de toestand ψ wordt gegeven door $<D>=<\psi|\mathbf{D}|\psi>$.

De operatie $t \to -t$ kan niet voorgesteld worden met een unitaire operator $\mathbf{U}$. Dit kan worden aangetoond met het volgende argument. Invariantie voor tijdsomkeer eist dat $\mathbf{U}^\dagger\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{H}$. De tijdevolutie van de golfunctie wordt gegeven door

$$\mathbf{H}|\psi> = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi>\,. \tag{739}$$

Na de transformatie vinden we

$$\mathbf{U}\mathbf{H}|\psi> = \mathbf{U}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi> = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}|\psi>, \tag{740}$$

omdat $\mathbf{U}$ de verandering $t \to -t$ voorstelt. Omdat $\mathbf{U}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{U}$ vinden we

$$\mathbf{H}\mathbf{U}|\psi> = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}|\psi>\,. \tag{741}$$

Er geldt $|\psi'> = \mathbf{U}|\psi>$ en we zien dus dat $|\psi'>$ niet voldoet aan de Schrödinger vergelijking, maar aan

$$\mathbf{H}|\psi'> = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'>\,. \tag{742}$$

[120] We gaan uiteraard niet in op het grote aantal experimenten, waarvan gebleken is dat ze fout (niet reproduceerbaar) zijn.

[121] Er is nog een ander 'experiment', dat echter moeilijk te herhalen is, de Big Bang. Men neemt tegenwoordig aan dat er in den beginne evenveel deeltjes als antideeltjes voorkwamen. De op dit moment geobserveerde asymmetrie (waarschijnlijk bestaan er geen sterrenstelsels die uit antimaterie bestaan) kan 'verklaard' worden door het mechanisme van $\mathcal{CP}$-schending.

[122] Deze vraagstelling bepaalt voor een belangrijk deel het toekomstige onderzoek van de vakgroep Subatomaire Fysica van de Vrije Universiteit - Amsterdam. De SAF - VUA groep neemt deel aan het LHCb experiment op CERN, met als doel $\mathcal{CP}$-schending in het verval van B-mesonen te onderzoeken.

We merken echter op dat de golffunctie zelf geen observabele is en de symmetrie weer hersteld kan worden door gebruik te maken van een andere definitie. Het is mogelijk om de transformatie voor tijdsomkeer, $\mathcal{T}$, als het product van een unitaire operator $\mathbf{U}_{\mathcal{T}}$ en een operator $\mathbf{K}$ voor te stellen, waarbij $\mathbf{K}$ de overgang naar de complex geconjugeerde grootheid impliceert,

$$\mathcal{T} = \mathbf{U}_{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{K}. \tag{743}$$

Voor een dergelijke antiunitaire transformatie geldt dat wanneer $|\psi(t)>$ een oplossing van de Schrödinger vergelijking is, dan is $|\psi^*(-t)>$ ook een oplossing. Dit volgt uit

$$\mathcal{T}\mathbf{H}|\psi>=\mathbf{H}\mathcal{T}|\psi>=-i\hbar\mathcal{T}\frac{\partial}{\partial t}|\psi>=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}|\psi>. \tag{744}$$

Wigner constateerde dat de operator $\mathcal{T}$ antilineair,

$$\mathcal{T}(C_1|\psi>+C_2|\phi>) = C_1^*\mathcal{T}|\psi>+C_2^*\mathcal{T}|\phi>, \tag{745}$$

en antiunitair is,

$$<\psi'|\phi'>=<\psi\mathcal{T}^\dagger|\mathcal{T}\phi>=<\psi|\phi>^*=<\phi|\psi>. \tag{746}$$

We merken echter op, dat vanwege

$$|<\psi'|\phi'>| = |<\phi|\psi>| = |<\psi|\phi>|, \tag{747}$$

de operator $\mathcal{T}$ de fysische inhoud van de quantum mechanica onveranderd laat. Samenvattend concluderen we dat de quantummechanische equivalent van de klassieke tijdsomkeer transformatie gegeven wordt door $t \to -t$ en $i \to -i$. Het quantummechanische principe van microscopische reversibiliteit voldoet aan deze transformatie.

Wegens $\mathcal{T}\ \psi(t) = \psi^*(-t) \neq \eta\psi(t)$ zijn er geen observabele eigenwaarden van $\mathcal{T}$. In tegenstelling tot $\mathcal{P}$ kunnen we daarom niet naar $\mathcal{T}$-toegestane of verboden overgangen zoeken[123].

5.13.1 Gedetailleerd evenwicht

Uit vergelijking (746) kunnen we direct het *principe van gedetailleerd evenwicht* afleiden. De werkzame doorsnede voor inverse reacties zijn gelijk, op faseruimtefactoren na. In de kernfysica zijn een reeks reacties en hun omkeerreacties zorgvuldig gemeten.

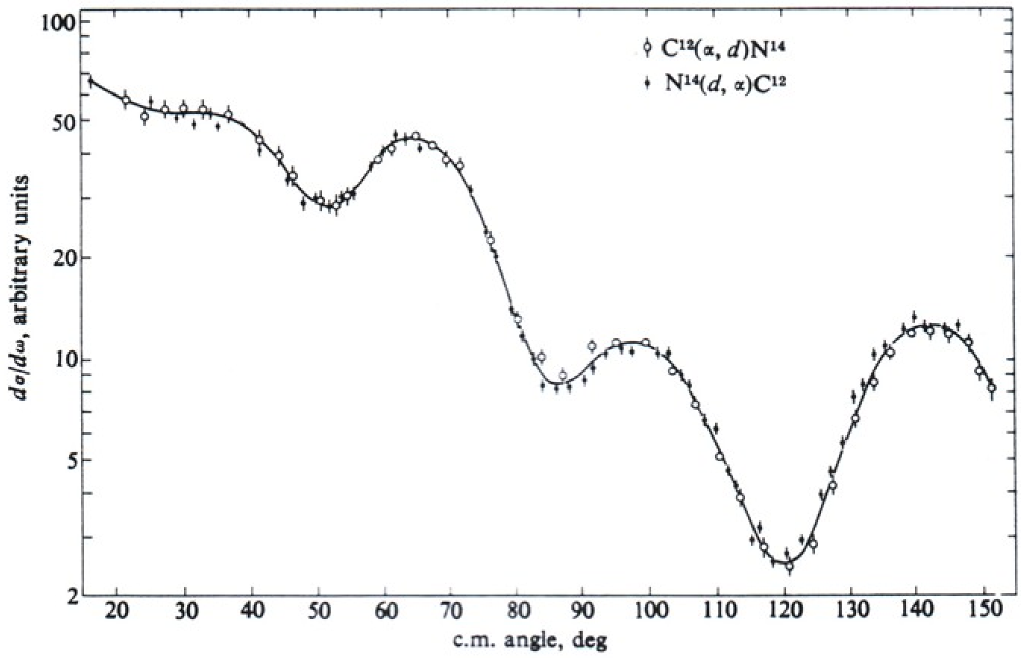
In figuur 83 geven we hiervan een voorbeeld. Men heeft steeds gevonden dat binnen de meetnauwkeurigheid geldt dat

