

2 SPECIALE RELATIVITEITSTHEORIE

2.1 Historische introductie en Einsteins postulaten

De relativiteitstheorie is geboren in het prille begin van de twintigste eeuw. De negentiende eeuw was net ten eind gekomen, en de natuurkunde bevond zich in een unieke positie: voor het eerst in de geschiedenis leken alle fundamentele vraagstukken opgelost te zijn. Al in de 17e eeuw had Sir Isaac Newton (1643-1727) een theoretisch model opgesteld waarmee beweging en krachten in detail konden worden berekend en voorspeld, samengevat in drie wetten die nu zijn naam dragen. Tezamen met Newtons universele wet van de zwaartekracht konden deze drie wetten zelfs de banen van de planeten om de zon perfect²⁶ beschrijven. Ook konden deze wetten, wanneer toegepast op de aanname dat materie bestaat uit vele miniscule deeltjes in constante botsing, de wetten van de warmteleer reproduceren; hiermee was het vakgebied van de thermodynamica vrijwel geheel²⁷ verklaard, wat een triomf is van de newtoniaanse bewegingsleer.

Verder was er nog de theorie van de elektrische en magnetische velden, onderzocht door Faraday, Oersted, Coulomb en Savart, en uiteindelijk halverwege de 19e eeuw tot een wiskundig geheel samengesmeed door James Clerk Maxwell (1831-1879); de vier wetten van deze theorie dragen nu zijn naam. Er geldt

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi \mathbf{J}, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{37}$$

voor de elektrische en magnetische velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ in vacuüm in eenheden waarbij $\mu_0 = \epsilon_0 = c = 1$. Hierbij stelt ρ de dichtheid van elektrische lading voor en $\mathbf{J}$ de stroomdichtheid.

Ook deze theorie, de elektrodynamica geheten, was uitermate succesvol. Het beschrijft, onder andere, de interactie tussen elektriciteit en magnetisme en laat zien dat zij eigenlijk een aspect zijn van een en dezelfde kracht. Ook laten de wetten van Maxwell zien dat elektrische en magnetische velden verstoord kunnen worden, en dat deze verstoring zich voortplant met een snelheid van 299.800 kilometer per seconde, een waarde nu universeel aangegeven door de letter c .²⁸ Dit is precies de snelheid waarvan men al lang eerder gemeten had dat het licht zich ermee voortplant, en de conclusie werd dan ook al snel getrokken dat licht niets anders is dan een verstoring in het elektromagnetische veld. Al snel konden alle regels uit de lenzen- en spiegeltheorie afgeleid worden uit de elektrodynamica, en hiermee werd het gehele vakgebied van de optica een solide fundament gegeven.

Het was dan ook geen wonder dat de natuurkundigen aan het eind van de negentiende eeuw in een euforische staat verkeerden. Er waren weliswaar nog bepaalde berekeningen in detail uit te voeren, maar niets leek erop te wijzen dat er meer zou bestaan dan de elektromagnetische kracht en de zwaartekracht, en dat alle relaties tussen krachten en bewegingen beschreven konden worden door de leer van Newton. Alle andere krachten en verschijnselen (licht, warmte, ..) waren

²⁶Er was wel degelijk een afwijking bekend van de planeetbanen zoals beschreven door newtoniaanse wetten, te weten de periheliumverschuiving van Mercurius. Het verklaren van deze afwijking was een van de eerste experimentele verificaties van Einsteins theorie van de zwaartekracht: de algemene relativiteitstheorie.

²⁷Ook hier geldt een kleine opmerking: er waren enkele onduidelijkheden (zoals de Gibbs correctiefactor) die later verklaard zijn door de quantummechanica.

²⁸De keuze voor de letter c komt van het Griekse woord voor snelheid, *celeritas*.

al aangetoond een direct gevolg te zijn van de wetten van Newton of de wetten van Maxwell (of een combinatie van beide), en er waren simpelweg weinig aanwijzingen om te vermoeden dat de natuur zich aan meer wetten hield dan deze.

Er waren in het begin van de twintigste eeuw dan ook maar weinig natuurkundigen die zich realiseerden dat er wel degelijk een fundamenteel probleem verscholen zat in deze twee grote theorieën. Het probleem zat hem niet in de theorieën afzonderlijk, maar in hun *combinatie*. De wetten van Maxwell laten zien, zoals we besproken hebben, dat er golven bestaan die zich voortplanten door de ruimte en dat zij dit doen met precies de snelheid van het licht. De elektrodynamica zegt bovendien dat deze snelheid dezelfde is voor alle waarnemers, ook als deze zich ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen. Dat is op zichzelf wel wonderlijk, maar hoeft nog geen probleem te zijn (zolang het maar niet door experiment tegengesproken wordt). Het probleem openbaart zich pas wanneer nu tegelijkertijd de wetten van Newton worden beschouwd: deze zeggen namelijk dat *alle* snelheden (ook die van het licht) wel degelijk behoren te verschillen tussen waarnemers die zelf een snelheid hebben ten opzichte van elkaar: dit zit onmiskenbaar ingebouwd in de wetten van Newton. Het was dan ook duidelijk dat de wetten van Newton en de wetten van Maxwell elkaar op enkele punten tegenspreken, en dat een van deze sets aangepast zou moeten worden. Het bleken de wetten van Newton te zijn. Het is deze noodzaak tot aanpassing die de jonge Albert Einstein in 1905 leidde tot de theorie die wij nu de speciale relativiteitstheorie (SRT) noemen.

Als startpunt van de SRT nam Einstein twee *postulaten*, twee principes waar geen bewijs van bekend is, maar waarvan hij vermoedde dat de natuur die altijd in acht nam. Beide zijn gebaseerd op vermoedens gevoed door de elektrodynamica, en beide zullen nu in zeker detail besproken worden.

De wetten van Maxwell laten zien dat een elektromagnetische verstoring zich voortplant met de snelheid van het licht ongeacht met welke snelheid een waarnemer zelf beweegt. Dit is een wonderlijk resultaat: als waarnemer A een foton voorbij ziet vliegen met de snelheid van het licht c , en een waarnemer B beweegt zich met een zekere snelheid v ten opzichte van A in dezelfde richting als het foton, dan zegt het ‘gezond verstand’ dat waarnemer B het foton met een snelheid $c - v$ ziet bewegen. De wetten van Maxwell zeggen echter dat *ook* waarnemer B het foton met c ziet bewegen, en dat hetzelfde geldt voor *alle* waarnemers $C, D, \dots$ die zich met een constante snelheid bewegen ten opzichte van waarnemer A . Nogmaals: de verklaring voor dit gegeven is niet bekend, maar Einstein nam het als een *gegeven*, een eigenschap van de natuur. Hij breidde het zelfs uit: waar de elektrodynamica suggereert dat dit een eigenschap is van louter en alleen het licht, nam Einstein aan dat alles wat zich met deze snelheid beweegt aan deze eigenschap voldoet. Dit vormt dan het eerste postulaat van de SRT:

Postulaat 1: de lichtsnelheid heeft dezelfde waarde voor alle waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid.

Dit gegeven staat bekend als het *principe van de invariantie van de lichtsnelheid*. De fysische (en zelfs filosofische!) implicaties van dit postulaat zijn enorm, omdat het direct tot gevolg heeft dat de duur van tijd en de grootte van afstanden niet hetzelfde kunnen zijn voor al deze waarnemers.

Het tweede postulaat komt voort uit een andere eigenschap van de elektrodynamica. Zoals verteld gaat de elektrodynamica over de relatie tussen elektrische velden en magnetische velden, waar een elektrisch veld een maat is voor de invloed van een stilstaand geladen deeltje op alle andere geladen deeltjes in zijn omgeving; een magnetisch veld is een maat voor de invloed van een bewegend geladen deeltje op alle andere geladen deeltjes in zijn omgeving. Op het eerste gezicht lijken deze definities in elkaar over te gaan. Immers, een stilstaand deeltje kan ook gezien worden als een bewegend deeltje wanneer de waarnemer die stilstaat ten opzichte van het geladen deeltje besluit met constante snelheid te gaan bewegen; dientengevolge zal het elektrisch veld van het

deeltje gedeeltelijk overgaan in een magnetisch veld. In zoverre lijkt het verschil tussen de twee velden slechts een keuze. Echter, er is een heel fysisch verschil tussen de twee velden, en dat is dat een ervan voldoet aan twee van de vier wetten van Maxwell, waar het andere veld voldoet aan de twee andere wetten van Maxwell, met fysisch heel verschillende eigenschappen. Bovendien is het gevolg van een elektrisch veld op een tweede geladen deeltje een kracht $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ die *parallel* is aan het elektrische veld, waar het gevolg van een magnetisch veld een kracht $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ is die *loodrecht* staat op het magnetische veld. Als het verschil tussen elektrische en magnetische velden slechts een keuze is van de snelheid van de waarnemer, hoe kan het dan zijn dat een fysisch meetbaar verschijnsel als kracht op een geladen deeltje zo verschillend is? Blijkbaar is er wel degelijk een heel fundamenteel verschil tussen elektrische en magnetische velden.

Ondanks dit schijnbare verschil, is er de volgende wonderlijke eigenschap van de elektrodynamica: als twee waarnemers, die relatief ten opzichte van elkaar bewegen met constante snelheid, de wetten van Maxwell toepassen op een en hetzelfde systeem van geladen deeltjes, dan zullen zij tot dezelfde fysische resultaten komen, ongeacht alle schijnbaar fundamentele verschillen tussen elektrische en magnetische velden. De waarnemers verschillen dan wel van mening over welke richting de krachten op wijzen, of de deeltjes al dan niet bewegen, en elektrische velden voor de ene waarnemer zijn magnetische voor de ander, maar het *totaal* van al deze effecten geeft uiteindelijk precies dezelfde fysische voorspellingen. Hiermee wordt bedoeld dat als de twee waarnemers hun voorspellingen corrigeren voor het feit dat zij met onderling snelheid bewegen ten opzichte van elkaar, deze altijd precies overeenkomen: de wetten van Maxwell kunnen dus worden toegepast door beide waarnemers zonder op onderlinge tegenstrijdigheden te stuiten. Blijkbaar maakt de natuur, in ieder geval wat elektromagnetische velden betreft, geen onderscheid tussen waarnemers met onderling verschillende constante snelheden. Einstein nam dit aan als een *gegeven*, en nam aan dat dit geldt voor *alle* natuurkundige verschijnselen (niet alleen de elektromagnetische). Dit vormt het tweede postulaat van de SRT:

Postulaat 2: de natuur maakt geen onderscheid tussen waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen met constante snelheid.

Praktisch betekent dit postulaat dat het onmogelijk is om via experimenten te bepalen of een waarnemer in absolute beweging is of niet: het verschil tussen verschillende waarnemers is fundamenteel niet meetbaar²⁹. Hierdoor is elke waarnemer even ‘correct’ als elke andere waarnemer die zich met constante snelheid beweegt ten opzichte van de eerste. In het bijzonder betekent dit dat er geen waarnemersstelsel is ten opzichte waarvan fysische grootheden gemeten moeten worden: elk ander stelsel voldoet namelijk even goed. De gemeten waarden van de grootheden verschillen in het algemeen³⁰ per waarnemer, maar de *wetten* waaraan deze grootheden voldoen dienen allemaal precies hetzelfde te zijn. Daarom moet bij elke meting van een grootheid aangegeven worden ten opzichte van welke waarnemer het gemeten is. Dit wil zeggen: uitkomsten van metingen hebben nooit absolute betekenis, maar slechts louter relatief. Dit postulaat staat daarom bekend als het *relativiteitsprincipe*. Dit levert een wiskundig voorschrift: teneinde een theorie te formuleren die voldoet aan het relativiteitsprincipe, moeten de wiskundige wetten van deze theorie geschreven worden in een vorm die geen onderscheid maakt tussen waarnemers met verschillende constante snelheden. Dit zullen we dan ook expliciet doen in het vervolg.

2.2 Het minkowskilijnelement

Nu de twee postulaten van de SRT zijn gemotiveerd, kunnen we deze gaan gebruiken om de relatie tussen tijd en ruimte te onderzoeken, en de wetten van beweging af te leiden. Natuurkundige

²⁹De ontdekking van de kosmische achtergrondstraling en ook de uniforme expansie van het Universum levert een voorkeursysteem ten opzichte waarvan men de snelheid kan bepalen.

³⁰Er zijn uitzonderingen op deze regel: er bestaan ook grootheden die hetzelfde zijn voor alle waarnemers. Een ervan is al genoemd: de lichtsnelheid c .

wetten geven relaties tussen gebeurtenissen. Als we een coördinatensysteem $\mathcal{O}$ aanbrengen, dan wordt een gebeurtenis onder meer gekarakteriseerd door drie getallen $\mathbf{x} = (x, y, z)$ die de plaats aangeven en een getal t dat de tijd aangeeft waarop de gebeurtenis plaatsvindt. In een ander referentiesysteem $\mathcal{O}'$ gelden andere getallen $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ en t' voor dezelfde gebeurtenis. Heeft men te doen met twee inertiaalsystemen, waarvan het tweede zich met een snelheid β (uitgedrukt in eenheden van c) ten opzichte van het eerste (bijvoorbeeld in de x -richting) beweegt, dan geldt volgens de speciale relativiteitstheorie dat de waarden $(\mathbf{x}', t')$ en $(\mathbf{x}, t)$ voor de gebeurtenis, zoals gemeten in S' en S , door een zogenaamde *Lorentztransformatie* aan elkaar gerelateerd zijn.

We kunnen de relatie tussen x^μ en x'^μ in matrixnotatie schrijven en vinden dan de volgende uitdrukking voor de Lorentztransformatie³¹

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (38)$$

waarbij de viervector x^μ , met $\mu = 0, 1, 2, 3$, gegeven is door

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}). \quad (39)$$

Er bestaat een speciale klasse van grootheden die *invariant* zijn onder Lorentztransformaties. Een dergelijke invariant is een zogenaamde *scalaire grootheid* en heeft dus dezelfde waarde in *elk* inertiaalsysteem. Elke twee willekeurige viervectoren a en b kunnen gecombineerd worden tot een invariant I volgens de procedure

$$I = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3. \quad (40)$$

Formeel gebruiken we een andere schrijfwijze en definiëren we een nieuw type viervector $x_\mu = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3)$, die we *covariant* noemen, terwijl de oorspronkelijke vector $x^\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, *contravariant* heet. Covariante en contravariante viervectoren zijn aan elkaar gerelateerd via

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad \text{en} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad (41)$$

waarbij we de *metrische tensor* $g = g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ gebruiken die gedefinieerd³² is als

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

³¹Hierbij is de *Einsteinconventie* gebruikt, hetgeen impliceert dat er gesommeerd wordt over herhaalde indices.

³²De *metriek* is een wiskundige beschrijving van de manier waarop afstanden in een ruimte worden gemeten. Men kan zich dit eenvoudig voorstellen als een matrix $\mathbf{g}$. De afstand tussen twee punten die beschreven worden door de vectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ is dan $\mathbf{x}^T \mathbf{g} \mathbf{y}$ (een matrixvermenigvuldiging). Het eenvoudigste voorbeeld is de normale drie-dimensionale ruimte, waarvoor

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

en $\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Het kwadraat van de lengte van de vector $\mathbf{x}$ wordt gegeven door $\mathbf{x}^T \mathbf{g} \mathbf{x}$. Hier geven we de definitie van de metrische tensor zoals we die in de speciale relativiteitstheorie gebruiken. Merk op dat in de algemene relativiteitstheorie de metrische tensor bepaald wordt door de veldvergelijking

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (43)$$

waarbij $T_{\mu\nu}$ de energie-impuls tensor is, en $G_{\mu\nu}$ de Einstein tensor die de kromming van de ruimte beschrijft. De Einstein tensor is opgebouwd uit contracties van de krommingstensor, die een functie is van de metrische tensor g en de eerste- en tweede-orde afgeleiden. De veldvergelijking is een differentiaalvergelijking voor de metriek g .

Met behulp van deze definities kunnen we vergelijking (40) nu schrijven als

$$I = a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a_\mu g^{\mu\nu} b_\nu = (a \cdot b) = a^0 b^0 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (45)$$

Een eenvoudige invariant kan gevormd worden uit elke viervector x door het inproduct met zichzelf te nemen. Dit heet de *norm*. In de Euclidische ruimte zijn we eraan gewend dat de norm (ook wel de lengte genoemd) van een vector altijd positief is. Dat is niet het geval in de vier-dimensionale ruimtetijd en men onderscheidt

$$\begin{aligned} x^2 = (x \cdot x) &> 0 && \text{tijdachtig,} \\ x^2 &< 0 && \text{ruimteachtig,} \\ x^2 &= 0 && \text{lichtachtig.} \end{aligned} \quad (46)$$

We gaan nu de meetkunde in de ruimtetijd van Minkowski nader bestuderen. Startpunt is het infinitesimale lijnelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (47)$$

De metriek speelt zoals altijd de hoofdrol. In het geval van de SRT (en wanneer geschreven in cartesische coördinaten) wordt de metriek gegeven door

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Deze metriek draagt de naam *minkowskimetriek*, en wordt conventioneel aangeduid door de griekse letter η , oftewel $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. De inverse van de minkowskimetriek is eenvoudig te vinden, en blijkt precies dezelfde vorm te hebben als de metriek zelf,

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Als we het lijnelement uitschrijven vinden we

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (50)$$

Dit kunnen we meteen gebruiken om een fysische interpretatie toe te kennen aan het lijnelement. Ten eerste kan worden opgemerkt dat de laatste drie termen precies de stelling van Pythagoras vormen³³. Dit betekent dat als een waarnemer de afstand tussen twee punten in ruimtetijd meet, en dat op hetzelfde tijdstip doet, voor deze waarnemer geldt dat $-ds^2$ niets anders is dan de afstand tussen deze twee punten. Verder kan worden opgemerkt dat als een waarnemer het tijdsverschil meet tussen twee gebeurtenissen en dat doet zonder ondertussen van positie te veranderen ten opzichte van de gebeurtenissen (dit wil zeggen: deze waarnemer is in rust ten opzichte van de gebeurtenissen!), de laatste drie termen van het lijnelement gelijk zijn aan nul; voor deze waarnemer geldt dus dat het lijnelement de interpretatie heeft van de verstreken tijd tussen twee gebeurtenissen. *Het lijnelement is een maat voor de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen voor een waarnemer die in rust is ten opzichte van deze gebeurtenissen, $ds^2 = c^2 d\tau^2$.*

³³Merk op dat met de definitie $dT \equiv -icdt$, we het lijnelement kunnen schrijven als $-ds^2 = dT^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Men een dergelijke Wick-rotatie kunnen we wiskundige problemen in Minkowski-ruimte vertalen naar de Euclidische meetkunde.

2.3 Tijddilatatie

We zullen nu de eerste paar directe gevolgen van het minkowskilijnelement beschouwen. Zoals al eerder aangestipt, suggereert het eerste postulaat dat verschillende waarnemers van mening zullen verschillen over de afstand en het tijdverschil tussen twee gebeurtenissen. Allereerst zal het effect van tijddilatatie worden beschouwd. Startpunt is het lijnelement

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (51)$$

Hierin is $d\tau$ op te vatten als de tijd die verstrijkt op de klok van een waarnemer (W1) voor wie de twee gebeurtenissen plaatsvinden op dezelfde positie, en is dt de tijd die verstrijkt tussen die gebeurtenissen zoals gemeten door een andere waarnemer (W2). Wanneer nu de rechterkant van deze vergelijking gedeeld wordt door $c^2 dt^2$, kan de relatie tussen verstreken tijd van de eerste waarnemer ($d\tau$) en die van de tweede waarnemer (W2) (dt) geschreven worden als

$$d\tau = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \quad \rightarrow \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma}. \quad (52)$$

Het plusmin-teken van deze uitdrukking is het wiskundige gevolg van het nemen van een wortel; fysisch zijn we echter alleen geïnteresseerd in het plusteken, aangezien een minteken zou impliceren dat de twee waarnemers tegengesteld lopende tijden ervaren. We zullen daarom vanaf nu altijd het plusteken gebruiken. Verder is geschreven $v \equiv \frac{dr}{dt}$, oftewel het is de afstand tussen de twee gebeurtenissen zoals gemeten door de tweede waarnemer, gedeeld door de tijdsduur zoals gezien door de tweede waarnemer (W2). Dit is de snelheid v waarmee deze waarnemer zich beweegt ten opzichte van de twee gebeurtenissen (en hiermee ook ten opzichte van de eerste waarnemer, die immers stil staat ten opzichte van de gebeurtenissen). Uit de gevonden vergelijking blijkt dat de twee waarnemers hun tijden verschillend registeren: de hoeveelheid tijd die voor de ene waarnemer verstrijkt tussen twee gebeurtenissen is niet dezelfde als die voor de ander.

De factor $\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2}$ is een maat daarvoor. Deze factor wordt de *lorentzfactor* genoemd, en zal nog vaker voorkomen in de SRT; hij wordt conventioneel aangeduid met de letter γ , waarbij

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (53)$$

Merk alvast op dat deze factor oneindig groot wordt als de twee waarnemers een onderlinge snelheid hebben gelijk aan c ; verder kan al worden opgemerkt dat als de twee waarnemers een onderlinge snelheid hebben groter dan c , de factor imaginair wordt en daardoor nooit fysisch relevant kan zijn. Dit is een eerste hint dat de lichtsnelheid niet alleen invariant is, maar ook de *maximale* snelheid is die fysisch mogelijk is. Voor het effect van tijddilatatie is het alleen nodig op te merken dat de lorentzfactor altijd groter is dan 1. Hieruit volgt dat $d\tau$ kleiner is dan dt , oftewel: de tijd verstreken tussen twee gebeurtenissen is voor de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de twee gebeurtenissen, kleiner dan voor de waarnemer die zich met snelheid v beweegt ten opzichte van de gebeurtenissen ($d\tau < dt$). Wat betekent dit nu fysisch? Op eerste gezicht lijkt dit te betekenen dat de tijd sneller verloopt voor de eerste waarnemer (W1) dan voor de tweede: immers, de eerste waarnemer heeft minder tijd nodig om van een gebeurtenis naar de andere te gaan. We kunnen het echter ook vanuit de andere waarnemer W2 bekijken. Laat de eerste gebeurtenis het moment zijn waarop de twee waarnemers nog gelijk lopende klokken hebben, en waarop beide waarnemers kijken naar de slinger van de klok van waarnemer W1, die net op het punt staat een slinger te maken. Na een zekere tijd T heeft de slinger de andere kant bereikt, gezien vanuit de waarnemer die de klok bij zich heeft: $d\tau = T$. De stilstaande waarnemer W2 kijkt ondertussen naar dezelfde klok (die zich ten opzichte van hem voortbeweegt met snelheid

v), en voor deze waarnemer doet de slinger er een tijd $dt = \gamma d\tau$ over: langer. Dit wil dus zeggen, dat de stilstaande waarnemer observeert dat de voorbijvliegende klok langer nodig heeft dan T om een enkele slinger te maken. De conclusie van de stilstaande waarnemer zou dan ook zijn dat de voorbijkomende klok te langzaam loopt. Dit is wat er bedoeld wordt met tijddilatatie: voor een stilstaande waarnemer lijkt een voorbij komende klok langzamer te lopen dan voor de waarnemer die met de klok meebeweegt (zie ook Fig. 14). Dit wordt vaak aangeduid met de slogan ‘bewegende klokken lopen langzamer’; echter, de lading zou wellicht beter gedekt zijn door de uitspraak ‘voor een stilstaande waarnemer lijkt de bewegende klok langzamer te lopen’.

Een vraag komt dan al snel op: loopt een bewegende klok nu ‘echt’ langzamer dan de stilstaande klok? Want goed beschouwd hebben we hier alleen maar laten zien dat de bewegende klok langzamer *lijkt* te lopen wanneer bekeken door een stilstaande waarnemer. Het antwoord is dat er geen verschil is tussen langzamer *lijken* te lopen, en daadwerkelijk langzamer lopen: fysica gaat immers alleen over gemeten effecten, wat wil zeggen dat wij over alle effecten die zich niet via een meting openbaren, geen zinnige (dat wil zeggen testbare) uitspraak kunnen doen. Elke gemeten waarneming is net zo ‘waar’ als elke andere gemeten waarneming. Het heeft dan ook geen zin ons af te vragen of de slinger van een klok nu ‘echt’ langzamer slingert wanneer het beweegt, of dat het alleen maar zo ‘lijkt’ in onze waarneming: alleen onze meting geldt.

Wat de relativiteitstheorie ons nu geleerd heeft, is dat de gemeten tijdsduur van een proces afhankelijk is van de snelheid van de waarnemer, en de vraag hoe snel een proces nu ‘echt’ verloopt, is onzinnig geworden. Dit is, zoals ook al genoemd in de discussie over het relativiteitsprincipe, de kern van het woord ‘relativiteit’: er is geen absoluut antwoord meer op de vraag wat de ‘werkelijke’ waarde is van bepaalde grootte; elke waarde is waarnemer-afhankelijk geworden, en elke gemeten waarde is even ‘waar’.

Enkele laatste opmerkingen over tijddilatatie. Het moge duidelijk zijn dat dit verschijnsel niets te maken heeft met de mechaniek van de klokken. Het is een puur geometrisch verschijnsel, direct voortkomend uit de minkowskimetrick. Het verschijnsel beperkt zich dan ook niet tot klokken, en geldt voor elk fysisch meetbaar tijdsverschil: de slinger van een klok, de duur van een harteklop, het verval van een atoomkern, de levensduur van een mens, het vallen van een steen, etc, *alle* verschijnselen lijken langzamer te gaan voor een waarnemer, wanneer deze verschijnselen zich bewegen ten opzichte van deze waarnemer.

2.4 Lorentzcontractie

Een tweede direct gevolg van het minkowskilijnelement is de lorentzcontractie: afstanden tussen gebeurtenissen zijn korter voor een waarnemer die beweegt ten opzichte van de gebeurtenissen. Startpunt is wederom het invariante lijnelement ds^2 en we kiezen de x -as als richting van relatieve beweging (deze keuze is willekeurig). Er geldt

$$-ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2. \quad (54)$$

Om lorentzcontractie aan te tonen beschouwen we allereerst een waarnemer $\mathcal{O}'$ die met snelheid $\vec{v}$ beweegt ten opzichte van een meetlat (zie Fig. 15). Voor deze waarnemer vinden de volgende twee gebeurtenissen plaats: de voorkant van de lat passeert de waarnemer, en de achterkant van de lat passeert deze waarnemer. Voor deze waarnemer vinden de twee gebeurtenissen plaats op dezelfde positie, dus geldt $dx' = 0$. De tijd die de lat erover doet om de waarnemer te passeren, dt' , kan gebruikt worden door deze waarnemer als een maat voor de lengte van de lat. Als de lat passeert met een snelheid v , concludeert deze waarnemer dat de lat een lengte heeft van $L' = v dt'$. De rechterkant van deze vergelijking kan dan ook worden geschreven als

$$-c^2 dt^2 + dx^2 = -\frac{c^2 L'^2}{v^2}. \quad (55)$$

De linkerkant van deze vergelijking heeft betrekking op een andere waarnemer, $\mathcal{O}$, die stilstaat ten opzichte van de lat. Voor deze waarnemer vinden de twee gebeurtenissen (het de eerste waarnemer passeren van voor en achterkant van de lat) plaats op een onderlinge afstand van L , de lengte van de lat zoals gemeten door deze tweede waarnemer. De tijdsduur tussen de twee momenten, dt is echter anders voor deze waarnemer, omdat er een tijddilatatie optreedt³⁴. Er geldt $dt' = \gamma^{-1}dt$. Als we dan vervolgens weer gebruiken dat de tijd dt' een maat is voor de lengte L' van de lat zoals gemeten door de eerste waarnemer, dan kan vergelijking (55) geschreven worden als

$$-c^2\gamma^2\frac{L'^2}{v^2} + L^2 = -\frac{c^2L'^2}{v^2}. \quad (56)$$

Dit is nu een relatie tussen de lengte van de lat zoals gemeten door de waarnemer die de lat stil ziet staan, en zoals gemeten door de waarnemer die de lat ziet passeren met een snelheid v . Vereenvoudigd is deze relatie

$$L = \gamma L'. \quad (57)$$

Wanneer herinnerd wordt dat γ altijd groter is dan 1, zien we nu dat de lengte van een lat korter lijkt voor iemand die de lat ziet bewegen, dan iemand die de lat in rust ziet. Dit is de lorentzcontractie: afstanden lijken korter wanneer waargenomen door een bewegende waarnemer. Merk op dat dit niet alleen geldt voor latten, maar natuurlijk voor *alle* fysisch meetbare afstandsverschillen. Net als tijddilatatie, is lorentzcontractie een puur geometrisch effect, een direct gevolg van het minkowskilijnelement. Bovendien geldt ook hier weer dat er geen absoluut antwoord is op de vraag hoe lang een lat nu ‘echt’ is: afstand is een snelheids-afhankelijke grootheid geworden, en kan diens gevolg alleen bepaald worden *ten opzichte van* een gegeven waarnemer: het relativiteitsprincipe!

2.5 De lorentztransformaties

Uit het relativiteitsprincipe volgde al dat het lijnelement invariant dient te zijn onder transformaties van coördinaten. Dit betekent dat er een beperkte set waarnemers is die onderling het minkowskilijnelement mogen gebruiken. We vragen ons af welke transformaties tussen waarnemers het minkowskilijnelement niet van vorm doen veranderen.

Wiskundig gezien betekent dit het beantwoorden van de vraag welke functies $x' = x'(t, x, y, z)$, $y' = y'(t, x, y, z)$, $z' = z'(t, x, y, z)$ de volgende vergelijking oplossen,

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \quad (58)$$

Er zijn meerdere transformaties te bedenken die hieraan voldoen. De makkelijkste die we bedenken kunnen is dat we gewoon bij elke coördinaat een constante optellen,

$$t' = t + a_t, \quad x' = x + a_x, \quad y' = y + a_y, \quad z' = z + a_z. \quad (59)$$

Ingevuld in vergelijking (58) laat direct zien dat dit een oplossing is. Fysisch betekent deze oplossing niets anders dan dat de twee waarnemers een (vaste) afstand van elkaar staan (a_x, a_y, a_z), en dat de klok van een van de waarnemers een (vaste) hoeveelheid tijd voor of achter loopt op die van de ander (a_t). Zulke transformaties noemt men *translaties*.

Een tweede set transformaties die het lijnelement gegeven in vergelijking (58) invariant laten, kan bijvoorbeeld gevonden worden door veranderingen in de tijd en één van de plaats-coördinaten

³⁴De correcte plaatsing van de lorentzfactor γ kan soms verwarrend zijn: welke waarnemer meet nu een langere tijdsduur? De vuistregel is altijd, dat de waarnemer die in rust is ten opzichte van de twee gebeurtenissen, de kortste tijdsduur meet tussen de twee gebeurtenissen. Dit betekent hier dat $\frac{dt'}{dt} < 1$, wat aangeeft hoe de factor γ geplaatst dient te worden.

(we kiezen hier voor z) niet te beschouwen. In dat geval moet voldaan worden aan

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2, \quad (60)$$

oftewel de som van twee kwadraten dient niet te veranderen. Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen door te schrijven

$$x' = A_x x + A_y y \quad y' = B_x x + B_y y, \quad (61)$$

waar A_x, A_y, B_x, B_y constanten zijn. Ingevuld in vergelijking (60) laat dan zien dat voor deze constanten dient te gelden

$$A_x^2 + B_x^2 = 1, \quad A_y^2 + B_y^2 = 1 \quad A_x A_y = -B_x B_y. \quad (62)$$

Aan de eerste twee eisen kan direct voldaan worden: als een som van twee kwadraten een constante moet opleveren, dan ligt het voor de hand om sinussen en cosinussen te proberen, aangezien voor deze functies geldt $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ voor elke hoek α . Men kan dus kiezen $A_x = \cos \alpha, B_x = \sin \alpha$ en $A_y = \cos \beta, B_y = \sin \beta$ om aan de eerste twee vergelijkingen te voldoen; aan de derde vergelijking is dan ook voldaan wanneer gekozen wordt $\beta = -\alpha$. Op deze manier is de transformatie compleet, en vinden we

$$x' = (\cos \alpha)x + (\sin \alpha)y, \quad y' = (\sin \alpha)x - (\cos \alpha)y. \quad (63)$$

Deze transformatie correspondeert met een draaiing om de z -as over een hoek α . Bijvoorbeeld, als die hoek $\frac{\pi}{2}$ is (een draaiing van 90°), dan is $x' = y$, en $y' = x$: de twee waarnemers staan stil ten opzichte van elkaar, maar zijn onderling 90° gedraaid. Transformaties als deze heten *rotaties*. In het voorgaande hebben we alleen een draaiing over de z -as beschouwd, maar de uitbreiding naar draaiingen om de andere assen zijn net zo eenvoudig te vinden.