$$\frac{d\sigma/d\Omega(a+b\to A+B)}{d\sigma/d\Omega(A+B\to a+b)} = \underbrace{\frac{p_{AB}^2}{p_{ab}^2}\,\frac{(2J_A+1)(2J_B+1)}{(2J_a+1)(2J_b+1)}}_{\text{Faseruimtefactor}}\,\underbrace{\frac{|T_{ab\to AB}|^2}{|T_{AB\to ab}|^2}}_{=1\ !}. \tag{748}$$

5.13.2 Elektrisch dipoolmoment van het neutron

We hebben reeds eerder gezien dat de ladingsverdeling van een neutron niet gelijk is aan nul (vanwege de opbouw van baryonen uit geladen quarks). Men kan daarom vermoeden dat het neutron niet alleen een magnetisch dipoolmoment heeft (dat is het geval, $\mu_n = (1.041\ 875\ 6 \pm 0.000\ 000\ 3) \times 10^{-3}\ \mu_{\text{Bohr}}$), maar ook een statisch elektrisch dipoolmoment. De oriëntatie van

[123] Zie hiertoe het boek van A. Bohr and B. Mottelson, Nuclear Structure, Vol. I, Benjamin, Inc. New York, 1969.



Figuur 83: *Vergelijking van de werkzame doorsnede voor de reactie $^{14}N(d,\alpha)^{12}C$ en de inverse reactie $^{12}C(\alpha,d)^{14}N$.*

een deeltje kan worden gespecificeerd door de oriëntatie van de spin met betrekking tot een as. Als we hiervoor de z-as kiezen dan is het elektrisch dipoolmoment gegeven door

$$\mu_e = \int \rho z dV, \tag{749}$$

waarbij ρ de ladingsverdeling van het deeltje voorstelt.

Voor het neutron kan men a priori denken aan een orde van grootte

$$d_n = \mu_e^n \sim e \times 10^{-13} \ \text{ cm.} \tag{750}$$

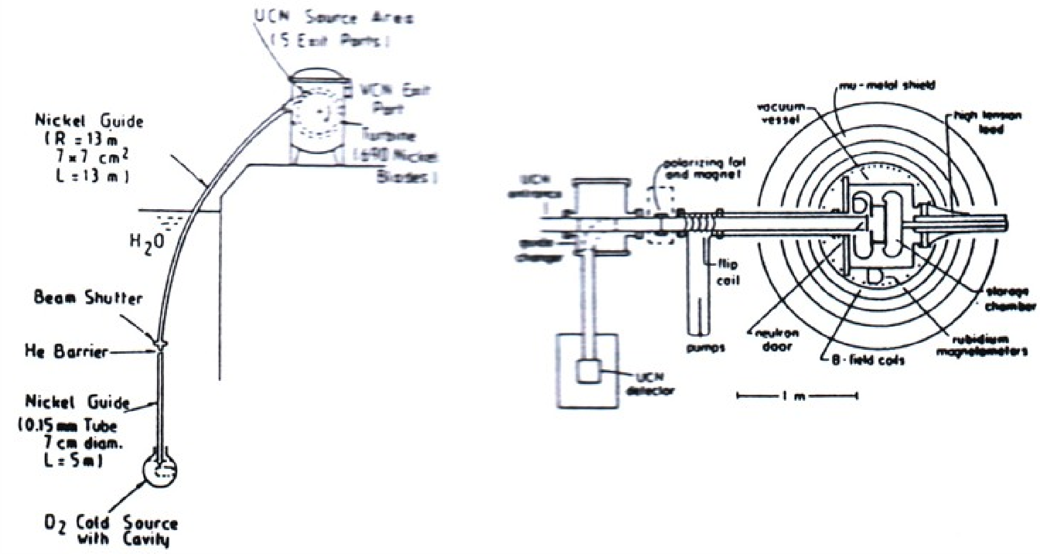
Men kan echter eenvoudig bedenken[124], dat het dipoolmoment gelijk is aan nul, indien de wisselwerkingen pariteitsinvariant zijn. Er geldt dan $\phi_n(x,y,z) = \pm\phi_n(-x,-y,-z)$, met als gevolg dat de verwachtingswaarde van **z**,

$$< z >= z_{nn} = \int \phi_n^* z \phi_n dV, \tag{751}$$

zal verdwijnen. Dit is echter niet altijd van toepassing, want we dienen het aandeel van de zwakke wisselwerking, die ongeveer 10^{-7} keer kleiner is dan de sterke wisselwerking, in beschouwing te nemen. Dit levert de mogelijkheid dat

$$d_n \sim e \times 10^{-20} \ \text{ cm.} \tag{752}$$

[124]We willen hier benadrukken dat deze argumenten niet gelden als we met een systeem te maken hebben dat meerdere ontaarde energietoestanden heeft (iets dat niet geldt voor het neutron). In zo'n systeem is het zonder meer mogelijk, dat een antisymmetrische ladingsverdeling optreedt, hetgeen in een elektrisch veld leidt tot een gerichtheid (in het samenspel van botsingen met andere moleculen) en een energieopsplitsing $\vec{\mu}_e \cdot \vec{E}$. Veel moleculen hebben inderdaad een groot elektrisch dipoolmoment.



Figuur 84: *Experimentele opstelling voor de bepaling van het elektrische dipoolmoment van het neutron.*

Daarboven verdwijnt het dipoolmoment eveneens bij tijdsomkeerinvariantie. Een meting van d_n met de vereiste grote nauwkeurigheid levert daarom een aanwijzing voor de grootte van een eventuele schending van invariantie voor tijdsomkeer en pariteit. Verschillende theoretische modellen voorspellen waarden van

$$d_n \sim e \times 10^{-25} \;\text{ cm ... } e \times 10^{-33} \;\text{ cm.} \tag{753}$$

De meest nauwkeurige experimentele metingen geven

$$d_n < 1.1 \times 10^{-25}\; e \cdot \text{cm}, \;\text{conf. level} = 95\%. \tag{754}$$

Om deze onvoorstelbare nauwkeurigheid te bereiken dient een serie van geraffineerde trucken toegepast te worden. We beschrijven nu enkele van de aspecten van een experiment in ILL Grenoble[125].