Een derde soort transformatie kan gevonden worden door nu niet de tijd en een plaatscoördinaat constant te houden, maar in plaats daarvan twee ruimtelijke coördinaten (bijvoorbeeld y en z). In dat geval dient de transformatie te voldoen aan

$$-c^2 dt'^2 + dx'^2 = -c^2 dt^2 + dx^2. \quad (64)$$

Door nu te schrijven

$$ct' = A_t ct + A_x x, \quad x' = B_t ct + B_x x, \quad (65)$$

(waar A_t, A_x, B_t, B_x constanten zijn) en in te vullen in vergelijking (64), wordt gevonden dat de constanten moeten voldoen aan

$$A_t^2 - B_t^2 = 1, \quad -A_x^2 + B_x^2 = 1 \quad A_t A_x = B_t B_x. \quad (66)$$

Deze keer zullen sinussen en cosinussen niet voldoen, omdat hier nu het *verschil* van twee kwadraten een constante moet zijn om aan de eerste twee vergelijkingen te voldoen. Dit is precies wat de *hyperbolische functies* $\cosh$ en $\sinh$ definieert: voor deze geldt namelijk dat $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$, voor elke waarde van η . Het ligt dan ook voor de hand te kiezen $A_t = \cosh \eta, B_t = \sinh \eta$ en $A_x = \sinh \rho, B_x = \cosh \rho$ zodat aan de eerste twee vergelijkingen is voldaan. Aan de derde vergelijking kan vervolgens voldaan worden door $\rho = \eta$ te kiezen. Hiermee is dan de transformatie compleet, en vinden we

$$ct' = (\cosh \eta)ct + (\sinh \eta)x, \quad x' = (\sinh \eta)ct + (\cosh \eta)x. \quad (67)$$

Wiskundig is dit een draaiing in ruimtetijd, maar dan over een 'hyperbolische hoek' η in plaats van een normale. Maar wat betekent dit fysisch? Met name: wat is de betekenis van de hyperbolische

hoek η ? Dit kan worden gevonden door de tijddilatatie te beschouwen: we hadden al gezien dat de tijden van twee waarnemers die met snelheid v ten opzichte van elkaar bewegen, gerelateerd zijn via vergelijking (52).

Als we de differentiaalvorm nemen van vergelijking (67) en kiezen $dt' = d\tau$, dan kunnen we de eerste uitdrukking in vergelijking (67) schrijven als

$$d\tau = (\cosh \eta)dt + (\sinh \eta)\frac{1}{c}dx \quad (68)$$

Kwadrateren, delen door dt^2 en vergelijken met de tijddilatatie formule geeft dan

$$\cosh^2 \eta + \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sinh^2 \eta + 2 \left(\frac{v}{c}\right) \cosh \eta \sinh \eta = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (69)$$

Dit is een kwadratische vergelijking voor de variabele $\frac{v}{c}$, en geeft een relatie tussen de snelheid v en de hyperbolische hoek η . Zo is al meteen te zien dat η niets anders is dan een ingewikkelde manier om de snelheid tussen twee waarnemers te beschrijven³⁵. Wat de precieze relatie is tussen v en η vraagt nog een beetje meer rekenwerk. Allereerst moet vergelijking (69) herschreven worden tot

$$\begin{aligned} \left(\frac{v}{c}\right)^2 (1 + \sinh^2 \eta) + 2 \left(\frac{v}{c}\right) (\cosh \eta \sinh \eta) + (\cosh^2 \eta - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 (\cosh^2 \eta) + 2 \left(\frac{v}{c}\right) (\cosh \eta \sinh \eta) + (\sinh^2 \eta) &= 0. \end{aligned} \quad (70)$$

waar in de laatste stap de relatie $\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta = 1$ is gebruikt. Deze vergelijking kan worden opgelost voor $\frac{v}{c}$ met behulp van de abc-formule. Het resultaat is het directe verband tussen $\frac{v}{c}$ en η ,

$$\left(\frac{v}{c}\right) = -\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} \equiv -\tanh \eta \quad \Rightarrow \quad \eta = -\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right) \quad (71)$$

Dit kan nu worden gebruikt om de transformatievergelijking (71) uit te drukken in de snelheid v , wat vaak een inzichtelijker grootheid is dan de hyperbolische hoek η . Hiervoor kunnen de volgende rekenregels worden gebruikt³⁶,

$$\begin{aligned} \cosh \left(-\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right)\right) &= \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \\ \sinh \left(-\operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c}\right)\right) &= -\left(\frac{v}{c}\right) \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = -\left(\frac{v}{c}\right) \gamma. \end{aligned} \quad (72)$$

Merk op dat de lorentzfactor γ hier op natuurlijke wijze zijn intrede doet. Hiermee is dan gevonden dat de transformaties tussen de twee waarnemers gegeven worden door

$$\left. \begin{aligned} cdt' &= \gamma \left(cdt - \left(\frac{v}{c}\right) dx\right) \\ dx' &= \gamma \left(dx - vdt\right) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz, \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} dx^{0'} \\ dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} \rightarrow dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} dx^{\nu} \quad (73)$$

³⁵Deze alternatieve maat voor de snelheid wordt in sommige takken van de fysica meer gebruikt dan de snelheid v ; hij heeft als naam de *rapidity*. De reden voor deze voorkeur is dat de snelheid v tussen waarnemers nooit groter kan zijn dan de lichtsnelheid, terwijl de rapidity wel degelijk ∞ groot kan worden. Rapidity is ook een continue parameter van de Lorentzgroep.

³⁶Deze rekenregels zijn eenvoudig te bewijzen met behulp van de definities: $\cosh x \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $\sinh x \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(waar de relaties tussen de y en z afstanden ook weer zijn toegevoegd). Hierbij is $\beta = v/c$ de snelheid als fractie van de lichtsnelheid. Verder gebruiken we x^μ met $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ en $x^3 = z$, alsook de transformatiematrix Λ^ν_μ .

De inverse transformaties kunnen we vinden door v door $-v$ te vervangen. We vinden

$$\left. \begin{aligned} cdt &= \gamma(cdt' + \beta dx') \\ dx &= \gamma(dx' + \beta cdt') \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^{0'} \\ dx^{1'} \\ dx^{2'} \\ dx^{3'} \end{pmatrix} \rightarrow dx^\mu = \Lambda^\mu_{\nu'} dx^{\nu'}. \quad (74)$$

We zien dan dat vergelijking (73) de differentiaalvorm is van $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu x^\nu$, terwijl voor de inverse relaties (74) we de differentiaalvorm van $x^\mu = \Lambda^\mu_{\nu'} x^{\nu'}$ hebben verkregen. Deze vergelijkingen heten de *lorentztransformaties*, en spelen een hoofdrol in de SRT. Fysisch stellen zij het verschil voor tussen afstanden en tijdsduren zoals gemeten door waarnemers die zich ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid v in x -richting. Zulke vergelijkingen zijn eenvoudig af te leiden voor waarnemers die zich met snelheid v in andere richtingen bewegen. Tezamen met de translaties in alle richtingen en de rotaties om de drie ruimte-assen, vormen de lorentztransformaties de volledige set transformaties die het lijnelement niet veranderen, oftewel: onder deze transformaties is het relativiteitprincipe veilig gesteld. De conclusie is dan ook de volgende: zolang waarnemers maar louter getranslateerd en/of geroteerd zijn ten opzichte van elkaar, of alleen met constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen, kunnen zij allen het minkowskilijnelement blijven gebruiken, en gelden dus alle wetten afgeleid in dit hoofdstuk voor de coördinaatsystemen voor al zulke waarnemers. Zulke stelsels noemen we *inertiaalstelsels*. Dit is wat de speciale relativiteitstheorie het predikaat ‘speciaal’ geeft: alle wetten afgeleid gelden voor een beperkte set waarnemers. Door differentiaalvormen te gebruiken en deze te integreren kunnen we zelfs deeltjes beschrijven die versnellingen ondergaan in het inertiaalsysteem van een waarnemer $\mathcal{O}$. In de theorie van de *algemene* relativiteit kunnen we onze bevindingen uitbreiden naar *alle* waarnemers. Voor nu zullen we in de rest van dit hoofdstuk altijd louter inertiaalstelsels beschouwen: vanaf nu zal er met ‘waarnemer’ een waarnemer bedoeld worden die zich in een inertiaalstelsel bevindt.

De lorentztransformaties geven ons alle mogelijke relaties tussen de tijdsduren en afstanden zoals gemeten door verschillende waarnemers die zich bewegen met snelheid v ten opzichte van elkaar. Twee specifieke voorbeelden van zulke relaties hadden we al eerder gezien, toen nog direct afgeleid uit het minkowskilijnelement: de tijddilatatie en de lorentzcontractie. Deze liggen dan ook automatisch opgesloten in de lorentztransformaties. Voor tijddilatatie hoeven we alleen maar te kijken naar het speciale geval dat een van de waarnemers een tijdsduur meet tussen twee gebeurtenissen die ten opzichte van hem op een en dezelfde positie plaatsvinden, zodat $dx = 0$; voor deze waarnemer schrijven we $dt = d\tau$; er volgt dan direct uit vergelijking (74) dat een andere waarnemer een tijdsduur meet tussen deze twee gebeurtenissen gelijk aan $dt' = \gamma d\tau$. Dit is precies de tijddilatatieformule in vergelijking (52). Verder, om de lorentzcontractie af te leiden uit de lorentztransformaties hoeft alleen naar het speciale geval gekeken te worden dat de twee gebeurtenissen de metingen zijn van voor- en achterkant van een lat door een waarnemer die deze metingen doet op een en hetzelfde tijdstip (immers: als dat niet het geval is, zal de lat ‘voorbij’ vliegen in de tijd die deze waarnemer wacht tussen meting van voor- en achterkant, en stelt de afstand tussen gemeten positie van voor- en achterkant dus niet meer de lengte van de lat voor). Voor deze waarnemer geldt dan ook $dt = 0$, en zal de lengte van de lat gegeven zijn door $dx = L$; volgens vergelijking (74) meet de waarnemer in rust ten opzichte van de lat een lengte van $dx' = L = \gamma L$. Dit is precies de lorentzcontractie formule, vergelijking (57).

De tijddilatatie en lorentzcontractie zijn slechts speciale gevallen van de lorentztransformaties,

een set algemene relaties tussen tijdsduren en afstanden zoals gemeten door waarnemers die bewegen ten opzichte van elkaar met een snelheid v .

2.6 Invariantie van de lichtsnelheid

We zijn nu op het punt aangekomen dat we ons kunnen buigen over de vraag hoe snelheden veranderen tussen waarnemers die zich bewegen ten opzichte van elkaar. Snelheid is niets anders dan een verandering van positie gedeeld door de verstreken tijd benodigd om de afstand tussen de begin- en eindposities te overbruggen. Maar zoals al gezien, zijn afgelegde afstanden en verstreken tijden niet meer absoluut: zij verschillen van waarnemer tot waarnemer. Het is dan ook te verwachten dat het concept gemeten snelheid op een nieuwe manier zal transformeren tussen verschillende waarnemers. Hiervoor beschouwen we twee waarnemers, 1 en 2, die ten opzichte van elkaar bewegen met een constante snelheid v . Beiden kijken naar een bewegend deeltje, en meten daar de snelheid van, waarbij u_1 de snelheid is zoals gemeten door waarnemer 1, en u_2 de snelheid zoals gemeten door waarnemer 2. De vraag is nu hoe deze twee gemeten snelheden zich tot elkaar verhouden. Voor het gemak kiezen we alle snelheden in de x -richting.

Per definitie is de snelheid zoals gemeten door waarnemer 2 gegeven door

$$u_2 \equiv \frac{dx_2}{dt_2}. \quad (75)$$

De transformatie tussen tijd- en positieverschillen wordt gegeven door de lorentztransformatie, vergelijking (74); teller en noemer kunnen dan ook direct worden ingevuld, en worden uitgedrukt in de gemeten afstand en verstreken tijd dx_1 en dt_1 zoals gemeten door waarnemer 1. Dit levert

$$u_2 = \frac{\gamma}{\gamma} \frac{dx_1 + v dt_1}{dt_1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) dx_1} = \frac{\frac{dx_1}{dt_1} + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{dx_1}{dt_1}} = \frac{u_1 + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) u_1}, \quad (76)$$

waarin is gebruikt dat dx_1 gedeeld door dt_1 precies de snelheid u_1 is zoals gemeten door waarnemer 1.

Dit is de zogenaamde *regel van Einstein voor het samenstellen van snelheden*: gegeven de snelheid u_1 van een object zoals gemeten door waarnemer 1, geeft deze formule ons de snelheid u_2 van dit object zoals gemeten door waarnemer 2 die zich zelf met snelheid v beweegt ten opzichte van waarnemer 1. Voor kleine snelheden gaat de relatie over in de normale optelling van snelheden in de klassieke mechanica: $u_2 = u_1 + v$.

Een aantal interessante eigenschappen kan nu worden opgemerkt. Zo kan eenvoudig worden aangetoond dat als een waarnemer een deeltje ziet bewegen met een snelheid lager dan de lichtsnelheid (oftewel $u_1 < c$), elke andere waarnemer dit deeltje ook ziet bewegen met een snelheid lager dan de lichtsnelheid ($u_2 < c$). Ook kan worden aangetoond dat als een waarnemer het deeltje ziet bewegen met een snelheid hoger dan de lichtsnelheid, elke andere waarnemer dit deeltje ook ziet bewegen met een snelheid hoger dan de lichtsnelheid. Dit laatste is overigens alleen wiskundig waar: het zal later worden aangetoond dat niets sneller kan gaan dan het licht³⁷.

Het belangrijkste gevolg van Einsteins snelheidsregel is dat alle waarnemers dezelfde snelheid voor een lichtsignaal zullen meten, ongeacht de onderlinge snelheden tussen deze waarnemers: voor elke waarnemer zal een foton zich voortplanten met snelheid c . Neem als bewegend object

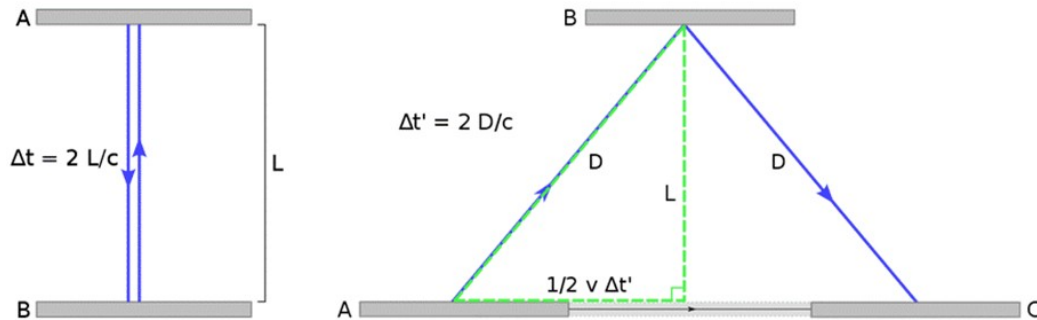
³⁷Dit geldt in de conventionele leer van de natuurkunde. Er zijn wel degelijk exotische theorieën waarin deeltjes bestaan die sneller gaan dan het licht (de zogenaamde *tachyonen*); echter, theorieën met tachyonen hebben doorgaans de eigenschap instabiele materie te voorspellen. Zulke deeltjes zullen daarom niet worden beschouwd.

een foton, dat voor waarnemer 1 met een snelheid van $u_1 = c$ beweegt. Einsteins snelheidsregel zegt dan vervolgens dat ook waarnemer 2 dit foton met snelheid $u_2 = c$ ziet bewegen,

$$u_2 = \frac{u_1 + v}{1 + \left(\frac{v}{c^2}\right) u_1} \Big|_{u_1=c} = \frac{c + v}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)} = c. \quad (77)$$

Dit betekent dat licht zich altijd (dit wil zeggen voor elke waarnemer in elk inertiaalsysteem) met de lichtsnelheid voortbeweegt! Stel dat waarnemer 1 een lichtstraal afvuurt. De fotonen snellen met de lichtsnelheid weg ten opzichte van waarnemer 1. Waarnemer 2 besluit om met hoge snelheid het licht achterna te gaan. Hiertoe beweegt hij bijvoorbeeld met 99% van de snelheid ten opzichte van waarnemer 1. Als hij nu een meting uitvoert van de snelheid van de lichtbundel uitgezonden door waarnemer 1, meet hij toch weer dezelfde snelheid c . Ten opzichte van het licht heeft hij geen enkele vordering gemaakt! De snelheid v tussen de twee waarnemers blijkt geheel irrelevant (hij werd weggedeeld in de laatste stap). Blijkbaar maakt het niet uit hoe snel de twee waarnemers zich bewegen ten opzichte van elkaar: als een van hen een foton ziet dat met de lichtsnelheid gaat, dan ziet elke andere waarnemer dit ook. De conclusie is dan ook: *licht gaat voor elke waarnemer met de lichtsnelheid*. Men zegt ook wel: de lichtsnelheid is *invariant*. Op deze manier hebben we Einsteins oorspronkelijke eerste postulaat teruggevonden, louter en alleen door uit te gaan van de minkowskimetrick en het relativiteitsprincipe.