Uit een hogefluxreactor ($f_{\text{therm}} = 4.5 \times 10^{14}$ cm^{-2}s^{-1}) worden uit een koude bron (vloeibaar deuterium bij 25 K) neutronen verticaal geëxtraheerd. Door totale reflectie en een Dopplerverschuivingsturbine verkrijgt men ultrakoude neutronen ($v < 8$ m/s!) met een dichtheid van ongeveer 60 n$\cdot$cm^{-3}, die gedurende een bepaalde tijd in een fles 'opgesloten' kunnen worden. De gepolariseerde neutronen hebben een interactie hamiltoniaan in een elektromagnetisch veld, die gegeven wordt door

$$H_{\text{int}} = \mu_n \; \vec{\sigma} \cdot \mathbf{B} + d_n \; \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}, \tag{755}$$

waarbij $\vec{\sigma}$ de spin, en μ_n het magnetische en d_n het elektrische dipoolmoment van het neutron is. Dientengevolge voeren de neutronen een precessie uit met een frequentie

$$h\nu = -\mu_n^n |\vec{B}| \pm 2 d_n |\vec{E}|. \tag{756}$$

Merk op dat een elektrisch veld van $E = 10$ kV/cm met een hypothetische $d_n = 10^{-25}$ $e\cdot$cm minder dan een omwenteling per week geeft! Dit kleine effect kan met behulp van de Ramsey-resonantietechniek gemeten worden [126].

[125] Zie bijvoorbeeld W. Mampe, 'Search for the Elektric Dipole Moment of the Neutron in Fundamental Symmetries in Nuclei and Particles', World Scientific, Singapore 1989.

[126] N.F. Ramsey, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **32**, 211 (1982).

5.14 Uitgewerkte opgaven

5.14.1 Rotatiesymmetrie

Laat zien dat $R(\epsilon) = 1 - i\epsilon L_z$, waarbij L_z de operator is die correspondeert met de z component van het impulsmoment ($\hbar = 1$), een infinitesimale rotatie ϵ rond de z-as genereert. Een eindige rotatie θ kan worden gegenereerd door herhaalde werking van $R(\epsilon)$, zodanig dat $R(\theta) = \mathrm{Lim}(1 - i\epsilon L_z)^n$, waarbij $n\epsilon \to \infty$ als $n \to \infty$ en $\epsilon \to \infty$. Laat zien dat $R(\theta) = e^{-i\theta L_z}$.

Antwoord: Er geldt $\hbar = 1$ en $L_z = i\partial/\partial\phi$. We vinden hiermee dat $R(\epsilon) = 1 + \epsilon\partial/\partial\phi$. Hieruit volgt

$$R(\epsilon)\psi(\phi) = \psi + \epsilon\frac{\partial\psi(\phi)}{\partial\phi} = \psi(\phi + \epsilon), \tag{757}$$

en we zien dat $R(\epsilon)$ een infinitesimale rotatie ϵ om de z-as genereert.

$$\begin{aligned} R(\epsilon) &= \lim_{n\to\infty}(1 - i\epsilon L_z)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[1 + (-in\epsilon L_z) + \tfrac{n(n-1)}{2!}(-i\epsilon L_z)^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}(-i\epsilon L_z)^3 + \cdot\cdot\right]. \end{aligned} \tag{758}$$

Indien $n \to \infty$, dan geldt $n(n-1) \to n^2$, $n(n-1)(n-2) \to n^3$, enzovoort, terwijl $n\epsilon \to \theta$ als $\epsilon \to 0$. We vinden

$$\begin{aligned} R(\epsilon) &= \lim_{n\to\infty}\left[1 + n(-i\epsilon L_z) + \tfrac{n^2}{2!}(-i\epsilon L_z)^2 + \tfrac{n^3}{3!}(-i\epsilon L_z)^3 + \cdot\cdot\right] \\ &= e^{-i\theta L_z}. \end{aligned} \tag{759}$$

5.14.2 Lokale ijkinvariantie

Toon aan dat de schrödingervergelijking voor een geladen deeltje dat wisselwerkt met het ijkveld A_μ,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi_q = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)^2\psi_q, \tag{760}$$

invariant is onder de lokale ijktransformatie

$$\begin{aligned} \psi_q' &= e^{i\epsilon(\vec{r},t)\mathbf{Q}/\hbar}\psi_q = e^{i\epsilon(x)\mathbf{Q}/\hbar}\psi_q, \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\epsilon, \\ \phi' &= \phi - \tfrac{\partial\epsilon}{\partial t}. \end{aligned} \tag{761}$$

De oneindige set fasetransformaties (761) vormt een unitaire groep genaamd U(1), waarbij $\epsilon(x) = \epsilon(\vec{r}, t)$ een scalaire grootheid is.

Antwoord: We analyseren het gedrag van de linker- en rechterhelft van vergelijking (760) afzonderlijk. We beginnen met de linkerzijde.

$$\begin{aligned} \left(i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t} - q\phi'\right)\psi_q' &= \left[i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t} - q\left(\phi - \tfrac{\partial\epsilon}{\partial t}\right)\right]e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\psi_q \\ &= -e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\left(q\tfrac{\partial\epsilon}{\partial t}\right)\psi_q + e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\left[i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t} - q\left(\phi - \tfrac{\partial\epsilon}{\partial t}\right)\right]\psi_q \\ &= e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\left(i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t} - q\phi\right)\psi_q \end{aligned} \tag{762}$$

Vervolgens demonstreren we de ijkinvariantie voor de rechterzijde van vergelijking (760).

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}'\right)^2 \psi'_q &= \left[\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q(\mathbf{A}+\nabla\epsilon)\right]\cdot\left[\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q(\mathbf{A}+\nabla\epsilon)\right] e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\psi_q \\
&= \left[\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q(\mathbf{A}+\nabla\epsilon)\right]\cdot\left\{e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}(q\nabla\epsilon)\psi_q + e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\left[\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q(\mathbf{A}+\nabla\epsilon)\right]\psi_q\right\} \\
&= \left[\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q(\mathbf{A}+\nabla\epsilon)\right]\cdot e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\left(\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\psi_q \\
&= e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}(q\nabla\epsilon)\cdot\left(\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\psi_q + e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\left[\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q(\mathbf{A}+\nabla\epsilon)\right]\left(\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\psi_q \\
&= e^{i\epsilon\mathbf{Q}/\hbar}\left(\tfrac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)^2\psi_q.
\end{aligned} \tag{763}$$

5.14.3 Behoud van baryongetal

Neem aan dat baryongetal niet behouden is en dat nucleonen vervallen met een levensduur van 10^{15} jaar. Ga ervan uit dat alle energie van de nucleonen die op aarde vervallen getransformeerd wordt in warmte. Bereken de warmtestroom aan het oppervlak van de aarde en vergelijk deze met de energie die de aarde ontvangt van de zon.

Antwoord: De massa van de aarde bedraagt $M_{\rm Aarde} = 5.98 \times 10^{24}$ kg. Dit betekent dat de aarde bij benadering bestaat uit

$$M_{\rm Aarde}/1 \text{ amu} = (5.98 \times 10^{24} \text{ kg})/(1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}) = 3.60 \times 10^{51} \text{ nucleonen.} \tag{764}$$

Merk op dat 1 amu overeenkomt met een energie van 1.49×10^{-10} J.

Als we aannemen dat de levensduur van nucleonen 10^{15} jaar $= 3.15 \times 10^{22}$ s is, dan vervallen er op dit moment $(t = 0)$

$$-\left(\frac{dN}{dt}\right)_{t=0} = \frac{N_0}{\tau}e^{-(t=0)/\tau} = \frac{N_0}{\tau} = \frac{(3.60 \times 10^{51})}{(3.15 \times 10^{22})} = 1.14 \times 10^{29} \text{ nucl. per sec.} \tag{765}$$

De aarde heeft een straal van 6.37×10^6 m. Er komt dus aan het oppervlak van de aarde een warmtestroom vrij van

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(1.14 \times 10^{29} \text{ nucl./s})(1.49 \times 10^{-10} \text{ J})}{4\pi(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2} = 3.33 \times 10^4 \text{ W/m}^2. \tag{766}$$

Dit is ongeveer drie keer meer dan de warmtestroom afkomstig van de zon.

5.14.4 Isopin

In de sterke wisselwerking zijn zowel de isospin $\mathbf{T}$ als de projectie T_z behouden. Pionen met $m_\pi \approx 140$ MeV/c^2 zijn pseudoscalaire ($J^P = 0^-$) mesonen met isospin $T = 1$. Voor het neutrale Λ deeltje met $m_\Lambda \approx 1116$ MeV/c^2 geldt dat $J^P = 1/2^+$ en $T = T_z = 0$. Geef aan of de volgende combinaties van deeltjes wel of niet kunnen bestaan in een toestand met isospin $T = 1$. Verklaar Uw antwoord.

Opgave a): $\pi^+\pi^-$.

Antwoord: We kunnen twee pionen inderdaad koppelen tot een toestand met $T = 1$. Er geldt

$$|1,0> = \sqrt{\frac{1}{2}}|1,+1>|1,-1> - \sqrt{\frac{1}{2}}|1,-1>|1,+1> . \tag{767}$$

Opgave b): $\pi^+\pi^+$.

Antwoord: Nee, want we hebben nu een toestand met $T_z = +2$ en dat betekent dat de totale isospin in ieder geval $T \geq 2$.

Opgave c): $\Lambda\pi^0$.

Antwoord: Ja. We vinden $|1,0>=|0,0>|1,0>$.

Opgave d): Het η deeltje met massa $m_\eta \approx 549$ MeV/c^2 is een pseudoscalair ($J^P = 0^-$) meson met isospin $T = T_z = 0$. Komt het verval $\eta \to \pi\pi$ volgens U voor in de natuur? Waarom (niet)?

Antwoord: Nee. Behoud van pariteit eist $(\Pi_\eta = -1) = (\Pi_\pi = -1)^2 \times (-)^{l_{\pi\pi}}$, en dus dient $l_{\pi\pi}$ oneven te zijn. Als we kijken naar behoud van impulsmoment dan geldt $(J_\eta = 0) = (2J_\pi = 0) + (l_{\pi\pi})$ en dient $l_{\pi\pi}$ gelijk te zijn aan nul. Er kan niet aan beide behoudswetten voldaan worden door het verval $\eta \to \pi\pi$.

Opgave e): Het is gegeven dat de isospin van het alpha deeltje (de kern van ^{4}He) en het deuteron gelijk zijn aan nul. Komt de reactie $d + d \to \alpha + \pi^0$ volgens U voor in de natuur? Waarom (niet)?

Antwoord: Nee. Als we kijken naar de isospin, dan vinden we $(T_{\mathrm{d}} = 0) + (T_{\mathrm{d}} = 0) \neq (T_{^4\mathrm{He}} = 0) + (T_{\pi^0} = 1)$.

Opgave f): Kan het verval $\Lambda \to n + \gamma$ plaatsvinden onder invloed van de elektromagnetische wisselwerking. We weten dat $T = T_z = 0$ voor zowel het Λ als het foton, terwijl $T_z = -\frac{1}{2}$ voor het neutron.

Antwoord: Nee. T_z is behouden in de elektromagnetische wisselwerking. Voor het verval geldt $(T_z^\Lambda = 0) \neq (T_z^n = -\frac{1}{2}) + (T_z^\gamma = 0)$.

5.14.5 Nucleon spin statistiek

Stel dat twee nucleonen in een toestand zijn met relatief baanimpulsmoment $L = 0$. Laat zien dat uit het pauliprincipe volgt dat $S+I$ een oneven integer moet zijn (S is spin, en I is isospin).