Tijddilatatie kan ook direct worden afgeleid uit de constantheid van de lichtsnelheid voor verschillende waarnemers. Om dit duidelijk te maken beschouwen we een eenvoudige klok gebaseerd op reflecterend licht. De klok is weergegeven in Fig. 14. Elke kloktik correspondeert met de heen- en



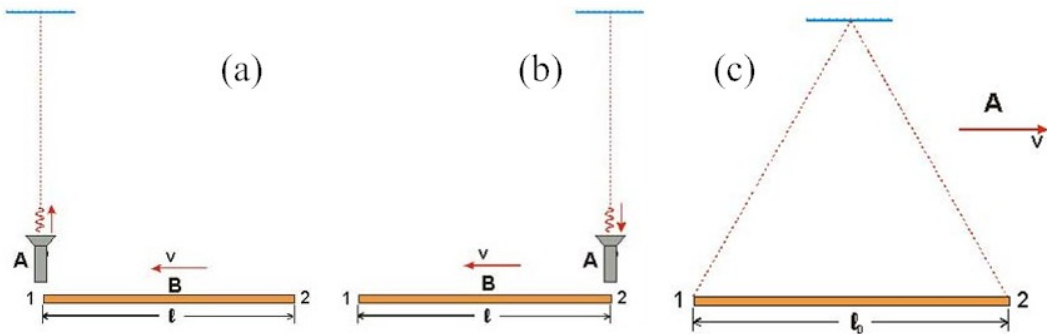
Figuur 14: Een klok gebaseerd op een foton dat reflecteert tussen twee spiegels. Links: de klok is in rust en een kloktik komt overeen met de vluchttijd van het foton. Rechts: een waarnemer die een bewegende klok ziet, meet dat deze klok langzamer loopt.

terugreis van een foton tussen de spiegels. Voor een stilstaande klok duurt een kloktik $\Delta t = \frac{2L}{c}$. Als de klok ten opzichte van een waarnemer beweegt met snelheid v , dan ziet deze waarnemer het foton een langere weg afleggen om de heen- en terugreis te maken. De geometrie laat toe om de kloktik van de bewegende klok te bepalen. Er geldt $\Delta t' = \frac{2D}{c}$ en de diagonale afstand D kan met behulp van de stelling van Pythagoras bepaald worden als $D = \sqrt{L^2 + \frac{1}{4}v^2(\Delta t')^2}$. Invullen en oplossen van $\Delta t'$ levert $\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{2L}{c} = \gamma \Delta t$. We vinden hiermee weer de formule voor tijddilatatie.

Een goed voorbeeld van tijddilatatie zijn muonen die gecreëerd worden door bosingen van hoog-energetische kosmische deeltjes met de buitenste laag van de aardatmosfeer en die richting de aarde bewegen. Vanwege tijddilatatie is hun levensduur beduidend langer dan de levensduur zoals die op aarde (in het rustsysteem van de muonen) gemeten wordt: $2.2 \mu\text{s}$. Dit laat toe dat

dergelijke kosmische muonen een grotere weg afleggen en het oppervlak van de aarde bereiken kunnen. Voor een waarnemer die meereist met een muon nadert de aarde met een snelheid in de buurt van de lichtsnelheid, maar kan de afgelegde weg desondanks niet meer dan $c\Delta t = (3 \times 10^8 \text{ m/s})(2.2 \times 10^{-6}) = 660 \text{ m}$ afleggen. Toch bereiken deze muonen het aardoppervlak, terwijl de afstand van de buitenste laag van de atmosfeer tot het oppervlak ongeveer 20 km is. De verklaring is dat deze lengte van 20 km voor de meereizende waarnemer lorentz-gecontraheerd is tot minder dan 660 m.

We kunnen onze lichtklok ook gebruiken om lorentzcontractie te begrijpen. We tonen de geometrie in Fig. 15. Twee waarnemers A en B hebben een relatieve snelheid v ten opzichte van



Figuur 15: Een klok gebaseerd op een foton dat reflecteert tussen twee spiegels. Panel (a): uiteinde 1 van de staaf passeert waarnemer A ; panel (b): uiteinde 2 passeert A ; panel (c): de situatie zoals gezien door waarnemer B .

elkaar. Waarnemer B houdt een staaf vast in de richting van v (en is dus in rust ten opzichte van de staaf). We beschouwen eerst de situatie vanuit waarnemer A . Panel (a) toont de situatie waarbij uiteinde 1 van de staaf waarnemer A passeert. Op dat moment stuurt A een lichtflits in de richting van de spiegel. In panel (b) wordt de situatie getoond waarbij uiteinde 2 van de staaf waarnemer A passeert. De afstand tussen waarnemer A en de spiegel is dusdanig dat precies op dit tijdstip de lichtflits weer bij A aankomt. Voor A is er inmiddels een tijd Δt verstreken. Waarnemer A die op deze manier de lengte van een ten opzichte van hem bewegende staaf meet, concludeert dus dat de lengte van de staaf L' gegeven wordt³⁸ door $L' = v\Delta t$. Panel (c) schetst de situatie voor de met de staaf meebewegende waarnemer B . B ziet A 's lichtklok langskomen met snelheid v . In B 's tijd $\Delta t'$ legt deze klok een afstand L af³⁹. Dus geldt $L = v\Delta t'$. Vervolgens gebruikt hij de tijddilatatie formule, $\Delta t' = \gamma\Delta t$ en vindt $L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L}{\gamma}$.

2.7 Verlies van universele definitie van tijd en gelijktijdigheid

Als twee gebeurtenissen plaatsvinden op verschillende plaatsen, maar een waarnemer meet dat ze gelijktijdig gebeuren, dan kan het zo zijn dat een andere waarnemer (die beweegt ten opzichte van de eerste) meet dat ze voor hem niet gelijktijdig gebeuren. We noemen dit het *verlies van gelijktijdigheid*. Voor Newton en Galileo hadden voor en na een invariante betekenis: iedereen zou het erover eens zijn dat gebeurtenis A plaatsvond vóór gebeurtenis B . Dit lijkt alleen maar logisch omdat A wel eens de reden kan zijn dat B gebeurt, en het zou weleens tegenstrijdig kunnen zijn als iemand anders bepaalt dat B vóór A heeft plaatsgevonden. In de SRT is het alleen vereist dat de begrippen vóór en na nodig zijn als de gebeurtenissen elkaar kunnen beïnvloeden. Dus

³⁸We gebruiken het accent om aan te geven dat hij de lengte van een ten opzichte van hem *bewegende* staaf meet.

³⁹We gebruiken hier L zonder accent omdat de staaf ten opzichte van B stilstaat.

als A de gebeurtenis B kan veroorzaken, dan moet iedereen het erover eens zijn dat A eerder was. Echter A kan alleen B veroorzaken als licht (of een langzamer signaal) kan reizen van A naar B : geen enkele invloed kan sneller reizen dan het licht. Derhalve, als B te ver verwijderd is om licht van A te ontvangen tegen de tijd dat B plaatsvindt, dan is er geen logische reden dat verschillende waarnemers het erover eens moeten zijn welke van de gebeurtenissen het eerst plaatsvond.

Gebeurtenissen die op dezelfde tijd maar op verschillende posities plaatsvinden, zoals gezien door een waarnemer, zijn precies van dit soort: geen van beide kan de ander veroorzaken. Daarom geeft de SRT ze geen unieke volgorde: voor de ene waarnemer gebeuren ze gelijktijdig, voor een ander gebeurt A eerst, en voor een derde kan B eerst gebeuren. Echter alle drie de waarnemers zullen het erover eens zijn dat licht niet van de ene naar de andere gebeurtenis kan reizen, en er dus geen causaal verband tussen beide gebeurtenissen kan zijn.

Als echter licht *kan* reizen van A naar B , dan zullen alle waarnemers het hierover eens zijn en gebeurt B later dan A (maar wel met verschillende tijddilatatie effecten). Dus SRT behoudt het begrip van vóór en na, van toekomst en verleden, maar het past deze relatie niet toe op alle mogelijke paren gebeurtenissen.

Dit betekent dat het niet mogelijk is om Newtons idee van een drie-dimensionale absolute ruimte te handhaven, met tijd als alleen een parameter. In Newtons wereld zal iedereen het erover eens zijn hoe ruimte eruit ziet op een gegeven tijdstip. In Einsteins wereld is er alleen *ruimtetijd*, het vier-dimensionale continuüm van alle gebeurtenissen die op elk mogelijk tijdstip kunnen plaatsvinden. Gebeurtenissen zijn de punten in ruimtetijd. Een waarnemer zal een bepaalde verzameling gebeurtenissen groeperen in de drie-dimensionale ruimte op een bepaald tijdstip. Echter een andere waarnemer kan evenwel besluiten dat een andere verzameling gebeurtenissen ruimte vertegenwoordigt op een bepaald tijdstip.

Twee gebeurtenissen die geen causaal verband met elkaar kunnen hebben, worden *ruimtelijk gescheiden* in ruimtetijd genoemd. Twee gebeurtenissen die verbonden kunnen worden door iets dat reist met een snelheid lager dan de lichtsnelheid worden *tijdsachtig gescheiden* genoemd. Gebeurtenissen die verbonden kunnen worden door één enkel foton worden *lichtachtig gescheiden* genoemd. Relativiteitstheorie mengt de begrippen ruimte en tijd. Als we het gezichtspunt van de waarnemer veranderen dan is er een transformatie van hoe we ruimte van tijd onderscheiden (zie vergelijkingen (74)), hoe we tijdsverschillen behandelen en hoe we afstanden meten. Dit alles wordt door de lorentztransformaties uitgedrukt.

2.8 Ruimtetijd

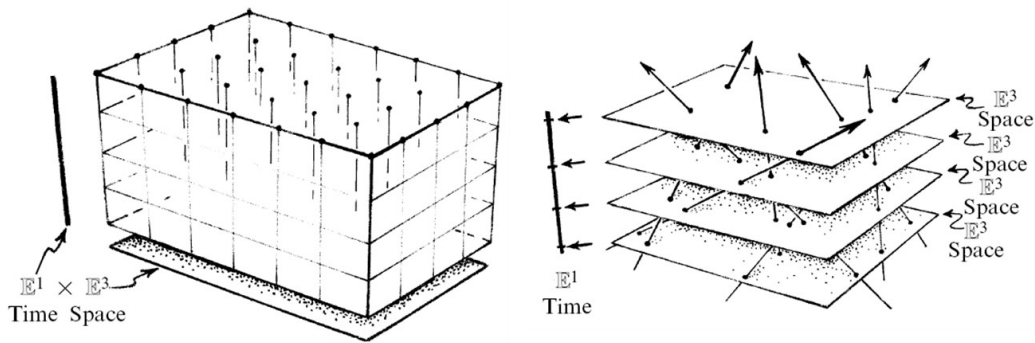
Hier stellen we ons de vraag: wat is ruimtetijd? Waarom is het onjuist om over ruimte en tijd als aparte grootheden te spreken in plaats van over ruimtetijd als geheel? In de natuurkunde van Aristoteles werd ruimte voorgesteld als een Euclidische drie-dimensionale ruimte $\mathbb{E}^3$. De punten van de ruimte behouden hun identiteit van het ene moment op het andere. Stel een deeltje bevindt zich in rust op een bepaald ruimtelijk punt. We nemen dan aan dat wanneer we dit ruimtelijk punt nu beschouwen en ook op een later tijdstip, we te maken hebben met hetzelfde ruimtelijk punt. Ons beeld van realiteit correspondeert dan met het scherm in een bioscoop, waar een bepaald punt op het scherm zijn identiteit behoudt wat er ook op dat scherm geprojecteerd wordt. Evenzo wordt tijd voorgesteld als een Euclidische ruimte, maar dat is de triviale $\mathbb{E}^1$ één-dimensionale ruimte⁴⁰. De Euclidische ruimte geeft een definitie van het begrip afstand tussen punten. Verder is er een begrip van gelijktijdigheid. Het is dus absoluut zinvol om

⁴⁰Tijd wordt door Aristoteles niet voorgesteld als een kopie van de reële lijn $\mathbb{R}$, want $\mathbb{R}$ bevat het voorkeurselement 0. Er is echter geen sprake van een voorkeur voor een oorsprong in de beschrijving van dynamische objecten.

te spreken van gebeurtenissen die gelijktijdig hier en elders plaatsvinden. Om in de beeldspraak van de bioscoop te blijven: als we een bepaald frame van de film beschouwen dan worden alle gelijktijdige gebeurtenissen op verschillende plaatsen op het scherm geprojecteerd. De ruimtetijd van Aristoteles is het product

$$\mathcal{A} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3. \quad (78)$$

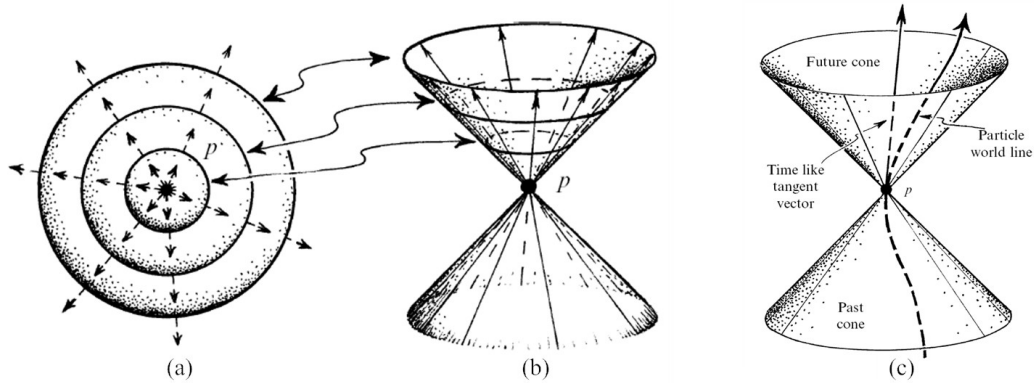
Het is eenvoudig de ruimte opgespannen door de paren $(t, \vec{x})$ voor te stellen, met t een element van $\mathbb{E}^1$, een tijd, en $\vec{x}$ een element van $\mathbb{E}^3$, een punt in de ruimte. Deze ruimtetijd wordt weergegeven in Fig. 16 (linker figuur). Laten we nu eens kijken wat Galileo's relativiteitsprincipe voor



Figuur 16: Links: de ruimtetijd van Aristoteles $\mathcal{A} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$ bestaat uit paren $(t, \vec{x})$. Rechts: de ruimtetijd van Galileo, $\mathcal{G}$, is een fiberruimte. Er is geen puntsgewijze connectie tussen verschillende $\mathbb{E}^3$ fibers: er bestaat geen absolute ruimte! Er is echter wel een unieke tijd voor elke ruimtetijd gebeurtenis: absolute tijd bestaat.

een gevolg heeft op ons begrip van ruimtetijd. Galileo vertelt ons dat de dynamische wetten hetzelfde zijn in elk inertiaalsysteem. Er is niets in de natuurkunde dat gebruikt kan worden om een systeem van rust te onderscheiden van een systeem dat met uniforme snelheid beweegt. Dit betekent dat er geen dynamische betekenis is in het stellen dat een bepaald ruimtelijk punt op dit moment hetzelfde is als het ruimtelijk punt een moment later. Het is zinloos te stellen dat het ruimtelijk punt waar mijn koffiekop zich nu bevindt, hetzelfde ruimtelijk punt is een minuut later. Gedurende deze minuut is de aarde om zijn as geroteerd en in dat systeem is mijn koffiekop op een ander ruimtelijk punt. Echter de aarde draait ook om de zon en dat levert weer een ander punt op. Kortom, de analogie van een projectiescherm is onjuist! We hebben niet één enkele Euclidische ruimte $\mathbb{E}^3$ als de arena waarin de acties van de fysische wereld zich in de tijd afspelen. We hebben verschillende $\mathbb{E}^3$ s voor elk tijdstip en er is geen natuurlijke identificatie tussen deze verschillende $\mathbb{E}^3$ s. Wiskundig gezien is Galileo's ruimtetijd $\mathcal{G}$ geen productruimte $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^3$, maar iets dat wiskundigen een *fiberbundel* noemen met als basis $\mathbb{E}^1$ en fiber $\mathbb{E}^3$. De situatie is geschetst in Fig. 16 (rechter figuur). Een fiberbundel heeft geen puntgewijze connectie tussen één fiber en de volgende. Desalnietemin vormen de fibers samen een geheel. Aan elk ruimtetijd element van $\mathcal{G}$ wordt een tijd toegekend, en deze laatste is een element van de 'klokrumte' $\mathbb{E}^1$.