Antwoord: Het proton en neutron zijn fermionen die voor de sterke wisselwerking ononderscheidbaar zijn (dat houdt in dat er *isospin symmetrie* is. De sterke interactie is onafhankelijk van de waarde van de z-component van de isospin van het nucleon). De totale golffunctie moet dus antisymmetrisch zijn. De totale spin en isospin van twee nucleonen is 0 of 1. Twee spin (of isospin) 1/2 systemen kunnen we tot de volgende golffuncties combineren:

$$\begin{aligned}
S=1, \quad S_z=1: &\qquad |+1/2 \ \ +1/2> \\
S=1, \quad S_z=0: &\qquad \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\ \ |+1/2 \ \ -1/2>+|-1/2 \ \ +1/2>) \\
S=1, \quad S_z=-1: &\qquad |-1/2 \ \ -1/2> \\
S=0, \quad S_z=0: &\qquad \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\ \ |+1/2 \ \ -1/2>-|-1/2 \ \ +1/2>),
\end{aligned} \tag{768}$$

waarbij S de totale spin of isospin weergeeft. De notatie $|m_1 m_2>$ geeft aan dat de z-component van de spin (of isospin) van deeltje 1 de waarde m_1 heeft en van deeltje 2 de waarde m_2. Het is duidelijk dat de triplet toestand ($S = 1$) even is onder verwisseling van deeltje 1 en 2, en de singlet toestand ($S = 0$) oneven. Dus volgt dat als de totale isospin 1 is, het isospin gedeelte van de golffunctie een factor $+1$ geeft onder verwisseling van deeltje 1 en 2. Om tot een antisymmetrische golffunctie te komen moet dan de spin noodzakelijkerwijs 0 zijn. Omgekeerd geldt, dat als de totale isospin 0 is, de spin 1 moet zijn om een antisymmetrische golffunctie te krijgen. Nu wordt de factor -1 bij deeltjesverwisseling door het isospin gedeelte van de golffunctie geleverd.

Een totale isospin van 0 is alleen mogelijk voor een proton-neutron paar (zoals b.v. in deuterium). Verder geldt, dat als L oneven is, $S+I$ even moet zijn.

5.14.6 Deeltjes: reacties en verval

Geef met argumenten aan welke van de volgende reacties niet mogelijk zijn. Geef voor de reacties die wel mogelijk zijn, en waarin neutrino's en/of antineutrino's voorkomen, aan welke dit zijn. Maak dus een keuze uit ν_e, $\bar{\nu}_e$, ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ en $\bar{\nu}_\tau$. Ga ervan uit dat voor elke reactie voldoende energie beschikbaar is om de deeltjes te kunnen produceren.

Reactie			Wel/niet mogelijk (+ = wel; - = niet)	Commentaar
$\tau^- + e^+$	$\rightarrow$	$\tau^+ + e^-$	niet	L_e, L_μ niet behouden
$e^+ + e^-$	$\rightarrow$	$\mu^+ + \mu^-$	wel	
$e^+ + e^-$	$\rightarrow$	$\pi^+ + \pi^-$	wel	
$\pi^- + p$	$\rightarrow$	$\Sigma^+(= suu) + K^-(= s\bar{u})$	niet	vreemdheid niet behouden
$\mu^- + p$	$\rightarrow$	$\nu_\mu + n$	wel	
$\pi^+ + p$	$\rightarrow$	$p + p + \overline{n}$	wel	
$\mu^- + p$	$\rightarrow$	$\mu^+ + \Delta^-$	niet	L_μ niet behouden
$K^+(= u\bar{s}) + n$	$\rightarrow$	$\Sigma^+(= suu) + \pi^0$	niet	vreemdheid niet behouden
$\nu_\mu + p$	$\rightarrow$	$\mu^- + \Delta^{++}$	wel	
$\overline{\nu}_e + p$	$\rightarrow$	$e^+ + n$	wel	
$K^- + p$	$\rightarrow$	$K^- + \pi^+$	niet	baryongetal niet behouden

Opgave b): We bekijken nu het verval van deeltjes. Geef ook hier met argumenten aan welk van het volgende verval niet mogelijk is. Geef verder voor die voorbeelden die wel mogelijk zijn aan welke neutrino's en/of antineutrino's erin voorkomen.

Verval	Wel/niet mogelijk (+ = wel; - = niet)	Commentaar
$e^- \rightarrow \gamma + \nu_e$	niet	lading niet behouden
$\mu^+ \rightarrow e^+ + \gamma$	niet	L_e en L_μ niet behouden
$\mu^+ \rightarrow e^+ + e^+ + e^-$	niet	L_e en L_μ niet behouden
$\mu^+ \rightarrow e^+ + \overline{\nu}_\mu + \nu_e$	wel	
$\pi^0 \rightarrow \gamma$	niet	geen impulsbehoud
$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	wel	
$\pi^0 \rightarrow 3\gamma$	niet	C pariteit niet behouden
$\tau^+ \rightarrow \overline{\nu}_\tau + \pi^+$	wel	
$\tau^- \rightarrow e^- + \nu_\tau + \overline{\nu}_e$	wel	
$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$	wel/niet	niet vrij, wel in kernen
$\rho \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	wel	
$\rho \rightarrow \pi^0 + \pi^0$	niet	schending van Bose symmetrie

5.14.7 Behoudswetten

Welke van de volgende reacties zijn niet verboden door behoudswetten, of juist wel verboden? Geef uw argumentatie.

$$\begin{aligned} \pi^0 &\to e^+ + e^- \\ p &\to n + e^+ + \nu_e \\ \mu^+ &\to e^+ + e^- + e^+ \\ K^+ + n &\to \Sigma^+ + \pi^0 \end{aligned} \tag{769}$$

Antwoord: De reactie $\pi^0 \to e^+ + e^-$ voldoet aan behoud van impuls en energie, hadron getal ($= 0$), lepton getal ($= 0$) en lading. Het schendt het behoud van *ladings conjugatie* en *pariteit*. Gegeven is dat de interne pariteit van het π^0 negatief is en dat het π^0 eigenwaarde $+1$ heeft onder ladingsconjugatie. Het elektron en positron zijn elkaars antideeltje, dus die hebben tegenovergestelde eigenwaarden voor de ladingsconjugatie operator, en ook tegengestelde interne pariteit. Dat betekent, dat om de totale pariteit van de golffunctie voor en na de reactie gelijk te houden, het product van de spin en baan golffunctie een positief teken moet hebben (symmetrisch) onder verwisseling van de leptonen. Nu geldt dat het totale impulsmoment $J = L + S = 0$, vanwege behoud van impulsmoment (het pion heeft spin 0). Dus het product van de spin - en baan golffunctie van de leptonen is *antisymmetrisch* (zie hierboven. $S = 0$ impliceert $L = 0$, de spin golffunctie is antisymmetrisch en de baan golffunctie symmetrisch onder de pariteitsoperator; en voor $S = 1$, $L = 1$ is het spingedeelte van de golffunctie symmetrisch en het baangedeelte antisymmetrisch).

Daarom kan deze reactie niet optreden voor de electromagnetische wisselwerking. De zwakke wisselwerking schendt pariteitsbehoud, en dus is zwak verval van het π^0 in een e^+, e^- paar mogelijk. De branching ratio, (gegeven) $\Gamma_j/\Gamma = (7.5 \pm 2.0) \times 10^{-8}$, voor dit kanaal is vele ordes van grootte lager dan het toegestane *electromagnetische* verval van het π^0 in twee fotonen).

Het verval van een proton in een neutron, positron en neutrino is verboden omdat het energiebehoud schendt ($m_p < m_n$).

Het verval $\mu^+ \to e^+ + e^+ + e^-$ is verboden vanwege behoud van lepton familie: voor de reactie hebben we muon getal van -1 en elektron getal van 0, na de reactie muongetal 0 en elektrongetal -1.

De reactie $K^+ + n \to \Sigma^+ + \pi^0$ voldoet aan behoud van lading, energie, en impulsmoment. Echter de reactie verandert de vreemdheid met $\Delta S = 2$. Deze reactie is mogelijk onder de zwakke wisselwerking. Aangezien ΔS twee is, moeten er echter wel 2 vector bosonen worden uitgewisseld. Daarom zal de werkzame doorsnede voor deze reactie extreem laag zijn.

5.14.8 Quarkverdelingsfuncties

Gebruik de quarkverdelingsfuncties $q_f(x)$ en de gegevens getoond in figuur xxx van het dictaat om een ruwe schatting te maken van de fractie van de protonimpuls, in een hoge-impuls referentiesysteem, die gedragen wordt door de quarks en de antiquarks. Waar zou U de ‘ontbrekende impuls’ aan toeschrijven?

Antwoord: De functies $q(x)$ en $\bar{q}(x)$ zijn quarkverdelingsfuncties, waarbij $q(x)dx$ en $\bar{q}(x)dx$ de waarschijnlijkheden aangeven om respectievelijk een quark of antiquark aan te treffen met fractioneel impuls tussen x en $x + dx$. De totale fractionele impuls f van het proton die door de quarks en antiquarks gedragen wordt is

$$f = \int_0^1 [xq(x) + x\bar{q}(x)]\, dx. \tag{770}$$

Dit is precies de som van het gemiddelde van $xq(x)$ en het gemiddelde van $x\bar{q}(x)$. Figuur xxx van het dictaat laat zien dat $f \approx 0.5$ en de quarks en antiquarks dragen dus ongeveer de helft van de impuls van het proton. We nemen aan dat de ontbrekende impuls (de andere helft) wordt gedragen door de gluonen in het proton.

Opgave b): Proton en neutron zijn componenten van een isospindoublet, en daarom zijn de quarkinhouden van beide deeltjes aan elkaar gerelateerd. Er zijn evenveel u quarks in het proton als d quarks in het neutron, enzovoort. Neem aan dat geldt

$$\begin{aligned} u^p(x) &= d^n(x) \equiv u(x), \\ d^p(x) &= u^n(x) \equiv d(x), \\ s^p(x) &= s^n(x) \equiv s(x). \end{aligned} \tag{771}$$

Demonstreer dat bovenstaande relaties leiden tot de grenzen

$$\frac{1}{4} \leq \frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \leq 4, \tag{772}$$

onafhankelijk van de waarde van x. De bovengrens (ondergrens) wordt gerealiseerd in het geval dat er enkel u (d) quarks aanwezig zouden zijn in het proton.

Antwoord: We weten dat de structuurfunctie F_2 in het partonmodel geschreven kan worden als

$$F_2(x) = x \sum_f e_f^2 \left[q_f(x) + \bar{q}_f(x)\right]. \tag{773}$$

We nemen aan dat het nucleon bestaat uit up en down quarks, terwijl de zee ook nog strange quarks bevat. We vinden hiermee voor het proton

$$\frac{1}{x} F_2^p(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[d^p(x) + \bar{d}^p(x)\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^p(x) + \bar{s}^p(x)]. \tag{774}$$

Voor het neutron vinden we

$$\frac{1}{x} F_2^p(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[d^n(x) + \bar{d}^n(x)\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [s^n(x) + \bar{s}^n(x)]. \tag{775}$$

Proton en neutron zijn componenten in een isospindoublet en daarom is de quarkinhoud van het proton gerelateerd aan die van het neutron, en omgekeerd. We maken gebruik van de gegevens in vergelijking (771) en doen verder de aanname dat het nucleon beschreven kan worden door de som van de bijdrage van drie valentiequarks, die zorgen voor de quantumgetallen van het nucleon, en de bijdrage van quark-antiquark paren $u_s\bar{u}_s$, $d_s\bar{d}_s$ en $s_s\bar{s}_s$ enzovoort. Deze laatste bijdrage staat bekend als de zee. We stellen ons voor dat deze quarkparen gecreëerd worden uit gluonen, die op hun beurt worden uitgestraald door de valentiequarks. We nemen aan dat in eerste benadering de drie lichte quarktypen (u, d, s) met ruwweg dezelfde frequentie en impulsverdeling worden uitgezonden, terwijl de zware quarkparen $c_s\bar{c}_s$, enzovoort verwaarloosd kunnen worden. We vinden

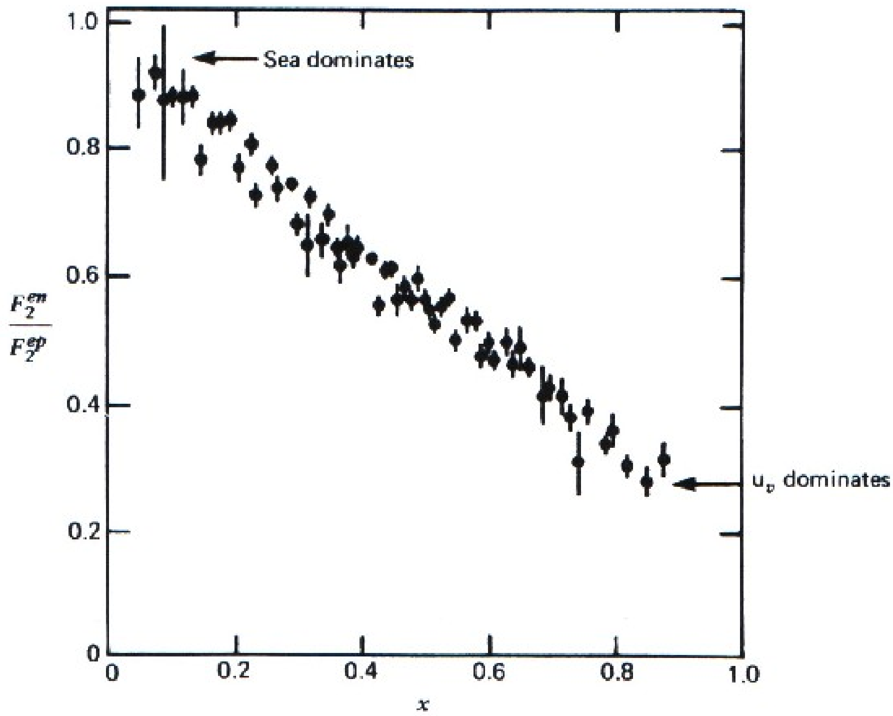
$$\begin{aligned} u_s(x) &= \bar{u}_s(x) = d_s(x) = \bar{d}_s(x) = s_s(x) = \bar{s}_s(x) = S(x), \\ u(x) &= u_v(x) + u_s(x), \\ d(x) &= d_v(x) + d_s(x), \end{aligned} \tag{776}$$

met $S(x)$ de zeequarkdistributie, die gemeenschappelijk is voor alle quarktypen.