Het bestaan van een lichtsnelheid die voor elke waarnemer hetzelfde is, heeft het verdwijnen van de absolute tijd tot gevolg. In Fig. 17 nemen we een gebeurtenis $\mathcal{P}$ in ruimtetijd en beschouwen we alle lichtstralen die door $\mathcal{P}$ gaan voor elke richting (zie Fig. 17a). We kunnen ruimtetijd voorstellen door horizontaal de x en y richting uit te zetten, terwijl we de tijdcoördinaat (ct) verticaal kiezen. De lichtstralen vormen een kegel in ruimtetijd, de zogenaamde *lichtkegel*. Als we de lichtsnelheid als fundamenteel nemen, dan betekent dit dat we de lichtkegel als fundamenteel nemen. De lichtkegel definieert een structuur in de tangentenruimte $T_{\mathcal{P}}$ die hoort bij $\mathcal{P}$. De



Figuur 17: De lichtkegel specificeert de fundamentele snelheid van het licht. In (a) worden de banen van de uitgezonden fotonen ruimtelijk geschetst als een bol die expandeert vanuit punt $\mathcal{P}$. In (b) zien we dat in ruimtetijd de fotonen een kegel uitsnijden. In (c) zien we dat de kegel ruimtetijd opsplijst in een verleden en een toekomst. De wereldlijn van een massief deeltje in $\mathcal{P}$ heeft een vector die naar de toekomst wijst en tijdachtig is. Deze vector ligt dus binnen de toekomst lichtkegel van $\mathcal{P}$.

lichtkegel wordt gevormd door gebeurtenissen waarvoor geldt

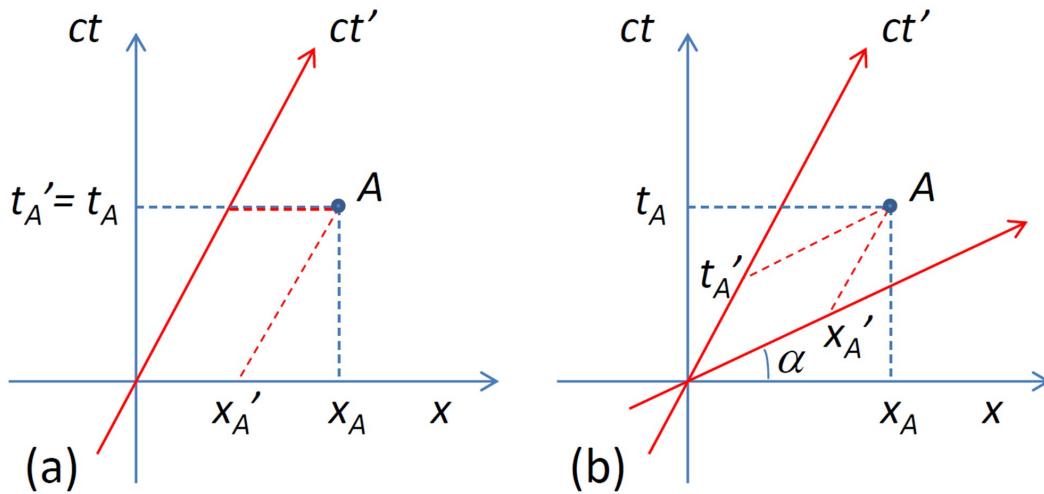
$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2 = 0. \quad (79)$$

Gebeurtenissen die van $\mathcal{P}$ gescheiden zijn door een tijdachtig interval, vallen binnen de lichtkegel en er geldt $\Delta s^2 > 0 \rightarrow c^2 \Delta t^2 > \Delta r^2$. Dergelijke gebeurtenissen kunnen causaal verbonden zijn. Dat is niet mogelijk voor zogenaamde ruimtelijk gescheiden gebeurtenissen die buiten de lichtkegel vallen. Hiervoor geldt $\Delta s^2 < 0 \rightarrow c^2 \Delta t^2 < \Delta r^2$.

Merk op dat de lichtkegel uit twee delen bestaat: een *verleden* kegel en een *toekomst* kegel. We kunnen ons de verleden kegel voorstellen als de geschiedenis van een lichtflits die implodeert op $\mathcal{P}$. De toekomst kegel zien we als een lichtflits die explodeert vanuit punt $\mathcal{P}$. Fotonen liggen op de rand van de kegel, terwijl de wereldlijnen van massieve deeltjes die door $\mathcal{P}$ gaan, binnen de kegel dienen te liggen. De structuur van ruimtetijd in de SRT is zodanig dat voor elke gebeurtenis van ruimtetijd een lichtkegel bestaat die voor deze gebeurtenis de causale structuur bepaalt. We zullen dit uitdiepen in de volgende sectie.

2.9 Ruimtetijddiagrammen

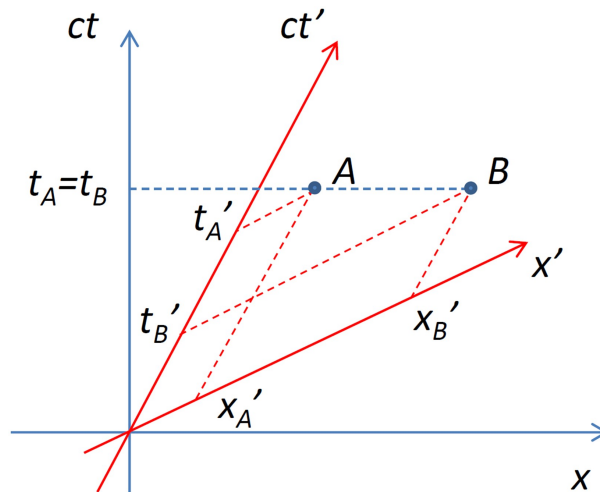
We kunnen ruimtetijddiagrammen gebruiken om gebeurtenissen in de vierdimensionale ruimtetijd op een geometrische wijze te beschrijven. In een ruimtetijd diagram (ook wel minkowskidiagram genoemd) tonen we één ruimtelijke dimensie op de x -as en de tijd op de y -as. Een ruimtetijd diagram stelt typisch het coördinatenstelsel van een waarnemer voor. Deze waarnemer is dan zelf in rust in dit systeem en zijn wereldlijn correspondeert met de tijd-as. Typisch wordt verticaal niet t , maar ct uitgezet, zodat de wereldlijn van een foton een rechte lijn wordt met een helling van 45° . We beginnen met het verhelderen van het verschil tussen de ruimtetijd van Galileo en die van de SRT. In de linker figuur stelt de schuine lijn de tijd-as voor van een waarnemer die ten opzichte van het coördinatensysteem beweegt met snelheid v . Op tijdstip $t = t' = 0$ vallen beide coördinatensystemen samen ($x = x' = 0$). De as van de bewegende waarnemer staat niet loodrecht op de x -as en de tijdschaal is uitgerekt. Beide waarnemers observeren gebeurtenis A en kennen er dezelfde tijd aan toe, omdat de klassieke mechanica een absolute tijd $t = t'$ voor gebeurtenissen kent. De plaats $x'_A = x_A - vt \neq x_A$ is verschillend, omdat de



Figuur 18: Links: in de klassieke mechanica heeft een gebeurtenis A plaats op hetzelfde tijdstip. Rechts: in de SRT kennen verschillende waarnemers verschillende tijden toe aan gebeurtenis A .

bewegende waarnemer naar gebeurtenis A toe beweegt. Deze grafische representatie noemen we een galileotransformatie.

Einstein ontdekte dat deze beschrijving onjuist is. Het coördinatensysteem van een bewegende waarnemer dient getekend te worden zoals gedaan is in de rechter afbeelding in Fig. 18. Dit volgt direct uit de lorentztransformaties, zie vergelijking (73). Voor de hoek α geldt $\tan \alpha = \frac{v}{c}$. Er bestaat geen absolute tijd meer en beide waarnemers kennen verschillende tijden toe aan gebeurtenis A .



Figuur 19: Ruimtetijddiagram voor een stilstaande waarnemer heeft assen x en ct , terwijl het diagram voor een waarnemer die met snelheid v ten opzichte van de eerste beweegt, de assen x' en ct' heeft. Voor de stilstaande waarnemer $\mathcal{O}$ vinden gebeurtenissen A en B gelijktijdig plaats. Dat is niet zo voor de bewegende waarnemer $\mathcal{O}'$.

Ook het verdwijnen van gelijktijdigheid kunnen we direct zien in een ruimtetijd diagram; zie Fig. 19. Hiertoe beschouwen we twee waarnemers die relatief ten opzichte van elkaar bewegen met snelheid v . Het coördinatensysteem van de bewegende waarnemer is aangegeven met x' en ct' in

het systeem van de stilstaande waarnemer. De oriëntatie van deze assen kan gevonden worden uit de lorentztransformaties. We beschouwen twee ruimteachtig gescheiden gebeurtenissen A en B . Deze gebeurtenissen kunnen geen causaal verband met elkaar hebben, omdat ze niet door fotonen (dat zijn lijnen onder $\pm 45^\circ$) of langzamere signalen verbonden kunnen worden. De gebeurtenissen gebeuren gelijktijdig in het systeem van de stilstaande waarnemer. In het systeem van de bewegende waarnemer gebeurt B op tijdstip C en gebeurtenis A op tijdstip D . In zijn systeem gebeurt B eerder dan A . Er is echter ook een systeem te vinden waarin A eerder gebeurt dan B . Dat is een waarnemer die met snelheid $-v$ beweegt ten opzichte van stilstaande waarnemer. We zien dat tijd haar absolute betekenis heeft verloren. Welke deelverzameling gebeurtenissen van ruimtetijd de gelijktijdige gebeurtenissen vormt, hangt af van de beweging van de waarnemer.

2.10 Relativistisch Dopplereffect

De verandering van het begrip tijd in de SRT leidt tot een eenvoudige formule voor de roodverschuiving van een foton. We kunnen het aantal golffronten tellen dat een bewegende detector passeert, en dit vergelijken met het aantal dat een detector in rust registreert. Het aantal golffronten dat per tijdseenheid passeert is de frequentie van de golf. We dienen nu in rekening te brengen dat de klok van een bewegende detector iets langzamer loopt dan die van een detector in rust. Dit betekent dat als de detector in rust N golffronten telt in tijd t , dan telt de bewegende detector $N' = N(1 - \frac{v}{c})$ golffronten in een tijd $t' = t/\gamma$ (Einsteins tijddilatatie). Als we het aantal golffronten delen door de tijd, dan meet de stilstaande detector een frequentie $f = N/t$, terwijl de bewegende detector een frequentie $f' = N'/t'$ meet. Dit levert

$$f' = (1 - \frac{v}{c})\gamma f = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} f = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} f. \quad (80)$$

Bovenstaande relatie geldt als de bewegende waarnemer zich verwijdt van de lichtbron, zoals gezien door een waarnemer in rust. Dit produceert een verlaging van de frequentie, een roodverschuiving. In het geval de waarnemer de bron nadert, spreken we over een blauwverschuiving. Omdat de noemer altijd kleiner is dan 1, zijn de waarden van de rood- of blauwverschuiving *groter* dan die op basis van de niet-relativistische Doppler formule. Merk op dat er zelfs een verschuiving is als de bewegende waarnemer loodrecht beweegt op de richting naar de lichtbron. In dat geval is de niet-relativistische Doppler verschuiving gelijk aan nul, omdat de loodrechte beweging geen golffronten toevoegt of aftrekt van het aantal dat geteld wordt door een stilstaande detector. Echter is er nog steeds de tijddilatatie en die reduceert de hoeveelheid tijd dat een bewegende detector kan meten. Dit produceert een blauwverschuiving in de SRT, terwijl er geen effect is in de klassieke Doppler formule. Dit wordt het transversale Dopplereffect genoemd.

2.11 Relativistische mechanica

De lagrangiaanse methode leent zich uitstekend voor de uitbreiding van de mechanica van Newton naar een versie die overeenkomt met het relativiteitsprincipe. Allereerst zullen we een vrij deeltje beschouwen, oftewel een deeltje met massa m dat beweegt zonder beïnvloed te worden door een kracht. De lagrangiaan voor een dergelijk deeltje bestaat dan alleen uit een kinetische term,

$$L = K. \quad (81)$$

In de klassieke mechanica wordt de kinetische energie gegeven door $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Deze uitdrukking kunnen we echter niet overnemen in de relativiteitstheorie. Immers, het relativiteitsprincipe eist dat de natuurwetten zodanig geformuleerd dienen te worden, dat zij niet van vorm veranderen

wanneer naar een ander inertiaalstelsel wordt getransformeerd. Dit betekent dat de gezochte lagrangiaan invariant moet zijn onder transformaties tussen inertiaalstelsels, en daar voldoet bovenstaande uitdrukking zeker niet aan. Echter, met enige aanpassing is er een vorm te vinden die erg lijkt op de oude uitdrukking, maar die wel degelijk invariant is. Hiervoor schrijven we eerst de oude uitdrukking uit als

$$L = K = \frac{1}{2}m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt}, \quad (82)$$

met $i = 1, 2, 3$ en waar Einsteins sommatieconventie gebruikt is: $dx^i dx_i = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Wat de invariantie van deze uitdrukking in de weg staat zijn twee dingen: allereerst zijn de dx -en inertiaalstelsel-afhankelijk; ten tweede zijn de dt 's dat eveneens. We hadden immers al gezien dat waarnemers in verschillende inertiaalsystemen, verschillende afstanden en tijdsduren meten. Deze uitdrukking kan daarom nooit voldoen aan het relativiteitsprincipe. Echter, wanneer we $dx^i dx_i$ vervangen door $dx^\mu dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ staat in de teller nu precies het lijnelement ds^2 , waarvan bekend is dat dit invariant is. Op dezelfde manier ligt een uitbreiding van de twee dt 's ook voor de hand: vervang $dt dt$ door $d\tau^2$, zodat ook dit nu invariant is geworden. Een natuurlijke suggestie voor een relativistische lagrangiaan van een vrij deeltje is dan

$$L = \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (83)$$

Deze overwegingen zijn natuurlijk geen *bewijs* voor de geldigheid van deze uitdrukking: het is een aanname. Er zijn ook andere Lagrangianen denkbaar die voldoen aan het relativiteitsprincipe. Echter, deze uitdrukking is de meest eenvoudige, en bovendien zal blijken dat de bewegingswetten die hieruit volgen, reduceren tot de oude vertrouwde bewegingswetten van Newton wanneer ze toegepast worden in situaties waarbij snelheden veel lager zijn dan de lichtsnelheid. Uiteindelijk zal het echter aan het experiment zijn om aan te tonen of de gevonden wetmatigheden correct zijn. Tot nu toe wijzen alle experimenten uit dat dit inderdaad het geval is.

De actie S behorend bij deze lagrangiaan wordt verkregen door de lagrangiaan te integreren over de tijd. Ook hier moet het relativiteitsprincipe in acht worden genomen: de uitdrukking moet worden geïntegreerd over de eigentijd $d\tau$ (in tegenstelling tot over de waarnemer-afhankelijke tijd t) om zo de invariantie van de actie te waarborgen. De actie wordt dan dus

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{1}{2}m\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right\} d\tau. \quad (84)$$

Om de bewegingswet voor het deeltje af te leiden, dient het principe van extreme actie weer te worden toegepast: er moet gezocht worden naar het pad $x^\mu(\tau)$ dat de waarde van deze integraal minimaal of maximaal maakt. De Euler-Lagrange vergelijkingen voor deze situatie hebben de vorm

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)} \right). \quad (85)$$

Merk op dat dit vier vergelijkingen zijn: voor elk van de vier coördinaten van het pad $x^\mu(t)$ is er een vergelijking die moet worden opgelost. Wanneer de relativistische lagrangiaan wordt ingevuld en beide zijden van de Euler-Lagrange vergelijkingen worden uitgerekend, wordt gevonden dat een vrij relativistisch deeltje een pad $x^\mu(\tau)$ volgt waarvan de componenten voldoen aan de vergelijkingen

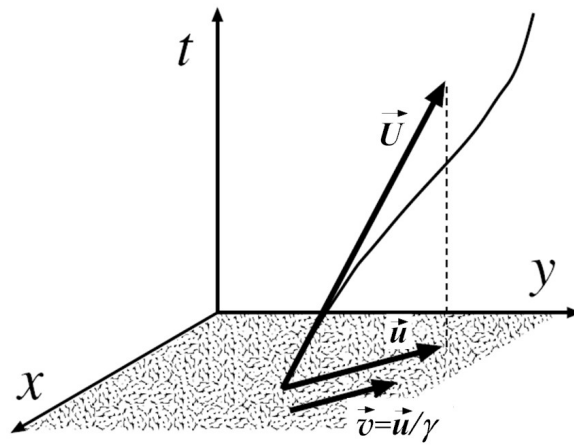
$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0. \quad (86)$$

Dit lijkt sprekend op de tweede wet van Newton voor een vrij deeltje, met twee subtiele verschillen.