Als we sommeren over alle deelnemende partonen, dan dienen we de quantumgetallen van het proton te vinden (lading 1, baryongetal 1, en vreemdheid 0), en we vinden de somregels

$$\begin{aligned} \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)]\, dx &= 2, \\ \int_0^1 \left[d(x) - \bar{d}(x)\right] dx &= 1, \\ \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)]\, dx &= 0. \end{aligned} \tag{777}$$

Deze somregels volgen uit vergelijking (776) met de definities



Figuur 85: *De verhouding F_2^n/F_2^p als functie van x, gemeten in diepinelastische verstrooiing.*

$$\begin{aligned} u - \bar{u} &= u - \bar{u}_s = u - u_s = u_v, \\ d - \bar{d} &= d - \bar{d}_s = d - d_s = d_v, \\ s - \bar{s} &= s_s - \bar{s}_s = 0. \end{aligned} \tag{778}$$

Merk op dat de somregels geldig zijn in elk model waarbin de zee is opgebouwd uit quark-antiquark paren en daarom niet de quantumgetallen van het nucleon beïnvloedt. Deze laatste zijn volledig bepaald door de valentiequarks.

Als we vergelijkingen (774), (775) en (776) combineren, dan verkrijgen we

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} F_2^p &= \frac{1}{9}\left[4u_v + d_v\right] + \frac{4}{3} S, \\ \frac{1}{x} F_2^n &= \frac{1}{9}\left[u_v + 4d_v\right] + \frac{4}{3} S, \end{aligned} \tag{779}$$

waarbij de factor 4/3 de som is van e_i^2 over de zes zeequarkdistributies. Omdat de zeequarks gecreëerd worden door de gluonen, verwachten we dat $S(x)$ een bremsstrahlungsachtig spectrum bij lage x, zodat het aantal zeequarks logaritmisch groeit als $x \to 0$.

Indien we de constituenten in het proton bij lage impuls ($x \approx 0$) bestuderen, dan verwachten we dat de bijdrage van de valentiequarks wordt overschaduwd door de bijdrage van de zee. Dat betekent volgens vergelijking (779) dat

$$\lim_{x\to 0} \frac{F_2^n(x)}{F_2^p(x)} = 1, \tag{780}$$

en de data getoond in figuur 85 vertonen inderdaad dit gedrag. Anderzijds als we de hoge impulscomponenten ($x \approx 1$) in het proton onderzoeken, dan laten de snelle valentiequarks u_v en d_v weinig ruimte voor een mogelijke bijdrage van zeequarks. In de limiet dat de valentiequarks domineren, vinden we

$$\lim_{x\to 1} \frac{F_2^n(x)}{F_2^p(x)} = \frac{u_v + 4d_v}{4u_v + d_v}. \tag{781}$$

Voor gebieden in de faseruimte waar de down (up) quarks domineren, gaat de verhouding gegeven in vergelijking (781) naar 4 (0.25). De data in figuur **??** tonen aan dat in het nucleon $u_v \gg d_v$ voor grote waarden van x, en de verhouding F_2^n/F_2^p gaat naar $\frac{1}{4}$.

5.14.9 Dubbele resonantie productie

In een bepaald gebied in de faseruimte verloopt de reactie $\pi^- p \to \pi^- p\pi^+\pi^-$ via dubbele resonantie productie, $\pi^- p \to \Delta^0(1232)\rho^0(770)$. De resonaties vervallen door pariteitsbehoudende sterke interacties, $\Delta^0 \to p\pi^-$ en $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$. Neem aan dat één-pion uitwisseling het productie mechanisme is, en bereken de hoekverdelingen van de vervalproducten in het rustsysteem van de resonantie.

Antwoord: De spin pariteiten van de π, p, Δ en ρ zijn respectievelijk 0^+, $\frac{1}{2}^+$, $\frac{3}{2}^+$ en 1^-.

(a) Het verval $\Delta \to p\pi^-$. Neem de z-as als de richting van het uitgewisselde pion in het Δ rustframe. Omdat er geen component baanimpulsmoment in deze richting kan bestaan, moet de Δ worden geproduceerd in een toestand met $J_z = \pm\frac{1}{2}$, de mogelijke spinoriëntaties van het proton. De Δ wordt daarom beschreven door een toestandsvector $|J, J_z >= |\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2} >$. Omdat beide toestanden leiden tot dezelfde hoekverdeling, hoeven we er maar een te bekijken en kiezen hiervoor $|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2} >$. Behoud van impulsmoment en pariteit eist dat de vervalproducten geproduceerd worden in een toestand met $l = 1$, die daarom beschreven worden door sferisch harmonischen Y_1^m. Deze dienen te koppelen met de mogelijke spintoestanden van het uitgezonden proton $s_z = +\frac{1}{2} \uparrow$ en $s_z = -\frac{1}{2} \downarrow$ om impulsmoment te behouden.

We gebruiken de tabel voor de Clebsch-Gordan coëfficiënten en voor $j_1 = 1$ en $j_2 = \frac{1}{2}$ en vinden

$$|\frac{3}{2}, +\frac{1}{2} >= \sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^1 \downarrow + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^0 \uparrow. \tag{782}$$

De hoekverdeling wordt gegeven door

$$P(\theta) =< \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} | \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} >= \frac{1}{8\pi}(1 + 3\cos^2\theta), \tag{783}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van de orthogonaliteit van de spintoestanden.