Ten eerste doet de wet van Newton uitspraken over de drie plaatscoördinaten van het deeltje, waar deze nieuwe uitdrukking ook uitspraak doet over de tijd. Deze laatste stelt dat

$$m \frac{dt^2}{d\tau^2} = 0, \quad (87)$$

waaruit volgt dat $\frac{dt}{d\tau}$ gelijk is aan een constante. Dat is niet verrassend: we hadden immers al gezien dat de tijd τ zoals gemeten door een waarnemer die het deeltje ziet stilstaan, een andere is dan de tijd t gemeten door een waarnemer die het deeltje ziet bewegen. Dit was precies het tijddilatatie effect zoals besproken in sectie 2.3, en de waarde van deze constante laat zich dan ook aflezen van vergelijking (52): het is precies de lorentzfactor γ .



Figuur 20: Ruimtetiiddiagram in een specifiek lorentzframe dat de 3D ruimte toont op $t = 0$, alsook de viersnelheid $\vec{U} = (U_0, \vec{u})$ van een deeltje dat deze 3D ruimte passeert (op $t = 0$) als raakvector aan het pad, en twee 3D vectoren die in deze 3D ruimte liggen: het ruimtelijke deel van de viersnelheid $\vec{U}$ en de gewone snelheid $\vec{v}$ van het deeltje.

Het tweede verschil met de wet van Newton is het feit dat er hier afgeleiden worden genomen naar de eigentijd τ , waar in Newtons theorie afgeleiden werden genomen naar de tijd t . Dit maakt van deze nieuwe afgeleide een soort ‘gemengd-object’: de gemeten afstanden x worden genomen zoals gemeten door een willekeurige waarnemer ten opzichte van wie het deeltje beweegt, waar de tijd gemeten wordt door de waarnemer die stilstaat ten opzichte van het bewegende deeltje. Dit object wordt de viersnelheid $\vec{U}$ met componenten $U^\mu(t) = (U^0, \vec{u})$ genoemd. Er geldt $\vec{U} = d\vec{x}/d\tau$ en voor de componenten geldt $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$. Dit betekent voor de gewone snelheid $\vec{v}$ dat $v^j \equiv \frac{dx^j}{dt} = \frac{dx^j/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{U^j}{U^0}$. Deze relatie in combinatie met de normering van $\vec{U}$: $U_\mu U^\mu = dx_\mu dx^\mu/d\tau^2 = ds^2/d\tau^2 = c^2 d\tau^2/d\tau^2 = c^2$ en dus $U_\mu U^\mu = 1$ voor eenheden met $c = 1$. Hiermee vinden we $\vec{U}^2 = g_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = (U^0)^2 - \delta_{ij} U^i U^j = c^2$, betekent dat de componenten van de viersnelheid van de vorm $U^0 = \gamma c, U^i = \gamma v^i$, met $\gamma = 1/(1 - \delta_{ij} v^i v^j)^{\frac{1}{2}}$ zijn. We vatten een en ander nog een samen in Fig. 20. Het is nuttig om v^j te zien als de componenten van een 3D vector $\vec{v}$, de gewone snelheid, die leeft in de 3D euclidische ruimte $t = \text{constant}$ van het gekozen lorentzstelsel. Deze 3D ruimte is niet goed gedefinieerd totdat er een lorentzstelsel gekozen is, en daarom hangt het bestaan van $\vec{v}$ af van de specifieke keuze. Op het moment dat een lorentzframe gekozen is, kunnen we $\vec{v}$ zien als een coördinaten-onafhankelijk object.

Teneinde weer contact te maken met de klassieke mechanica, schrijven we de viersnelheid om naar een meer natuurlijk object (te weten: afstand en tijd gemeten door een en dezelfde waarnemer).

Dit kunnen we doen door te beseffen dat de verlopen tijd gemeten door het deeltje, en die door een andere waarnemer, met elkaar gerelateerd zijn via de formule van tijddilatatie: $d\tau = \gamma^{-1}dt$. Op deze manier is de gevonden wet uit te drukken als

$$m\gamma^2 \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = 0. \quad (88)$$

De wet van Newton kan nu gezien worden als een speciaal geval van deze nieuwe wet. Als we aannemen dat het deeltje veel langzamer beweegt dan het licht ten opzichte van de waarnemer in wiens tijdsduur en afstand we nu alles hebben uitgedrukt (oftewel we nemen aan dat $v \ll c$), dan kan vergelijking (88) benaderd worden door

$$m\gamma^2 \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \equiv \frac{m}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \approx m \left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} \approx m \frac{d\vec{x}^2}{dt^2} = 0, \quad (89)$$

waar gebruik is gemaakt van de wiskundige regel $(1+x)^m \approx 1+mx$, welke geldt als $x \ll 1$. Dit is precies de wet van Newton! Zo is nu aangetoond dat de wet van Newton slechts een speciaal geval is van een meer algemene bewegingswet, vergelijking (86)! Dit geeft ons vertrouwen dat onze keuze voor de lagrangiaan waarschijnlijk de juiste was: hij voldoet aan het relativiteitsprincipe, en geeft ons bovendien onze oude vertrouwde bewegingswetten terug.

Met dit in het achterhoofd kunnen we nu verder gaan met het afleiden van wetten betreffende de energie en impuls. Een impuls volgt uit een gegeven lagrangiaan via vergelijking $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}$. Toegepast op de relativistische lagrangiaan levert dit voor de impuls van het vrije deeltje

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \frac{dx^\alpha}{d\tau}} = m \frac{dx^\nu}{d\tau} \eta_{\alpha\nu}, \quad (90)$$

en na beide kanten te contraheren met de inverse $\eta^{\mu\alpha}$ van de minkowksimetrie wordt dit

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = mU^\mu = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m \vec{v} \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Merk op dat door de metriek te gebruiken we de covariante vector p_μ vinden en als we deze contraheren met de vector p^μ verkrijgen we de invariant

$$p_\mu p^\mu = m^2 U_\mu U^\mu = m^2 c^2. \quad (92)$$

Wederom lijkt de uitdrukking voor p^μ in vergelijking (91) erg op de impuls zoals bekend uit de mechanica van Newton: een massa vermenigvuldigd met een snelheid. Echter, de snelheid is hier nu weer de viersnelheid, en deze nieuwe impuls wordt dan ook de *vierimpuls* genoemd. Merk op dat dit uiteraard een contravariante viervector is. Vergeleken met de uitdrukking voor de newtoniaanse variant, vergelijking $\vec{F} = m d^2 \vec{x} / dt^2$, gaan weer twee verschillen op: ten eerste is er een nul-component aanwezig, en ten tweede is het weer een ‘gemengd-object’: afgelegde afstand gemeten door een willekeurige waarnemer, en tijdsduur gemeten door een waarnemer die stilstaat ten opzichte van het deeltje. Het tweede verschil kunnen we weer een plaats geven door de relatie tussen eigentijd en tijd te gebruiken. Dit levert

$$p^\alpha = m\gamma \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad (93)$$

en via dezelfde benaderingsmethode als gebruikt in vergelijking (89) volgt direct dat de i -component ($i = 1, 2, 3$) hiervan reduceert tot de impuls zoals bekend uit de mechanica van Newton, wanneer het deeltje veel langzamer beweegt dan het licht. De $i = 1, 2, 3$ componenten

van dit object worden daarom opgevat als de relativistische uitdrukkingen van de impuls. Wat de nul-component betreft, deze moet nog een interpretatie krijgen. Deze component is

$$p^0 = mc\gamma. \quad (94)$$

Via een dimensie-analyse is meteen te zien dat cp^0 de dimensie van een energie heeft, en dit wekt de suggestie dat het gaat om de energie van het vrije deeltje. De vraag dringt zich dan al snel op: op welke manier is deze uitdrukking gerelateerd aan de newtoniaanse uitdrukking voor de energie van een vrij deeltje, $K = \frac{1}{2}mv^2$? Ook hier biedt de benadering van lage snelheden uitkomst. Er geldt

$$cp^0 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = \underbrace{mc^2 + K}_E, \quad (95)$$

waar de uitdrukking voor de newtoniaanse energie K van een vrij deeltje is ingevuld. Hier blijkt nu dat, in de benadering van lage snelheden, de nul-component van de relativistische impuls reduceert tot de newtoniaanse energie plus een extra term. Afgezien van deze constante term, is de nul-component bij lage snelheden inderdaad gelijk aan de kinetische energie van het deeltje zoals voorspeld door de newtoniaanse mechanica. Het ligt dan ook voor de hand om aan te nemen dat we cp^0 ook bij hoge snelheden mogen opvatten als de energie van het deeltje. Wat de constante term betreft kan de vraag worden gesteld hoe fysisch interessant deze is. Immers, in de klassieke natuurkunde kennen alleen *energieverschillen* een meetbare betekenis⁴¹, en dus zal elke extra constante term toegevoegd aan de energie van een systeem uit de berekening vallen wanneer een energieverschil opgeschreven wordt. Toch heeft de constante term m hier wel degelijk een fysische betekenis: het is namelijk niet zomaar een willekeurige constante, het is een constante die een eigenschap van het deeltje bevat (de massa)! Deze energie is ook aanwezig wanneer het deeltje geen bewegingsenergie heeft voor een gegeven waarnemer, $K = 0$; we spreken dan ook over *rust-energie*, en deze is gelijk aan

$$E = mc^2. \quad (96)$$

Dit is wellicht de bekendste formule uit de natuurkunde. Hij zegt dat elke massa een energie met zich meedraagt gelijk aan deze massa maal c^2 , en dat dit energie is die zich niet laat wegtransformeren door naar een ander inertiaalstelsel te gaan. Het is daarom een fundamentele hoeveelheid energie voor een gegeven massa m : voor *alle* waarnemers geldt dat een massa op zijn minst deze hoeveelheid energie met zich meedraagt.

Resumerend is nu gevolgd dat onze keuze voor de lagrangiaan ons een uitdrukking geeft voor de impuls, waarvan de i -componenten netjes reduceren tot de impuls zoals die in de newtoniaanse mechanica bekend was; de nul-component van de vierimpuls blijkt overeen te komen met de energie van het deeltje. We schrijven dan ook

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = mU^\mu = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}, \quad (97)$$

waarin geldt

$$E = \gamma mc^2, \quad p^i = \gamma mv^i. \quad (98)$$

We vinden ook direct de handige relaties $\gamma = E/m$ en $\vec{\beta} = \vec{p}/E = \vec{v}/c$. De naam is niet de enige overeenkomst tussen de vierimpuls en viersnelheid: beide transformeren op dezelfde

⁴¹Denk bijvoorbeeld aan de relatie tussen een kracht F in de x -richting en de potentiële energie V : $F = -\frac{dV}{dx}$, oftewel een meetbare grootheid is uitgedrukt als een verschil in energie.

manier tussen inertiaalsystemen. Met name de lorentztransformaties werken op deze objecten op dezelfde manier; dit betekent dat twee waarnemers die zich in de x -richting met snelheid v bewegen ten opzichte van elkaar, verschillende energie (E en E') en impuls (p_x en p'_x) meten van een en hetzelfde deeltje, en dat deze zich tot elkaar verhouden als

$$\left. \begin{aligned} \frac{E'}{c} &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \left(\frac{v}{c} \right) p_x \right) \\ p'_x &= \gamma \left(p_x - v \frac{E}{c^2} \right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} p^{0'} \\ p^{1'} \\ p^{2'} \\ p^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \rightarrow p^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} p^{\nu} \quad (99)$$

Bovendien kunnen we de contractie $p_{\mu}p^{\mu}$ van de vierimpuls met zichzelf nemen, omdat we al gezien hadden dat de contractie van een viervector met zichzelf altijd een invariant oplevert. Het is dan eenvoudig om aan te tonen dat deze invariant gelijk is, op een factor c^2 na, aan de massa van het deeltje in het kwadraat. Er geldt

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} &= \left(\frac{E}{c} \right)^2 - p^2 \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 + m^2 v^2 \gamma^2 \\ &= m^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) = m^2 c^2. \end{aligned} \quad (100)$$

Dit leidt dan tot de volgende uitdrukking voor de relatie tussen de energie en de impuls,

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (101)$$

Deze is bijna geheel⁴² equivalent aan de eerder gevonden uitdrukking voor de relativistische energie, vergelijking (95), maar is in de praktijk soms te prefereren omdat deze ons in staat stelt de energie van een deeltje uit te rekenen zonder de snelheid v van het deeltje te hoeven kennen. Met name in de deeltjesfysica, waar men vaak de *impulsen* van de deeltjes beter kan meten dan louter hun snelheid, wordt deze formule veel gebruikt.

Het belang van energieën en impulsen in de relativiteitstheorie is dezelfde als die in de Newtoniaanse mechanica. Daar is het een experimenteel gegeven dat energie en impuls behouden grootheden zijn; dit levert enorme voordelen op tijdens het berekenen van mechanische processen. Het blijkt experimenteel dat dit nog steeds geldt voor onze nieuwe uitdrukkingen voor de energie en impuls: *elk experiment toont aan dat deze twee grootheden niet veranderen tijdens fysische processen*. Dit maakt het uitermate handig om met energie en impuls te werken wanneer een relativistisch probleem wordt beschouwd. Het is hier nu van belang om het verschil tussen ‘behouden’ en ‘invariant’ te onderstrepen: een grootheid is *behouden* wanneer geldt dat zijn waarde voor en na een proces dezelfde is; een grootheid is *invariant* als geldt dat zijn waarde voor alle waarnemers in verschillende inertiaalstelsels dezelfde is. Enkele voorbeelden: de lichtsnelheid c is een invariant en is behouden; de massa van een deeltje is invariant maar in het algemeen niet behouden; de energie van een deeltje is behouden maar niet invariant; snelheden zijn in het algemeen zowel niet behouden noch invariant.

Nog enkele woorden over snelheden. Zoals al besproken, volgt uit de minkowskimetrick de snelheidsregel van Einstein, waaruit we hebben laten volgen dat het onmogelijk is een deeltje

⁴²Er is een subtiel maar belangrijk verschil: deze uitdrukking geeft niet de energie van een deeltje, maar het *kwadraat* van de energie; er moet dus nog een wortel worden genomen! Nu heeft een kwadratische vergelijking altijd twee oplossingen: een met een plusteken, en een met een minteken. De laatste oplossing duidt op deeltjes met een negatieve energie, iets wat vergelijking (95) nog niet deed! Het correct interpreteren van deze nieuwe oplossingen leidde Paul Dirac tot het voorspellen van het bestaan van antimaterie.

sneller te zien gaan dan het licht als het voor een enkele waarnemer niet sneller gaat dan het licht. De vraag *of* er een waarnemer bestaat voor wie het deeltje sneller gaat dan het licht is nog niet aan de orde gekomen. Met de uitdrukking voor de relativistische energie kan die vraag nu definitief worden beantwoord, en wel als volgt. De uitdrukking gegeven in vergelijking (95) voor de relativistische energie vertelt ons dat er in een deeltje dat zich ten opzichte van ons met snelheid v beweegt, een energie E verscholen is. Omgekeerd kan de relatie ook gelezen worden als de hoeveelheid energie benodigd om een deeltje vanuit stilstand tot deze snelheid te versnellen. Als wij nu een deeltje naar de lichtsnelheid willen versnellen, dan geldt $v = c$ en wordt de noemer van vergelijking (95) gelijk aan nul: de benodigde energie E wordt oneindig groot. Dit is een andere manier van zeggen dat het onmogelijk is een deeltje de lichtsnelheid te geven! Hiermee is dan ook aangetoond dat deeltjes voor deze waarnemer niet sneller kunnen gaan dan de lichtsnelheid; via Einsteins snelheidsregel volgt dan direct dat geen enkele andere waarnemer het deeltje sneller dan het licht kan zien bewegen.