(b) Het verval $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$. In het rustframe van de ρ kiezen we de quantisatieas in de richting van het inkomende pion. Het ρ meson wordt geproduceerd in een toestand met impulsmoment $|1, 0>$ en om impulsmoment en pariteit te behouden dient het verval plaats te vinden in een P golf ($l = 1$). In dat geval geldt $|1, 0 >= Y_1^0$ en de hoekverdeling van de vervalproducten is

$$P(\theta) =< 1, 0|1, 0 >= \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta. \tag{784}$$

5.14.10 Hoekverdeling en pariteit

Herhaal bovenstaande analyse voor de productie en het verval van de $\Delta(1232)$ onder de aanname dat de Δ een spin en pariteit $J^P = \frac{3}{2}^-$ heeft. Welke conclusies kunt U trekken met betrekking tot de mogelijkheid om de pariteit van een resonantie te bepalen uit een meting van de hoekverdeling van haar vervalproducten?

Antwoord: Onafhankelijk van de spin en pariteit wordt de Δ altijd geproduceerd met $J_z = \pm\frac{1}{2}$, omdat de enige component van impulsmoment langs de z-as in de begintoestand geleverd wordt door de spin van het proton. Teneinde te voldoen aan het behoud van impulsmoment en pariteit dient het verval nu plaats te vinden van een D golf ($l = 2$). We gebruiken weer de tabel met CG coëfficiënten en vinden voor $j_1 = 2,\ j_2 = \frac{1}{2}$

$$|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}>=\sqrt{\frac{3}{5}}Y_2^1\downarrow-\sqrt{\frac{2}{5}}Y_2^0\uparrow=-\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}\downarrow-\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)\uparrow. \quad (785)$$

Hiermee vinden we voor de hoekverdeling

$$P(\theta,\phi)=<\frac{3}{2},+\frac{1}{2}|\frac{3}{2},+\frac{1}{2}>=\frac{1}{8\pi}(1+3\cos^2\theta), \quad (786)$$

en dat is hetzelfde resultaat als we eerst vonden voor $J^P = \frac{3}{2}^+$. We concluderen dan ook dat de hoekverdeling afhangt van J, maar niet van de pariteit.

5.15 Opgaven

5.15.1 Botsingsprocessen en deeltjesverval

Geef met argumenten aan welke van de volgende reacties toegestaan zijn, en welke verboden zijn, door behoudswetten die van toepassing zijn voor de zwakke wisselwerking. Ga ervan uit dat voor elke reactie voldoende energie beschikbaar is om de deeltjes te kunnen produceren.

Reactie	Wel/niet mogelijk (+ = wel; - = niet)	Commentaar
$\nu_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$		
$\nu_e + p \rightarrow e^- + \pi^+ + p$		
$\Lambda \rightarrow \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e$		
$K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu$		

Opgave b. Klassificeer de volgende experimenteel waargenomen processen in sterke, elektromagnetische en zwakke reacties door de betrokken deeltjes te beschouwen en door het hanteren van de selectieregels die van toepassing zijn.

Verval	Wel/niet mogelijk (+ = wel; - = niet)	Commentaar
$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \pi^+ + n$		
$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$		
$\nu_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$		
$\pi^0 \rightarrow e^+ + e^- + e^+ + e^-$		
$p + \overline{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$		
$\tau^- \rightarrow \pi^- + \nu_\tau$		
$D^- \rightarrow K^+ + \pi^- + \pi^-$		
$\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \overline{\nu}_e$		
$\Lambda + p \rightarrow K^- + p + p$		

5.15.2 Algemene vragen

In het volgende beschouwen we de belangrijkste eigenschappen van elementaire deeltjes. Geef een kort antwoord op de vragen en bespreek experimenten indien relevant.

Opgave a) Waarom is behoud van baryongetal ingevoerd? Wat is het baryongetal van een (anti)quark?

Opgave b) Wat is de spin van een quark en wat is de massa van een gluon? Hoe weten we dat?

5.15.3 Λ-hyperonen

Λ-hyperonen worden geproduceerd door een pionenbundel op deuterium te laten botsen. Er vindt dan onder andere de reactie $\pi^+ + n \to K^+ + \Lambda$ plaats.

Opgave a) Welke wisselwerking ligt ten grondslag aan de productie van de Λ-hyperonen?

Opgave b) Als het Λ precies langs de bundelrichting (die kiezen we als de z-richting) geproduceerd is, wat zijn dan de mogelijke waarden voor de spin J_z van deze Λ?

Vervolgens bestuderen we het verval $\Lambda \to p + \pi^-$ van het Λ-hyperon.

Opgave c) De Λ-hyperonen vervallen door de zwakke wisselwerking en schendt dus pariteit (maximaal!). Gegeven de spins en interne pariteiten van het Λ ($\frac{1}{2}^+$), proton ($\frac{1}{2}^+$) en pion (0^-), leg uit wat het baanimpulsmoment L tussen proton en pion dient te zijn.

5.15.4 Botsingsprocessen, isospin van kaonen

Opgave a. Geef met argumenten aan welke van de volgende reacties wel of niet mogelijk zijn. Ga ervan uit dat voor botsingsprocessen er voldoende energie beschikbaar is om de deeltjes te kunnen produceren.

Reactie	Wel/niet mogelijk (+ = wel; - = niet)	Commentaar
$\overline{\nu}_\mu + p \quad \to \quad e^+ + n$		
$\nu_e + p \quad \to \quad e^+ + \Lambda^0 + K^0$		
$\nu_e + p \quad \to \quad e^- + \Sigma^+ + K^+$		
$p + \pi^- \quad \to \quad p + K^-$		
$p + \pi^- \quad \to \quad \Lambda^0 + \overline{\Sigma}^0$		
$\overline{\nu}_\mu + p \quad \to \quad \mu^+ + n$		

Opgave b. Beschouw de volgende twee reacties:

$$K^- + p \to \Sigma^0 + \pi^0 \qquad\qquad K^- + p \to \Sigma^+ + \pi^-. \tag{787}$$

Wat is de waarde van de isospin I en I_3 (de z-component van I) voor de verschillende deeltjes?

Opgave c. Welke waarden kan de totale isospin aannemen voor de reacties gegeven in opg. b?

Opgave d. Vind de verhouding van de werkzame doorsneden voor deze reacties door aan te nemen dat de een of de andere van beide isospins domineert. Gebruik de Clebsch-Gordan tabel om de isospin decomposities van de verstrooiingsamplituden voor beide reacties te vinden.

5.15.5 Isospin en deeltjesverval

Een onbekend deeltje $X^0(1510)$ vervalt via de sterke wisselwerking naar eindtoestanden $n\pi^0$ en $p\pi^-$ met branching ratios (dus waarschijnlijkheden) van ongeveer 18% en 36%, respectievelijk. Wat is de isospin van dit deeltje?