Er is een uitzondering op deze regel. Om tot de energie E van ∞ te komen, hebben we opgemerkt dat een deeltje met snelheid $v = c$ de noemer in vergelijking (95) gelijkmaakt aan nul, en delen door nul geeft oneindig. Dit is inderdaad waar, *mits de teller niet gelijk is aan nul*. Als de teller van een breuk *ook* gelijk is aan nul, levert delen door nul niet altijd meer oneindig op. De waarde van de uitkomst is dan onbepaald: afhankelijk van de context kan er iets eindigs uitkomen. Hier staat in de teller van de breuk de massa van het deeltje, dus al met al ziet het ernaar uit dat er wel degelijk deeltjes zouden kunnen bestaan die met precies de lichtsnelheid bewegen *mits de massa van zulke deeltjes maar gelijk is aan nul*⁴³. Zulke deeltjes kennen we: fotonen⁴⁴ gaan met de lichtsnelheid, en deze hebben inderdaad een massa gelijk aan nul. Dit volgt uit alle metingen, maar het is interessant om te zien dat dit resultaat ook *volgt* uit puur theoretische overwegingen. De impuls van een foton heeft de waarde $p_\mu p^\mu = 0 \rightarrow E = |\vec{p}|c$. Zoals elke keer weer blijkt dit een direct gevolg te zijn van de minkowskimetrie en het relativiteitsprincipe!

De vraag dient zich dan aan wat de waarde is van de energie van een foton: wat is hier de uitkomst van nul gedeeld door nul? De uitdrukking voor de relativistische energie doet geen uitspraak. Dit betekent niet dat er geen antwoord bestaat voor de energie van een massaloos deeltje, maar alleen dat deze waarde niet door vergelijking (95) of door de relativiteitstheorie bepaald kan worden, en dat een andere formule nodig is. In het geval van een foton is de formule bekend uit de quantummechanica,

$$E = h\nu \tag{102}$$

waar ν de frequentie (kleur) van het licht is, en h de constante van Planck. De ontdekking van deze formule door Max Planck in 1900, was de start van de studie van de quantummechanica. Samen met de ontdekking van de speciale relativiteitstheorie leidde de ontwikkeling van de quantummechanica tot een gehele herschrijving van de grondslagen van de natuurkunde.

⁴³Een omgekeerde conclusie kan ook worden getrokken uit vergelijking (95): als een deeltje een massa gelijk aan nul zou hebben maar niet zou bewegen met de lichtsnelheid, zou alleen de teller nul zijn, en daarmee de hele uitdrukking voor de energie. Deeltjes zonder energie bestaan niet (alles heeft energie), en dus volgt nu ook dat als een deeltje geen massa heeft, het noodzakelijkerwijs met de lichtsnelheid moet bewegen.

⁴⁴Er zijn nog meer massaloze deeltjes die met de lichtsnelheid bewegen: gluonen en gravitonen. Voor het gemak spreken we alleen over de fotonen, maar impliciet bedoelen we hier alle massaloze deeltjes mee.

2.12 Uitgewerkte opgaven

2.12.1 Impuls van een π^+ meson

Opgave: Een π^+ heeft een kinetische energie van 200 MeV. Bereken de impuls in MeV/c.

Antwoord: Een π^+ meson heeft een massa $m_{\pi^\pm} = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ (gegeven) en een kinetische energie van 200 MeV. De totale energie E is dus $E = m_{\pi^\pm}c^2 + T = 339.6 \text{ MeV}$. De bijbehorende impuls p volgt uit $(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$, en dus vinden we $p = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2}/c = 309.6 \text{ MeV}/c$.

2.12.2 Kinetische energie van een proton

Opgave: Een proton heeft een impuls van 5 MeV/c. Bereken de kinetische energie in MeV.

Antwoord: De proton massa is $m_p = 938.3 \text{ MeV}/c^2$ en de impuls $p = 5 \text{ MeV}/c$. De kinetische energie T kan zowel niet-relativistisch als relativistisch worden uitgerekend, dat geeft binnen de vereiste precisie hetzelfde resultaat (het verschil is slechts 7×10^{-6}).

- Niet-relativistisch: $T = \frac{p^2}{2m_p} = 13.3 \text{ keV}$.
- Relativistisch: $T = E - m_p c^2 = \sqrt{(pc)^2 + (m_p c^2)^2} - m_p c^2 = 13.3 \text{ keV}$.

2.12.3 Kinematica van elektron-proton verstrooiing

Opgave: Een 10 GeV elektron botst met een proton en verstrooit over een hoek van 10° met een energie van 7 GeV. Bereken de rustenergie W van de teruggestoten hadronische toestand.

Antwoord: Het kwadraat van de overgedragen vier-impuls bedraagt

$$Q^2 \equiv -q^2 = (k - k')^2 = 2EE'(1 - \cos \theta), \quad (103)$$

waarbij E (k) en E' (k') de energieën (vier-impulsen) zijn van respectievelijk het inkomende en verstrooide elektron, en θ is de verstrooiingshoek. We hebben hier de massa van het elektron verwaarloosd. Verder geldt $\nu = E - E'$. Indien W de massa van de teruggestoten hadronische toestand is, en M de massa van het nucleon, dan geldt

$$\begin{aligned} W^2 &= (M + \nu)^2 - \vec{q}^2 \\ &= M^2 + 2M\nu + \nu^2 - \vec{q}^2 \\ &= M^2 + 2M\nu - Q^2, \end{aligned} \quad (104)$$

en er geldt dus

$$W^2 = 2M(E - E') + M^2 - Q^2. \quad (105)$$

Als we vervolgens de getallen invullen, dan vinden we

$$Q^2 = 2.127 \text{ GeV}/c^2, \quad W = 2.09 \text{ GeV}. \quad (106)$$

2.12.4 Verval van het muon

Opgave: Welke afstand legt een bundel muonen in vacuüm af met een kinetische energie van (a) 1 MeV, (b) 100 GeV, voordat de intensiteit met een factor twee gereduceerd is?

Antwoord: Om de afstand, die een muon in het laboratoriumsysteem aflegt, uit te kunnen rekenen gebruiken we de speciale relativiteitstheorie: de tijd die in het laboratorium systeem verstrijkt is

$$\Delta t' = \gamma \Delta t, \quad \text{met } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{en } \beta = v/c. \quad (107)$$

In het rustsysteem vervallen de muonen volgens

$$I(t) = I(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}. \quad (108)$$

De intensiteit op tijdstip t is gereduceerd tot de helft als geldt $t - t_0 = \ln(2) * \tau$. Gegeven is dat de levensduur van muonen gelijk is aan $\tau_\mu = 2.197 \mu\text{s}$.

Verder hebben we $\gamma = \frac{E}{m_\mu c^2}$, met E (m_μ) de energie (massa) van het muon. In het laboratoriumsysteem verstrijkt een tijd $\Delta t' = \gamma \Delta t$ voordat de helft van de muonen is vervallen. De muonen hebben snelheid $v = \beta c$.

Voor een muon met 1 MeV kinetische energie (gegeven is $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}/c^2$) geldt:

$$\gamma = E/m_\mu c^2 = 106.7/105.7 = 1.00946 \rightarrow \beta = \sqrt{\frac{1}{1-\gamma^2}} = 0.137 \rightarrow \Delta t' = 1.537 \times 10^{-6} \text{ s}. \quad (109)$$

De gevraagde afstand bedraagt dus $d = \beta c \Delta t' = 63 \text{ m}$.

Voor een muon met 100 GeV kinetische energie geeft deze berekening:

$$\gamma = 947.07 \rightarrow \beta = 1.0000 \rightarrow d = \beta c \Delta t' = 433 \text{ km}. \quad (110)$$

2.12.5 Tijddilatatie

Opgave: Een positief kaon (K^+) heeft, gemiddeld, een levensduur van $0.1237 \mu\text{s}$ als het in rust is, dit wil zeggen als de levensduur gemeten wordt in het *rustsysteem* van het kaon. Indien positieve kaonen met een snelheid van $0.990c$ relatief ten opzichte van een laboratorium referentiesysteem worden geproduceerd, welke afstand kunnen ze dan gedurende hun levensduur in dat systeem afleggen?

Antwoord: In het laboratoriumsysteem is de afstand d die het K^+ aflegt gerelateerd aan zijn snelheid v ($= 0.990c$) en de reistijd Δt_k volgens $d = v \Delta t_k$. Deze uitspraak heeft niets te maken met relativiteitstheorie, omdat alle grootheden gemeten worden in hetzelfde inertiaalsysteem.

In het laboratorium referentiesysteem hebben we te maken met de gedilateerde tijd Δt en deze is gerelateerd aan de eigentijd Δt_0 volgens

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{0.1237 \times 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1-(0.990c/c)^2}} = 8.769 \times 10^{-7} \text{ s}. \quad (111)$$

Dit is ongeveer zeven keer langer dan de levensduur van het K^+ in eigentijd. De berekening vereist toepassing van de relativiteitstheorie, omdat we data dienen te transformeren van het rustsysteem van het deeltje naar het laboratoriumsysteem.

We vinden nu de afgelegde weg van het deeltje in het laboratoriumsysteem uit

$$\begin{aligned} d &= v \Delta t_k = v \Delta t \\ &= (0.990)(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(8.769 \times 10^{-7} \text{ s}) \\ &= 260 \text{ m} \end{aligned} \quad (112)$$

Dergelijke metingen verifiëren de speciale relativiteitstheorie en zijn tegenwoordig routine in subatomaire fysica experimenten.

2.12.6 Deeltjesidentificatie

Opgave: Ionisatiemetingen tonen aan dat een bepaald kerndeeltje een dubbele lading draagt ($q = 2e$) en beweegt met een snelheid $0.710c$. De baan van het deeltje in een magnetisch veld met sterkte $B = 1.00$ T heeft een kromtestraal van $r = 6.28$ m. De baan is een cirkel waarvan het vlak loodrecht op de richting van het magnetisch veld staat. Er geldt $r = p/qB$. Bepaal de massa van het deeltje en identificeer het.

Antwoord: Er geldt dat $\beta = 0.710$ en dus is $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1.42$. De relativistische uitdrukking voor de impuls is $p = m\beta\gamma c$ en we kunnen de massa van het deeltje vinden uit

$$m = \frac{2eBr}{\beta\gamma c} = \frac{2(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1.00 \text{ T})(6.28 \text{ m})}{(0.710)(3 \times 10^8 \text{ m/s})(1.42)} = 6.65 \times 10^{-27} \text{ kg} = 4.00 \text{ amu}. \quad (113)$$

We gebruiken hier $1 \text{ amu} \equiv 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Het gezochte deeltje is een α deeltje, dat bestaat uit twee protonen (met lading $+2e$) en twee neutronen.

2.12.7 Proton in magnetisch veld

Opgave: Een 200 GeV protonbundel gaat door een 2 m lange dipool met een magnetische veldsterkte van 2 T. Hoeveel wordt de bundel afgebogen?

Antwoord: We hebben

$$\frac{dp}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (114)$$

met lading $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, snelheid $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$, en magnetische veldsterkte $B = 2 \text{ T}$. Het magneetveld oefent een kracht uit die loodrecht staat op zowel de bewegingsrichting van het proton als het veld B . Het proton zal dus een cirkelvormige baan gaan beschrijven. De absolute waarde van de impuls van het proton blijft gelijk, namelijk $p = 200 \text{ GeV}/c$.

We kiezen de z-richting parallel aan het veld van de magneet, en de bewegingsrichting van het proton aan het begin van de magneet parallel aan de x-as. Dan geldt:

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} &= 0, \\ \frac{dp_x}{dt} &= \frac{p_y}{\gamma m_p} qB, \\ \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{p_x}{\gamma m_p} qB, \end{aligned} \quad (115)$$

waarin gebruik gemaakt is van de relatie $p = \gamma m_p v$; Deze differentiaalvergelijking is eenvoudig op te lossen:

$$\begin{aligned} p_z(t) &= p_z(0) = 0, \\ p_x(t) &= p \cos\left(\frac{qB}{\gamma m_p} t\right), \\ p_y(t) &= -p \sin\left(\frac{qB}{\gamma m_p} t\right). \end{aligned} \quad (116)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van de begin conditie ($t = 0$, $p_y = 0$, $p_x = p$). Verder geldt dat

$$\vec{p} = \gamma m_p \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (117)$$

en dus

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0) + \frac{p}{qB} \sin\left(\frac{qB}{\gamma m_p} t\right), \\y(t) &= y(0) + \frac{p}{qB} \cos\left(\frac{qB}{\gamma m_p} t\right), \\z(t) &= z(0).\end{aligned}\tag{118}$$

De verplaatsing aan het eind van de buigmagneet is te vinden door $x(t) - x(0) = 2$ m in te vullen. We krijgen dan

$$\sin\left(\frac{qB}{\gamma m_p} t\right) = 2 \text{ m} \times \frac{qB}{p} \rightarrow \sin(8.99 \times 10^5 t) = 6.0 \times 10^{-3}.\tag{119}$$

Hieruit volgen dan de waarden voor t (6.67 ns), de buighoek α (6.0 mrad), en de deflectie $\Delta y = y(t) - y(0) = 6.0$ mm.

2.12.8 Maximum energie-overdracht in een botsing van een elektron

Opgave: Toon aan dat de maximum energie die overgedragen kan worden aan een elektron, in één enkele botsing, door een deeltje met kinetische energie T en massa M ($M \gg m_e$) is $\frac{4m_e}{M}T$.

Antwoord: We beschouwen een botsing van een deeltje met massa M en kinetische energie T op een stationair elektron. Wat is de maximale overdracht van kinetische energie? We zullen dit in zijn algemeenheid afleiden, dus zonder gebruik te maken van de benadering $m_e \ll M$. De maximale overdracht van impuls kan worden gevonden door naar het center-of-mass (COM) systeem te transformeren. In het COM-systeem bewegen beide deeltjes met momentum p_{com} (maar in tegengestelde richtingen), en de maximale overdracht van impuls bedraagt $2p_{\text{com}}$. Energiebehoud geeft

$$\begin{aligned}E_{\text{com}}^2 &= E_{\text{lab}}^2 - p_{\text{lab}}^2 = (T + Mc^2 + m_e c^2)^2 - ((T + Mc^2)^2 - (Mc^2)^2) \\&= M^2 c^4 + m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 (T + Mc^2).\end{aligned}\tag{120}$$

Een manier om p_{com} te berekenen is de Lorentz-boost van het COM-systeem naar het laboratorium (LAB) systeem uit te voeren. De totale impuls van het COM systeem is 0, dus we kunnen γ berekenen uit $E_{\text{lab}} = \gamma E_{\text{com}}$. We vinden

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{E_{\text{lab}}}{E_{\text{com}}} = \sqrt{\frac{(m_e c^2 + Mc^2 + T)^2}{m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 (Mc^2 + T) + M^2 c^4}} \\&= \sqrt{1 + \frac{2TMc^2 + T^2}{m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 (Mc^2 + T) + M^2 c^4}}.\end{aligned}\tag{121}$$

Met de relatie

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}\tag{122}$$

kunnen we de impuls van het elektron in het COM-systeem uitrekenen door een Lorentz boost uit te voeren op het (stationaire) elektron in het LAB-systeem:

$$p_{\text{el}}^{\text{com}} = -\beta\gamma m_e c.\tag{123}$$

De maximale impuls overdracht wordt gevonden voor een *frontale botsing*: na de botsing zijn de impulsen van het elektron en het deeltje M in het COM-systeem omgekeerd (dus $E_{\text{el}}^{\text{com}} = \gamma m_e c^2$, en $p_{\text{el}}^{\text{com}} = +\beta\gamma m_e c$). Terugboosten naar het LAB-systeem geeft

$$E_{\text{el}}^{\text{lab}} = \gamma^2 m_e c^2 + \beta^2 \gamma^2 m_e c^2 = (2\gamma^2 - 1)m_e c^2.\tag{124}$$

De maximale overgedragen energie bedraagt dus

$$E_{el}^{\text{lab}} - m_e c^2 = 2(\gamma^2 - 1)m_e c^2 = m_e c^2 \frac{4TMc^2 + 2T^2}{M^2 c^4 + m_e^2 c^4 + 2m_e c^2(T + Mc^2)}. \quad (125)$$

In de limiet $m_e \ll M$ en $Tm_e c^2 \ll M^2 c^4$ geeft dit het gevraagde antwoord $T_{el}^{max} \sim 4Tm_e/M$. Voor ultra-relativistische deeltjes ($m_e T \gg M^2 c^2$) geldt $T_{el}^{max} \sim T$.

Voor lage kinetische energieën $T \ll m_e c^2$ kan dit resultaat veel simpeler afgeleid worden in niet-relativistische benadering: voor de verstrooiing geldt $T = P_i^2/2M$, na de verstrooiing geldt $P_f + p_e = P_i$, en $T_f + T_e = T$, met P_f en T_f de impuls en kinetische energie van het deeltje M en p_e en T_e de impuls en kinetische energie van het elektron. Er geldt dan (voor maximale impulsoverdracht)

$$\frac{p_e^2}{2m_e} + \frac{(P_i - p_e)^2}{2M} = \frac{P_i^2}{2M}, \quad (126)$$

waaruit direct volgt dat $p_e^{max} = \frac{2m_e}{m_e + M} P_i$, en (in de limiet $m_e \ll M$) $T_e^{max} = \frac{2m_e}{M} P_i^2 = 4\frac{m_e}{M} T$.

2.12.9 Paarproductie

Opgave: Toon aan dat paarproductie, $\gamma \rightarrow e^+ e^-$, niet mogelijk is zonder de aanwezigheid van een kern (impulsbehoud).

Antwoord: De reactie $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ is verboden vanwege behoud van energie en impuls. Er geldt $E_\gamma = p_\gamma c$. De totale invariante massa van het foton,

$$W = \sqrt{E_\gamma^2 - p_\gamma^2}, \quad (127)$$

is gelijk aan 0. Het is niet mogelijk om een totale invariante massa van 0 te creëren met alleen twee leptonen:

$$W = \sqrt{(E_e^- + E_e^+)^2 - (\vec{p}_e^- + \vec{p}_e^+)^2 c^2} > 0, \quad (128)$$

aangezien voor beide leptonen geldt $p_e c < E_e$, en $|\vec{p}_e^+ + \vec{p}_e^-| \leq p_e^+ + p_e^-$. Als er een veld aanwezig is, waaraan een gedeelte van de impuls van het foton kan worden overgedragen (b.v. aan het elektromagnetische veld van een kern) kan het verval wel optreden (er moet dus een extra virtueel foton kunnen worden uitgewisseld).

2.12.10 Botsing in het zwaartepuntsysteem

Opgave: De botsing van twee deeltjes, elk met massa M , wordt bekeken van uit een Lorentz frame waar de deeltjes ‘head-on’ botsen, met gelijke impulsen, maar met tegenovergestelde richtingen. We noemen dit het zwaartepuntsysteem. De totale energie in het systeem is E_{com} . Laat zien dat de Lorentzinvariant

$$s \equiv (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu \equiv (p_1 + p_2)^2 = E_{\text{com}}^2. \quad (129)$$

Indien we de botsing beschouwen vanuit het laboratorium stelsel, waar een van de deeltjes zich in rust bevindt, laat dan zien door de invariant s uit te rekenen, dat het ander deeltje een energie

$$E_{\text{lab}} = \frac{E_{\text{com}}^2}{2M} - M \quad (130)$$

heeft. We leren van dit resultaat dat de collider-experimenten een enorm voordeel hebben in vergelijking met zogenaamde fixed-target experimenten, in het bereiken van een totale zwaartepuntenergie ($\sqrt{s}$). Noem enkele van de voordelen van een fixed-target experiment.

Antwoord: Er geldt

$$(p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)^\mu = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2. \quad (131)$$

In het zwaartepuntsstelsel geldt

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \text{ en } E_{\text{com}}^2 = (E_1 + E_2)^2. \quad (132)$$

Om E_{lab} uit te rekenen is het het eenvoudigst om het stelsel te boosten. In het zwaartepuntsstelsel van twee deeltjes met gelijke massa geldt $E_1 = E_2 = E_{\text{com}}/2$. Verder geldt dat $\gamma = E/Mc^2 = E_{\text{com}}/2M$ en $\beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$. Het ene deeltje, zeg deeltje 1, staat stil in het lab-systeem. Dit resultaat wordt verkregen door het deeltje een Lorentz-boost langs $\vec{p}_1$ te geven:

$$E_1^{\text{lab}} = \gamma E_1 - \beta \gamma p_1 c = \gamma^2 M c^2 - \beta^2 \gamma^2 M c^2 = M c^2, \quad (133)$$

waarin gebruikt gemaakt is van $\beta = pc/E$. De energie van deeltje 2 in het lab-systeem is dus ($\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ in het zwaartepuntsstelsel)

$$E_2^{\text{lab}} = \gamma E_2 + \beta \gamma p_2 c = (\gamma^2 + \beta^2 \gamma^2) M c^2 = (2\gamma^2 - 1) M c^2 = \frac{E_{\text{com}}^2}{2M c^2} - M c^2. \quad (134)$$

Merk op, dat in de opgave de factor c^2 weggelaten is. Dat is gebruikelijk in de sub-atomaire fysica: men stelt dat $\frac{h}{2\pi} = c = 1$. Er is dus slechts 1 maat voor lengte, tijd en energie. Men gebruikt bijvoorbeeld de MeV: $1 \text{ MeV} = 1/197 \text{ fm}^{-1} = 6.57 \times 10^{-22} \text{ Hz}$. Als men energieën, meters, snelheden etc. in andere eenheden nodig heeft, volstaat het met factoren $\frac{h}{2\pi}$ en c te vermenigvuldigen, in de relevante grootte uitgedrukt.

Drie belangrijke voordelen van een fixed-target experiment zijn:

- Een hoge target dichtheid kan worden behaald, in alle gevallen vele malen hoger dan de deeltjesdichtheid per oppervlakte eenheid in een bundel.
- Men kan gepolariseerde targets gebruiken om de spinafhankelijkheid van de interactie te onderzoeken. Het is erg moeilijk om een gepolariseerde hoog-energetische ($\gg 1 \text{ GeV}$) proton of deutron bundel te creëren, zeker als men de richting van de spin vrij wil kunnen kiezen.
- Vanwege de Lorentz boost van de deeltjes in de eindtoestand, kan vaak volstaan worden met een detectiesysteem met een relatief kleine ruimtehoek-acceptatie.

2.12.11 Mandelstam variabelen

Opgave: Voor een verstrooiingsproces van het type $A + B \rightarrow C + D$ verwachten we twee onafhankelijke kinematische variabelen, bijvoorbeeld de bundelenergie en de verstrooiingshoek. Het is echter mogelijk, en verdient bovendien de voorkeur, om de werkzame doorsnede uit te drukken in variabelen die invariant zijn onder Lorentztransformaties. We hebben de vier-vectoren van de deeltjes tot onze beschikking en het is dus mogelijk om de invariante scalar producten $p_A \cdot p_B$, $p_A \cdot p_C$, en $p_A \cdot p_D$ te vormen. Omdat $p_i^2 = m_i^2$ en $p_A + p_B = p_C + p_D$ vanwege energie-impulsbehoud, zijn enkel twee van de variabelen onafhankelijk. Het is conventie de volgende variabelen te gebruiken (Mandelstam variabelen)

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2, \\ t &= (p_A - p_C)^2, \\ u &= (p_A - p_D)^2, \end{aligned} \quad (135)$$

Toon aan dat

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2. \quad (136)$$

Antwoord: We hebben

$$s = (p_a + p_b)^2, \quad t = (p_a - p_c)^2, \quad \text{en} \quad u = (p_a - p_d)^2. \quad (137)$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} s + t + u &= (3p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 + p_d^2 + 2p_a p_b - 2p_a p_c - 2p_a p_d) \\ &= c^4(3m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2) + 2p_a(p_b - p_c - p_d). \end{aligned} \quad (138)$$

Door gebruik te maken van de wet van behoud van impuls ($p_b = p_c + p_d - p_a$) vindt men hieruit direct $s + t + u = c^4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$.

2.12.12 Energieproductie in de Zon

De fusiereactie in de zon is een meerstapsproces waarbij waterstof geconverteerd wordt naar helium. Het waterstof is de ‘brandstof’ en het helium de ‘as’. De proton-proton cyclus verloopt als volgt,

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e \quad (Q = 0.42 \text{ MeV}). \quad (139)$$

Deze gebeurtenis is zeer zeldzaam: gemiddeld wordt er per 10^{26} proton-proton botsingen slechts één deutron gevormd. Het positron dat hierbij ontstaat komt zeer snel een vrij elektron tegen in de zon, waarna beide deeltjes annihilieren.

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \quad (Q = 1.02 \text{ MeV}). \quad (140)$$

Vervolgens fuseert een deutron met een proton tot ^3He .

$$d + p \rightarrow ^3\text{He} + \gamma \quad (Q = 5.49 \text{ MeV}) \quad (141)$$

Dit proces verloopt relatief snel.

Uiteindelijk (gemiddeld na 10^5 jaar) zullen twee ^3He kernen elkaar treffen en fuseren tot een α deeltje. In dit proces komen twee protonen vrij.

$$^3\text{He} + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He} + p + p \quad (Q = 12.86 \text{ MeV}). \quad (142)$$

De netto energie die vrijkomt is gelijk aan $Q_{\text{total}} = 26.7 \text{ MeV}$ per event.

Opgave: Net buiten de aardatmosfeer wordt zonne-energie ontvangen (neem loodrechte inval aan) met een vermogen van 1340 W/m^2 . Bereken hoeveel kilogram waterstof er per seconde wordt geconsumeerd in het inwendige van de zon (ga uit van de proton-proton cyclus).

Antwoord: De totale energieproductie per tijdseenheid van de zon vinden we uit

$$\begin{aligned} P_{\odot} &= 4\pi R_{\text{aarde zon}}^2 \times 1340 \text{ W/m}^2 \\ &= 4\pi (1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2 \times 1340 \text{ W/m}^2 \\ &= 3.9 \times 10^{26} \text{ W}. \end{aligned} \quad (143)$$

We hebben dus al gezien dat er 26.7 MeV vrijkomt als thermische energie in de zon voor iedere vier protonen die geconsumeerd worden. Dat betekent 6.6 MeV/proton . We kunnen dit energieverbruik uitdrukken als

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dm} &= (6.6 \text{ MeV/proton}) \left(\frac{1 \text{ proton}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) \times \left(\frac{1.60 \times 10^{-13} \text{ J}}{1 \text{ MeV}} \right) \\ &= 6.3 \times 10^{16} \text{ J/kg}. \end{aligned} \quad (144)$$

Dit vertelt ons dat de zon 6.3×10^{14} J energie wegstraalt voor elke kilogram geconsumeerde protonen. Het waterstofverbruik wordt dan gegeven door het totale vermogen van de zon ($= 3.9 \times 10^{26}$ W) gedeeld door bovenstaand getal, ofwel

$$R = \frac{3.9 \times 10^{26} \text{ W}}{6.3 \times 10^{14} \text{ J/kg}} = 6.2 \times 10^{11} \text{ kg/s.} \quad (145)$$

2.13 Opgaven

2.13.1 Causaliteit

In het jaar 3001 wordt door de Aardse Federatie een ruimteschip naar een Aardse observatiepost op de planeet P4711 gestuurd. Op de maan van deze planeet is een gevechtsgroep gevestigd van de vaak vijandige Reptilianen. Terwijl het ruimteschip een rechtstreekse koers volgt, eerst voorbij de planeet P4711 en daarna voorbij haar maan, wordt er een hoge-energie microgolf flits gedetecteerd ter plaatse van de Reptiliaanse maan en dan, 1.10 seconde later, een explosie op de Aardse observatiepost (zie ook de figuur). Deze post bevindt zich op 4.00×10^8 m van de Reptiliaanse basis zoals gemeten vanuit het referentiesysteem aan boord van het ruimteschip. Het lijkt duidelijk te zijn dat de Reptilianen de Aardse observatiepost hebben aangevallen; het ruimteschip begint voorbereidingen te treffen om een confrontatie aan te kunnen gaan.

Opgave a): De snelheid van het schip ten opzichte van de planeet en haar maan is $0.980c$. Wat is de afstand en tijdinterval tussen de flits en de explosie zoals gemeten in het planeet-maan inertiaalsysteem (en dus volgens het personeel op de stations)?

Opgave b): Veroorzaakte de flits de explosie, of was de explosie de oorzaak van de flits? Dient ons ruimteschip de Reptilianen te confronteren?

2.13.2 Verval van pionen

Opgave: Welke afstand legt een bundel geladen en neutrale pionen in vacuüm af met een kinetische energie van (a) 1 MeV, (b) 100 GeV, voordat de intensiteit met een factor twee gereduceerd is?.

2.13.3 Collider en Fixed-Target Experimenten

Opgave: Bij DESY in Hamburg wordt een 6 km lange opslagring gebruikt om de substructuur van het proton te onderzoeken in collider experimenten. In deze ring versnelt men protonen tot 820 GeV, die frontaal botsen met elektronen die tot 35 GeV versneld kunnen worden. Stel, dat men in plaats van een collider experiment een experiment met vaste targets zou gebruiken (de zogenaamde fixed-target experimenten).

Opgave a): Welke energie zou de elektronenbundel moeten hebben om dezelfde impulsoverdracht te kunnen maken op een fixed proton target (waarbij de protonen in rust zijn)?

Opgave b): Welke energie zou de protonenbundel moeten hebben om dezelfde impulsoverdracht te kunnen maken op een target met elektronen dat in rust is?

Opgave c): Reken uit wat de relatieve impulsen van de protonen en elektronen zijn in het zwaartepuntssysteem (in dit systeem is de totale drie-impuls gelijk aan 0).

Opgave d): De maximale overdraagbare vierimpuls is gelijk aan 2 maal de proton (of elektron) impuls in dit systeem. Geef de corresponderende golflengte in meters. Dit is een goede maat voor het oplossend vermogen waarmee de structuur van protonen of elektronen gemeten kan worden.

2.13.4 Kosmische Straling

Het meest energetische proton dat ooit gedetecteerd is in de kosmische straling had de opzienbarende energie van 3.0×10^{20} eV (dat is voldoende energie om een theelepeltje water een aantal graden op te warmen).

Opgave a): Bereken de Lorentzfactor γ en de snelheid β van het proton.

Opgave b): Stel dat het proton langs de diameter (9.8×10^4 lichtjaar) van ons Melkwegstelsel vliegt. Hoe lang duurt de reis van het proton zoals gemeten in ons Aarde-Melkweg referentiesysteem?

Opgave c): Hoelang duurt de reis van het proton zoals gemeten in het rustsysteem van het proton?

2.13.5 Supernova SN1987A

In de stad Kamiokande in Japan staat de zogenaamde Kamiokande II detector. Deze detector is ontworpen om proton verval te bestuderen. Met Kamiokande II werd op 23 februari 1987 in slechts 12 seconden een totaal van 12 neutrino interacties geregistreerd. Deze meting viel samen met de explosie van supernova SN1987A die op ongeveer 170.000 lichtjaar van de aarde stond. Reeds lang hiervoor hadden astrofysici berekend dat bij een dergelijke explosie binnen een aantal seconden een energie van ongeveer 10^{46} J zou vrijkomen. Hiervan zou ongeveer 99 % vrijkomen in de vorm van neutrino's, die het heelal in gejaagd zouden worden, terwijl voor het spectaculaire zichtbare vuurwerk en de kinetische energie van de restanten ten hoogste een procent van de energie ter beschikking zou staan.

De Kamiokande II detector is in staat antineutrino's aan te tonen via de reactie

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n \quad (146)$$

aan protonen in normaal water. De protonen die gebonden zijn in zuurstof kunnen hierbij verwaarloosd worden, omdat deze niet wezenlijk tot de totale telsnelheid bijdragen. De energie en de richting van de positronen kan met de detector bepaald worden (uit de richting en de intensiteit van de door de positronen opgewekte Čerenkovstraling). De actieve massa van de detector is 2100 ton water (1 ton $\equiv$ 1000 kg). De theoretische werkzame doorsnede voor deze reactie is energieafhankelijk en kan bij de hier optredende energieën uit de volgende relatie afgeleid worden

$$\sigma = 10^{-45} \text{ m}^2 \cdot \left(\frac{E}{10 \text{ MeV}} \right)^2, \quad (147)$$

waarbij de energie van de neutrino's E gelijk gesteld kan worden aan de energie van de positronen. De 12 geregistreerde neutrino's hadden in het gewogen gemiddelde een energie $\langle E_\nu \rangle = 12.8$ MeV en $(\langle E_\nu \rangle)^{1/2} = 10.9$ MeV.

Opgave a): Wat is het totale aantal neutrino's dat vrijkwam bij de explosie van de supernova? Ga ervan uit dat de zes neutrino-soorten ν_e , $\bar{\nu}_e$, ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ν_τ , en $\bar{\nu}_\tau$, waarvan enkel het $\bar{\nu}_e$ met de Kamiokande II detector aangetoond kan worden, met vergelijkbare energieën en in vergelijkbare hoeveelheden geproduceerd werden.

Opgave b): Hoe groot is de totale in de vorm van neutrino's vrijgekomen energie in de explosie van SN1987A? Vergelijk dit met de theoretische voorspelling en vorm een oordeel over de overeenstemming.

Opgave c): Het eerst gemeten $\bar{\nu}_e$ had een energie van 20.0 MeV. Het laatst gemeten neutrino kwam 12.4 seconde later en had een energie van 8.9 MeV. Welke limiet wordt hiermee op de massa van het neutrino geplaatst? Neem hierbij aan dat de supernova explosie minstens 10 s en hoogstens 20 s geduurd heeft. De benadering $y = (1 - (x/C)^2)^{-1/2} \approx 1 + x^2/2C^2 + \dots$ voor $x \ll C$ kan hier nuttig zijn.